arXiv:2302.02982v1 [math.AP] 6 Feb 2023

由 Gavrilov 解驱动的流体粒子的近环面、周期和拟周期运动

Pietro Baldi

摘要。我们研究了 Gavrilov 于2019年构造的不可压缩流体稳态三维欧拉方程的光滑紧支撑解，并考察相应的流体粒子动力学。这是一项 ODE 分析，有助于描述 Gavrilov 向量场。

目录

1 引言及主要结果
1 1.1 稳态欧拉方程的 Gavrilov 解.2 1.2 主要结果：流体粒子动力学的描述.3 1.3 相关文献.6

2 Gavrilov 解中参数 R 的双重作用 7

3 共轭为 $\mathbb{T}^2$ 上的线性流 **9**
3.1 柱坐标.9 3.2 消除因子 $1/\rho$ 并构造典范哈密顿结构.11 3.3 径向-垂直平面中的辛极坐标.12 3.4 水平集.13 3.5 径向-垂直平面中系统的积分.14 3.6 径向-垂直平面中的旋转周期.15 3.7 径向-垂直平面中的角-作用量变量.15 3.8 化简为切向上的恒定旋转.18 3.9 两个旋转周期之比.18 3.10 流体粒子的运动.19 3.11 用作用量表示压力.20

4 T泰勒展开与横截性 2 0
4.1 α 的展开.21 4.2 α_2 的展开.22 4.3 $\gamma_c(\vartheta)$的展开.23 4.4 $\gamma_c(\vartheta)$与 $\partial_c\gamma_c(\vartheta)$的平均值的展开.25 4.5 $J(c)$的展开.27 4.6 $h(I)$和$\Omega_1(I)$的展开.28 4.7 频率比$\Omega_2(I)/\Omega_1(I)$的展开.28 4.8 $\Phi(\sigma,\beta,I)$的展开.28 4.9 小量条件.29

1 引言与主要结果

在这篇非凡的论文 [7], 中，Gavrilov 证明了 C^∞ 等价类中具有紧支撑的不可平凡解的存在性，该解满足不可压缩流体的定常欧拉方程，并定义在 $\mathbb{R}^3$中。[7] 中的这一结果十分重要且出人意料，因为此前基于一些否定性的部分结果，

人们曾猜想，三维定常欧拉方程不可能存在具有紧支撑的非平凡光滑解：参见 [4] 开头的清晰解释，以及 [10]中关于紧支撑光滑解存在性的一般讨论。此外，之所以对 [7] 这一富有成果的构造感兴趣，另一个原因在于，最近它已被用作构件，用于构造流体力学欧拉方程的其他有趣解，包括定常解和含时间解，参见下文第 1.3 节。

现在假设流体按照欧拉方程的 Gavrilov 解运动，也就是说，假设流体粒子由 Gavrilov 速度向量场驱动。我们会观察到流体发生怎样的运动？当然，向量场支集之外的粒子完全静止；但在向量场非零的区域内，它们如何运动？

本文探讨这一问题。结果表明，每个流体粒子都沿着一条位于近环面曲面上的轨迹运动，该曲面是压力的一个水平集。每个流体粒子的运动都是随时间周期或拟周期的；我们证明，周期运动和拟周期运动都存在，并且压力值决定了其水平集上的轨迹是全部周期的还是全部拟周期的。

事实上，描述流体粒子运动的 $\mathbb{R}^3$ 微分方程系统是可积的，因为它可以变换为一个自由度的哈密顿系统，以及一个可通过积分直接求解的第三个方程。我们用角-作用量坐标（σ，I）表示该哈密顿系统，并证明，在 Gavrilov 向量场支集的某个邻域内存在一个变量变换，使得新坐标（σ，β，I）下的运动方程变为

$$\dot{\sigma} = \Omega_1(I), \quad \dot{\beta} = \Omega_2(I), \quad \dot{I} = 0,$$

其中，σ 和 β 是角变量，以恒定角速度 $\Omega_1(I)$、$\Omega_2(I)$旋转；I 是一个常数作用变量，实际上是压力的重新参数化。完整表述见定理 1.1。

1.1 定常欧拉方程的 Gavrilov 解

在构造的主要部分中，给定任意 [7], ，考虑 $R > 0$圆

$$\mathcal{C} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2,\ z = 0\}$$

在 $\mathbb{R}^3$ 中考虑，并在 $\mathcal{C}$的一个开邻域 $\mathcal{N}$ 内定义两个函数 U、P，$U : \mathcal{N} \to \mathbb{R}^3$ 和 $P : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$，二者均属于 $C^\infty(\mathcal{N} \setminus \mathcal{C})$，并满足定常欧拉方程

$$U \cdot \nabla U + \nabla P = 0, \quad \operatorname{div} U = 0 \tag{1.1}$$

在 $\mathcal{N} \setminus \mathcal{C}$中，同时满足基本的“局部化条件”

$$U \cdot \nabla P = 0. \tag{1.2}$$

作为证明的最后一步，将函数 U、P 乘以光滑截断函数，得到$C^\infty(\mathbb{R}^3)$函数 $\tilde{U}$、$\tilde{P}$，其中 $\tilde{U}$和 $\nabla\tilde{P}$的支集均紧含于 $\mathcal{N} \setminus \mathcal{C}$，并在 $\mathbb{R}^3$中满足 (1.1)（以及 (1.2)）。

让我们更精确地表述。记 $\rho := \sqrt{x^2 + y^2}$。对于 $\delta \in (0, R)$，令

$$\mathcal{N} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\rho - R)^2 + z^2 < \delta^2\}. \tag{1.3}$$

在 $\mathcal{N}$ 中，[7] 的解 (U, P) 为

$$U(x, y, z) = u_\rho(\rho, z)e_\rho(x, y) + u_\varphi(\rho, z)e_\varphi(x, y) + u_z(\rho, z)e_z, \quad P(x, y, z) = p(\rho, z), \tag{1.4}$$

其中

$$e_\rho(x,y)=\frac{1}{\rho}(x,y,0), \qquad e_\varphi(x,y)=\frac{1}{\rho}(-y,x,0), \qquad e_z=(0,0,1),$$
$$u_\rho(\rho,z)=\frac{\partial_z p(\rho,z)}{\rho}, \qquad u_\varphi(\rho,z)=\frac{b(\rho,z)}{\rho}, \qquad u_z(\rho,z)=-\frac{\partial_\rho p(\rho,z)}{\rho},$$
$$b(\rho,z)=\frac{R^3}{4}\sqrt{H(a(\rho,z))}, \qquad p(\rho,z)=\frac{R^4}{4}a(\rho,z), \qquad a(\rho,z)=\alpha\Big(\frac{\rho}{R},\frac{z}{R}\Big), \tag{1.5}$$

且 α、H 是在 [7] 中以某些微分方程的解为基础定义的函数； $H(0)=0$，且 H 在 0 的某个邻域内解析； α 在 $(1,0)$ 处有严格局部极小值，且 $\alpha(1,0)=0$，并且它在 $(1,0)$ 的某个邻域内解析。因此，对于某个普适常数 $r_0>0$ （这里“普适”是指 r_0 不依赖于任何因素）， α 和 $H\circ\alpha$ 在以 $(1,0)$ 为中心、半径为 r_0的 $\mathbb{R}^2$ 圆盘内均有定义且解析。若 (1.3) 中的 δ 满足

$$\delta \le r_0 R,$$

则 $a(\rho,z)$ 和 $H(a(\rho,z))$（其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$）在 $\mathcal{N}$中有定义且解析（注意，在 $\mathcal{N}$中有 $0<R-\delta<\rho<R+\delta$；特别地， ρ远离零）。此外， $b(\rho,z)$在 $\mathcal{N}$中有定义且连续，并且（由于平方根 $\sqrt{H}$）它在 $\mathcal{N}\setminus\mathcal{C}$中解析。因此， P在 $\mathcal{N}$中解析，而 U在 $\mathcal{N}$中连续、在 $\mathcal{N}\setminus\mathcal{C}$中解析。

解（ $\tilde{U},\tilde{P}$）在 [7] 中定义为 $\mathcal{N}$

$$\tilde{U}(x,y,z)=\omega(P(x,y,z))U(x,y,z), \qquad \tilde{P}(x,y,z)=W(P(x,y,z)), \tag{1.6}$$

其中， $\omega:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是任意一个在区间 $[\varepsilon,2\varepsilon]$之外取零值的 C^∞ 函数，且 $\varepsilon>0$ 足够小； $W:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是 ω^2的一个原函数；例如，

$$W(s)=\int_0^s \omega^2(\sigma)\,d\sigma. \tag{1.7}$$

随后，在 $\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{N}$中定义（$\tilde{U}$， $\tilde{P}$）$=(0,W(2\varepsilon))$，从而将（$\tilde{U}$， $\tilde{P}$）延拓到 $\mathbb{R}^3$。

˜ ˜注意， U 和 ∇P 仅能在集合中非零

$$\mathcal{S}:=\{(x,y,z)\in\mathcal{N}:\varepsilon<P(x,y,z)<2\varepsilon\}, \tag{1.8}$$

˜ ˜并且，若 $\omega(s)$在某个 $s\in(\varepsilon,2\varepsilon)$处非零，则 $\mathcal{S}$中对应的点上 U 和 ∇P 实际上都非零。此外， $P=0$ 在圆 $\mathcal{C}$上成立；当 ε 足够小时， $P>3\varepsilon$ 在距 $\mathcal{C}$足够远的 $\mathcal{N}$ 所有点处成立。更确切地说，为了明确构造细节，我们引入参数 $\tau>0$ 并假设

$$P(x,y,z)>\tau \quad \forall(x,y,z)\in\mathcal{N}\setminus\mathcal{N}' \tag{1.9}$$

以及 $\tau\ge 3\varepsilon$，其中

$$\mathcal{N}':=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(\rho-R)^2+z^2<(\delta/4)^2\}.$$

因此， $\mathcal{S}$ 的闭包包含于开集

$$\mathcal{S}^*:=\{(x,y,z)\in\mathcal{N}:0<P(x,y,z)<\tau\}, \tag{1.10}$$

以及 $\mathcal{S}^*\subseteq(\mathcal{N}'\setminus\mathcal{C})\subseteq(\mathcal{N}\setminus\mathcal{C})$。

1.2 主要结果：流体粒子动力学的描述

关于第1.1节中解的一个初步基本观察是，任何具有给定 $R>0$ 的此类解，都可以通过重新缩放从另一个具有 $R=1$ 的解得到。更进一步地，我们证明，Gavrilov 解是一个二参数解族中的一参数子集，其中 R 在与欧拉方程的两种不同缩放不变性相关的意义上扮演双重角色，这两种不变性都

保持局部化条件（1.2）不变。这些基本观察见第2节（参见引理2.1）。得益于这些性质，我们研究归一化情形$R = 1$下流体粒子的运动；对于任何其他 $R > 0$ ，只需按照引理2.2中的说明，对振幅和时间变量进行重新缩放即可立即得到相应的运动。

˜研究由 Gavrilov 向量场 U 驱动的流体粒子的运动，意味着研究系统的解 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (x(t)\ y(t)\ z(t)$

$$(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) = \tilde{U}(x(t), y(t), z(t)), \tag{1.11}$$

该系统是在 $\mathbb{R}^3$ 上的自治 ODE 。函数上方的点表示其时间导数。在处理系统（1.11）之前，我们先回顾一些关于拟周期函数的定义。

若向量 $\Omega = (\Omega_1, \ldots, \Omega_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ 满足：对于所有整数向量 $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$， $\Omega \cdot k = \Omega_1 k_1 + \ldots + \Omega_n k_n$ 均非零，则称 Ω 有理无关。

给定集合 X，若函数 $v : \mathbb{R} \to X$, $t \mapsto v(t)$ 满足以下条件，则称其为频率向量 $\Omega = (\Omega_1, \ldots, \Omega_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ 的拟周期函数：Ω 有理无关，且存在函数$w : \mathbb{R}^n \to X$, 2π，它关于每个实变量都是周期的，使得对于所有 $t \in \mathbb{R}$，都有 $v(t) = w(\Omega_1 t, \ldots, \Omega_n t)$。此外，为确保数目 n 不超过所需，我们附加如下条件：不存在任何向量 $\Omega = (\Omega_1, \ldots, \Omega_m) \in \mathbb{R}^m$（其中 $m < n$），以及任何函数 $\tilde{w} : \mathbb{R}^m \to X$,˜ ˜2π, 其关于每个实变量都是周期的，并且对于所有 $t \in \mathbb{R}$，都有 $v(t) = \tilde{w}(\Omega_1 t, \ldots, \Omega_m t)$。

例如，对于 $X = \mathbb{R}$、 $n = 3$，以及 $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) \in \mathbb{R}^3$ 这一有理无关向量，若$w(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3) = \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + \cos(\vartheta_3)$，那么 $n = 3$ 不是最小的，因为取 $\tilde{w}(\vartheta_1, \vartheta_2) = \cos(\vartheta_1) + \cos(\vartheta_2)$，即可将其化简为 $n = 2$; 其中 $\tilde{\Omega} = (\tilde{\Omega}1, \tilde{\Omega}_2) \in \mathbb{R}^2$，且 $\tilde{\Omega}_1 = \Omega_1 + \Omega_2$ 而 $\tilde{\Omega}_2 = \Omega_3$, , 但 ˜ ˜ ˜ ˜n = 2 无法进一步化简。因此，函数 $v(t) = \tilde{w}(\Omega_1 t, \Omega_2 t) = \cos(\Omega_1 t) + \cos(\Omega_2 t)$ 是拟周期的，其频率向量为 $\tilde{\Omega} \in \mathbb{R}^2$。

对于 $n = 2$，向量 $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2) \in \mathbb{R}^2$ 有理无关，当且仅当 Ω_1 非零且比值 Ω_2/Ω_1 是无理数。因此，函数 $v(t) = w(\Omega_1 t, \Omega_2 t)$ 是拟周期的，其频率向量为 $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2)$，条件是 $w(\vartheta_1, \vartheta_2)$ 关于 ϑ_1 和 ϑ_2是 2π周期的，Ω_1 非零，Ω_2/Ω_1 是无理数，且 $v(t)$不是周期函数。

本文的主要结果是对 Gavrilov 流体粒子运动的如下描述 s.

定理 1.1。存在普适正常数 $\delta_0, \tau_0, \varepsilon_0, I^*$ ，具有以下性质。令

$$\mathcal{C}, \delta, \mathcal{N}, U, P, \varepsilon, \omega, W, \tilde{U}, \tilde{P}, \mathcal{S}, \tau, \mathcal{N}', \mathcal{S}^*$$

设 $R = 1$ 的集合、常数和函数如第1.1节中所定义，其中 $\delta = \delta_0$、 $\tau = \tau_0$ 和$0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$。

(*i*) 存在一个解析微分同胚

$$\Phi : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \times (0, I^*) \to \mathcal{S}^*,$$

其中 $\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$，使得变量变换 $(x, y, z) = \Phi(\sigma, \beta, I)$ 将系统化为如下形式的系统 (1.11)

$$\dot{\sigma} = \Omega_1(I), \quad \dot{\beta} = \Omega_2(I), \quad \dot{I} = 0. \tag{1.12}$$

因此，柯西问题 (1.11) 在初始数据

$$(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0) = \Phi(\sigma_0, \beta_0, I_0) \in \mathcal{S}^* \tag{1.13}$$

是函数

$$(x(t), y(t), z(t)) = \Phi(\sigma(t), \beta(t), I(t)), \tag{1.14}$$

定义于所有 $t \in \mathbb{R}$，其中

$$\sigma(t) = \sigma_0 + \Omega_1(I_0)t, \quad \beta(t) = \beta_0 + \Omega_2(I_0)t, \quad I(t) = I_0. \tag{1.15}$$

角变量 $\sigma(t)$ $\beta(t) \in \mathbb{T}$ 分别以恒定角频率 $\Omega_1(I_0)$、$\Omega_2(I_0)$旋转，而变量 $I(t) = I_0$ 在时间上保持恒定。

(ii) 变换后的系统 (1.12) 的第一和第三个方程构成一个哈密顿系统 m

$$\dot{\sigma} = \partial_I \mathcal{H}(\sigma, I), \quad \dot{I} = -\partial_\sigma \mathcal{H}(\sigma, I) \tag{1.16}$$

其哈密顿量为 $\mathcal{H}(\sigma, I) = \mathcal{H}(I)$，独立于角变量 σ；因此，(1.16) 是角-作用量变量中的哈密顿系统。

(iii) 频率 $\Omega_1(I)$ 由下式给出

$$\Omega_1(I) = \omega(\mathcal{K}(I))\,\mathcal{K}'(I)$$

其中， $\mathcal{K}(I)$ 是定义在区间 $(-I^*, I^*)$ 上且在该区间内解析的函数在区间 $(0, I^*)$ 上的限制，其泰勒展开为

$$\mathcal{K}(I) = I + \frac{1065}{1024} I^3 + O(I^4)$$

在 $I = 0$ 附近，并且在 $(-I^*, I^*)$ 上严格递增。频率 $\Omega_2(I)$ 由下式给出

$$\Omega_2(I) = \sqrt{I}\,\mathcal{R}(I)\Omega_1(I)$$

其中， $\mathcal{R}(I)$ 是定义在区间 $(-I^*, I^*)$ 上且在该区间内解析的函数在区间 $(0, I^*)$ 上的限制，其泰勒展开为

$$\mathcal{R}(I) = 1 + \frac{7}{4} I + O(I^2)$$

在 $I = 0$ 附近。如果 $\omega(\mathcal{K}(I)) \neq 0$，那么 $\Omega_1(I)$ 和 $\Omega_2(I)$ 均非零，其比值为

$$\frac{\Omega_2(I)}{\Omega_1(I)} = \sqrt{I}\,\mathcal{R}(I).$$

函数 $I \mapsto \sqrt{I}\,\mathcal{R}(I)$ 在 $(0, I^*)$ 上严格递增且解析。因此，对于 I 的无穷多个取值，它是有理数；而对于 I 的另外无穷多个取值，它是无理数。更确切地说，集合 $\{I \in (0, I^*) : \sqrt{I}\,\mathcal{R}(I) \in \mathbb{Q}\}$ 是可数集，而集合 $\{I \in (0, I^*) : \sqrt{I}\,\mathcal{R}(I) \notin \mathbb{Q}\}$具有满勒贝格测度。

(iv) 对于 $\omega(\mathcal{K}(I_0)) \neq 0$，柯西问题 (1.11)、(1.13) 的解 (1.14) 关于时间是周期的，当 $\sqrt{I_0}\,\mathcal{R}(I_0)$ 为有理数时；而当 $\sqrt{I_0}\,\mathcal{R}(I_0)$ 为无理数时，它关于时间是拟周期的，频率向量为 $(\Omega_1(I_0), \Omega_2(I_0))$。

