arXiv:2302.02996v1 [math.HO] 6 Feb 2023

A. K. Sushkevich 的六篇乌克兰语半群理论论文

由 C.-F.
Nyberg-Brodda 翻译成
英语
2023年2月7日

译者序

本书收录了 Anton Kazimirovich Sushkevich（1889年至1961年）以乌克兰语撰写的六篇论文的英语译文。据我所知，这些构成了 Sushkevich 以乌克兰语撰写的全部论文。这六篇论文的书目信息如下；每篇论文名称旁标注的页码，是该论文在本书译文中的页码。

[Sush1935a] （第6–11页）
A. K. Sushkevich，将半群扩展为一个群，《哈尔科夫数学会科学笔记》，**4**:12（1935年），第81–87页。

[Sush1935b] （第12–13页）
A. K. Sushkevich，关于一类广义群的若干性质，《哈尔科夫国立大学科学纪要》，**2–3**（1935年），第23–25页

[Sush1936] （第14–15页）
A. K. Sushkevich，广义群域中的研究，《哈尔科夫国立大学科学纪要》，**6–7**（1936年），第49–52页。

[Sush1937a] （第16–23页）
A. K. Sushkevich，关于秩为1的矩阵群，《乌克兰苏维埃社会主义共和国科学院数学研究所学报》，**3**（1937年），第83–94页。

[Sush1937b] （第24–33页）
A. K. Sushkevich，关于某些类型的奇异矩阵，《哈尔科夫州立大学科学纪要》，**10**（1951年），第5–16页。

[Sush1939] （第34–38页）
A. K. Sushkevich，某些类型无穷矩阵的广义群，哈尔科夫国立大学科学研究所与哈尔科夫数学学会纪要**16**（1939），第115–120页。

首先，我要感谢 C. Hollings（牛津大学）为我提供了乌克兰语原文的扫描件；这些扫描件原本极难获取，没有它们，这篇译文便无法完成。

我将尝试概述每篇文章。这并非易事；这些文章涵盖了半群理论中相当广泛的主题。阅读这些文章时，现代半群理论家（或者任何熟悉本科阶段抽象代数的人）只需了解以下定义。所有斜体词语都是 Sushkevich 使用的术语；所有性质均针对某个固定的半群 S 定义。

(1) *广义群*（或简称*群*！）是一个半群，也就是说，是一个配备了结合二元运算的集合，因此满足 Sushkevich 所称的*群性质*：集合中任意两个元素的乘积仍属于该集合。[1](2) *普通群* 是现代意义上的群。(3) *半群* 是现代意义上的消去半群，也就是说，在这样的半群中，对所有 $a, x, y \in S$，$ax = ay$ *蕴含* $x = y$（*左消去性质*），且 $xa = ya$*蕴含* $x = y$（*右消去性质*）。(4) *左侧／右侧唯一可逆律* 就是右／左消去性质（注意左右方向的颠倒）。(5) *左侧／右侧无限可逆律* 是指如下定律：对于固定元素 $a, b \in S$，方程$Xa = b$（分别为 $aX = b$）关于未知数 X 在 S 中有无穷多个解。

为强调第（1）点，Sushkevich 所说的*群*，指的是如今所谓的半群（即不要求任何元素具有逆元）。

用一句话概括，这些文章讨论的是*半群*的*基本性质*。这里的*基本*当然不是指容易。我指的是那些由一般性考察以及仅仅规定某个特定定律（除结合律之外）成立等条件所推出的性质。在 **[Sush1935a]** 和**[Sush1935b]**中，这一点尤其清楚；在后一篇文章中，Sushkevich 展示了满足右侧无限可逆律和左侧唯一可逆律的广义群的一些直接性质。

文章 **[Sush1935a]** 需要特别谨慎地处理。这是因为它的主要结果是错误的；Sushkevich 声称自己证明了一个用现代术语表述的命题：“任何消去半群都可以嵌入一个群”。然而，Mal'cev 在 1937年 给出了该命题的一个反例。我们主要请读者参阅 Hollings（《精密科学史档案》**68**:5 (2014), pp. 641–692），以了解相关参考文献以及这一主题中许多出人意料的曲折。Sushkevich 论证中的错误颇为隐晦，难以辨明；事实上，Hollings（依据 Kurosh 提供的解释）给出的错误解释也不完全准确。用现代术语来说，Sushkevich 的论证如下：设 M 是一个消去半群，并设 M 是M的一个反同构副本；也就是说，若 M的元素为 $A, B, \ldots$，则 M的元素为 $A, B, \ldots$；并且若 $A \cdot B = C$ 属于 M，则 $B \cdot A = C$ 属于 M。随后，Sushkevich 分别在这两个半群中添加一个单位元 E 和 E，并构造它们的幺半群自由积

[1]请注意，这种群性质体现了伽罗瓦定义群的方式——即一个在复合运算下封闭的排列集合。[2] Sushkevich 还将其称为*经典群*。事实上，Hollings 指出，尽管 Sushkevich 起初更倾向于使用*普通*一词，但“过了一段时间，[in 1937], 他建议使用*经典群*这一名称”（见 Hollings 的《精确科学史档案》*63:5*，2009年，第515页及第§5节）。然而，Hollings 没有注意到，在 **[Sush1939]** 中，Sushkevich 又改回使用*普通*一词，而不再使用*经典*。

$M * \overline{M}$，也就是将两个幺半群的单位元合并后得到的半群自由积。随后，Sushkevich 用关系 $aa = aa = E$（对所有 $a \in A$）对这个自由积取商。¯这样，他得到一个群，并将其称为 $G(M)$。[3] 由于 M 中的所有元素都可以表示为关于 A的字，Sushkevich 于是声称 M嵌入了 $G(M)$。但是遗憾的是，他从未验证表示 M 中不同元素的字在 $G(M)$中不会变得相同（事实上，Mal'cev 已证明他不可能做到这一点）。

