arXiv:2302.02995v3 [math.CO] 6 Nov 2023

关于路径宽度和最长路径的树深度紧界

MEIKE HATZEL、GWENAËL JORET、PIOTR MICEK、MARCIN PILIPCZUK、TORSTEN UECKERDT 和BARTOSZ WALCZAK

摘要。我们证明，每个路径宽度严格小于 a 且不含以 2^b 个顶点构成的路径作为子图的图，其树深度至多为 $10ab$。该界在相差一个常数因子的意义下是最佳的。

1. 引言

树宽度（tw）、路径宽度（pw）和树深度（td）是图中最著名、研究最广泛的结构宽度参数之一。对于任意图 G，它们满足不等式 $\mathsf{tw}(G) + 1 \leqslant \mathsf{pw}(G) + 1 \leqslant \mathsf{td}(G)$。此外，树的树宽度为 1，而路径宽度可以任意大；路径的路径宽度为 1，而树深度可以任意大。

树深度可由路径的最大长度近似[1]：每个包含ℓ顶点路径的图，其树深度都大于 $\log_2 \ell$；而不包含此类路径的每个图，其树深度都小于 ℓ [7, 第 6] 节。类似地，路径宽度可由完全二叉树子式的最大高度近似：每个包含高度为 h 的完全二叉树子式的图，其路径宽度至少为 $\lfloor \frac{h}{2} \rfloor$ [9]；而不包含此类子式的每个图，其路径宽度为 $\mathcal{O}(2^h)$ [1]。对于这两个参数，下界与上界之间的指数差距都无法避免，完全图就是例证。树宽度可由网格子式的最大规模近似，但此处的差距是多项式级的：每个包含 $k \times k$ 网格子式的图，其树宽度至少为 k [8]；而不包含此类子式的每个图，其树宽度为 k [2]的多项式。

Kawarabayashi 和 Rossman [6] 证明了：上述三种障碍分别排除后，树深度可以用多项式差距进行近似：任何不含 $k \times k$ 网格子式、不含高度为 k 的完全二叉树子式且不含 2^k个顶点的路径的图，其树深度都是 k中的多项式。更具体地说，他们证明了，任何树宽小于 k 、不含高度为 k 的完全二叉树子式且不含 2^k个顶点的路径的图，其树深度为 $\mathcal{O}(k^5 \log^2 k)$。下面给出这一结论的改进，以及一个联系路径宽度和树宽度的类似结果：

定理 1 (Czerwiński、Nadara、Pilipczuk [3][2])**：** 任何树宽小于 t 、不含高度为 h 的完全二叉树作为子式且不含 2^b个顶点的路径的图，其树深度为 $\mathcal{O}(thb)$。

定理 2 (Groenland、Joret、Nadara、Walczak [5])**：** 任何树宽小于 t 、不含高度为 h 的完全二叉树作为子式的图，其路径宽度为 $\mathcal{O}(th)$。

我们完成了这一图景，证明了一个类似的结果，揭示树深度与路径宽度之间的关系 .

定理 3. 任何路径宽度小于 a 且不含 2^b-顶点路径的图，其树深度至多为 $10ab$。

M. Hatzel 获联邦教育与研究部（BMBF）资助，并获得德国学术交流中心（DAAD）IFI 项目奖学金。G. Joret 获比利时国家科学研究基金（FNRS）的 CDR 资助、FNRS 的 PDR 资助，以及瓦隆-布鲁塞尔国际机构（WBI）的资助。P. Micek 获波兰国家科学中心资助，项目编号为 2018/31/G/ST1/03718。B. Walczak 部分获波兰国家科学中心资助，项目编号为 2019/34/E/ST6/00443。M. Pilipczuk 的研究是一个项目的一部分，该项目获得了欧洲研究理事会（ERC）在欧洲联盟地平线 2020 研究与创新计划下通过资助协议 714704 提供的资助。[1]本文仅研究非诱导路径。[2]在 [3], 中，该界限是在特殊情形 $t = h = b$下陈述的，但证明适用于一般情形。

显然，定理 2 和3 推出了定理 1。另一方面，定理 1 表明，任何路径宽度小于 a 且不含 2^b-顶点路径的图，其树深度为 $\mathcal{O}(a^2b)$。这是因为每个路径宽度小于 a 的图，其树宽度小于 a，且不含高度为 $2a$ 的完全二叉树作为子式。在 [5], 中，有人猜想树深度的上界可以降低到 $\mathcal{O}(ab)$，而定理 3 则证明了这一猜想。