(v) 映射 $\Phi(\sigma, \beta, I)$ 关于 $I = 0$ 在 $\sqrt{I}$ 的幂次下具有收敛展开；更确切地说，存在映射 $\Psi(\sigma, \beta, \mu)$，其在 $\mathbb{T}^2 \times (-\mu_0, \mu_0)$ 中有定义且解析，其中 $\mu_0 = \sqrt{I^*}$，使得对于所有 $(\sigma, \beta, I) \in \mathbb{T}^2 \times (0, I^*)$，$\Phi(\sigma, \beta, I) = \Psi(\sigma, \beta, \sqrt{I})$。映射 $\Phi(\sigma, \beta, I)$ 具有如下形式

$$\Phi(\sigma, \beta, I) = \begin{pmatrix} \rho(\sigma, I)\cos(\beta + \eta(\sigma, I)) \\ \rho(\sigma, I)\sin(\beta + \eta(\sigma, I)) \\ \zeta(\sigma, I) \end{pmatrix}$$

其中，函数 $\rho(\sigma, I)$ $\eta(\sigma, I)$ $\zeta(\sigma, I)$具有展开式

$$\rho(\sigma, I) = 1 + \sqrt{2I}\sin\sigma + O(I), \qquad \eta(\sigma, I) = O(I), \qquad \zeta(\sigma, I) = \sqrt{2I}\cos\sigma + O(I).$$

(vi) 作用变量 I 与式 (1.4) 中的压力 P 通过以下恒等式相关

$$P(\Phi(\sigma, \beta, I)) = \mathcal{K}(I) \quad \forall (\sigma, \beta, I) \in \mathbb{T}^2 \times (0, I^*).$$

压力水平与作用量之间存在双射对应；因此，作用量是压力的一种重新参数化。频率 $\Omega_1(I)$、$\Omega_2(I)$ 也可以用压力 $\tilde{}$ $\tilde{}$ 水平表示。(1.6) 中的压力 P 满足 $P(\Phi(\sigma, \beta, I)) = W(\mathcal{K}(I))$。

(*vii*) 解的轨迹 $\{(x(t)\ y(t)\ z(t)) :\ t \in \mathbb{R}\}$ 位于水平集

$$\mathcal{T}_\ell = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : P(x, y, z) = \ell\}$$

压力的，其中数值 $\ell = P(x_0, y_0, z_0)$ 由初始数据 (1.13) 确定。水平集 $\mathcal{T}_\ell$ 呈现近似环面状，因为 $P(x, y, z)$ 由 (1.4)、(1.5) 和

$$\alpha(\rho, z) = 2(\rho - 1)^2 + 2z^2 + O((|\rho - 1| + |z|)^3)$$

围绕 $(\rho, z) = (1, 0)$。更准确地说，$\mathcal{T}_\ell$ 是微分同胚像

$$\mathcal{T}_\ell = \Phi(\mathbb{T}^2 \times \{I\})$$

二维环面 $\mathbb{T}^2 \times \{I\} = \{(\sigma, \beta, I) : (\sigma, \beta) \in \mathbb{T}^2\}$ 的，其中 I 由恒等式确定

$$\ell = \mathcal{K}(I). \tag{1.17}$$

压力水平 ℓ 决定柯西问题（1.11）的解 (1.14)、(1.15) 在曲面 $\mathcal{T}_\ell$ 上是周期的还是拟周期的，这取决于比值 $\Omega_2(I)/\Omega_1(I)$ 是有理数还是无理数，其中 I 和 ℓ 由 (1.17) 联系起来。系统（1.11）的不同解若位于同一曲面 $\mathcal{T}_\ell$ 上，即具有相同的压力水平，则具有相同的频率 $\Omega_1(I)$,$\Omega_2(I)$，因此也具有相同的频率比 $\Omega_2(I)/\Omega_1(I)$。

注 1.2. 定理 1.1 针对支集位于 $[\varepsilon, 2\varepsilon]$ 中的截断函数 ω 给出，例如 [7] 中的那些；然而，定理 1.1 以及 [7], 的结果，对于支集位于任意区间 $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$ 且满足 $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \le \varepsilon_0$ 的 ω 同样成立，证明中无需做任何改动。 □

注 1.3. 根据 (1.16)，系统 (1.12) 等价于一个具有两个自由度、用角-作用量变量表示的可积哈密顿系统

$$\dot\sigma = \partial_I \mathcal{H}^+, \quad \dot I = -\partial_\sigma \mathcal{H}^+, \quad \dot\beta = \partial_K \mathcal{H}^+, \quad \dot K = -\partial_\beta \mathcal{H}^+$$

其哈密顿量为 $\mathcal{H}^+(\sigma, I, \beta, K) = \mathcal{H}^+(I, K) = \mathcal{H}(I) + \Omega_2(I)K$，并限制在不变集$K = 0$上。 □

定理 1.1 在第 3 节和第 4 节中证明，证明过程分为若干简短而简单的步骤。证明仅使用经典 ODE 理论和动力系统中的基本工具。

1.3 相关文献

关于 PDE 的紧支撑光滑解的存在性的一般讨论，以及与 Gavrilov 关于定常欧拉方程的结果的比较，可见近期预印本 [10]；关于纳维–斯托克斯方程，尤其可参见 [9]。

Gavrilov 在原论文 [7] 中给出的优美而明确的构造，已由 Constantin、La 和 Vicol 在 [4] 中重新考察并推广。论文 [4] 也将 Gavrilov 的结果作为构造模块，证明存在具有给定 H¨older 正则性 C^α 、且对任意 $\beta > \alpha$ 均不属于 C^β 的定常欧拉方程紧支撑解。证明运用了欧拉方程的不变性，以及支撑互不相交的紧支撑解之和本身也是一个解这一事实。

近期，Enciso、Peralta-Salas 和 Torres de Lizaur 也在 [6] 中利用 Gavrilov 的结果构造了三维欧拉方程的时间拟周期解。在 [6] 中，作者将 Crouseilles 和 Faou [5] 关于二维欧拉方程时间拟周期解的构造推广到三维情形，以及所有 n 偶数的 n 维情形。两篇论文 [5] 和 [6] 都巧妙地将定常方程的紧支撑解用作构造的主要要素。

[5] 和 [6] 中的时间拟周期解并非 KAM 类型，也就是说，它们是在近可积动力系统的 Kolmogorov-Arnold-Moser 扰动理论框架之外构造的；在该理论中，通常会出现小除数问题。时间拟周期解

KAM 类型的三维欧拉方程的时间拟周期解，是 [3] 中 Montalto 与作者在存在强迫项的情况下，运用伪微分演算以及 KAM 理论的技术，为 PDE系统获得的。

根据定理 1.1，定义域 $\mathcal{S}^*$ 由二维环面 $\mathcal{T}_\ell$层叠而成，这些环面在向量场 $\tilde{U}$ 下保持不变，其上的运动是周期的或拟周期的。这不仅适用于 Gavrilov 向量场；根据 Arnold 的一条定理，在适当假设下，所有稳态三维欧拉流也都如此。Khesin、Kuksin 和 Peralta-Salas 在 [8] 中讨论了 Arnold 定理及其在研究欧拉流混合性质中的作用。

2 Gavrilov 解中参数 R 的双重作用

参数 R 在 Gavrilov 解中同时发挥两种不同的作用，因为 R 是

- 既是自变量 $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$的重缩放因子，在 (1.5) 中作为 R^{-1} 出现在 α 的自变量中，
- 也是乘在向量场 $U,\tilde{U}$和压力 $P,\tilde{P}$上的振幅因子，在 (1.5) 中分别以幂 R^3 和 R^4 的形式出现在 b 和 p 的定义中。

将这两种不同的缩放区分开来，有助于阐明参数在 Gavrilov 的构造中的作用。

事实上，我们发现，存在一个由两个实参数 (λ,μ) 描述的解族，使得第1.1节中的解可在特殊情形 $(\lambda,\mu) = (R,R^2)$ 下得到。这意味着，就参数 R 而言，Gavrilov 解构成一个二参数解族中的一参数子集。该解族中的任一元素，都可以通过两种简单的重缩放从其他任一元素得到；这两种重缩放对应于欧拉方程的两种基本不变性，并且也保留局部化条件。因此，我们只需研究该解族中的一个元素（特别是一个归一化的元素），即可直接描述其余所有元素。

给定 $R>0$，令

$$\mathcal{U} := (\mathcal{C},\delta,\mathcal{N},U,P,\varepsilon,\omega,W,\tilde{U},\tilde{P},\mathcal{S},\tau,\mathcal{N}',\mathcal{S}^*) \tag{2.1}$$

表示第1.1节中定义的元素（集合、常数和函数）列表。对于每个$\lambda>0$ 和 $\mu>0$，我们按以下方式定义列表 $\mathcal{U}$ 中每个元素的缩放版本。我们定义

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\mathcal{C} &:= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \rho=\lambda R,\ z=0\},\\
\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\delta &:= \lambda\delta,\\
\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\mathcal{N} &:= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (\rho-\lambda R)^2+z^2<(\lambda\delta)^2\},\\
(\mathcal{A}_{\lambda,\mu}U)(x,y,z) &:= \mu U\Big(\frac{x}{\lambda},\frac{y}{\lambda},\frac{z}{\lambda}\Big) \quad \forall (x,y,z)\in\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\mathcal{N},\\
(\mathcal{A}_{\lambda,\mu}P)(x,y,z) &:= \mu^2 P\Big(\frac{x}{\lambda},\frac{y}{\lambda},\frac{z}{\lambda}\Big) \quad \forall (x,y,z)\in\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\mathcal{N},\\
\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\varepsilon &:= \mu^2\varepsilon,\\
(\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\omega)(s) &:= \omega\Big(\frac{s}{\mu^2}\Big) \quad \forall s\in\mathbb{R},\\
(\mathcal{A}_{\lambda,\mu}W)(s) &:= \mu^2 W\Big(\frac{s}{\mu^2}\Big) \quad \forall s\in\mathbb{R},\\
(\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\tilde{U})(x,y,z) &:= \mu\tilde{U}\Big(\frac{x}{\lambda},\frac{y}{\lambda},\frac{z}{\lambda}\Big) \quad \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\\
(\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\tilde{P})(x,y,z) &:= \mu^2\tilde{P}\Big(\frac{x}{\lambda},\frac{y}{\lambda},\frac{z}{\lambda}\Big), \quad \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\\
\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\mathcal{S} &:= \{(x,y,z)\in\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\mathcal{N} : \mathcal{A}_{\lambda,\mu}\varepsilon<(\mathcal{A}_{\lambda,\mu}P)(x,y,z)<2\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\varepsilon\},\\
\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\tau &:= \mu^2\tau,\\
\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\mathcal{N}' &:= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (\rho-\lambda R)^2+z^2<(\lambda\delta/4)^2\},\\
\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\mathcal{S}^* &:= \{(x,y,z)\in\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\mathcal{N} : 0<(\mathcal{A}_{\lambda,\mu}P)(x,y,z)<3\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\varepsilon\},
\end{aligned} \tag{2.2}$$

其中 $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$。我们用$\mathcal{A}_{\lambda,\ \mu}\mathcal{U} := (\mathcal{A}_{\lambda,\ \mu}\mathcal{C},\ \ldots,\ \mathcal{A}_{\lambda,\ \mu}\mathcal{S}^*)$表示缩放元素的列表。第1.1节中 $\mathcal{U}$ 的性质转化为$\mathcal{A}_{\lambda,\ \mu}\mathcal{U}$的以下性质。

- 常数 $\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\delta = \lambda\delta$ 满足 $0 < \lambda\delta < \lambda R$ 和 $\lambda\delta \le \lambda r_0 R$。
- 重标度压力 $\mathcal{A}_{\lambda,\mu}P$ 在 $\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\mathcal{N}$中是解析的。
- 重标度向量场 $\mathcal{A}_{\lambda,\mu}U$ 在 $\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\mathcal{N}$中连续，并在 $(\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\mathcal{N}) \setminus (\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\mathcal{C})$ 中解析。
- 对 $(\mathcal{A}_{\lambda,\mu}U,\ \mathcal{A}_{\lambda,\mu}P)$ 在 $(\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\mathcal{N}) \setminus (\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\mathcal{C})$ 中满足欧拉方程和局部化条件。

- 函数 $\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\omega$ 是 $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$，其支集包含于 $[\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\varepsilon, 2\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\varepsilon] = [\mu^2\varepsilon, 2\mu^2\varepsilon]$中。
- 函数$\mathcal{A}_{\lambda,\mu}W$ 满足

$$(\mathcal{A}_{\lambda,\mu}W)(s) = \int_0^s (\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\omega)^2(\sigma)\,d\sigma \qquad \forall s \in \mathbb{R}.$$

- 向量场 $\mathcal{A}_{\lambda,\mu}U$ 满足 $\tilde{}$

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\tilde{U})(x,y,z) &= \mu\omega\Big(P\Big(\frac{x}{\lambda},\frac{y}{\lambda},\frac{z}{\lambda}\Big)\Big)U\Big(\frac{x}{\lambda},\frac{y}{\lambda},\frac{z}{\lambda}\Big)\\ &= (\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\omega)\big((\mathcal{A}_{\lambda,\mu}P)(x,y,z)\big)\cdot(\mathcal{A}_{\lambda,\mu}U)(x,y,z) \qquad \forall (x,y,z) \in \mathcal{A}_{\lambda,\mu}\mathcal{N}\end{aligned}$$

  并且对于所有 $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus (\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\mathcal{N})$，均有 $(\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\tilde{U})(x,y,z) = 0$。

- 压力$\mathcal{A}_{\lambda,\mu}P$ 满足 $\tilde{}$

$$(\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\tilde{P})(x,y,z) = \mu^2 W\Big(P\Big(\frac{x}{\lambda},\frac{y}{\lambda},\frac{z}{\lambda}\Big)\Big) = (\mathcal{A}_{\lambda,\mu}W)\big((\mathcal{A}_{\lambda,\mu}P)(x,y,z)\big) \qquad \forall (x,y,z) \in \mathcal{A}_{\lambda,\mu}\mathcal{N}$$

  and $(\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\tilde{P})(x,y,z) = \mu^2 W(2\varepsilon) = (\mathcal{A}_{\lambda,\mu}W)(2\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\varepsilon)$ for all $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus (\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\mathcal{N})$.

- 二者 $\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\tilde{U}$ 和 $\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\tilde{P}$ 均为 $C^\infty(\mathbb{R}^3)$，并满足欧拉方程及 $\mathbb{R}^3$中的局部化条件。

- 二者 $\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\tilde{U}$ 和 $\nabla(\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\tilde{P})$ 在有界集 $\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\mathcal{S}$之外均为零。
- 有 $\mathcal{A}_{\lambda,\mu}P > \mathcal{A}_{\lambda,\mu}\tau$，在 $(\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\mathcal{N}) \setminus (\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\mathcal{N}')$ 中。
- 有 $\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\tau \ge 3\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\varepsilon$。

因此，我们得到了二参数族 $\{\mathcal{A}_{\lambda,\mu}\mathcal{U}\}_{\lambda,\mu}$。它具有群性质

$$\mathcal{A}_{\lambda_1,\mu_1}(\mathcal{A}_{\lambda_2,\mu_2}\mathcal{U}) = \mathcal{A}_{\lambda_1\lambda_2,\,\mu_1\mu_2}\mathcal{U}, \qquad \mathcal{A}_{\lambda,\mu}(\mathcal{A}_{\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\mu}}\mathcal{U}) = \mathcal{A}_{1,1}\mathcal{U} = \mathcal{U} \tag{2.3}$$

对所有 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda, \mu_1, \mu_2, \mu \in (0,\infty)$ 均成立。(2.3) 的验证是显而易见的。

引理2.1. 给定 $R > 0$，令 $\mathcal{U}_R$ 为第1.1节中定义的元素（集合、常数和函数）列表 (2.1)。则

$$\mathcal{U}_R = \mathcal{A}_{R,R^2}\,\mathcal{U}_1$$

其中，$\mathcal{U}_1$ 是第1.1节为 $R = 1$构造的元素列表，而 $\mathcal{A}_{R,\ R^2}$ 是重缩放算子 $\mathcal{A}_{\lambda,\ \mu}$，定义见 (2.2)，取值于 $\lambda = R,\ \mu = R^2$。

证明。设 $\mathcal{U}_R$ 为第1.1节针对给定的 $R > 0$构造的元素列表 (2.1)。我们注意到，列表 $\mathcal{A}_{\lambda,\ \mu}\mathcal{U}_R$ 在 $\lambda = 1/R$ 和 $\mu = 1/R^2$ 的条件下，与在第1.1节中取 $R = 1$ 时得到的元素列表一致，我们将其称为 $\mathcal{U}_1$。验证很简单；例如，对于向量场 U 和压力 P，由 (1.4) 和 (1.5) 可得

$$\frac{u_\rho(R\rho, Rz)}{R^2} = \frac{\partial_z\alpha(\rho, z)}{4\rho}, \qquad \frac{u_\varphi(R\rho, Rz)}{R^2} = \frac{\sqrt{H(\alpha(\rho, z))}}{4\rho},$$
$$\frac{u_z(R\rho, Rz)}{R^2} = -\frac{\partial_\rho\alpha(\rho, z)}{4\rho}, \qquad \frac{P(Rx, Ry, Rz)}{R^4} = \frac{\alpha(\rho, z)}{4}.$$

因此，根据（2.3），$\mathcal{U}_R = \mathcal{A}_{R,\ R^2}(\mathcal{A}_{\frac{1}{R},\ \frac{1}{R^2}}\mathcal{U}_R) = \mathcal{A}_{R,\ R^2}\mathcal{U}_1$。 □

对于流体粒子系统（1.11），引理2.1的推论如下所示，其证明显然。

~ ~ ~ ~引理2.2。设 $U_R = \mathcal{A}_{R,\ R^2}U_1$，其中 U_R 由第1.1节针对某个 $R > 0$ 给出，而 U_1 由第1.1节针对 $R = 1$给出。则函数 $(x(t),\ y(t),\ z(t))$ 求解速度场为 $U = U_R$ 的流体粒子系统 ~ ~（1.11），当且仅当

$$x(t) = Rx_1(Rt), \quad y(t) = Ry_1(Rt), \quad z(t) = Rz_1(Rt),$$

其中 $(x_1(t),\ y_1(t),\ z_1(t))$ 求解

$$(\dot{x}_1(t), \dot{y}_1(t), \dot{z}_1(t)) = \tilde{U}_1(x_1(t), y_1(t), z_1(t)).$$

3 共轭到 $\mathbb{T}^2$ 上的线性流

在本节和第4节中，我们证明定理 1.1。因此，假设（2.1）中的 $\mathcal{U}$ 由第1.1节针对 $R = 1$给出。于是，特别地，

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \rho = 1,\ z = 0\},$$
$$\mathcal{N} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\rho - 1)^2 + z^2 < \delta^2\},$$
$$\mathcal{N}' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\rho - 1)^2 + z^2 < (\delta/4)^2\}, \tag{3.1}$$

其中 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$。常数 δ 满足 $0 < \delta < 1$ 和 $\delta \le r_0$。$\mathcal{N}$ 中的向量场 U 和压力 P 由 (1.4)、(1.5) 给出，其中 $a(\rho, z) = \alpha(\rho, z)$，且

$$p(\rho, z) = \frac{\alpha(\rho, z)}{4}, \quad b(\rho, z) = \frac{1}{4}\sqrt{H(\alpha(\rho, z))}. \tag{3.2}$$