我们指出，定理 3 中的界在常数因子范围内是紧的，理由如下。设 b 和 c 为满足 $b > c \geqslant 1$ 的整数，并令 $a = 2^c$。考虑图 G：它由一条含有 2^{b-c} 个顶点的路径构成，将每个顶点替换为一个含有 $\frac{a}{2} = 2^{c-1}$ 个顶点的团，并将每条边替换为这两个团之间的完全二部图。于是 $\mathsf{pw}(G) = a - 1$。此外，G 有 2^{b-1} 个顶点，因此不含 2^b 顶点路径。可以验证，G 的树深度至少为 $\frac{a}{2}(b-c)$；当 $b \gg c$ 时，这大约为 $ab/2$。文献 [5] 证明，定理 2 中的界在常数因子范围内也是紧的。定理 1 中的界能否改进，仍是一个未解决问题。

2. 预备知识

本文中的所有图都是有限简单图，即没有环或平行边。本文中的所有对数均以 2 为底。

一棵有根树 是指定一个顶点为根的树。一片有根森林 是若干有根树的不相交并。我们将有根森林 F 的高度 定义为从根到叶的路径上顶点数的最大值。在有根森林 F 中，如果顶点 u 位于从根到顶点 v 的（唯一）路径上，则称顶点 u 是顶点 v 的祖先。若有根森林 F 满足 $V(F) = V(G)$，且对于图 G 的每条边 uv，顶点 u 和 v 中有一个是另一个在 F 中的祖先，则称 F 是图 G 的消去森林。图 G的树深度 记为 $\mathsf{td}(G)$，定义为图 G的消去森林的最小高度。

图 G 的树分解 是一个二元组 $(T, \mathcal{B})$，满足 T 是一棵树，其顶点称为节点，且$\mathcal{B}$是一个集合族$\{B_t\}_{t \in V(T)}$，由 $V(G)$ 的子集构成，称为袋，并以 T的节点为索引，满足以下条件：

(1) 对于每条边 $uv \in E(G)$，都存在一个同时包含 u 和 v 的袋；(2) 对于每个顶点 $v \in V(G)$，满足 $v \in B_t$ 的节点 $t \in V(T)$ 的集合在 T 中诱导出一棵非空子树。

树分解的宽度 是一个袋的最大大小减 1。图 G 的树宽度 记为 $\mathsf{tw}(G)$，定义为 G 的树分解的最小宽度。路径分解 和路径宽度 的概念类似地定义，额外条件是树T 为一条路径。G 的路径宽度记为 $\mathsf{pw}(G)$。

图 G 的两个顶点子集 A 和 B 之间的 k-连接 是 G 的一个子图，由 k 条顶点不相交路径组成，每条路径都从 A 中的一个顶点开始，并在 B 中的一个顶点结束。（如果 A 和 B 相交，则 A 与 B 之间的 k-连接中的一条路径可以只由 $A \cap B$ 中的一个顶点组成。）图 G 的路径分解 $(P, \mathcal{B})$ 如果对于任意两个节点 t, $t' \in V(P)$，都存在一个 k-连接，在 B_t 与 $B_{t'}$ 之间，其中 k 是路径上从 t 到 t' 的节点 s 所对应的袋 B_s 的最小大小；则称其为相连的。我们使用以下事实：总是存在一个最小宽度且相连的路径分解。

定理 4 (Erde [4, 定理 5。8])。每个图 G 都有一个宽度为 $\mathrm{pw}(G)$的链式路径分解。

3. 证明

我们接下来证明 定理3：每个路径宽度小于 a 且不包含 2^b-顶点路径的图，其树深度至多为 $10ab$。

设 G 是一个图，满足 $\mathsf{pw}(G) < a$，且不包含一条以 2^b 个顶点为端点的路径。若 $2^b < 2a$，则考虑 G 的一个深度优先搜索森林（它是 G 的一个消去森林），即可轻易看出定理的结论成立。其高度小于 2^b，而 2^b 小于 $2a$。因此，

$\mathsf{td}(G) < 2a < 10ab$。因此，我们可以假设 $2^b \geqslant 2a$。这个不等式将在证明的最后一步用到。

固定一个链接路径分解 $(P, \mathcal{B})$，它是 G，满足 $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t \in V(P)}$，并且 $|B_t| \leqslant a$ 对于每个节点 $t \in V(P)$；根据定理 4，这样的链接路径分解存在。我们认为节点沿着 P 从左向右排列。对于节点集合 $X \subseteq V(P)$，令

$$B(X) = \bigcup_{t \in X} B_t.$$

我们将 P 的任意子路径的节点集合称为一个区间。对于区间 I，令

$$\mathsf{level}(I) = \min\{|B_t| \mid t \in I\} \qquad \text{and} \qquad \mathsf{int}(I) = B(I) - B(V(P) - I).$$