常数 τ 和 ε 满足 (1.9) 和 $\tau \ge 3\varepsilon$。函数 ω 的支集包含于 $[\varepsilon, 2\varepsilon]$，且 W 在 (1.7) 中为 ~ ~ ~ ~。向量场 U 和压力 P 在 $\mathcal{N}$ 中由 (1.6) 给出，而在 $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{N}$ 中，$(U, P) = (0, W(2\varepsilon))$。集合 $\mathcal{S}$、$\mathcal{S}^*$ 由 (1.8)、(1.10) 给出。

~在集合 $\mathcal{S}$ 外，向量场 U 为零，系统（1.11）的解是时间恒定的。因此，根据柯西问题解的唯一性，任何在某一时刻 t_0 属于 $\mathcal{S}$ 的 (1.11) 的解，在其整个存在期间都保持在 $\mathcal{S}$ 中；换言之，$\mathcal{S}$ 是 (1.11) 的一个不变集。此外，$\mathcal{S}$ 有界，因此根据基本的 ODE 理论，$\mathcal{S}$ 中的 (1.11) 的解在所有时间上均为整体解。

显然，$\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S}$ 的任何子集也是 (1.11) 的不变集。因此，包含 $\mathcal{S}$ 的 $\mathbb{R}^3$ 的任何子集都是 (1.11) 的不变集。特别地，$\mathcal{S}^*$ 和 $\mathcal{N}$ 是 (1.11) 的不变集。

3.1 柱坐标

为了研究 $\mathcal{N}$ 中的系统（1.11），我们首先转而使用柱坐标，也就是说，我们考虑微分同胚

$$\Phi_1 : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}, \quad \Phi_1(\rho, \varphi, z) := (\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z),$$
$$\mathcal{N}_1 := \{(\rho, \varphi, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T} \times \mathbb{R} : (\rho - 1)^2 + z^2 < \delta^2\}, \tag{3.3}$$

以及变量变换 $\tilde{v}=\Phi_1(v)$，其中 $\tilde{v}=(x,y,z)$，$v=(\rho,\varphi,z)$，即 $x=\rho\cos\varphi$，$y=\rho\sin\varphi$。使用柱坐标是自然的选择，因为式（1.5）中的量 u_ρ,u_φ,u_z,p 已经用 ρ,z 表示。现在，函数 $\tilde{v}(t)=\Phi_1(v(t))$ 在 $\mathcal{N}$ 中是（1.11）的解，当且仅当 $v(t)$ 是以下方程的解

$$\dot{v}(t)=V_1(v(t)) \tag{3.4}$$

其中 $\mathcal{N}_1$，V_1 是向量场

$$V_1(v):=(D\Phi_1(v))^{-1}\tilde{U}(\Phi_1(v)),\quad v=(\rho,\varphi,z)\in\mathcal{N}_1.$$

雅可比矩阵 $D\Phi_1(v)$及其逆矩阵为

$$D\Phi_1(v)=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad (D\Phi_1(v))^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\frac{1}{\rho}\sin\varphi & \frac{1}{\rho}\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

˜复合函数 $U(\Phi_1(v))$为

$$\tilde{U}(\Phi_1(v))=\omega(p(\rho,z))U(\Phi_1(v)),\quad U(\Phi_1(v))=\begin{pmatrix}u_\rho(\rho,z)\cos\varphi-u_\varphi(\rho,z)\sin\varphi\\ u_\rho(\rho,z)\sin\varphi+u_\varphi(\rho,z)\cos\varphi\\ u_z(\rho,z)\end{pmatrix},$$

因此

$$\begin{aligned}V_1(\rho,\varphi,z)&=\omega(p(\rho,z))\Big(u_\rho(\rho,z),\ \frac{u_\varphi(\rho,z)}{\rho},\ u_z(\rho,z)\Big)\\&=\Big(\frac{\omega(p(\rho,z))\partial_z p(\rho,z)}{\rho},\ \frac{\omega(p(\rho,z))b(\rho,z)}{\rho^2},\ -\frac{\omega(p(\rho,z))\partial_\rho p(\rho,z)}{\rho}\Big).\end{aligned} \tag{3.5}$$

由于 α 和 H 是在 [7], 中构造并研究的函数，因此用它们来表示其他量会比较方便。于是，我们定义

$$\chi(s):=\frac{1}{4}\omega\Big(\frac{s}{4}\Big)\quad \forall s\in\mathbb{R}, \tag{3.6}$$

并回顾式 (3.2)，将式 (3.5)改写为

$$V_1(\rho,\varphi,z)=\chi(\alpha(\rho,z))\Big(\frac{\partial_z\alpha(\rho,z)}{\rho},\ \frac{\sqrt{H(\alpha(\rho,z))}}{\rho^2},\ -\frac{\partial_\rho\alpha(\rho,z)}{\rho}\Big). \tag{3.7}$$

曲线 $\mathcal{C}$和集合 $\mathcal{S}^*,\mathcal{N}'$变为

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_1&:=\Phi_1^{-1}(\mathcal{C})=\{(1,\varphi,0):\varphi\in\mathbb{T}\},\\ \mathcal{S}_1^*&:=\Phi_1^{-1}(\mathcal{S}^*)=\{(\rho,\varphi,z)\in\mathcal{N}_1:0<\alpha(\rho,z)<4\tau\},\\ \mathcal{N}_1'&:=\Phi_1^{-1}(\mathcal{N}')=\{(\rho,\varphi,z)\in\mathcal{N}_1:(\rho-1)^2+z^2<(\delta/4)^2\}.\end{aligned}$$

由 (1.9) 和 (3.2) 可得

$$\alpha(\rho,z)>4\tau\quad \forall(\rho,z)\in\mathcal{N}_1\setminus\mathcal{N}_1'. \tag{3.8}$$

此外，映射 Φ_1 在 $\mathcal{N}_1$中是解析的。

˜向量场 U在 $\mathcal{N}\setminus\mathcal{C}$中满足局部化条件 (1.2)，因此 $U\cdot\nabla P=0$在 $\mathcal{N}$中成立。因此，压力 P 是系统（1.11）在 $\mathcal{N}$中的第一积分。在柱坐标中，这意味着 $p(\rho,z)$，因此 $\alpha(\rho,z)$ 也是 (3.4) 在 $\mathcal{N}_1$中的第一积分。这也可以直接验证：由 (3.4) 和 (3.7)，

$$\frac{d}{dt}\{\alpha(\rho(t),z(t))\}=\partial_\rho\alpha(\rho,z)\dot{\rho}+\partial_z\alpha(\rho,z)\dot{z}=0.$$

因此，系统 (3.4) 在 $\mathcal{N}_1$ 中的每条轨迹 $\{v(t)=(\rho(t)\ \varphi(t)\ z(t)):t\in\mathbb{R}\}$ 都位于一个等值集

$$\mathcal{P}_c:=\{(\rho,\varphi,z)\in\mathcal{N}_1:\alpha(\rho,z)=c\}. \tag{3.9}$$

特别地，方程 (3.4) 的每条轨迹都位于一个水平集 $\mathcal{P}_c$ 上，且 $0<c<4\tau$。事实上，集合 $\mathcal{S}_1^*$ 恰好是所有满足 $c\in(0,4\tau)$ 的水平集 $\mathcal{P}_c$ 的并集。

3.2 消除因子 $1/\rho$并建立典范哈密顿结构

我们希望消去方程 (3.5) 中 V_1 的第一和第三个分量里出现的因子 $1/\rho$ 。我们考虑以下微分同胚

$$\begin{aligned}&\Phi_2 : \mathcal{N}_2 \to \mathcal{N}_1, \quad \Phi_2(\rho,\varphi,z) = \Big(\rho,\varphi,\frac{z}{\rho}\Big),\\ &\mathcal{N}_2 := \{(\rho,\varphi,z) \in \mathbb{R}\times\mathbb{T}\times\mathbb{R} : (\rho-1)^2 + z^2\rho^{-2} < \delta^2\},\end{aligned} \tag{3.10}$$

以及变量变换 $\tilde{v} = \Phi_2(v)$，其中 $\tilde{v} = (\tilde{\rho},\tilde{\varphi},\tilde{z})$、 $v = (\rho,\varphi,z)$。函数 $\tilde{v}(t) = \Phi_2(v(t))$ 在 $\mathcal{N}_1$ 中是 (3.4) 的解，当且仅当 $v(t)$ 是以下方程的解

$$\dot{v}(t) = V_2(v(t)) \tag{3.11}$$

在 $\mathcal{N}_2$中，其中

$$V_2(v) := (D\Phi_2(v))^{-1} V_1(\Phi_2(v)), \quad v = (\rho,\varphi,z) \in \mathcal{N}_2. \tag{3.12}$$

雅可比矩阵 $D\Phi_2(v)$ 及其反函数为

$$D\Phi_2(v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -z\rho^{-2} & 0 & \rho^{-1}\end{bmatrix}, \quad (D\Phi_2(v))^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ z\rho^{-1} & 0 & \rho\end{bmatrix}.$$

定义

$$\alpha_2(\rho,z) := \alpha\Big(\rho,\frac{z}{\rho}\Big) \tag{3.13}$$

对所有 $(\rho,z) \in \mathcal{D}_2$，因此

$$\partial_z\alpha_2(\rho,z) = (\partial_z\alpha)\Big(\rho,\frac{z}{\rho}\Big)\frac{1}{\rho}, \quad \partial_\rho\alpha_2(\rho,z) = (\partial_\rho\alpha)\Big(\rho,\frac{z}{\rho}\Big) - (\partial_z\alpha)\Big(\rho,\frac{z}{\rho}\Big)\frac{z}{\rho^2},$$

并且，回想 (3.2) 中的第二个恒等式，

$$V_1(\Phi_2(\rho,\varphi,z)) = \chi(\alpha_2(\rho,z))\Big(\partial_z\alpha_2(\rho,z),\ \frac{\sqrt{H(\alpha_2(\rho,z))}}{\rho^2},\ -\frac{\partial_\rho\alpha_2(\rho,z)}{\rho} - \frac{z\partial_z\alpha_2(\rho,z)}{\rho^2}\Big).$$

那么 (3.12) 中的向量场 V_2 为

$$V_2(\rho,\varphi,z) = \chi(\alpha_2(\rho,z))\Big(\partial_z\alpha_2(\rho,z),\ \frac{\sqrt{H(\alpha_2(\rho,z))}}{\rho^2},\ -\partial_\rho\alpha_2(\rho,z)\Big).$$

集合 $\mathcal{C}_1$、 $\mathcal{S}_1^*$、 $\mathcal{N}_1'$ 变为

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_2 &:= \Phi_2^{-1}(\mathcal{C}_1) = \{(1,\varphi,0) : \varphi \in \mathbb{T}\} = \mathcal{C}_1,\\ \mathcal{S}_2^* &:= \Phi_2^{-1}(\mathcal{S}_1^*) = \{(\rho,\varphi,z) \in \mathcal{N}_2 : 0 < \alpha_2(\rho,z) < 4\tau\},\\ \mathcal{N}_2' &:= \Phi_2^{-1}(\mathcal{N}_1') = \{(\rho,\varphi,z) \in \mathcal{N}_2 : (\rho-1)^2 + z^2\rho^{-2} < (\delta/4)^2\}.\end{aligned}$$

注意， Φ_2 保持 $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1$ 不变，因为在 $\rho = 1$ 处有 $z/\rho = z$ 。由 (3.8) 可得

$$\alpha_2(\rho,z) > 4\tau \quad \forall (\rho,\varphi,z) \in \mathcal{N}_2 \setminus \mathcal{N}_2'. \tag{3.14}$$

(3.9) 中 α 的水平集 $\mathcal{P}_c$ 变为水平集

$$\mathcal{P}_{2,c} = \{(\rho,\varphi,z) \in \mathcal{N}_2 : \alpha_2(\rho,z) = c\} \tag{3.15}$$

α_2的。集合 $\mathcal{S}_2^*$ 是水平集 $\mathcal{P}_{2,\ c}$（其中 $c \in \in (0, 4\tau)$ ）的并集。映射 Φ_2 在 $\mathcal{N}_2$ 中解析。函数 $\alpha_2(\rho,z)$ 是系统 (3.11) 的第一积分，而且也是解析的；其在 (1,0) 附近的泰勒展开见 (4.14)。系统 (3.11) 的第一和第三个方程构成哈密顿系统

$$\dot{\rho} = \partial_z\mathcal{H}_2(\rho,z), \quad \dot{z} = -\partial_\rho\mathcal{H}_2(\rho,z), \tag{3.16}$$

其中

$$\mathcal{H}_2(\rho,z) := \Gamma(\alpha_2(\rho,z)), \quad \Gamma(s) := \int_0^s \chi(\sigma)\,d\sigma. \tag{3.17}$$

3.3 径向-垂直平面中的辛极坐标

现在我们转而使用极坐标（辛形式）来描述这对 (ρ, z)。满足 $(\rho, \varphi, z) \in \mathcal{N}_2$ 的点对 (ρ, z) 并不构成一个圆盘；因此，考虑 $\mathcal{N}_2$ 的一个子集会更方便，因为它比 $\mathcal{N}_2$ 更适合用极坐标表示。我们考虑以下开集

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_2 &:= \{(\rho, \varphi, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T} \times \mathbb{R} : 0 < (\rho-1)^2 + z^2 < \delta_2^2\},\\ \mathcal{B}_2' &:= \{(\rho, \varphi, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T} \times \mathbb{R} : 0 < (\rho-1)^2 + z^2 < (\delta_2/2)^2\},\end{aligned} \tag{3.18}$$

其中 $\delta_2 = C\delta$、 $C > 0$，并注意到

$$(\mathcal{B}_2 \setminus \mathcal{B}_2') \subseteq (\mathcal{N}_2 \setminus \mathcal{N}_2') \tag{3.19}$$

若 $C(1+\delta) \le 1$ 且 $1 + (\delta/4) \le 2C$。例如，当 $C = 2/3$ 且所有 $0 < \delta \le 1/2$时，这一条件成立。

(3.19) 的证明。令 $(\rho, \varphi, z) \in \mathcal{B}_2 \setminus \mathcal{B}_2'$，其中 $\delta_2 = C\delta$，且 $C(1+\delta) \le 1$和 $1 + (\delta/4) \le 2C$。由于 $(\rho, \varphi, z) \in \mathcal{B}_2$，故有 $(\rho-1)^2 < \delta_2^2$，从而 $\rho > 1 - \delta_2$。此外， $1 - \delta_2 = 1 - C\delta > 0$，因为 $C\delta \le 1 - C < 1$。因此

$$(\rho-1)^2 + \frac{z^2}{\rho^2} \le (\rho-1)^2 + \frac{z^2}{(1-\delta_2)^2} \le \frac{(\rho-1)^2 + z^2}{(1-\delta_2)^2} < \frac{\delta_2^2}{(1-\delta_2)^2} \le \delta^2,$$

其中，最后一个不等式成立是因为 $C(1+\delta) \le 1$。因此 $(\rho, \varphi, z) \in \mathcal{N}_2$。现在反设 $(\rho, \varphi, z) \in \mathcal{N}_2'$。那么 $(\rho-1)^2 < (\delta/4)^2,$，从而 $\rho < 1 + (\delta/4)$，且

$$(\rho-1)^2 + z^2 \le \Big((\rho-1)^2 + \frac{z^2}{\rho^2}\Big)\Big(1 + \frac{\delta}{4}\Big)^2 < \frac{\delta^2}{16}\Big(1 + \frac{\delta}{4}\Big)^2 \le \frac{\delta_2^2}{4},$$

其中，最后一个不等式成立是因为 $1+(\delta/4) \le 2C$。此外， $0 < (\rho-1)^2 + z^2$，因为 $(\rho, \varphi, z) \in \mathcal{B}_2$。因此 $(\rho, \varphi, z) \in \mathcal{B}_2'$，这与假设矛盾。这证明了 $(\rho, \varphi, z) \notin \mathcal{N}_2'$。 □

由 (3.19) 和 (3.14) 可得

$$\alpha_2(\rho, z) > 4\tau \quad \forall (\rho, \varphi, z) \in \mathcal{B}_2 \setminus \mathcal{B}_2'. \tag{3.20}$$

因此 $\mathcal{S}_2^* \subseteq \mathcal{B}_2' \subseteq \mathcal{B}_2$，并且它们是系统 (3.11) 的不变集。

我们考虑微分同胚

$$\Phi_3 : \mathcal{B}_3 \to \mathcal{B}_2, \quad \Phi_3(\vartheta, \varphi, \xi) = (1 + \sqrt{2\xi}\sin\vartheta,\ \varphi,\ \sqrt{2\xi}\cos\vartheta), \quad \mathcal{B}_3 := \mathbb{T} \times \mathbb{T} \times (0, \xi_3), \tag{3.21}$$

其中 $\xi_3 := \delta_2^2/2 = 2\delta^2/9$，变量变换为 $\tilde{v} = \Phi_3(v)$，其中 $\tilde{v} = (\tilde{\rho}, \tilde{\varphi}, \tilde{z})$， $v = (\vartheta, \varphi, \xi)$。函数 $\tilde{v}(t) = \Phi_3(v(t))$ 在 $\mathcal{B}_2$ 中满足 (3.11)，当且仅当 $v(t)$ 满足

$$\dot{v}(t) = V_3(v(t)) \tag{3.22}$$

其中 $\mathcal{B}_3$,

$$V_3(v) := (D\Phi_3(v))^{-1} V_2(\Phi_3(v)), \quad v = (\vartheta, \varphi, \xi) \in \mathcal{B}_3.$$

雅可比矩阵 $D\Phi_3(v)$ 及其反函数为

$$D\Phi_3(v) = \begin{bmatrix} \sqrt{2\xi}\cos\vartheta & 0 & \frac{1}{\sqrt{2\xi}}\sin\vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2\xi}\sin\vartheta & 0 & \frac{1}{\sqrt{2\xi}}\cos\vartheta \end{bmatrix}, \quad (D\Phi_3(v))^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2\xi}}\cos\vartheta & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2\xi}}\sin\vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2\xi}\sin\vartheta & 0 & \sqrt{2\xi}\cos\vartheta \end{bmatrix}.$$

我们定义

$$\alpha_3(\vartheta, \xi) := \alpha_2\big(1 + \sqrt{2\xi}\sin\vartheta, \sqrt{2\xi}\cos\vartheta\big), \tag{3.23}$$