Thus, I 中的节点袋：对于每个 $k \in \{1, \ldots, a\}$，以及每个包含关系极大的区间 I^*（其层级$(I^*) \geqslant k$），我们固定 k-链，连接 I^*中最左侧节点和最右侧节点的袋，并令$\mathcal{L}_k^*(I^*)$为该 k-链的顶点集。对于每个 $k \in \{1, \ldots, a\}$ 以及每个区间 I（其层级$(I) \geqslant k$），令$\mathcal{L}_k(I) = \mathcal{L}_k^*(I^*) \cap B(I)$，其中 I^* 是包含 I且层级$(I^*) \geqslant k$的唯一包含关系极大的区间。我们记下集合$\mathcal{L}_k(I)$的以下性质，以备后续参考：

$$\mathcal{L}_k(I) \subseteq B(I), \tag{1}$$

$$\mathcal{L}_k(I') \subseteq \mathcal{L}_k(I) \qquad \text{for every interval } I' \subseteq I, \tag{2}$$

$$|\mathcal{L}_k(I) \cap B_t| \geqslant k \qquad \text{for every node } t \in I, \tag{3}$$

$$|\mathcal{L}_k(I)| < k \cdot 2^b. \tag{4}$$

我们描述一个迭代过程，在此过程中构造一棵有根树 T，其顶点均包含于 $V(G)$ 中，但根除外；根是特殊顶点 $r^* \notin V(G)$。初始树 T仅包含根 r^*。我们分轮次扩展树 T，每一轮将由 G 中的某些尚未属于 T的顶点形成的新路径附加到树上。我们维护以下不变量：$T - r^*$ 是相应诱导子图的消去森林，其中，对于 $V(T) - \{r^*\}$ 中的任意两个在 G中相邻的顶点，一个是另一个在 T中的祖先。当 T 包含 G的所有顶点时，该过程结束，此时 $T - r^*$ 是 G的消去森林。

一种简单的轮次方案是找到一个袋 B_t，移除它后，G 中的某个与最大路径长度的对数成正比的度量会减半。然后，在将B_t 作为一条路径加入 T 后，我们就可以从 B_t 中当前作为 T叶的顶点出发，在$G - B_t$ 两侧分别独立地继续扩展 T。这种方法过于简单，无法奏效，但它启发了我们的实际方案。

对于上述树 T 和区间 I，我们采用以下记号。令 $\ell = \mathsf{level}(I)$。对于每个 $k \in \{1, \ldots, \ell\}$，我们定义

$$x_k(I, T) = |(\mathsf{int}(I) \cap \mathcal{L}_k(I)) - V(T)| \qquad \text{and} \qquad w_k(I, T) = \sum_{i=1}^{k} \log(x_i(I, T) + 1).$$

以下“单调性”性质可由（2）直接推出：

$$\text{if } I' \subseteq I \text{ and } V(T') \supseteq V(T), \text{ then } x_k(I', T') \leqslant x_k(I, T) \text{ and } w_k(I', T') \leqslant w_k(I, T), \tag{5}$$

Furthermore, it follows from (4) that for every $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ we have $x_i(I, T) < i \cdot 2^b$, and hence

$$w_\ell(I, T) \leqslant \sum_{i=1}^{\ell} \log(i \cdot 2^b) = b\ell + \log(\ell!), \tag{6}$$

$$w_\ell(I, T) - w_k(I, T) \leqslant \sum_{i=k+1}^{\ell} \log(i \cdot 2^b) = b(\ell - k) + \log\left(\frac{\ell!}{k!}\right) \qquad \text{for every } k \in \{1, \ldots, \ell\}. \tag{7}$$

为方便记号，我们还定义 $w_i(\emptyset, T) = 0$。

对于过程中某个时刻加入树 T 的顶点 v（属于 G），令 $\mathsf{depth}(v)$ 表示树 G 中从 r^* 到 v 的路径上顶点的数量（因此计数时不包括 r^*）。

由于我们总是通过添加新的叶子顶点来扩充树 T，因此 $\mathsf{depth}(v)$ 在 v 被加入 T 时便已确定，并在整个过程中保持不变。

在上述构造树 T 的迭代过程中，我们维护

- P 的节点 X 集合，以及不变量 $B(X) \subseteq V(T)$；
- 包含于 $V(P) - X$ 中且关于包含关系极大的区间族 $\mathcal{I}$；
- 对于每个区间 $I \in \mathcal{I}$，在 T 中维护一个指定顶点 v_I。

我们还维护以下不变量：

不变量 1. 对于每个区间 $I \in \mathcal{I}$，从根 r^* 到 v_I 的路径包含$B(I) \cap V(T)$中的每个顶点。

不变量 2. 对于每个区间 $I \in \mathcal{I}$ 以及 $\ell =$ 层级(I)，我们有

$$\tfrac{1}{5}\operatorname{depth}(v_I) + w_\ell(I,T) \leqslant (b+1)\ell + \log(\ell!).$$

前者使我们能够维持不变量：$T - r^*$ 是 G对应诱导子图的消去森林；后者则有助于我们界定 T的高度。

初始时，树 T仅包含根 r^*，集合 X 为空，$\mathcal{I} = \{I\}$，其中 $I = V(P)$，且 $v_I = r^*$。对于这一初始设置，根据事实 $B(I) \cap V(T) = \emptyset$，不变量 1 成立；而根据 (6) 以及事实 $\mathsf{depth}(v_I) = 0$，不变量 2 成立。

每一轮都要选择一个任意区间 $I \in \mathcal{I}$，并向 X添加一或两个I 节点。因此，区间 I 会在$\mathcal{I}$ 中被至多三个真子区间取代。

现在，我们描述单轮次的具体细节。选取一个区间 $I \in \mathcal{I}$。令

$$\ell = \operatorname{level}(I) \qquad \text{and} \qquad m = \max(\{0\} \cup \{i \in \{1,\dots,\ell\} \mid \mathcal{L}_i(I) - V(T) = \emptyset\}).$$

由此可得

$$\text{for every node } t \in I, \text{ at least } m \text{ vertices of } B_t \text{ are already in } T. \tag{8}$$

事实上，当 $m = 0$ 时，此结论成立；当 $m > 0$ 时，则由（3）以及$\mathcal{L}_m(I)$ 中的所有顶点都已属于 T这一事实可得。对于每个 $i \in \{1,\dots,\ell\}$，由于 $\mathcal{L}_i(I) - \operatorname{int}(I)$ 中的每个顶点都属于 I 在 P中的某个邻点的袋，而该邻点属于 X，因此有

$$\mathcal{L}_i(I) - V(T) \subseteq \mathcal{L}_i(I) - B(X) \subseteq \operatorname{int}(I). \tag{9}$$

令 $k = \ell - m$。（我们可能有 $m = \ell$和 $k = 0$。）对于每个 $i \in \{m+1,\dots,\ell\}$，由（9）可得 $x_i(I,T) = |\mathcal{L}_i(I) - V(T)| \geqslant 1$。由此可得

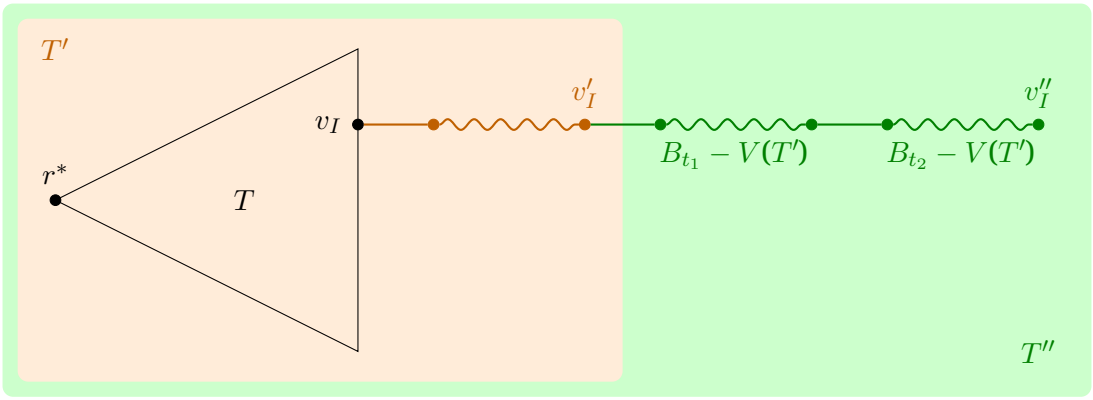
$$w_\ell(I,T) = \sum_{i=1}^{\ell} \log(x_i(I,T)+1) \geqslant \sum_{i=m+1}^{\ell} \log(x_i(I,T)+1) \geqslant \ell - m = k. \tag{10}$$

从集合 $\mathcal{L}_i(I) - V(T)$ 中，每个 $i \in \{m+1,\dots,\ell\}$ 选取一个顶点，并将这些至多 k 个顶点作为一条路径添加到 T 中，使其一端连接到 v_I。也就是说，将第一个顶点添加为 v_I 的子节点，之后的每个顶点都添加为前一个顶点的子节点。若 $k \geqslant 1$，令 v_I' 为这条路径上最后添加的顶点（即另一端的顶点）；若 $k = 0$，则令 $v_I' = v_I$。令 T' 表示所得的增广树。