对所有 $(\vartheta,\ \xi)\ \in \mathbb{T}\times[0,\xi_3)$。事实上，在集合 $\mathcal{B}_3$ 中，ξ 在区间 $(0,\ \xi_3)$ 内变化，但考虑 α_3 也适用于 $\xi=0$ 是方便的；有 $\alpha_3(\vartheta,\ 0)\ =\alpha_2(1,\ 0)\ =\alpha(1,\ 0)\ =0$（见（3.13））。由公式（3.23）可知

$$\begin{aligned}\partial_\vartheta\alpha_3(\vartheta,\xi)&=(\partial_\rho\alpha_2)(\rho,z)\sqrt{2\xi}\cos\vartheta-(\partial_z\alpha_2)(\rho,z)\sqrt{2\xi}\sin\vartheta,\\ \partial_\xi\alpha_3(\vartheta,\xi)&=(\partial_\rho\alpha_2)(\rho,z)\frac{1}{\sqrt{2\xi}}\sin\vartheta+(\partial_z\alpha_2)(\rho,z)\frac{1}{\sqrt{2\xi}}\cos\vartheta\end{aligned}\tag{3.24}$$

对所有 $(\vartheta,\xi)\ \in\mathbb{T}\times(0,\xi_3)$ 均成立，其中 $(\rho,z)\ =(1+\sqrt{2\xi}\sin\vartheta,\sqrt{2\xi}\cos\ \vartheta)$。因此

$$V_3(\vartheta,\varphi,\xi)=\chi(\alpha_3(\vartheta,\xi))\Big(\partial_\xi\alpha_3(\vartheta,\xi),\ \frac{\sqrt{H(\alpha_3(\vartheta,\xi))}}{(1+\sqrt{2\xi}\sin\vartheta)^2},\ -\partial_\vartheta\alpha_3(\vartheta,\xi)\Big).\tag{3.25}$$

集合 $\mathcal{C}_2$ 位于 $\mathcal{B}_2$ 之外；集合 $\mathcal{S}_2^*,\mathcal{B}_2'$ 变为

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_3^*&:=\Phi_3^{-1}(\mathcal{S}_2^*)=\{(\vartheta,\varphi,\xi)\in\mathcal{B}_3:0<\alpha_3(\vartheta,\xi)<4\tau\},\\ \mathcal{B}_3'&:=\Phi_3^{-1}(\mathcal{B}_2')=\mathbb{T}\times\mathbb{T}\times(0,\xi_3/4).\end{aligned}$$

由公式（3.20）可得

$$\alpha_3(\vartheta,\xi)>4\tau\quad\ \forall(\vartheta,\varphi,\xi)\in\mathcal{B}_3\setminus\mathcal{B}_3'=\mathbb{T}\times\mathbb{T}\times[\xi_3/4,\xi_3).\tag{3.26}$$

因此 $\mathcal{S}_3^*\subset\mathcal{B}_3'$。式（3.15）中 α_2 的水平集 $\mathcal{P}_{2,c}$ 变为水平集

$$\mathcal{P}_{3,c}=\{(\vartheta,\varphi,\xi)\in\mathcal{B}_3:\alpha_3(\vartheta,\xi)=c\}$$

α_3 的。集合 $\mathcal{S}_3^*$ 是水平集 $\mathcal{P}_{3,c}$ 的并集，其中 $c\in(0,4\tau)$。映射 Φ_3 在 $\mathcal{B}_3$ 中是解析的。函数 $\alpha_3(\vartheta,\xi)$ 是系统（3.22）的第一积分；其在 $\xi=0$ 附近的行为将在第 3.4 节和第 4.3 节中研究。系统（3.22）的第一和第三个方程构成哈密顿系统

$$\dot\vartheta=\partial_\xi\mathcal{H}_3(\vartheta,\xi),\quad\ \dot\xi=-\partial_\vartheta\mathcal{H}_3(\vartheta,\xi),\tag{3.27}$$

其中

$$\mathcal{H}_3(\vartheta,\xi):=\mathcal{H}_2(1+\sqrt{2\xi}\sin\vartheta,\sqrt{2\xi}\cos\vartheta)=\Gamma(\alpha_3(\vartheta,\xi)),\tag{3.28}$$

其中 $\mathcal{H}_2$ 和 Γ 在（3.17）中定义。此外，ϑ（以及 φ）是一个角变量，即它在 $\mathbb{T}=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$中变化。

注 3.1.（i）我们使用辛变换（$\rho,z)\ =\ (1+\sqrt{2\xi}\sin\ \vartheta,\sqrt{2\xi}\cos\ \vartheta)$，而不是较简单的极坐标（$\rho,z)\ =\ (1+r\cos\ \vartheta,r\sin\ \vartheta)$ 或（$\rho,z)\ =\ (1+r\sin\ \vartheta,r\cos\ \vartheta)$，以保持系统（3.16）的典范哈密顿结构。

（ii）在（3.21）中定义 Φ_3时，对 z使用 $\cos\vartheta$、对 ρ使用 $\sin\ \vartheta$，而不反过来，这只是出于 st a m于方便：这样，我们就能使解 $\vartheta(t)$具有正角速度。 □

3.4 水平集

由于平方根函数 $\xi\mapsto\sqrt{\xi}$在 $(0,\infty)$ 上解析，因此在（3.23）中定义的函数 $\alpha_3(\vartheta,\xi)$在 $(\vartheta,\xi)\ \in\mathbb{T}\times(0,\xi_3)$ 上解析。由 $\alpha_2(\rho,z)$ 的泰勒展开（4.14），以及（3.23）和（3.24），可得

$$\alpha_3(\vartheta,\xi)=4\xi+O(\xi^{\frac{3}{2}}),\quad\ \partial_\xi\alpha_3(\vartheta,\xi)=4+O(\xi^{\frac{1}{2}})\quad\ \text{as }\xi\to0,\ \xi>0,\tag{3.29}$$

关于 $\vartheta\in\mathbb{T}$ 一致。注意，$\alpha_3(\vartheta,\xi)$ 在 $\xi=0$ 附近并非解析函数，也就是说，作为 ξ 的函数，$\alpha_3(\vartheta,\xi)$ 不是以零为中心、关于 ξ 的幂级数；事实上，(3.29) 是由 $\alpha_2(\rho,z)$（及其偏导数 $\partial_\rho\alpha_2(\rho,z)$、$\partial_z\alpha_2(\rho,z)$）在 (1, 0) 附近的解析性推导而来，随后再代入 $(\rho,z)\ =(1+\sqrt{2\xi}\sin\ \vartheta,\sqrt{2\xi}\cos\vartheta)$ 得到。更多详情请参见第 4.3 节。

此外，$\alpha_3(\vartheta,0)=\alpha_2(1,0)=0$，并且由 (3.29) 可得，

$$\partial_\xi\alpha_3(\vartheta,0)=\lim_{\xi\to0^+}\frac{\alpha_3(\vartheta,\xi)-\alpha_3(\vartheta,0)}{\xi}=4=\lim_{\xi\to0^+}\partial_\xi\alpha_3(\vartheta,\xi). \tag{3.30}$$

因此，α_3 在 $\mathbb{T}\times[0,\xi_3)$中为 C^1。必要时取更小的 ξ_3（即更小的 δ），我们有 $\partial_\xi\alpha_3(\vartheta,\xi)>0$，对所有$(\vartheta,\xi)\in\mathbb{T}\times[0,\xi_3)$均成立。因此，函数 $\xi\mapsto\alpha_3(\vartheta,\xi)$在 $[0,\xi_3)$上严格递增。此外，$\alpha_3(\vartheta,0)=0$，并且根据(3.26)，对所有 $\vartheta\in\mathbb{T}$，$\alpha_3(\vartheta,\xi_3/4)>4\tau$。

因此，对于每个 $c\in[0,4\tau]$和每个 $\vartheta\in\mathbb{T}$，都存在唯一的 $\xi\in[0,\xi_3/4)$，使得 $\alpha_3(\vartheta,\xi)=c$。我们将方程 $\alpha_3(\vartheta,\xi)=c$的唯一解 ξ记作 $\gamma_c(\vartheta)$。因此，

$$\alpha_3(\vartheta,\gamma_c(\vartheta))=c\quad\forall(\vartheta,c)\in\mathbb{T}\times[0,4\tau]. \tag{3.31}$$

此外，$\gamma_0(\vartheta)=0$。由于 α_3 在 $(\vartheta,\xi)\in\mathbb{T}\times(0,\xi_3)$ 内是解析的，根据隐函数定理，函数 $\gamma_c(\vartheta)$ 在 $(\vartheta,c)\in\mathbb{T}\times(0,4\tau)$ 内是解析的。第 4.3 节研究了 $\gamma_c(\vartheta)$ 在 $c=0$附近的行为。由（3.31）可得，

$$(\partial_\vartheta\alpha_3)(\vartheta,\gamma_c(\vartheta))+(\partial_\xi\alpha_3)(\vartheta,\gamma_c(\vartheta))\partial_\vartheta\gamma_c(\vartheta)=0, \tag{3.32}$$

$$(\partial_\xi\alpha_3)(\vartheta,\gamma_c(\vartheta))\partial_c\gamma_c(\vartheta)=1 \tag{3.33}$$

对所有 $(\vartheta,c)\in\mathbb{T}\times(0,4\tau)$ 均成立。由于 $\partial_\xi\alpha_3(\vartheta,\xi)$ 对所有 $(\vartheta,\xi)\in\mathbb{T}\times[0,\xi_3)$ 都为正，根据（3.33）可得

$$\partial_c\gamma_c(\vartheta)>0\quad\forall(\vartheta,c)\in\mathbb{T}\times(0,4\tau). \tag{3.34}$$

因此，对所有 $c\in[0,4\tau]$，水平集 $\mathcal{P}_{3,\,c}$均可全局表示为如下图像

$$\mathcal{P}_{3,c}=\{(\vartheta,\varphi,\xi)\in\mathbb{T}\times\mathbb{T}\times[0,\xi_3):\xi=\gamma_c(\vartheta)\}=\{(\vartheta,\varphi,\gamma_c(\vartheta)):(\vartheta,\varphi)\in\mathbb{T}^2\}. \tag{3.35}$$

3.5 径向-垂直平面内系统的积分

我们考虑系统（3.22）的柯西问题，其初始数据为 $(\vartheta_0,\varphi_0,\xi_0)\in\mathcal{S}_3^*$，初始时间为 $t=0$。初始数据的分量 ϑ_0 和 ξ_0 决定了等值 $c=\alpha_3(\vartheta_0,\xi_0)$；于是，柯西问题的解 $(\vartheta(t)\ \varphi(t)\ \xi(t))$ 对所有 $t\in\mathbb{R}$ 均位于水平集 $\mathcal{P}_{3,\,c}$ 内，并且根据（ 3.35 ），对所有 $t\in\mathbb{R}$，$\xi(t)=\gamma_c(\vartheta(t))$。

系统（3.22）的第一和第三个方程构成哈密顿系统（3.27），即

$$\dot\vartheta=\chi(\alpha_3(\vartheta,\xi))\partial_\xi\alpha_3(\vartheta,\xi),\quad\dot\xi=-\chi(\alpha_3(\vartheta,\xi))\partial_\vartheta\alpha_3(\vartheta,\xi). \tag{3.36}$$

由于 $\xi(t)=\gamma_c(\vartheta(t))$，(3.36) 变为

$$\dot\vartheta=\chi(c)(\partial_\xi\alpha_3)(\vartheta,\gamma_c(\vartheta)),\quad\partial_\vartheta\gamma_c(\vartheta)\dot\vartheta=-\chi(c)(\partial_\vartheta\alpha_3)(\vartheta,\gamma_c(\vartheta)). \tag{3.37}$$

由 (3.32) 可知，(3.37) 中的第二个方程等于第一个方程乘以 $\partial_\vartheta\gamma_c(\vartheta)$，因此系统（3.37）等价于仅包含其第一个方程的系统。此外，由 (3.33) 可知，(3.37) 中的第一个方程也可写为

$$\dot\vartheta=\frac{\chi(c)}{\partial_c\gamma_c(\vartheta)}, \tag{3.38}$$

由 (3.33) 或 (3.34) 可知，分母不为零。带有初始数据 $\vartheta(0)=\vartheta_0\in\mathbb{T}$ 的方程 (3.38) 是关于取值于 $\mathbb{T}$ 的函数 $\vartheta(t)$ 的自治柯西问题，可以通过基本微积分求解。

函数 $\gamma_c(\vartheta)$ 及其偏导数 $\partial_c\gamma_c(\vartheta)$ 对 $\vartheta\in\mathbb{T}$ 有定义，因此也可以将它们视为定义在 $\vartheta\in\mathbb{R}$ 上、关于 ϑ 具有 2π 周期的函数。因此，我们先将 (3.38) 视为关于取值于 $\mathbb{R}$ 的函数 $\vartheta^r(t)$ 的方程来求解；然后，$\vartheta^r(t)$ 对 2π 取模后的等价类将成为一个取值于 $\mathbb{T}$ 的函数 $\vartheta(t)$，并满足 (3.38)。

对于所有的 $c\in(0,4\tau)$，我们定义

$$F_c:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad F_c(\vartheta):=\int_0^\vartheta\partial_c\gamma_c(\sigma)\,d\sigma. \tag{3.39}$$

由 (3.34) 可知， F_c 是 $\mathbb{R}$的微分同胚。设 $\vartheta_0^r \in \mathbb{R}$ 是等价类$\vartheta_0 \in \mathbb{T}$的代表元。若 ϑ^r： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \vartheta^r(t)$ 是满足 (3.38) 且 $\vartheta^r(0) = \vartheta_0^r$ 的解，则

$$\frac{d}{dt}\{F_c(\vartheta^r(t))\} = F_c'(\vartheta^r(t))\dot{\vartheta}^r(t) = \chi(c), \qquad F_c(\vartheta^r(t)) = F_c(\vartheta_0^r) + \chi(c)t, \tag{3.40}$$

and

$$\vartheta^r(t) = F_c^{-1}\big(F_c(\vartheta_0^r) + \chi(c)t\big). \tag{3.41}$$

因此，(3.41) 中的 $\vartheta^r(t)$ 是满足初始数据 $\vartheta^r(0) = \vartheta_0^r$ 的方程 (3.38) 的唯一解。现在令 $\vartheta(t)$ 为 $\vartheta^r(t)$ 模 2π 的等价类，即，

$$\vartheta(t) := \{\vartheta^r(t) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}, \tag{3.42}$$

对所有 $t \in \mathbb{R}$ 均成立。于是，(3.42) 中的函数 $\vartheta(t)$ 是一个取值于 $\mathbb{T}$ 的时间函数，并且它满足 (3.38)，其初始数据为 $\vartheta(0) = \vartheta_0$。

3.6 径向-垂直平面内的旋转周期

我们证明 (3.42) 中的函数 $\vartheta(t)$ 是周期的，并计算其周期。首先注意到，在 (3.39) 中定义的函数 F_c 满足

$$F_c(2\pi + \vartheta) = F_c(2\pi) + F_c(\vartheta) \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R}. \tag{3.43}$$

(3.43) 的证明。考虑定义 (3.39)，将对 $[0, 2\pi + \vartheta]$ 的积分拆分为以下两部分之和：（i）对 $[0, 2\pi]$ 的积分，以及（ii）对 $[2\pi, 2\pi + \vartheta]$ 的积分；那么，根据定义，（i） $= F(2\pi)$，而（ii） $= F(\vartheta)$，因为函数 $\partial_c\gamma(\sigma, c)$ 关于 σ 是 2π-周期的，因此（ii）等于对 $[0, \vartheta]$ 的积分。 □

假设 $\chi(c)$ 非零。那么在 (3.41) 中定义的函数 $\vartheta^r(t)$ 满足

$$\vartheta^r(t + T_c) = \vartheta^r(t) + 2\pi \quad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad T_c := \frac{F_c(2\pi)}{\chi(c)}. \tag{3.44}$$

(3.44) 的证明。将 (3.40) 应用两次，得到

$$F_c(\vartheta^r(t + T_c)) = F_c(\vartheta_0^r) + \chi(c)(t + T_c) = F_c(\vartheta^r(t)) + \chi(c)T_c.$$

根据 (3.44) 中 T_c 的定义以及恒等式 (3.43)，

$$F_c(\vartheta^r(t)) + \chi(c)T_c = F_c(\vartheta^r(t)) + F_c(2\pi) = F_c(\vartheta^r(t) + 2\pi).$$

因此 $F_c(\vartheta^r(t + T_c)) = F_c(\vartheta^r(t) + 2\pi)$，又由于 F_c 可逆，我们得到 (3.44)。 □

由 (3.44) 可知，在 (3.42) 中定义的 $\vartheta(t)$ 关于时间是周期的，周期为 T_c。

3.7 径向-垂直平面中的角-作用量变量

哈密顿系统 (3.27) 只有一个自由度，因此根据哈密顿系统经典理论，它是完全可积的：既可以通过求积法求解微分方程（也就是说，可以将其转化为求函数原函数的问题），也存在“角-作用量变量”（这是刘维尔-阿诺德定理的一维最简单情形）。系统 (3.27) 已在第 3.5 节中完成积分；现在我们来构造它的角-作用量变量。

给定一个点 $(\vartheta^*, \varphi^*, \xi^*) \in \mathcal{S}_3^*$，我们计算它的等值 $c = \alpha_4(\vartheta^*, \xi^*)$，它位于区间 al $(0, 1\ 2\varepsilon)$，并且我们考虑柯西问题

$$\dot{\vartheta} = \frac{1}{\partial_c\gamma_c(\vartheta)}, \qquad \vartheta(0) = 0. \tag{3.45}$$

(3.45) 中的第一个方程就是方程 (3.38)，其中 $\chi(c)$ 被 1 所替代。因此，按照第 3.5 节中将 $\chi(c)$ 替换为 1 的处理方式，(3.45) 的 $\mathbb{R}$ 值解由 (3.41) 给出，其中 $\chi(c)$ 被 1 所替代（注意，函数 $\alpha_3(\vartheta,\xi)$、$\gamma_c(\vartheta)$、$F_c(\vartheta)$ 都与 $\chi(c)$ 无关）。我们将 $\vartheta_c^r(t)$ 表示为 (3.45) 的 $\mathbb{R}$ 值解。因此，由于 $F_c(0)=0$,

$$\vartheta_c^r(t) = F_c^{-1}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.46}$$

此外，将第 3.6 节中的 1 替换为 $\chi(c)$，可得

$$\vartheta_c^r(t+T_c^*) = \vartheta_c^r(t) + 2\pi \quad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad T_c^* := F_c(2\pi). \tag{3.47}$$

我们选取等价类 $\vartheta^* \in \mathbb{T}$ 的代表元 ϑ_1^*，使得 $\vartheta_1^* \in [0,2\pi)$，并取唯一的实数 $s_1^* \in [0,T_c^*)$，使得 $\vartheta_c^r(s_1^*) = \vartheta_1^*$，即由 (3.46) 可得 $s_1^* = F_c(\vartheta_1^*)$。然后我们定义$\sigma_1^* = s_1^* 2\pi/T_c^*$，并注意到 $\sigma_1^* \in [0,2\pi)$，因为 $s_1^* \in [0,T_c^*)$。根据 σ_1^*、s_1^*、T_c^* 的定义，可得 $\sigma_1^* = f_c(\vartheta_1^*)$，其中

$$f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_c(\vartheta) := \frac{F_c(\vartheta)2\pi}{F_c(2\pi)} \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R}. \tag{3.48}$$