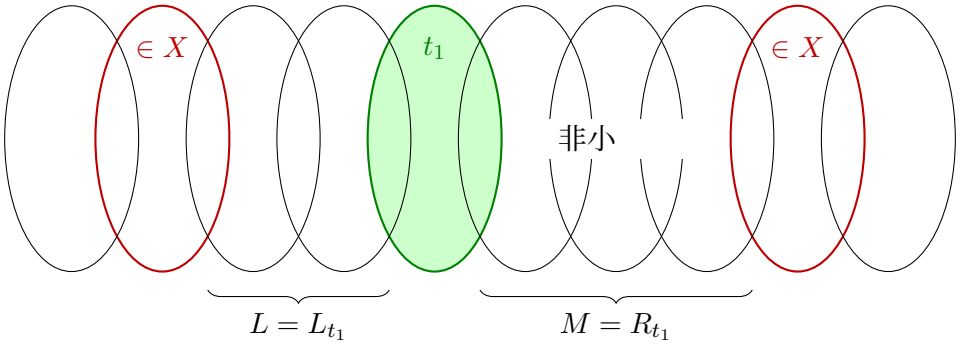
称节点 $t \in I$ 为小节点，若 $|B_t| \leqslant \ell + k$。根据 层级(I) 的定义，I 中至少有一个节点是小节点。由（8）可得

$$\text{for each small node } t \in I, \text{ at most } \ell + k - m = 2k \text{ vertices of } B_t \text{ are not yet in } T'. \tag{11}$$

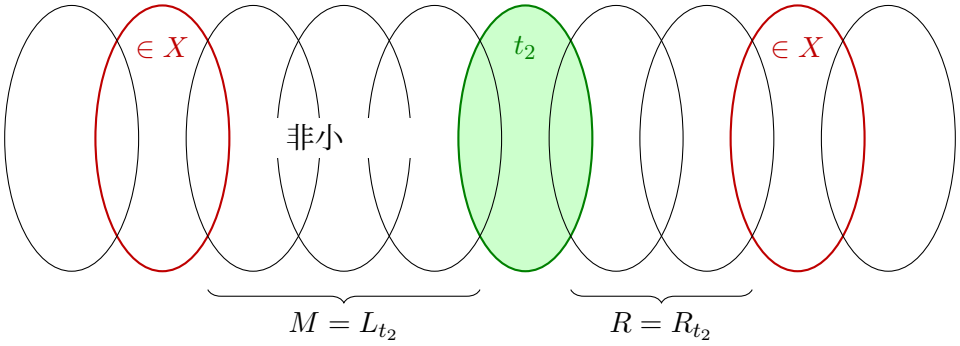
回想一下，我们认为 I 是从左到右排列的。对于每个节点 $t \in I$，令 L_t 和 R_t 分别表示 I 中位于 t 左侧和右侧的节点集合，因此 $I = L_t \cup \{t\} \cup R_t$。如果对于每个小节点 $t \in I$，$w_\ell(L_t,T') \leqslant w_\ell(R_t,T')$，那么令 t_1 为 I 中最右边的小节点，并令 $L = L_{t_1}$ 和 $M = R_{t_1}$。类似地，如果对于每个小节点 $t \in I$，$w_\ell(L_t,T') > w_\ell(R_t,T')$，那么令 t_2 为 I 中最左边的小节点，并令 $M = L_{t_2}$ 和 $R = R_{t_2}$。否则，令 t_1 为 I 中满足 $w_\ell(L_{t_1},T') \leqslant w_\ell(R_{t_1},T')$ 的最右边小节点，并令 t_2 为 I 中满足 $w_\ell(L_{t_2},T') > w_\ell(R_{t_2},T')$ 的最左边小节点。在这种情况下，根据 (5)，t_1 和 t_2 按此顺序出现



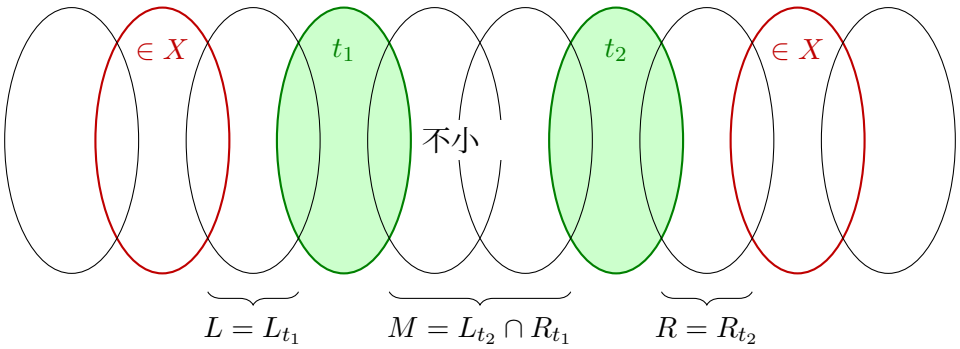
如果对于每个小节点 $t \in I$，$w_\ell(L_t, T') \leqslant w_\ell(R_t, T')$:



对于每个小节点 $t \in I$，若 $w_\ell(L_t, T') > w_\ell(R_t, T')$:



否则:



从左到右排列，且它们之间没有小节点。现在，令 $L = L_{t_1}$、 $R = R_{t_2}$ 和 $M = R_{t_1} \cap L_{t_2}$ （即， M 是严格位于 t_1 和 t_2 之间的节点集合）。见图。

每当 t_1 和 t_2 有定义时，我们就将它们加入 X。我们从 $\mathcal{I}$ 中移除 I；每当 L、M 和 R 都有定义且非空时，我们就将它们作为新区间加入 $\mathcal{I}$。

现在，我们将 $B_{t_1} - V(T')$ 和 $B_{t_2} - V(T')$ 中的顶点（只要 t_1 或 t_2 有定义）作为一条路径加入 T'，并将路径的一端连接到 v'_I。也就是说，第一个这样的顶点是 v'_I 的子节点，之后的每个顶点都是前一个顶点的子节点。注意，集合 $B_{t_1} - V(T')$ 和 $B_{t_2} - V(T')$ 可能都为空；特别是，当 $k = 0$ 时就会出现这种情况。若至少加入了一个顶点，令 v''_I 为最后加入的顶点；否则令 $v''_I = v'_I$。令 T'' 表示新树。由 (11)，我们至多额外加入了 $4k$ 个顶点，因此

$$\operatorname{depth}(v''_I) \leqslant \operatorname{depth}(v'_I) + 4k = \operatorname{depth}(v_I) + 5k. \tag{12}$$

每当 L、 M 或 R 有定义且非空时，我们就将相应的顶点 v_L、 v_M 或 v_R 设为 v''_I。由 I 的 Inv. 1 可知，从 r^* 到 v''_I 的路径包含 $B(I) \cap V(T'')$ 中的每个顶点，由此可得 L、 M 和 R 的 Inv. 1（当它们有定义且非空时）。

在验证 Inv. 2之前，我们先概括 L、 M 和 R 的关键性质。若 L 有定义且非空（因此 $L = L_{t_1}$），则令 $L = R_{t_1}$。若 R 有定义且非空（因此$R = R_{t_2}$），则令 $R = L_{t_2}$。只要相应的集合有定义，就有

$$w_\ell(L, T') \leqslant w_\ell(\overline{L}, T') \qquad \text{and} \qquad w_\ell(R, T') \leqslant w_\ell(\overline{R}, T'), \tag{13}$$

$$w_\ell(M, T'') \leqslant w_\ell(I, T), \tag{14}$$

$$\operatorname{level}(M) \geqslant \ell + k + 1, \tag{15}$$

其中（14）由（5）推出，而（15）成立是因为 M 中没有小节点。

对于 $w_\ell(L, T'')$ 和 $w_\ell(R, T'')$，也有类似于（14）的界，但我们需要一个更强的界。首先考察区间 L；对区间 R 的论证是对称的。对于 $i \in \{1, \ldots, \ell\}$，我们比较 $x_i(I, T)$ 与 $x_i(L, T')$ 和 $x_i(\overline{L}, T')$。注意，$\operatorname{int}(L)$ 与 $\operatorname{int}(L)$ 顶点不相交，且都包含于 $\operatorname{int}(I)$ 中。根据（2），对于每个 $i \in \{1, \ldots, \ell\}$，都有 $\mathrm{L}_i(L) \subseteq \mathrm{L}_i(I)$ 且 $\mathrm{L}_i(L) \subseteq \mathrm{L}_i(I)$。对于每个 $i \in \{m+1, \ldots, \ell\}$，我们将 $\mathrm{L}_i(I) - V(T)$ 中的一个顶点放入 T'；根据（9），该顶点属于 $\operatorname{int}(I)$。由此性质（1）以及 x_i 的定义可得，对于每个 $i \in \{1, \ldots, \ell\}$，都有

$$x_i(I, T) \geqslant \begin{cases} x_i(L, T') + x_i(\overline{L}, T') & \text{if } i \leqslant m, \\ x_i(L, T') + x_i(\overline{L}, T') + 1 & \text{if } i > m. \end{cases}$$