此外，$\vartheta_1^* = \vartheta_c^r(s_1^*)$ 且 $s_1^* = \sigma_1^* T_c^*/2\pi$，因此 $\vartheta_1^* = g_c(\sigma_1^*)$，其中

$$g_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g_c(\sigma) := \vartheta_c^r\Big(\frac{\sigma T_c^*}{2\pi}\Big) \quad \forall \sigma \in \mathbb{R}. \tag{3.49}$$

函数 f_c 是 $\mathbb{R}$ 的微分同胚，因为它是 F_c 的倍数，并且满足

$$f_c(\vartheta + 2\pi) = f_c(\vartheta) + 2\pi \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R} \tag{3.50}$$

因为 F_c 满足 (3.43)。函数 g_c 也满足

$$g_c(\sigma + 2\pi) = g_c(\sigma) + 2\pi \quad \forall \sigma \in \mathbb{R} \tag{3.51}$$

因为 ϑ_c^r 满足 (3.47)。由 (3.46)、(3.48)、(3.49)，对所有 $\vartheta \in \mathbb{R}$，$g_c(f_c(\vartheta)) = \vartheta$，且对所有 $\sigma \in \mathbb{R}$，$f_c(g_c(\sigma)) = \sigma$，即 g_c 是 f_c 的逆微分同胚。

由 (3.50) 和 (3.51)，f_c 和 g_c 诱导出环面上的微分同胚

$$f_c : \mathbb{T} \to \mathbb{T}, \quad g_c : \mathbb{T} \to \mathbb{T}, \quad g_c(f_c(\vartheta)) = \vartheta \quad \forall \vartheta \in \mathbb{T}, \quad f_c(g_c(\sigma)) = \sigma \quad \forall \sigma \in \mathbb{T}$$

（稍作滥用，我们对 $\mathbb{R}$ 上的微分同胚及其在 $\mathbb{T}$ 上所诱导的相应微分同胚使用相同的记号）。现在，σ_1^* 和 ϑ_1^* 由恒等式 $\vartheta_1^* = g_c(\sigma_1^*)$、$\sigma_1^* = f_c(\vartheta_1^*)$ 联系起来。根据 ϑ_1^* 的定义，$\vartheta^* \in \mathbb{T}$ 是 ϑ_1^* 模 2π 的等价类；令 $\sigma^* \in \mathbb{T}$ 为 σ_1^* 模 2π 的等价类。于是

$$\vartheta^* = g_c(\sigma^*), \quad \sigma^* = f_c(\vartheta^*), \quad \vartheta^*, \sigma^* \in \mathbb{T}.$$

由（3.31），$\xi^* = \gamma_c(\vartheta^*)$。因此，我们已将 (ϑ^*, ξ^*) 表示为 (σ^*, c) 的函数。从现在起，我们用 σ 代替 σ^*。

现在引入变量 I 和函数 h，以用 I表示等值 c，即 $c = h(I)$；函数 h 是某个区间 $(0, I^*)$（待确定）到区间 $(0, 4\tau)$的一个微分同胚（待确定），c属于该区间。我们考虑定义在集合

$$\Phi_4(\sigma,\varphi,I) := (g_c(\sigma), \varphi, \gamma_c(g_c(\sigma)))|_{c=h(I)} = (g_{h(I)}(\sigma),\ \varphi,\ \gamma_{h(I)}(g_{h(I)}(\sigma))), \tag{3.52}$$

上定义的映射

$$\mathcal{S}_4^* := \{(\sigma,\varphi,I) : \sigma,\varphi \in \mathbb{T},\ I \in (0,I^*)\} = \mathbb{T}\times\mathbb{T}\times(0,I^*), \tag{3.53}$$

并且我们希望计算其雅可比行列式。可得

$$\partial_\sigma\{g_c(\sigma)\} = g_c'(\sigma), \quad \partial_I\{g_c(\sigma)\} = \partial_c g_c(\sigma) h'(I), \quad \partial_\sigma\{\gamma_c(g_c(\sigma))\} = \gamma_c'(g_c(\sigma)) g_c'(\sigma),$$
$$\partial_I\{\gamma_c(g_c(\sigma))\} = \big\{(\partial_c\gamma_c)(g_c(\sigma)) + \gamma_c'(g_c(\sigma))\partial_c g_c(\sigma))\big\} h'(I)$$

其中 $c = h(I)$。因此，雅可比矩阵为

$$D\Phi_4(\sigma,\varphi,I) = \begin{bmatrix} g_c'(\sigma) & 0 & \partial_c g_c(\sigma) h'(I) \\ 0 & 1 & 0 \\ \gamma_c'(g_c(\sigma)) g_c'(\sigma) & 0 & \big\{(\partial_c\gamma_c)(g_c(\sigma)) + \gamma_c'(g_c(\sigma))\partial_c g_c(\sigma))\big\} h'(I) \end{bmatrix},$$

其行列式为

$$\det D\Phi_4(\sigma,\varphi,I) = g_c'(\sigma)\,(\partial_c\gamma_c)(g_c(\sigma))\,h'(I)$$

其中 $c = h(I)$。由 (3.49) 和 (3.45),

$$g_c'(\sigma) = \frac{1}{(\partial_c\gamma_c)(g_c(\sigma))}\frac{T_c^*}{2\pi},$$

以及 $T_c^* = F_c(2\pi)$，见 (3.47)。因此

$$\det D\Phi_4(\sigma,\varphi,I) = \frac{F_c(2\pi)}{2\pi} h'(I) \tag{3.54}$$

其中 $c = h(I)$。我们希望行列式 (3.54) 为 $= 1$，使变换 Φ_4 为辛变换，并保持哈密顿量结构。平均值

$$h_1(c) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \gamma_c(\vartheta)\,d\vartheta \tag{3.55}$$

是 $c \in [0, 4\tau]$ 的严格递增函数，因为根据 (3.34) 和 (3.39)，其导数 $h_1'(c) = F_c(2\pi)/2\pi$ 对所有 $c \in (0, 4\tau)$ 都为正。由于 $\gamma_0(\vartheta) = 0$，有 $h_1(0) = 0$。我们定义

$$I^* := h_1(4\tau), \tag{3.56}$$

并注意到，根据 $\gamma_c(\vartheta)$ 的定义，有 $0 < I^* < \xi_3/4$。因此，区间 $(0, I^*)$ 是区间 $(0, 4\tau)$ 在 $\{h_1(c) : c \in (0, 4\tau)\}$ 下的像。我们定义 $h : (0, I^*) \to (0, 4\tau)$ 为 $h_1 : (0, 4\tau) \to (0, I^*)$ 的反函数。因此，

$$h'(I) > 0 \quad \forall I \in (0, I^*). \tag{3.57}$$

至此，映射 Φ_4 （见（3.52））的定义完成；它是从 $\mathcal{S}_4^*$ 到 $\mathcal{S}_3^*$ 的微分同胚。

现在变换 Φ_4 已定义，我们用它来变换系统（3.22）。考虑变量变换 $\tilde{v} = \Phi_4(v)$，其中 $\tilde{v} = (\vartheta, \varphi, \xi) \in \mathcal{S}_3^*$，$v = (\sigma, \varphi, I) \in \mathcal{S}_4^*$。这意味着 $\vartheta = g_{h(I)}(\sigma)$ 且 $\xi = \gamma_{h(I)}(g_{h(I)}(\sigma))$，也就是说，$\vartheta = g_c(\sigma)$ 且 $\xi = \gamma_c(g_c(\sigma))$，其中 $c = h(I)$。函数 $\tilde{v}(t) = \Phi_4(v(t))$ 在 $\mathcal{S}_3^*$ 中是（3.22）的解，当且仅当 $v(t)$ 是

$$\dot{v}(t) = V_4(v(t)) \tag{3.58}$$

在 $\mathcal{S}_4^*$ 中，其中

$$V_4(v) := (D\Phi_4(v))^{-1} V_3(\Phi_4(v)), \quad v = (\sigma,\varphi,I) \in \mathcal{S}_4^*. \tag{3.59}$$

逆矩阵 $(D\Phi_4(v))^{-1}$ 的第二行为 (0, 1, 0)，因此向量场 V_4 的第二个分量恰好是 V_3 的第二个分量（见（3.25））在 $\Phi_4(\sigma, \varphi, I)$ 处的取值，即 $\chi(h(I))\,Q(\sigma, I)$，其中

$$Q(\sigma, I) := \frac{\sqrt{H(h(I))}}{\big(1 + \sqrt{2\gamma_{h(I)}(g_{h(I)}(\sigma))}\sin(g_{h(I)}(\sigma))\big)^2}. \tag{3.60}$$

由于 (3.58) 的第一和第三个方程构成哈密顿系统 (3.27)，且 Φ_4 在 (σ, I) 变量下是辛的，因此向量场 V_4 的第一和第三个分量分别为 $\partial_I\mathcal{H}_4(\sigma, I)$ 和 $-\partial_\sigma\mathcal{H}_4(\sigma, I)$，其中 $\mathcal{H}_4 := \mathcal{H}_3 \circ \Phi_4$（当然，也可以不借助辛变换的性质，直接验证这一点）。现在，$\mathcal{H}_3$ 在 (3.28) 中定义，Γ在 (3.17) 中定义。因此

$$\mathcal{H}_4(\sigma, I) = \mathcal{H}_4(I) = \Gamma(h(I)), \quad \partial_I\mathcal{H}_4(I) = \chi(h(I))h'(I), \tag{3.61}$$

而系统 (3.58) 为

$$\dot{\sigma} = \partial_I\mathcal{H}_4(I), \quad \dot{\varphi} = \chi(h(I))Q(\sigma, I), \quad \dot{I} = 0 \tag{3.62}$$

在 $\mathcal{S}_4^*$ 中，其中 $Q(\sigma, I)$ 定义于 (3.60)。作用量 I 时间恒定。角度 σ 以恒定角速度 $\partial_I\mathcal{H}_4(I) = \chi(h(I))h'(I)$ 旋转。

3.8 化简为切向上的恒定旋转

径向-垂直平面内的运动方程已在 (3.62) 中用角-作用量变量 (σ, I) 表示，接下来我们希望对切向 $\dot{\varphi}$ 上的运动方程作类似的简化。回顾 $\mathcal{S}_4^*$ 的定义 (3.53)，我们考虑如下微分同胚

$$\Phi_5 : \mathcal{S}_4^* \to \mathcal{S}_4^*, \quad \Phi_5(\sigma, \beta, I) = (\sigma, \beta + \eta(\sigma, I), I), \tag{3.63}$$

其中 $\eta : \mathbb{T} \times (0, I^*) \to \mathbb{R}$ 是一个待定函数。我们考虑变量变换 $\tilde{v} = \Phi_5(v)$，其中 $\tilde{v} = (\sigma, \varphi, I) \in \mathcal{S}_4^*$，$v = (\sigma, \beta, I) \in \mathcal{S}_4^*$。函数 $\tilde{v}(t) = \Phi_5(v(t))$ 在 $\mathcal{S}_4^*$ 中满足 (3.58)，当且仅当 $v(t)$ 满足

$$\dot{v}(t) = V_5(v(t)) \tag{3.64}$$

在 $\mathcal{S}_4^*$ 中，其中

$$V_5(v) := (D\Phi_5(v))^{-1} V_4(\Phi_5(v)), \quad v = (\sigma, \beta, I) \in \mathcal{S}_4^*.$$

雅可比矩阵及其反函数为

$$D\Phi_5(v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \partial_\sigma \eta & 1 & \partial_I \eta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (D\Phi_5(v))^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\partial_\sigma \eta & 1 & -\partial_I \eta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

根据 (3.61) 和 (3.62)，(3.59) 中的向量场 V_4 为

$$V_4(\sigma, \varphi, I) = \chi(h(I))\,(h'(I),\ Q(\sigma, I),\ 0).$$

因此

$$V_5(\sigma, \beta, I) = \chi(h(I))\,(h'(I),\ Q(\sigma, I) - \partial_\sigma \eta(\sigma, I) h'(I),\ 0).$$

我们将 $Q(\sigma, I)$ 分解为其关于 $\sigma \in \mathbb{T}$ 的平均值与其零均值余项之和，即

$$Q(\sigma, I) = Q_0(I) + \tilde{Q}(\sigma, I), \quad Q_0(I) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(\sigma, I)\, d\sigma, \quad \tilde{Q} := Q - Q_0, \tag{3.65}$$

并定义

$$\eta(\sigma, I) := \frac{1}{h'(I)} \int_0^\sigma \tilde{Q}(s, I)\, ds. \tag{3.66}$$

注意，根据 (3.57)，$h'(I)$ 非零。函数 η 关于 σ 是 2π-周期的，因为 Q 关于 σ 是 2π-周期的，且在 $\mathbb{T}$ 上的平均值为零。根据 (3.66) 和 (3.65)，

$$\partial_\sigma \eta(\sigma, I) h'(I) = \tilde{Q}(\sigma, I), \quad Q(\sigma, I) - \partial_\sigma \eta(\sigma, I) h'(I) = Q_0(I).$$

因此，向量场 V_5 仅依赖于作用变量 I，并且它是

$$V_5(\sigma, \beta, I) = V_5(I) = (\Omega_1(I), \Omega_2(I), 0),$$

其中

$$\Omega_1(I) := \partial_I \mathcal{H}_4(I) = \chi(h(I)) h'(I), \quad \Omega_2(I) := \chi(h(I)) Q_0(I). \tag{3.67}$$

于是，系统 (3.64) 为

$$\dot{\sigma} = \Omega_1(I), \quad \dot{\beta} = \Omega_2(I), \quad \dot{I} = 0. \tag{3.68}$$

3.9 两个旋转周期的比值

设 $(\sigma_0, \beta_0, I_0) \in \mathcal{S}_4^* = \mathbb{T}^2 \times (0, I^*)$。设 $\sigma_0^r \in \mathbb{R}$ 为等价类 $\sigma_0 \in \mathbb{T}$ 的一个代表元，并设 $\beta_0^r \in \mathbb{R}$ 为 $\beta_0 \in \mathbb{T}$ 的一个代表元。方程 (3.68) 在 $\mathbb{R}^2 \times (0, I^*)$ 上、初始数据为 $(\sigma_0^r, \beta_0^r, I_0)$ 的柯西问题的解——即系统 (3.68)，其中前两个方程视为关于取值于 $\mathbb{R}$、初始数据为 σ_0^r, β_0^r 的函数 $\sigma^r(t)$，$\beta^r(t)$ 的方程——为

$$\sigma^r(t) = \sigma_0^r + \Omega_1(I_0) t, \quad \beta^r(t) = \beta_0^r + \Omega_2(I_0) t, \quad I(t) = I_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.69}$$

设 $\sigma(t)$ $\beta(t)$ 为 $\sigma^r(t)$ $\beta^r(t)$ 模 2π 的等价类，即，

$$\sigma(t) := \{\sigma^r(t) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}, \quad \beta(t) := \{\beta^r(t) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}. \tag{3.70}$$

那么，$(\sigma(t)\ \beta(t)\ I(t))$ 是一个时间函数，其取值于 $\mathcal{S}_4^* = \mathbb{T}^2 \times (0, I^*)$，并满足初始数据为 (σ_0, β_0, I_0) 的方程 (3.68)。

如果 $\chi(h(I_0))$ 为零，那么根据 (3.67)，$\Omega_1(I_0)$ 和 $\Omega_2(I_0)$ 均为零，并且解 $(\sigma(t)\ \beta(t), I(t))$ 是时间恒定的。反之，如果 $\chi(h(I_0))$ 非零，那么根据 (3.67) 和 (3.57)，$\Omega_1(I_0)$ 也非零，并且函数 $\sigma(t)$ 是时间的周期函数，其频率为 $\Omega_1(I_0)$，周期为 $T_1(I_0) := 2\pi/\Omega_1(I_0)$。根据 (3.67)，并回顾 (3.54) 中的行列式为 $= 1$，周期 $T_1(I_0)$ 等于 (3.44) 中定义的周期 T_c，其中 $c = h(I_0)$。如果 $\Omega_2(I_0)$ 非零，那么函数 $\beta(t)$ 也为时间的周期函数，其频率为 $\Omega_2(I_0)$，周期为 $T_2(I_0) := 2\pi/\Omega_2(I_0)$。

我们注意到，在频率比中，因子 $\chi(h(I))$ 会相互抵消

$$\frac{\Omega_2(I)}{\Omega_1(I)} = \frac{Q_0(I)}{h'(I)}, \tag{3.71}$$

并且 $Q_0(I)/h'(I)$ 是良定义的，即使 $\chi(h(I))$ 为零也是如此。因此，对于所有$I \in (0, I^*)$，$Q_0(I)/h'(I)$ 都是良定义的。由 (3.65) 和 (3.60)，

$$\frac{Q_0(I)}{h'(I)} = \frac{\sqrt{H(h(I))}}{h'(I)2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\left(1 + \sqrt{2\gamma_{h(I)}(g_{h(I)}(\sigma))}\sin(g_{h(I)}(\sigma))\right)^2}\, d\sigma.$$

我们在积分中作变量变换 $g_{h(I)}(\sigma) = \vartheta$，即 $\sigma = f_c(\vartheta)$，其中 $c = h(I)$，且f_c在 (3.48) 中定义。于是 $d\sigma = f_c'(\vartheta)d\vartheta$，并且由 (3.48) 和 (3.39) 可得 $f_c'(\vartheta) = \partial_c\gamma_c(\vartheta)2\pi/F_c(2\pi)$。因此

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\left(1 + \sqrt{2\gamma_{h(I)}(g_{h(I)}(\sigma))}\sin(g_{h(I)}(\sigma))\right)^2}\, d\sigma = \frac{2\pi}{F_c(2\pi)} \int_0^{2\pi} \frac{\partial_c\gamma_c(\vartheta)}{[1 + \sqrt{2\gamma_c(\vartheta)}\sin\vartheta]^2}\, d\vartheta$$

其中 $c = h(I)$。此外，$h'(I)F_c(2\pi) = 2\pi$，因为 $h'(I)F_c(2\pi)/2\pi$ 是 (3.54) 中的行列式，其值为 1。因此

$$\begin{aligned} \frac{Q_0(I)}{h'(I)} &= A(h(I)), \qquad A(c) := \sqrt{H(c)}\, J(c), \\ J(c) &:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial_c\gamma_c(\vartheta)}{[1 + \sqrt{2\gamma_c(\vartheta)}\sin\vartheta]^2}\, d\vartheta. \end{aligned} \tag{3.72}$$

3.10 流体粒子的运动

我们考虑以下复合函数

$$\Phi := \Phi_1 \circ \Phi_2 \circ \Phi_3 \circ \Phi_4 \circ \Phi_5 \tag{3.73}$$