由于 $x_i(L, T')$ 和 $x_i(\overline{L}, T')$ 均为非负数，因此可得

$$x_i(I, T) + 1 \geqslant \begin{cases} x_i(L, T') + x_i(\overline{L}, T') + 1 \geqslant \frac{1}{2}(x_i(L, T') + x_i(\overline{L}, T') + 2) & \text{if } i \leqslant m, \\ x_i(L, T') + x_i(\overline{L}, T') + 2 & \text{if } i > m. \end{cases} \tag{16}$$

回想起 $k = \ell - m$，我们计算得

$$\begin{aligned} w_\ell(I, T) &= \sum_{i=1}^{\ell} \log(x_i(I, T) + 1) \\ &\geqslant \sum_{i=1}^{\ell} \log(x_i(L, T') + x_i(\overline{L}, T') + 2) - m && \text{by (16)} \\ &\geqslant \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\log(x_i(L, T') + 1) + \log(x_i(\overline{L}, T') + 1)}{2} + \ell - m && (*) \\ &= \tfrac{1}{2}(w_\ell(L, T') + w_\ell(\overline{L}, T')) + k \\ &\geqslant w_\ell(L, T') + k && \text{by (13)} \\ &\geqslant w_\ell(L, T'') + k && \text{by (5)}, \end{aligned}$$

其中，在 (∗) 中，我们使用了不等式 $\log(x+y) = \log \frac{x+y}{2} + 1 \geqslant \frac{1}{2}(\log x + \log y) + 1$，该不等式由对数函数的凹性得出。由此以及对 R 的类似论证，我们得出

$$w_\ell(L, T'') + k \leqslant w_\ell(I, T) \qquad \text{and} \qquad w_\ell(R, T'') + k \leqslant w_\ell(I, T). \tag{17}$$

现在，我们可以验证不变量 2对区间 L、 R和 M （当它们有定义且非空时）。我们有

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{5}\operatorname{depth}(v_L) + w_{\operatorname{level}(L)}(L, T'') \\
&\quad\leqslant \tfrac{1}{5}\operatorname{depth}(v_I) + k + w_\ell(L, T'') + b(\operatorname{level}(L) - \ell) + \log\left(\frac{\operatorname{level}(L)!}{\ell!}\right) && \text{by (12) and (7)} \\
&\quad\leqslant \tfrac{1}{5}\operatorname{depth}(v_I) + w_\ell(I, T) + b(\operatorname{level}(L) - \ell) + \log\left(\frac{\operatorname{level}(L)!}{\ell!}\right) && \text{by (17)} \\
&\quad\leqslant (b+1)\ell + \log(\ell!) + b(\operatorname{level}(L) - \ell) + \log\left(\frac{\operatorname{level}(L)!}{\ell!}\right) && \text{by Inv. 2 for } I \\
&\quad\leqslant (b+1)\operatorname{level}(L) + \log(\operatorname{level}(L)!).
\end{aligned}$$

将 L 替换为 R 后，完全相同的界仍然成立。最后，对于 M，我们有

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{5}\operatorname{depth}(v_M) + w_{\operatorname{level}(M)}(M, T'') \\
&\quad\leqslant \tfrac{1}{5}\operatorname{depth}(v_I) + k + w_\ell(M, T'') + b(\operatorname{level}(M) - \ell) + \log\left(\frac{\operatorname{level}(M)!}{\ell!}\right) && \text{by (12) and (7)} \\
&\quad\leqslant \tfrac{1}{5}\operatorname{depth}(v_I) + k + w_\ell(I, T) + b(\operatorname{level}(M) - \ell) + \log\left(\frac{\operatorname{level}(M)!}{\ell!}\right) && \text{by (14)} \\
&\quad\leqslant (b+1)\ell + \log(\ell!) + k + b(\operatorname{level}(M) - \ell) + \log\left(\frac{\operatorname{level}(M)!}{\ell!}\right) && \text{by Inv. 2 for } I \\
&\quad\leqslant (b+1)\ell + \operatorname{level}(M) - \ell + b(\operatorname{level}(M) - \ell) + \log(\operatorname{level}(M)!) && \text{by (15)} \\
&\quad= (b+1)\operatorname{level}(M) + \log(\operatorname{level}(M)!).
\end{aligned}$$

至此，我们完成了对区间 I的一轮处理， T'' 成为新的树 T。我们已经证明两个不变量不变量 1和不变量 2都得以保持。

当 G 的所有顶点都已加入 T 时，处理便结束。接下来需要证明 $T - r^*$ 是 G 的一个消去森林，且高度至多为 $10ab$。要证明它是一个消去森林，注意：在考虑区间 I 时，将顶点 $v \in \operatorname{int}(I)$ 加入 T，根据不变量 1， v 在 G 中且已经位于 T 中的所有邻点，都在 T 中从 r^* 到 v 的路径上；这是因为根据路径分解的定义， v 在 G 中的邻居属于 $B(I)$。

森林 $T - r^*$ 的高度等于 $\max\{\text{深度}(v) \mid v \in V(G)\}$。设 v 是G的一个顶点。考虑在该过程中将 v 添加到 T的时刻。设这发生在处理层级为 $\operatorname{level}(I) = \ell$的区间 I 时。设 m 和 k 是处理 I时确定的值。显然，我们有深度$(v) \leqslant$ 深度(v_I'')以及 $\ell \leqslant a$。因此，

$$\begin{aligned}
\operatorname{depth}(v) &\leqslant \operatorname{depth}(v_I'') \\
&\leqslant \operatorname{depth}(v_I) + 5k && \text{by (12)} \\
&\leqslant \operatorname{depth}(v_I) + 5w_\ell(I, T) && \text{by (10)} \\
&\leqslant 5(b+1)\ell + 5\log(\ell!) && \text{by Inv. 2} \\
&\leqslant 5(b+1)a + 5\log(a!) \\
&\leqslant 5ab + 5a\log a + 5a.
\end{aligned}$$

回顾 $2^b \geqslant 2a$，从而 $\log(2a) = \log a + 1$。于是

$$\operatorname{depth}(v) \leqslant 5ab + 5a\log a + 5a \leqslant 10ab.$$

由此可得， $T - r^*$ 是 G 的一个消去森林，其高度至多为 $10ab$，正如所需。

致谢

本研究是在2021年9月于达格施图尔举办的“算法、组合学与逻辑中的稀疏性”研讨会上完成的。我们感谢组织者和研讨会参与者营造了富有成效的工作氛围。我们特别感谢 Marthe Bonamy、Marcin Briański、Kord Eickmeyer、Wojciech Nadara、Ben Rossman、Blair D. Sullivan 和 Alexandre Vigny 就本文主题进行的初步讨论。我们也感谢一位匿名审稿人指出本文先前版本中的一处错误。

参考文献

[1] Dan Bienstock、Neil Robertson、Paul Seymour 和 Robin Thomas。快速排除一个森林。组合理论杂志B辑，52(2)：274–283，1991。 [2] Chandra Chekuri 和 Julia Chuzhoy。网格次图定理的多项式界。ACM学报，63(5)：文章 40，2016。arXiv:1305.6577。 [3] Wojciech Czerwiński、Wojciech Nadara 和 Marcin Pilipczuk。树深度排除次图近似的改进界。SIAM离散数学杂志，35(2)：934–947，2021。arXiv:1904.13077。 [4] Joshua Erde。对相连树分解与瘦树分解的统一处理。组合理论杂志B辑，130：114–143，2018。arXiv:1703.03756。 [5] Carla Groenland、Gwenaël Joret、Wojciech Nadara 和 Bartosz Walczak。小树宽图的路径宽度近似。ACM算法汇刊，19(2)：文章 16，2023。arXiv:2008.00779。 [6] Ken-ichi Kawarabayashi 和 Benjamin Rossman。树深度的多项式排除次图近似。欧洲数学学会杂志，24(4)：1449–1470，2022。 [7] Jaroslav Nešetřil 和 Patrice Ossona de Mendez。稀疏性，算法与组合学第 28 卷。施普林格，柏林、海德堡，2012。 [8] Neil Robertson 和 Paul D. Seymour。图次图。V. 排除平面图。组合理论杂志B辑，41(1)：92–114，1986。 [9] Petra Scheffler。图的树宽作为衡量算法问题复杂性的指标。博士论文，德意志民主共和国科学院，柏林，1989。

(M. Hatzel) 日本国立信息学研究所，日本，东京 电子邮箱地址：
meikehatzel@nii.ac.jp

(G. Joret) 布鲁塞尔自由大学计算机科学系，比利时，布鲁塞尔 电子邮箱地址：
gwenael.joret@ulb.be

(P. Micek，B. Walczak) 雅盖隆大学理论计算机科学系、数学与计算机科学学院，波兰，克拉科夫 电子邮箱地址：
piotr.micek@uj.edu.pl，bartosz.walczak@uj.edu.pl

(M. Pilipczuk) 华沙大学信息学研究所，波兰，华沙 电子邮箱地址：
malcin@mimuw.edu.pl

(T. Ueckerdt) 卡尔斯鲁厄理工学院计算机科学系，德国，卡尔斯鲁厄 电子邮箱地址：torsten.ueckerdt@kit.edu