由 (3.3)、(3.10)、(3.21)、(3.52)、(3.63) 中定义的变换构成。映射 Φ 定义在$\mathcal{S}_4^* = \mathbb{T}^2 \times (0, I^*)$上，其像 $\Phi(\mathcal{S}_4^*)$是 (1.10) 中的集合 $\mathcal{S}^*$，而 Φ是从 $\mathcal{S}_5^*$到$\mathcal{S}^*$的微分同胚。点 $(\sigma, \beta, I) \in \mathcal{S}_4^*$的像 $(x, y, z) = \Phi(\sigma, \beta, I) \in \mathcal{S}^*$ 为

$$x = \rho(\sigma, I)\cos(\beta + \eta(\sigma, I)), \quad y = \rho(\sigma, I)\sin(\beta + \eta(\sigma, I)), \quad z = \zeta(\sigma, I),$$

with

$$\rho(\sigma, I) := 1 + \sqrt{2\gamma_c(g_c(\sigma))}\sin(g_c(\sigma)), \quad \zeta(\sigma, I) := \frac{\sqrt{2\gamma_c(g_c(\sigma))}\cos(g_c(\sigma))}{1 + \sqrt{2\gamma_c(g_c(\sigma))}\sin(g_c(\sigma))}, \tag{3.74}$$

where $c = h(I)$。映射 Φ 的解析正则性及其在 $I = 0$ 附近的展开已进行研究 d in S第 4.8 节。

根据构造，当且仅当函数 $v(t)$ 是方程 (3.64)，即 (3.68) 的解，且初始数据为 $v_0 \in \mathcal{S}_4^*$ 时，函数 $\tilde{v}(t) = \Phi(v(t))$ 才是柯西问题 (1.11) 的解，其初始数据为 $\tilde{v}_0 = \Phi(v_0) \in \mathcal{S}^*$。因此，回顾 (3.69)、(3.70)，初始数据为 $\tilde{v}_0 = (x_0, y_0, z_0) = \Phi(\sigma_0, \beta_0, I_0)$ 的柯西问题 (1.11) 的解 $\tilde{v}(t)$ 是函数

$$\tilde{v}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = \Phi(\sigma(t), \beta(t), I(t)) = \Phi(\sigma_0 + \Omega_1(I_0)t, \beta_0 + \Omega_2(I_0)t, I_0). \tag{3.75}$$

(3.75) 中的函数具有 $\tilde{v}(t) = w(\Omega_1 t, \Omega_2 t)$ 的形式，其中 $w : \mathbb{T}^2 \to \mathcal{S}^*$ 是函数 $w(\vartheta_1, \vartheta_2) = \Phi(\sigma_0 + \vartheta_1, \beta_0 + \vartheta_2, I_0)$，且 $\Omega_i = \Omega_i(I_0)$，$i = 1, 2$。因此，如果 $\Omega_1 \neq 0$，比值 Ω_2/Ω_1 是无理数，并且频率的数量无法减少，即 $\tilde{v}(t)$ 不是周期函数，那么 $\tilde{v}(t)$ 是具有频率向量 (Ω_1, Ω_2) 的拟周期函数。

现在假设 Ω_1 非零，Ω_2/Ω_1 是无理数，并且 (3.75) 中的 $\tilde{v}(t)$ 具有某个周期 $T > 0$。那么，根据 (3.75)，

$$\begin{pmatrix} \sigma_0 + \Omega_1(t+T) \\ \beta_0 + \Omega_2(t+T) \\ I_0 \end{pmatrix} = \Phi^{-1}(\tilde{v}(t+T)) = \Phi^{-1}(\tilde{v}(t)) = \begin{pmatrix} \sigma_0 + \Omega_1 t \\ \beta_0 + \Omega_2 t \\ I_0 \end{pmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

因此，$\sigma_0 + \Omega_1(t+T)$ 和 $\sigma_0 + \Omega_1 t$ 是 $\mathbb{T}$ 中的同一个元素。这意味着，对于某个 $n \in \mathbb{Z}$，$\Omega_1 T = 2\pi n$。类似地，$\beta_0 + \Omega_2(t+T) = \beta_0 + \Omega_2 t$ 在 $\mathbb{T}$ 中，且对于某个 $m \in \mathbb{Z}$，$\Omega_2 T = 2\pi m$。由于 Ω_1 非零，n 也非零，并且 $\Omega_2/\Omega_1 = m/n$ 是有理数，这就产生了矛盾。这证明了，当 Ω_1 非零且 Ω_2/Ω_1 是无理数时，(3.75) 中的函数 $\tilde{v}(t)$ 不是周期函数，因此它是具有频率向量 (Ω_1, Ω_2) 的拟周期函数。

3.11 以作用量表示的压力

压力与作用量的关系如下。由 (1.4)、(3.2) 和 (3.3)，有 $P(\Phi_1(\rho, \varphi, z)) = p(\rho, z) = \frac{1}{4}\alpha(\rho, z)$。由 (3.10)、(3.13)，

$$P(\Phi_1(\Phi_2(\rho, \varphi, z))) = P(\Phi_1(\rho, \varphi, z\rho^{-1})) = \frac{1}{4}\alpha(\rho, z\rho^{-1}) = \frac{1}{4}\alpha_2(\rho, z).$$

由 (3.21) 和 (3.23)，

$$P(\Phi_1(\Phi_2(\Phi_3(\vartheta, \varphi, \xi)))) = \frac{1}{4}\alpha_2\big(1 + \sqrt{2\xi}\sin\vartheta, \sqrt{2\xi}\cos\vartheta\big) = \frac{1}{4}\alpha_3(\vartheta, \xi).$$

由 (3.31) 和 (3.52)，

$$P(\Phi_1(\Phi_2(\Phi_3(\Phi_4(\sigma, \varphi, I))))) = \frac{1}{4}\alpha_3(g_c(\sigma), \gamma_c(g_c(\sigma)))|_{c=h(I)} = \frac{1}{4}c|_{c=h(I)} = \frac{1}{4}h(I).$$

由 (3.63) 和 (3.73)，

$$P(\Phi(\sigma, \beta, I)) = \frac{1}{4}h(I). \tag{3.76}$$

4 泰勒展开与横截性

本节证明，频率 $\Omega_1(I)$ 和比值 $\Omega_2(I)/\Omega_1(I)$（见 (3.67) 和 (3.71)）在 $I = 0$ 附近存在泰勒展开（原则上，这一点并不显然，因为构造中包含平方根），并计算它们展开中常数项之后的首个非零系数。这需要将函数 α 展开至 6 次。因此，我们得出 $\Omega_1(I)$ 和 $\Omega_2(I)/\Omega_1(I)$ 确实会随着 I 的变化而变化，并且以光滑、严格单调的方式变化，恰好一次经过某个区间中的每一个值。从几何角度看，这体现了横截性。我们还计算了 $\Phi(\sigma, \beta, I)$ 在 $I = 0$ 附近的展开。

4.1 α的展开

函数 α 是在 [7] 中通过求解 PDE 系统 (4.4) 构造的，其中函数 F 和 G 用函数 ψ 表示，见 (4.2) 和 (4.3)。函数 ψ 在 [7] 中定义为一个退化 ODE 问题的解。在 [7] 的第2.1节中，可以找到 ψ 在零点附近的 5 阶泰勒展开；此处我们只使用其 3 阶展开，即

$$\psi(s) = 1 - \frac{3}{4}s + \frac{9}{128}s^2 - \frac{21}{1024}s^3 + O(s^4) \quad \text{as } s \to 0. \tag{4.1}$$

在 [7] 的第2.1节中，函数 H、F、G 根据 ψ 定义如下：

$$H(s) = 6s\Big(\frac{1}{\psi'(s)} + 2\psi(s)\Big), \qquad F(x,s) = -2x\psi(s) + 2x^3, \tag{4.2}$$

$$G(x,s) = 12x^2 s - F^2(x,s) - H(s). \tag{4.3}$$

在 [7] 的引理3中，解析函数 $\alpha(x,y)$定义为以下系统的唯一解：

$$\partial_x \alpha(x,y) = F(x,\alpha(x,y)), \qquad \big(\partial_y \alpha(x,y)\big)^2 = G(x,\alpha(x,y)) \tag{4.4}$$

在(x,y)的一个邻域内，$=(1,0)$，使得 $\alpha(1,0) = 0$，且 $\partial_y \alpha$ 不恒等于零。在 [7] 的注记2中指出，α 关于 y为偶函数，即 $\alpha(x,y) = \alpha(x,-y)$。泰勒级数中次数为2和3的单项式的系数

$$\alpha(x,y) = 2(x-1)^2 + 2y^2 + 3(x-1)^3 + 3(x-1)y^2 + \sum_{\substack{k,j\geq 0\\ k+2j\geq 4}} \alpha_{k,2j}(x-1)^k y^{2j} \tag{4.5}$$

见 [7]的注记4；这里我们要计算次数为4、5和6的单项式的系数。由于 α 关于 y为偶函数，(4.5) 中不包含 $2j+1$ 为奇数的单项式。于是有

$$\begin{aligned}\partial_x \alpha(x,y) = {} & 4(x-1) + 9(x-1)^2 + 3y^2 + 4\alpha_{40}(x-1)^3 + 2\alpha_{22}(x-1)y^2 \\ & + 5\alpha_{50}(x-1)^4 + 3\alpha_{32}(x-1)^2 y^2 + \alpha_{14} y^4 + 6\alpha_{60}(x-1)^5 \\ & + 4\alpha_{42}(x-1)^3 y^2 + 2\alpha_{24}(x-1)y^4 + O_6,\end{aligned} \tag{4.6}$$

其中，O_n 表示在（$x-1,y$）中齐次度为 $\geq n$ 的项。由于 α（x,y）$= O_2$，由（4.1）和（4.5）可得

$$\begin{aligned}\psi(\alpha(x,y)) &= 1 - \frac{3}{4}\alpha(x,y) + \frac{9}{128}\alpha^2(x,y) + O_6 \\ &= 1 - \frac{3}{2}(x-1)^2 - \frac{3}{2}y^2 - \frac{9}{4}(x-1)^3 - \frac{9}{4}(x-1)y^2 + \Big(\frac{9}{32} - \frac{3}{4}\alpha_{40}\Big)(x-1)^4 \\ &\quad + \Big(\frac{9}{16} - \frac{3}{4}\alpha_{22}\Big)(x-1)^2 y^2 + \Big(\frac{9}{32} - \frac{3}{4}\alpha_{04}\Big)y^4 + \Big(\frac{27}{32} - \frac{3}{4}\alpha_{50}\Big)(x-1)^5 \\ &\quad + \Big(\frac{27}{16} - \frac{3}{4}\alpha_{32}\Big)(x-1)^3 y^2 + \Big(\frac{27}{32} - \frac{3}{4}\alpha_{14}\Big)(x-1)y^4 + O_6.\end{aligned}$$

将 x 和 x^3 在 $x=1$附近展开，并回顾 F的定义 (4.2)，我们计算得

$$\begin{aligned}F(x,\alpha(x,y)) &= -2x\psi(\alpha(x,y)) + 2x^3 \\ &= -2\psi(\alpha(x,y)) - 2(x-1)\psi(\alpha(x,y)) + 2 + 6(x-1) + 6(x-1)^2 + 2(x-1)^3 \\ &= 4(x-1) + 9(x-1)^2 + 3y^2 + \frac{19}{2}(x-1)^3 + \frac{15}{2}(x-1)y^2 \\ &\quad + \Big(\frac{63}{16} + \frac{3}{2}\alpha_{40}\Big)(x-1)^4 + \Big(\frac{27}{8} + \frac{3}{2}\alpha_{22}\Big)(x-1)^2 y^2 + \Big(-\frac{9}{16} + \frac{3}{2}\alpha_{04}\Big)y^4 \\ &\quad + \Big(-\frac{9}{4} + \frac{3}{2}\alpha_{50} + \frac{3}{2}\alpha_{40}\Big)(x-1)^5 + \Big(\frac{9}{4} + \frac{3}{2}\alpha_{32} + \frac{3}{2}\alpha_{22}\Big)(x-1)^3 y^2 \\ &\quad + \Big(\frac{9}{8} + \frac{3}{2}\alpha_{14} + \frac{3}{2}\alpha_{04}\Big)(x-1)y^4 + O_6.\end{aligned} \tag{4.7}$$

由 (4.6)、(4.7) 以及微分方程 $\partial_x\alpha = F(x,\alpha)$ 中各单项式的恒等式，我们得到

$$\alpha_{40} = \frac{19}{8}, \quad \alpha_{22} = \frac{15}{4}, \quad \alpha_{50} = \frac{3}{2}, \quad \alpha_{32} = 3, \quad \alpha_{14} = -\frac{9}{16} + \frac{3}{4}\alpha_{04},$$
$$\alpha_{60} = \frac{19}{32}, \quad \alpha_{42} = \frac{99}{32}, \quad \alpha_{24} = \frac{9}{16} + \frac{3}{4}(\alpha_{14} + \alpha_{04}).$$

为求出 α_{04} 和 α_{06}的值，我们在 $x = 1$ 处考察 $\partial_y\alpha(x,y)$ 和 $G(x,\alpha(x,y))$，并在 $y = 0$附近将它们展开。由 (4.5)，由于 α 关于 y是偶函数，因此有

$$\alpha(1,y) = 2y^2 + \alpha_{04}y^4 + \alpha_{06}y^6 + O(y^8), \tag{4.8}$$

由此可得

$$\partial_y\alpha(1,y) = 4y + 4\alpha_{04}y^3 + 6\alpha_{06}y^5 + O(y^7),$$
$$(\partial_y\alpha(1,y))^2 = 16y^2 + 32\alpha_{04}y^4 + (48\alpha_{06} + 16\alpha_{04}^2)y^6 + O(y^8). \tag{4.9}$$

由 (4.7)，

$$F(1,\alpha(1,y)) = 3y^2 + \Big(-\frac{9}{16} + \frac{3}{2}\alpha_{04}\Big)y^4 + O(y^6),$$
$$F^2(1,\alpha(1,y)) = 9y^4 + \Big(-\frac{27}{8} + 9\alpha_{04}\Big)y^6 + O(y^8).$$

由 (4.1) 和 (4.2)，

$$H(s) = 4s - \frac{21}{2}s^2 + \frac{39}{32}s^3 + O(s^4) \tag{4.10}$$

（为得到 (4.10)，我们使用了 (4.1) 中 s^3 的系数。）因此，由 (4.8)，

$$H(\alpha(1,y)) = 8y^2 + (4\alpha_{04} - 42)y^4 + \Big(4\alpha_{06} - 42\alpha_{04} + \frac{39}{4}\Big)y^6 + O(y^8).$$

因此

$$\begin{aligned} G(1,\alpha(1,y)) &= 12\alpha(1,y) - F^2(1,\alpha(1,y)) - H(\alpha(1,y)) \\ &= 16y^2 + (8\alpha_{04} + 33)y^4 + \Big(8\alpha_{06} + 33\alpha_{04} + \frac{105}{8}\Big)y^6 + O(y^8). \end{aligned} \tag{4.11}$$

根据 (4.9)、(4.11) 以及微分方程 $(\partial_y\alpha)^2 = G(x,\alpha)$ 在 $x = 1$ 处各单项式相等这一条件，可得 $\alpha_{04} = 11/8$ 和 $\alpha_{06} = 113/160$。因此 $\alpha_{14} = 15/32$, $\alpha_{24} = 249/128$，且

$$\begin{aligned} \alpha(x,y) = {} & 2(x-1)^2 + 2y^2 + 3(x-1)^3 + 3(x-1)y^2 + \frac{19}{8}(x-1)^4 + \frac{15}{4}(x-1)^2y^2 \\ & + \frac{11}{8}y^4 + \frac{3}{2}(x-1)^5 + 3(x-1)^3y^2 + \frac{15}{32}(x-1)y^4 + \frac{19}{32}(x-1)^6 \\ & + \frac{99}{32}(x-1)^4y^2 + \frac{249}{128}(x-1)^2y^4 + \frac{113}{160}y^6 + O_7. \end{aligned} \tag{4.12}$$

4.2 α_2的展开

由 (3.13) 定义的函数 $\alpha_2(\rho,z) = \alpha(\rho, z/\rho)$ 关于 z是偶函数，在 $(\rho,z) = (1,0)$ 附近解析，其泰勒级数

$$\alpha_2(\rho,z) = \sum_{\substack{k,j\geq 0 \\ k+2j\geq 2}} (\alpha_2)_{k,2j}(\rho-1)^k y^{2j} \tag{4.13}$$

与式 (4.12) 中的展开相匹配，其中 $x = \rho$ 和 $y = z/\rho$。我们展开

$$\rho^{-2} = 1 - 2(\rho-1) + 3(\rho-1)^2 - 4(\rho-1)^3 + 5(\rho-1)^4 + O((\rho-1)^5),$$
$$\rho^{-4} = 1 - 4(\rho-1) + 10(\rho-1)^2 + O((\rho-1)^3),$$

并得到

$$\begin{aligned}\alpha_2(\rho,z) = {} & 2(\rho-1)^2 + 2z^2 + 3(\rho-1)^3 - (\rho-1)z^2 + \frac{19}{8}(\rho-1)^4 + \frac{15}{4}(\rho-1)^2y^2 \\ & + \frac{11}{8}z^4 + \frac{3}{2}(\rho-1)^5 - \frac{7}{2}(\rho-1)^3z^2 - \frac{161}{32}(\rho-1)z^4 + \frac{19}{32}(\rho-1)^6 \\ & + \frac{203}{32}(\rho-1)^4z^2 + \frac{1529}{128}(\rho-1)^2z^4 + \frac{113}{160}z^6 + O_7. \end{aligned} \tag{4.14}$$

4.3 $\gamma_c(\vartheta)$的展开

回顾 $\mathcal{B}_2$ 的定义(3.18)以及(3.19)中的第一个包含关系，(3.13)中的函数 $\alpha_2(\rho,z)$在圆盘$(\rho-1)^2+z^2<\delta_2^2$内有定义且解析。我们定义

$$\phi : \mathbb{T}\times(-\delta_2,\delta_2)\to\mathbb{R}^2, \quad \phi(\vartheta,r) := (1+r\sin\vartheta,\, r\cos\vartheta), \quad \widetilde{\alpha}_3(\vartheta,r) := \alpha_2(\phi(\vartheta,r)). \tag{4.15}$$

函数 $\widetilde{\alpha}_3$ 是适定的，并且在$(\vartheta,r)\in\mathbb{T}\times(-\delta_2,\delta_2)$内解析；由(4.13)，它是幂级数

$$\widetilde{\alpha}_3(\vartheta,r) = \sum_{n=2}^{\infty} P_n(\vartheta)r^n, \quad P_n(\vartheta) = \sum_{\substack{k,j\ge 0\\ k+2j=n}} (\alpha_2)_{k,2j}(\sin\vartheta)^k(\cos\vartheta)^{2j}. \tag{4.16}$$

所有 $P_n(\vartheta)$都是三角多项式，并且 $P_n(-\vartheta)=(-1)^nP_n(\vartheta)$，即，当 n 为偶数时 P_n 为偶函数，当 n 为奇数时 P_n 为奇函数，因为$(-1)^k=(-1)^n$ 适用于 $k+2j=n$。因此

$$\widetilde{\alpha}_3(-\vartheta,-r) = \widetilde{\alpha}_3(\vartheta,r) \quad \forall(\vartheta,r)\in\mathbb{T}\times(-\delta_2,\delta_2), \tag{4.17}$$

也就是说，$\widetilde{\alpha}_3$ 是变量对(ϑ,r)的偶函数。事实上，(4.17)是对称性质 $\alpha_2(\rho,-z)=\alpha_2(\rho,z)$，用函数 $\widetilde{\alpha}_3(\vartheta,r)$表示而得。由(4.14)，

$$\begin{aligned} P_2(\vartheta) &= 2, \\ P_3(\vartheta) &= 3\sin^3\vartheta - \sin\vartheta\cos^2\vartheta, \\ P_4(\vartheta) &= \frac{19}{8}\sin^4\vartheta + \frac{15}{4}\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta + \frac{11}{8}\cos^4\vartheta, \\ P_5(\vartheta) &= \frac{3}{2}\sin^5\vartheta - \frac{7}{2}\sin^3\vartheta\cos^2\vartheta - \frac{161}{32}\sin\vartheta\cos^4\vartheta, \\ P_6(\vartheta) &= \frac{19}{32}\sin^6\vartheta + \frac{203}{32}\sin^4\vartheta\cos^2\vartheta + \frac{1529}{128}\sin^2\vartheta\cos^4\vartheta + \frac{113}{160}\cos^6\vartheta. \end{aligned} \tag{4.18}$$

因此

$$P_3(\vartheta) = 2\sin(\vartheta) - \sin(3\vartheta), \tag{4.19}$$

$$P_4(\vartheta) = \frac{15}{8} - \frac{1}{2}\cos(2\vartheta), \tag{4.20}$$

$$P_5(\vartheta) = -\frac{33}{256}\sin(\vartheta) - \frac{835}{512}\sin(3\vartheta) + (P_5)_5\sin(5\vartheta), \tag{4.21}$$

$$P_6(\vartheta) = \frac{3173}{2048} + (P_6)_2\cos(2\vartheta) + (P_6)_4\cos(4\vartheta) + (P_6)_6\cos(6\vartheta). \tag{4.22}$$

式（4.21）中的傅里叶系数（P_5）$_5$ 以及式（4.22）中的（P_6）$_k$、 $k=2$、4、6，在接下来的计算中都不会用到，因此我们不计算它们的数值。

将 $\widetilde{\alpha}_3$（ϑ， r）代入 $r=\sqrt{2\xi}$，可得到式（3.23）中定义的函数 α_3（ϑ， ξ），即 .,

$$\alpha_3(\vartheta,\xi) = \widetilde{\alpha}_3(\vartheta,\sqrt{2\xi}). \tag{4.23}$$

函数 $\gamma_c(\vartheta)$ 在 (3.31) 中定义为方程 $\alpha_3(\vartheta,\xi)=c$ 的唯一解 ξ。由于构造中包含平方根， $\gamma_c(\vartheta)$ 作为 c 的函数，在 $c=0$ 附近不是解析的，也就是说，它不是某些解析函数 $Q_n(\vartheta)$ 所构成的 $\sum Q_n(\vartheta)c^n$ 形式的幂级数。

然而， $\gamma_c(\vartheta)$ 是 $\sum Q_n(\vartheta)c^{n/2}$ 形式的幂级数，也就是说，存在一个在 $\mu=0$ 附近解析的函数 $\widetilde{\gamma}(\vartheta,\mu)$，使得 $\gamma_c(\vartheta)$ 等于 $\widetilde{\gamma}(\vartheta,\mu)$ 在 $\mu=\sqrt{c}$ 处的取值。为证明这一点，我们考虑问题的退化性，并使用解析函数的隐函数定理。定义

$$\mathcal{F}(\vartheta,\mu,w):=\mu^{-2}\widetilde{\alpha}_3(\vartheta,\mu w)-1 \quad \text{if } \mu\neq 0; \qquad \mathcal{F}(\vartheta,0,w):=2w^2-1. \tag{4.24}$$

式（4.24）中的函数 $\mathcal{F}$ 在 $\mathbb{T}\times(-\mu_0,\mu_0)\times(-w_0,w_0)$ 中定义良好且解析，其中 $\mu_0,w_0>0$ 充分小，并且由（4.16）可得，

$$\mathcal{F}(\vartheta,\mu,w)=\sum_{n=2}^{\infty}P_n(\vartheta)w^n\mu^{n-2}-1=2w^2-1+\sum_{n=3}^{\infty}P_n(\vartheta)w^n\mu^{n-2}.$$

此外，由（4.17）和（4.24）可得，

$$\mathcal{F}(-\vartheta,-\mu,w)=\mathcal{F}(\vartheta,\mu,w) \quad \forall(\vartheta,\mu,w)\in\mathbb{T}\times(-\mu_0,\mu_0)\times(-w_0,w_0). \tag{4.25}$$

对于每个 $\vartheta\in\mathbb{T}$，都有

$$\mathcal{F}(\vartheta,0,2^{-\frac{1}{2}})=0, \quad \partial_w\mathcal{F}(\vartheta,0,2^{-\frac{1}{2}})=4\cdot 2^{-\frac{1}{2}}\neq 0.$$

因此，存在两个常数 μ_1,w_1，满足 $0<\mu_1\leq\mu_0$, $0<w_1\leq w_0$，以及一个函数 $w(\vartheta,\mu)$，它在 $\mathbb{T}\times(-\mu_1,\mu_1)$ 中有定义且解析，取值于 $(-w_1,w_1)$，使得

$$w(\vartheta,0)=2^{-\frac{1}{2}} \quad \forall\vartheta\in\mathbb{T}, \qquad \mathcal{F}(\vartheta,\mu,w(\vartheta,\mu))=0 \quad \forall(\vartheta,\mu)\in\mathbb{T}\times(-\mu_1,\mu_1), \tag{4.26}$$

并且，若点 $(\vartheta,\mu,a)\in\mathbb{T}\times(-\mu_1,\mu_1)\times(-w_1,w_1)$ 是 $\mathcal{F}$ 的零点，则 $a=w(\vartheta,\mu)$。由（4.26）和（4.25），对于所有 (ϑ,μ)，都有

$$0=\mathcal{F}(-\vartheta,-\mu,w(-\vartheta,-\mu))=\mathcal{F}(\vartheta,\mu,w(-\vartheta,-\mu)).$$

因此，点 $(\vartheta,\mu,w(-\vartheta,-\mu))\in\mathbb{T}\times(-\mu_1,\mu_1)\times(-w_1,w_1)$ 是 $\mathcal{F}$ 的零点，因此它属于隐函数的图像，即，

$$w(-\vartheta,-\mu)=w(\vartheta,\mu) \quad \forall(\vartheta,\mu)\in\mathbb{T}\times(-\mu_1,\mu_1). \tag{4.27}$$

由（4.26）中的第二个恒等式和公式（4.16）可知， $w(\vartheta,r)$ 是幂级数

$$w(\vartheta,\mu)=\sum_{n=0}^{\infty}W_n(\vartheta)\mu^n, \tag{4.28}$$

其中，函数 $W_n(\vartheta)$ 由恒等式 $\sum_{n=2}^{\infty}P_n(\vartheta)w^n(\vartheta,\mu)\mu^{n-2}=1$ 确定，即，$W_0(\vartheta)=2^{-\frac{1}{2}}$ 和 $W_n(\vartheta)$ 是由系统递归确定的三角多项式

$$\sum_{\substack{n\geq 2,\ j\geq 0,\\ n-2+j=m}}\ \sum_{\substack{k_1,\dots,k_n\geq 0,\\ k_1+\dots+k_n=j}}P_n(\vartheta)W_{k_1}(\vartheta)W_{k_2}(\vartheta)\cdots W_{k_n}(\vartheta)=0 \quad \forall m\geq 1. \tag{4.29}$$

由 (4.27) 和 (4.28)， $W_n(-\vartheta)=(-1)^nW_n(\vartheta)$，即， W_n 在 n 为偶数时是偶函数，而 W_n 在 n 为奇数时是奇函数。我们将使用 $m=1$、2、3、4 的 (4.29) 式，它们为

$$2P_2W_0W_1+P_3W_0^3=0, \tag{4.30}$$

$$P_2(2W_0W_2+W_1^2)+3P_3W_0^2W_1+P_4W_0^4=0, \tag{4.31}$$

$$P_2(2W_0W_3+2W_1W_2)+P_3(3W_0^2W_2+3W_0W_1^2)+4P_4W_0^3W_1+P_5W_0^5=0, \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned}&P_2(2W_0W_4+2W_1W_3+W_2^2)+P_3(3W_0^2W_3+6W_0W_1W_2+W_1^3)\\&+P_4(4W_0^3W_2+6W_0^2W_1^2)+5P_5W_0^4W_1+P_6W_0^6=0.\end{aligned} \tag{4.33}$$

根据 $\mathcal{F}$ 的定义 (4.24)，(4.26) 中的第二个恒等式意味着

$$\widetilde{\alpha}_3(\vartheta,\mu w(\vartheta,\mu))=\mu^2 \quad \forall(\vartheta,\mu)\in\mathbb{T}\times(-\mu_1,\mu_1) \tag{4.34}$$

其中 $\mu\neq 0$。由于 $\widetilde{\alpha}_3(\vartheta,0)=\alpha_2(\phi(\vartheta,0))=\alpha_2(1,0)=0$，恒等式 (4.34) 对 $\mu=0$ 也成立。

根据 (4.26) 中的第一个恒等式，必要时取更小的 μ_1，可得对所有 $(\vartheta,\mu)\in\mathbb{T}\times(-\mu_1,\mu_1)$，均有 $w(\vartheta,\mu)>0$。给定任意 $c\in[0,\mu_1^2)$，存在唯一的 $\mu\in[0,\mu_1)$ 使得 $c=\mu^2$，即 $\mu=\sqrt{c}$。此外，$\mu w(\vartheta,\mu)\geq 0$，且存在唯一的 $\xi\geq 0$ 使得 $\mu w(\vartheta,\mu)=\sqrt{2\xi}$，即 $\xi=\frac{1}{2}\mu^2 w^2(\vartheta,\mu)$。因此，由 (4.23) 和 (4.34)，

$$\alpha_3(\vartheta,\xi)=\widetilde{\alpha}_3(\vartheta,\sqrt{2\xi})=\widetilde{\alpha}_3(\vartheta,\mu w(\vartheta,\mu))=\mu^2=c. \tag{4.35}$$

因此 $\xi=\gamma_c(\vartheta)$，从而 $\gamma_c(\vartheta)=\frac{1}{2}\mu^2 w^2(\vartheta,\mu)$，其中 $\mu=\sqrt{c}$。换言之，我们证明了

$$\gamma_c(\vartheta)=\widetilde{\gamma}(\vartheta,\sqrt{c}) \quad \forall(\vartheta,c)\in\mathbb{T}\times[0,\mu_1^2), \tag{4.36}$$

其中 $\widetilde{\gamma}$ 是解析函数

$$\widetilde{\gamma}(\vartheta,\mu):=\frac{1}{2}\mu^2 w^2(\vartheta,\mu). \tag{4.37}$$

由 (4.27)，

$$\widetilde{\gamma}(-\vartheta,-\mu)=\widetilde{\gamma}(\vartheta,\mu) \quad \forall(\vartheta,\mu)\in\mathbb{T}\times(-\mu_1,\mu_1). \tag{4.38}$$

由 (4.37) 和 (4.28)，

$$\widetilde{\gamma}(\vartheta,\mu)=\sum_{n=2}^{\infty}Q_n(\vartheta)\mu^n, \quad Q_n(\vartheta):=\frac{1}{2}\sum_{\substack{k,j\geq 0\\ k+j+2=n}}W_k(\vartheta)W_j(\vartheta). \tag{4.39}$$

由 (4.38) 和 (4.39)，可得 $Q_n(-\vartheta)=(-1)^n Q_n(\vartheta)$。

4.4 $\gamma_c(\vartheta)$ 和 $\partial_c\gamma_c(\vartheta)$ 的平均值展开

我们研究 $\widetilde{\gamma}(\vartheta,\mu)$、$\gamma_c(\vartheta)$ 和 $\partial_c\gamma_c(\vartheta)$ 在 $\vartheta\in[0,2\pi]$ 上的平均值。为简化记号，给定任意 2π-周期函数 $f(\vartheta)$，我们用 $\langle f\rangle$ 表示其在一个周期上的平均值，即

$$\langle f\rangle:=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\vartheta)\,d\vartheta.$$

当 n 为奇数时，(4.39) 中的三角多项式 $Q_n(\vartheta)$ 是 2π-周期且为奇函数，因此$\langle Q_n\rangle=0$。由此，根据 (4.39)，

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\widetilde{\gamma}(\vartheta,\mu)\,d\vartheta=\sum_{k=1}^{\infty}\langle Q_{2k}\rangle\mu^{2k}. \tag{4.40}$$

由 (3.55)、(4.36) 和 (4.40) 可得

$$h_1(c)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\gamma_c(\vartheta)\,d\vartheta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\widetilde{\gamma}(\vartheta,\sqrt{c})\,d\vartheta=\sum_{k=1}^{\infty}\langle Q_{2k}\rangle c^k. \tag{4.41}$$

因此，$h_1(c)$ 在 $c=0$ 附近是解析的，也就是说，对于定义在 $c\in[0,\mu_1^2)$ 上的 $h_1(c)$，其在 $[0,\mu_1^2)$ 上与 (4.41) 中的幂级数一致；该幂级数是定义在 $c\in(-\mu_1^2,\mu_1^2)$ 上且在该区间内解析的函数。请注意，即使函数 $\gamma_c(\vartheta)$ 本身在 c 中 $c=0$ 附近不是解析的，$\gamma_c(\vartheta)$ 的平均值在 $c=0$ 附近仍是解析的。

现在我们计算 $n=2$、4、6 的平均值 $\langle Q_n\rangle$。根据（4.39），

$$Q_2=\frac{1}{2}W_0^2=\frac{1}{4}, \quad Q_4=\frac{1}{2}(2W_0W_2+W_1^2), \quad Q_6=\frac{1}{2}(2W_0W_4+2W_1W_3+W_2^2). \tag{4.42}$$

因此 $\langle Q_2\rangle = 1/4$。由于 $P_2 = 2$ 和$W_0 = 2^{-\frac{1}{2}}$，由（4.30）可得

$$W_1 = -\frac{1}{8}P_3. \tag{4.43}$$

利用 (4.31) 代入 $(2W_0W_2 + W_1^2)$，并结合 (4.43)，我们计算得

$$Q_4 = -\frac{1}{4}(3P_3W_0^2W_1 + P_4W_0^4) = \frac{1}{64}(3P_3^2 - 4P_4).$$

由 (4.19) 和 (4.20)，我们得到

$$\langle Q_4\rangle = 0. \tag{4.44}$$

利用 (4.33) 代入 $(2W_0W_4 + 2W_1W_3 + W_2^2)$，并结合 (4.43)，我们计算得

$$\begin{aligned} Q_6 &= -\frac{1}{4}\big[P_3(3W_0^2W_3 + 6W_0W_1W_2 + W_1^3) + P_4(4W_0^3W_2 + 6W_0^2W_1^2) + 5P_5W_0^4W_1 + P_6W_0^6\big] \\ &= -\frac{3}{8}P_3W_3 + \frac{3\sqrt{2}}{32}P_3^2W_2 + \frac{1}{2048}P_3^4 - \frac{\sqrt{2}}{4}P_4W_2 - \frac{3}{256}P_3^2P_4 + \frac{5}{128}P_3P_5 - \frac{1}{32}P_6. \end{aligned} \tag{4.45}$$

由 (4.31)，我们得到

$$W_2 = \frac{5\sqrt{2}}{128}P_3^2 - \frac{\sqrt{2}}{16}P_4 = \frac{\sqrt{2}}{256}\Big(-5 - 32\cos(2\vartheta) + 20\cos(4\vartheta) - 5\cos(6\vartheta)\Big) \tag{4.46}$$

并且，由 (4.32) 和 (4.43)，

$$W_3 = \frac{P_3P_4}{16} - \frac{P_3W_2}{2\sqrt{2}} - \frac{3P_3^3}{256} - \frac{P_5}{16} = \frac{225}{4096}\sin(\vartheta) + \frac{1251}{8192}\sin(3\vartheta) + \sum_{k=5,7,9}(W_3)_k\sin(k\vartheta). \tag{4.47}$$

傅里叶系数 $(W_3)_k$, $k = 5$、7、9 未参与 $\langle Q_6\rangle$ 的计算，因此我们不计算它们。由 (4.19)、.....、(4.22)、(4.46)、(4.47)，我们计算得

$$\begin{aligned} &\langle P_3W_3\rangle = -\frac{351}{16384}, \qquad \langle P_3^2W_2\rangle = \frac{291\sqrt{2}}{1024}, \qquad \langle P_3^4\rangle = \frac{131}{8}, \qquad \langle P_4W_2\rangle = -\frac{11\sqrt{2}}{2048}, \\ &\langle P_3^2P_4\rangle = \frac{91}{16}, \qquad \langle P_3P_5\rangle = \frac{703}{1024}, \qquad \langle P_6\rangle = \frac{3173}{2048}. \end{aligned}$$

因此，对 (4.45) 积分可得

$$\langle Q_6\rangle = -\frac{1065}{65536} \tag{4.48}$$

（其中 $65536 = 2^{16}$），并且由 (4.41) 可得，

$$h_1(c) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\gamma_c(\vartheta)\,d\vartheta = \frac{c}{4} + \langle Q_6\rangle c^3 + O(c^4). \tag{4.49}$$

由于 (4.48) 中的 $\langle Q_6\rangle$ 非零， $h_1(c)$ 是关于 c 的非线性解析函数。其导数 i s

$$h_1'(c) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\partial_c\gamma_c(\vartheta)\,d\vartheta = \frac{1}{4} + 3\langle Q_6\rangle c^2 + O(c^3), \tag{4.50}$$

它是 c 的一个非常数解析函数。

$J(c)$ 的展开

平均值 $J(c)$ 定义于 (3.72) 中。根据 (4.36)，偏导数 $\partial_c\gamma_c(\vartheta)$ 满足

$$\partial_c\gamma_c(\vartheta) = \nu(\vartheta, \sqrt{c}), \tag{4.51}$$

其中 $\nu(\vartheta,\mu)$ 是解析函数

$$\nu(\vartheta,\mu) := \frac{\partial_\mu\widetilde{\gamma}(\vartheta,\mu)}{2\mu} = \sum_{n=2}^{\infty} Q_n(\vartheta)\frac{n}{2}\mu^{n-2}, \tag{4.52}$$

其中 $Q_n(\vartheta)$ 在 (4.39) 中定义。由 (4.38)，有 $\nu(-\vartheta,-\mu) = \nu(\vartheta,\mu)$。此外

$$\nu(\vartheta,\mu) = Q_2 + \frac{3}{2}Q_3(\vartheta)\mu + 2Q_4(\vartheta)\mu^2 + O(\mu^3), \tag{4.53}$$

由 (4.42) 得 $Q_2 = 1/4$，由 (4.39) 得 $Q_3 = W_0W_1$，因为 Q_3 是奇函数，故有 $\langle Q_3\rangle = 0$，并由 (4.44) 得 $\langle Q_4\rangle = 0$。关于 $J(c)$ 定义中的分母，根据构造（见 (4.35) 及其前面的几行），有 $\sqrt{2\gamma_c(\vartheta)} = \sqrt{2\xi} = \sqrt{c}\,w(\vartheta,\sqrt{c})$；并且由 (4.28)、(4.43)、(4.19)，

$$\begin{aligned}\big(1+\mu w(\vartheta,\mu)\sin\vartheta\big)^{-2} &= 1 - 2\mu w(\vartheta,\mu)\sin\vartheta + 3\mu^2 w^2(\vartheta,\mu)\sin^2\vartheta + O(\mu^3)\\ &= 1 - 2W_0\sin(\vartheta)\mu + \big(3W_0^2\sin^2\vartheta - 2W_1(\vartheta)\sin\vartheta\big)\mu^2 + O(\mu^3)\\ &= 1 - \sqrt{2}\sin(\vartheta)\mu + \Big(1 - \frac{9}{8}\cos(2\vartheta) + \frac{1}{8}\cos(4\vartheta)\Big)\mu^2 + O(\mu^3).\end{aligned} \tag{4.54}$$

必要时取更小的 μ_1，函数

$$m(\vartheta,\mu) := \frac{\nu(\vartheta,\mu)}{[1+\mu w(\vartheta,\mu)\sin\vartheta]^2} \tag{4.55}$$

在 $\mathbb{T}\times(-\mu_1,\mu_1)$ 中有定义且解析，并满足

$$m(-\vartheta,-\mu) = m(\vartheta,\mu) \quad \forall(\vartheta,\mu)\in\mathbb{T}\times(-\mu_1,\mu_1), \tag{4.56}$$

并且它可展开为 $m(\vartheta,\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n(\vartheta)\mu^n$，其中 $M_n(\vartheta)$ 是某些三角多项式。由 (4.56) 可知 $M_n(-\vartheta) = (-1)^n M_n(\vartheta)$。因此，当 n 为奇数时，$\langle M_n\rangle = 0$，并且

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} m(\vartheta,\mu)\,d\vartheta = \sum_{k=0}^{\infty}\langle M_{2k}\rangle\mu^{2k}.$$

由 (4.53) 和 (4.54) 可得

$$M_0 = \frac{1}{4}, \quad M_2(\vartheta) = 2Q_4(\vartheta) - \frac{3}{2}W_1(\vartheta)\sin\vartheta + \frac{1}{4} - \frac{9}{32}\cos(2\vartheta) + \frac{1}{32}\cos(4\vartheta).$$

由 (4.43) 和 (4.19)，$W_1(\vartheta)\sin\vartheta$ 的平均值为 $-1/8$。因此 $\langle M_2\rangle = 7/16$，并且

$$\begin{aligned}J(c) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial_c\gamma_c(\vartheta)}{[1+\sqrt{2\gamma_c(\vartheta)}\sin\vartheta]^2}\,d\vartheta\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} m(\vartheta,\sqrt{c})\,d\vartheta = \sum_{k=0}^{\infty}\langle M_{2k}\rangle c^k = \frac{1}{4} + \frac{7}{16}c + O(c^2).\end{aligned} \tag{4.57}$$

因此，平均值 $J(c)$在 $c=0$ 附近是关于 c 的解析函数（即使被积函数$m(\vartheta,\sqrt{c})$不是解析函数）。此外，如有必要，取更小的 μ_1，则 $J(c)$在 $[0,\mu_1^2$上严格递增）。

4.6 $h(I)$ 和 $\Omega_1(I)$ 的展开

We 已经证明，(3.55)中的 $h_1(c)$在 $c=0$附近是解析的，其展开式为(4.49)。因此 e 其 i nverse 函数 $h(I)=h_1^{-1}(I)$ 在 $I=0$ 附近也是解析的，并且满足

$$h(I)=4I-256\langle Q_6\rangle I^3+O(I^4),\qquad h'(I)=4-768\langle Q_6\rangle I^2+O(I^3). \tag{4.58}$$

频率 $\Omega_1(I)$ 在 (3.67) 中定义，它是 (4.58) 中的解析函数 $h'(I)$ 与 C^∞ 截断函数$\chi(h(I))$ 的乘积。

4.7 频率比 $\Omega_2(I)/\Omega_1(I)$ 的展开

根据 (3.71) 和 (3.72)，频率比 $\Omega_2(I)/\Omega_1(I)$ 与函数一致

$$A(h(I))=\sqrt{H(h(I))}\,J(h(I)).$$

根据其在 [7], 中的定义，函数 $H(c)$ 在 $c=0$ 附近是解析的。因此，复合函数 $H(h(I))$ 在 $I=0$ 附近是解析的，并且根据 (4.10) 和 (4.58),

$$H(h(I))=16I-168I^2+O(I^3).$$

我们将其平方根写成乘积

$$\sqrt{H(h(I))}=\sqrt{I}\,B(I), \tag{4.59}$$

其中

$$B(I):=4\Big(\frac{H(h(I))}{16I}\Big)^{\frac12}=4\Big(1-\frac{21}{2}I+O(I^2)\Big)^{\frac12}=4-21I+O(I^2). \tag{4.60}$$

由于函数 $x\mapsto\sqrt{1+x}$ 在 $x=0$ 附近是解析的，函数 $B(I)$ 在 $I=0$ 附近是解析的。函数 $J(h(I))$ 在 $I=0$ 附近也解析，并且根据 (4.57) 和 (4.58),

$$J(h(I))=\frac14+\frac74 I+O(I^2). \tag{4.61}$$

因此

$$A(h(I))=\sqrt{I}\,\mathcal{R}(I),\qquad \mathcal{R}(I):=B(I)J(h(I))=1+\frac74 I+O(I^2),$$

并且函数 $\mathcal{R}(I)$ 在 $I=0$ 附近是解析的。必要时取更小的 I^*，则 $\mathcal{R}(I)$ 和$A(h(I))$ 都是关于 $I\in[0,I^*)$ 的严格递增函数。

4.8 $\Phi(\sigma,\beta,I)$ 的展开

由于 $Q_2=1/4$，由 (4.36)、(4.39)、(4.51)、(4.52) 可得

$$\gamma_c(\vartheta)=\frac{c}{4}+O(c^{\frac32}),\qquad \partial_c\gamma_c(\vartheta)=\frac14+O(c^{\frac12}).$$

因此，由 (3.39)，$F_c(\vartheta)=\frac{\vartheta}{4}+O(c^{\frac12})$，进而由 (3.48)，$f_c(\vartheta)=\vartheta+O(c^{\frac12})$。因此，(3.49) 中的 g_c 是 f_c 的反函数，满足

$$g_c(\vartheta)=\vartheta+O(c^{\frac12}).$$

由 (4.58)，$h(I)=4I+O(I^3)$ 且 $h'(I)=4+O(I^2)$。因此，在 $c=h(I)$ 处，可得

$$\gamma_c(\vartheta)=I+O(I^{\frac32}),\qquad g_c(\vartheta)=\vartheta+O(I^{\frac12}),$$

因此，(3.74) 中的函数 $\rho(\sigma,I)$ $\zeta(\sigma,I)$ 的展开为

$$\rho(\sigma,I)=\sqrt{2I}\,\sin(\sigma)+O(I),\qquad \zeta(\sigma,I)=\sqrt{2I}\,\cos(\sigma)+O(I). \tag{4.62}$$

由 (4.59) 和 (4.60) 可得,

$$\sqrt{H(h(I))} = 4\sqrt{I} + O(I^{\frac{3}{2}}). \tag{4.63}$$

由 (4.62) 和 (4.63)，(3.60) 中的函数 $Q(\sigma, I)$ 满足

$$Q(\sigma, I) = 4I^{\frac{1}{2}} + O(I).$$

~因此，(3.65)、(3.66) 中的 Q_0, Q, η 满足

$$Q_0(I) = 4I^{\frac{1}{2}} + O(I), \quad \widetilde{Q}(\sigma, I) = O(I), \quad \eta(\sigma, I) = O(I).$$

(3.3) 中的映射 Φ_1 在 $\mathcal{N}_1$ 中是解析的，因为 ρ 在 $\mathcal{N}_1$ 中不为零；(3.10 中的映射 Φ_2) 也解析，因为 ρ 在 $\mathcal{N}_2$ 中不为零。

(3.21) 中的映射 Φ_3 在 $\mathcal{B}_3$ 中是解析的，因为 ξ 在 $\mathcal{B}_3$ 中为正；然而， Φ_3 在 ξ 中的 $\xi = 0$ 附近并非解析。不过， Φ_3 可以通过在 $r = \sqrt{2\xi}$ 处取值而得到，此处所用的是在 $r = 0$ 附近解析的映射，恰如 (4.23) 中的 $\alpha_3(\vartheta, \xi)$、(4.36) 中的 $\gamma_c(\vartheta)$ 以及 (4.51) 中的 $\partial_c\gamma_c(\vartheta)$。

同样，(3.52) 中的映射 Φ_4 和 (3.63) 中的映射 Φ_5 都是关于 $\mathcal{S}_4^*$ 的解析映射，但它们在 $I = 0$ 附近关于 I 并非解析；不过，可以通过在 $\mu = \sqrt{I}$ 处取值，从某些在 $\mu = 0$ 附近解析的映射得到它们，因为 γ_c、F_c、f_c、g_c、$\sqrt{H(c)}$ 都是这类函数。

因此，(3.73) 中的映射 Φ 是关于 $\mathcal{S}_4^*$ 的解析映射，但在 $I = 0$ 附近关于 I 并非解析，并且可以通过在 $\mu = \sqrt{I}$ 处取值，从一个在 $\mu = 0$ 附近解析的映射得到。因此， Φ 在 $I = 0$ 附近关于 $\sqrt{I}$ 的幂具有收敛展开。

4.9 小量条件

集合 $\mathcal{N}$ 的定义 (3.1) 中的参数 δ 需满足以下小量条件。在 (3.1) 之后，我们取了 $\delta \in (0, 1)$，从而得到 $\mathcal{N}$ 是 (3.1) 中圆 $\mathcal{C}$ 的一个开邻域，其中 $\rho > 1 - \delta > 0$ 属于 $\mathcal{N}$；并取了 $\delta \le r_0$，从而得到函数 $\alpha(\sqrt{x^2+y^2}, z)$ 和 $H(\alpha(\sqrt{x^2+y^2}, z))$ 在 $(x, y, z) \in \mathcal{N}$ 中解析，其中 r_0 是由 α 和 H 的定义给出的普适常数，即由 [7] 中 Gavrilov 的构造给出。在 (3.18) 之后，我们定义了 $\delta_2 = 2\delta/3$，并假设 $\delta \le 1/2$ ，以得到包含关系 (3.19)。在 (3.21) 之后，我们定义了 $\xi_3 = \delta_2^2/2 = 2\delta^2/9$。在 (3.30) 中，我们证明了对于所有 $\vartheta \in \mathbb{T}$， $\partial_\xi\alpha_3(\vartheta, 0) = 4$ ，并且 $\partial_\xi\alpha_3(\vartheta, \xi)$ 在 $\mathbb{T} \times [0, \xi_3)$ 中连续——事实上，在第 4.3 节中我们证明了更强的结论，因为 $\alpha_3(\vartheta, \xi) = \widetilde{\alpha}_3(\vartheta, \sqrt{2\xi})$，见 (4.23)，而且 $\widetilde{\alpha}_3(\vartheta, r)$ 是 (4.15)、(4.16) 中的解析函数；因此 $\partial_\xi\alpha_3(\vartheta, \xi) = \sum_{n=2}^{\infty} P_n(\vartheta) n (2\xi)^{(n-2)/2} = 4 + 3P_3(\vartheta)\sqrt{2\xi} + O(\xi)$。所以，根据连续性，存在一个普适常数 $\xi^* > 0$，使得 $\partial_\xi\alpha_3(\vartheta, \xi) > 0$ 于 $\mathbb{T} \times [0, \xi^*)$ 中。因此，(3.30) 之后关于 ξ_3 的条件（其中我们说 “ 必要时取更小的 ξ_3 ”）就是 $\xi_3 \le \xi^*$。用 δ 表示，这意味着 $\delta \le 3\sqrt{\xi^*/2}$，其中 $\delta \le 3\sqrt{\xi^*/2}$ 是一个普适常数。

定义 (4.24) 中 $\mathcal{F}$ 后的常数 w_0, μ_0 是普适的，而在 (4.26) 中应用隐函数定理后得到的常数 w_1, μ_1 也都是普适的。由 (4.26)， $w(\vartheta, 0) > 0$，因此根据连续性，存在一个普适常数 $\mu_1^* > 0$ ，使得对于所有 $(\vartheta, \mu) \in \mathbb{T} \times (-\mu_1^*, \mu_1^*)$，都有 $w(\vartheta, \mu) > 0$ 。因此，(4.34) 后对 μ_1 的条件（其中我们说“必要时取更小的 μ_1”）是 $\mu_1 \le \mu_{1\circ}^*$ (4.54) 后对 μ_1 的条件也同样如此，从而保证 (4.55) 中的函数 $m(\vartheta, \mu)$ 在 $\mathbb{T} \times (-\mu_1, \mu_1)$ 中有定义且解析；(4.57) 后对 μ_1 的条件也一样，从而保证 $J(c)$ 在 $[0, \mu_1^2)$ 中严格递增。因此，我们取 μ_1 为这三个常数中最小的一个，由此得到 μ_1 是一个普适正数。

参数 τ 与 μ_1 之间满足不等式 $4\tau \le \mu_1^2$，因为 $[0, 4\tau)$ 是 c 变化的区间，而函数 $\gamma_c(\vartheta)$、$\partial_c\gamma_c(\vartheta)$ 和 $J(c)$ 是通过将 (ϑ, μ) 的某些函数在 $\mu = \sqrt{c}$处取值而得到的，这些函数在 $\mathbb{T} \times (-\mu_1, \mu_1)$ 中定义良好、解析且单调，见 (4.36)、(4.51)、(4.57)。因此，我们希望对所有 $c \in [0, 4\tau)$，平方根 $\sqrt{c}$ 都属于这些解析函数的定义域 $(-\mu_1, \mu_1)$，而当 $4\tau \le \mu_1^2$时这一点成立。

关于参数 τ，还有另外两个条件需要考虑。第一个是 (1.9)：当 τ小于集合 $\mathcal{N} \setminus \mathcal{N}'$上压力 P的下确界时，该条件成立。由于 $P(x, y, z) = p(\rho, z) = \frac{1}{4}\alpha(\rho, z)$（见 (3.2)），根据 $\mathcal{N}$和 $\mathcal{N}'$的定义 (3.1)，可知该下确界仅取决于 δ。关于 τ 的最后一个条件出现在 (4.61) 之后，我们在那里说：“如有必要，取一个更小的 I^*

”，以得到 $\mathcal{R}(I)$ 关于 $[0, I^*$严格递增。”由于函数 $\mathcal{R}$ 不依赖于任何参数，因此该条件可写成 $I^* \le I_0$，其中 $I_0 > 0$是某个普适常数。此外，在 (3.56) 中用 τ 表示 I^* 的可逆函数 h_1 也不依赖于任何参数（见 (3.55) 中 h_1 的定义及其在 (4.49) 中的展开），因此当 τ 小于某个普适常数时，关于 τ 的这一条件便满足。

关于 ε，唯一需要考虑的条件是 $0 < \varepsilon \le \tau/3$，见 (1.9) 后的内容。

总之，参数 δ、τ 和 ε 必须满足

$$0 < \delta \le \delta_0, \quad 0 < \tau \le \tau_0(\delta), \quad 0 < \varepsilon \le \tau/3,$$

其中 δ_0 是一个普适常数，而 $\tau_0(\delta)$ 仅取决于 δ。我们固定 $\delta = \delta_0$ 和 $\tau = \tau_0(\delta_0)$。δ_0 和 $\tau_0(\delta_0)$ 都是普适常数。我们将 τ_0 重命名为 $= \tau_0(\delta_0)$，并将 ε_0 重命名为 $= \tau_0/3$。由于 $\tau = \tau_0$，由 (3.56) 可知，I^* 也是一个普适常数。

为方便记号，我们记

$$\mathcal{K}(I) := \frac{1}{4} h(I).$$

因此，由 (3.67) 和 (3.6)，$\Omega_1(I) = \frac{1}{4}\omega(\frac{1}{4}h(I))h'(I) = \omega(\mathcal{K}(I))\mathcal{K}'(I)$；由 (4.58) 和 (4.48) ，

$$\mathcal{K}(I) = \frac{1}{4}\Big(4I + 256\frac{1065}{2^{16}}I^3 + O(I^4)\Big) = I + \frac{1065}{1024}I^3 + O(I^4);$$

(3.76) 变为 $P(\Phi(\sigma, \beta, I)) = \mathcal{K}(I)$。对于所有 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$，定理 1.1 的证明即告完成 .

致谢。本文得到 PRIN 2020XB3EFL 项目“哈密顿量与色散偏微分方程”的支持。

参考文献

[1] V.I. Arnold, *Sur la topologie des écoulements stationnaires des fluides parfaits*, 巴黎科学院院报, 261 (1965), 17-20。[2] V.I. Arnold, *l'hydrodynamique des fluides parfaits* 16 1966 1, 319 361 , Ann. Inst. Fourier（Grenoble）（），第 - 期。[3] P. Baldi, R. Montalto, *Quasi-periodic incompressible Euler flows in 3D*, Advances in Math. 384（2021），107730。[4] P. Constantin, J. La, V. Vicol, *Remarks on a paper by Gavrilov: Grad-Shafranov equations, steady solutionsof the three dimensional incompressible Euler equations with compactly supported velocities, and applications*, Geom. Funct. Anal.（GAFA）29（2019），第6期，1773-1793。[5] N. Crouseilles, E. Faou, *Quasi-periodic solutions of the 2D Euler equation*, Asympt. Anal. 81（2013），31-34。[6] A. Enciso, D. Peralta-Salas, F. Torres de Lizaur, *in dimensions two and higher* 2209 09812 , 预印本, arXiv: . . [7] A.V. Gavrilov, *A steady Euler flow with compact support*, Geom. Funct. Anal.（GAFA）29（2019），第1期，190-197。[8] B. Khesin, S. Kuksin, D. Peralta-Salas, *KAM theory and the 3D Euler equation*, Advances in Math. 267（2014），498-522。[9] G. Koch, N. Nadirashvili, G.A. Seregin, V. ˇSver´ak, , 《Acta Math.》（），第 - 期。[10] D. Peralta-Salas, R. Slobodeanu, *A Liouville-type theorem for the 3D primitive equations*, 预印本, arXiv:2211.09573。

Quasi-periodic solutions to the incompressible Euler equations

Liouville theorems for the Navier-Stokes equations and applications 203 2009 1, 83 105

Pietro Baldi

“R. Caccioppoli”数学与应用系 那不勒斯费德里科二世大学

琴蒂亚街，80126那不勒斯，意大利

pietro.baldi@unina.it