事实上，若 M 由幺半群表示 $\mathrm{Mon}\langle A \mid u_i = v_i\ (i \in I)\rangle$ 定义，即 M 由某个集合 A 生成，并满足定义关系 $u_i = v_i$（对所有 $i \in I$），那么我们可以令 A 为一个与 A 一一对应的集合，并使得 $A \cap A = \varnothing$，并定义

$$M = \mathrm{Mon}\langle \overline{A} \mid \overline{u}_i^{\mathrm{rev}} = \overline{v}_i^{\mathrm{rev}}\ (i \in I)\rangle,$$

其中，$\overline{u}_i$ 是在新字母表 A上写出的词 u_i，而 ^{rev} 表示词反转（例如 $(abacb)^{\mathrm{rev}} = bcaba$）。那么 M 与 M反同构，而 Sushkevich 的"群"将具有如下表示：

$$G(M) = \mathrm{Mon}\langle A \mid u_i = v_i, \overline{u}_i^{\mathrm{rev}} = \overline{v}_i^{\mathrm{rev}}\ (i \in I), a\overline{a} = \overline{a}a = 1\ (\forall a \in A)\rangle.$$

当然，若 M 可嵌入群，则 M 必然嵌入 $G(M)$；事实上，在这种情况下，由 $A \mapsto A$ 诱导的自然同态是单射。但没有先验理由认为这个映射通常是单射，而且 Sushkevich 确实没有证明这一点。

尽管结论有误，文章 **[Sush1935a]** 仍然十分引人注目。文章清楚地展现了作者对半群表示及其与群表示之间关系的熟练掌握；在十多年后 Markov、Novikov 和 Adian 开展相关工作之前，这种水平在苏联文献中（实际上，在其他任何地方也）都未曾出现过。他还清楚地认识到自己的结果与抽象代数其他领域的关联，例如将整环嵌入域（见第 7 节）。

下一篇文章 **[Sush1936]**, 没有提出新的结果，而是总结了 Sushkevich 在哈尔科夫期间所做的研究。文章内容大多不言自明，但有一条令人费解、至少对我而言无法解释的注记格外引人注意。第二页提到了一项关于实值函数的结果，称其由"我的学生 M. Wojdysławski"证明。这几乎可以肯定指的是拓扑学家 Menachem（Maniek）Wojdysławski（1918–1942），一位波兰神童；1940 年，他曾师从 Stanisław Mazur 攻读博士学位。我没有找到任何资料表明他曾是 Sushkevich 的学生，因此，如果此事属实，这似乎是一条新信息；不过，我不知道这段师生关系发生在什么时候。犹太人 Wojdysławksi 在纳粹占领波兰期间，于消灭琴斯托霍瓦犹太人区的行动中遭到杀害。较为完整的传记，参见 Maligranda 与 Prytuła（*Wiad. Mat.***49**:1，2013 年，第 29–66 页，波兰语）。

最后三篇文章都讨论矩阵半群。我不打算做冗长的总结，因为其中的结果表述起来有些技术性，而文章本身则浅显易读。不过，我想提一下，这些文章都充分体现了优秀说书人的鲜明特质，尤其是 **[Sush1937a]**。文章先定义了一个看起来颇为深奥的乘积，然后通过一系列技术性论证证明它的性质。剧透警告：在最后一节 §7中，真相

[3]这里可以看到 Kurosh 不恰当的反对意见：Kurosh 并未看出 $G(M)$ 是一个群，甚至也未看出 $G(M)$ 满足结合律。然而，利用我通过自由积所作的重新表述，显然可以看出 $G(M)$ 是一个群——不过，也许从 Sushkevich 的原文中并不能看出这一点。

揭晓了。开篇定义的乘法其实就是一类特殊矩阵的矩阵乘法！此外，前几节中出现的某些群$\mathfrak{G}_{a,\ b}$被证明同构于最初所用域的所有非零平方根所构成的乘法群——定义非常直接！看过这段剧透后，再读一遍论文会成为一种愉快的体验。最后一篇文章**[Sush1939]**, 则探讨了一个相当不寻常的主题：无穷矩阵。

1997年，威廉·马格努斯（《美国数学月刊》**104**:3，第269页）写道：“数学家无论来自何处，都能彼此理解。 [...] 没有什么比数学界更具国际性。” Sushkevich 将这种精神体现得淋漓尽致，他用五种语言撰写文章：俄语、乌克兰语、英语、法语和德语。 **[Sush1936]**, 已有法语译本；我不怀疑这是 Sushkevich 本人所写，而且总体上写得很好（不过，值得一提的是，其中有一些遗憾的疏漏，例如第2页缺少一条脚注、漏掉了一些句子，以及参考文献目录中缺少若干条目）。 **[Sush1939]** 中还有一处有趣的笔误，这很可能直接归因于他的多语能力：在乌克兰语原文第118页第3节开头处，写的是“vcix”，而非正确的“bsix”（读作*vsikh*，意为“全部”）。在西里尔字母 б 应出现的位置插入拉丁字母v，不太可能只是排版问题（毕竟这两个字母的样子差异很大），倒似乎反映了 Sushkevich 能够用上述五种语言写作的本领。

关于排版，我的一般指导原则是尽可能保留原文的风貌。我的译文并非原文的影印本，但我保留了所有公式编号、节标题和符号。某些地方我对文章的内部结构做了极小的调整，例如添加定理环境以便读者理解。原文有些地方难以做到完全精准的排版；例如，在原始排版中，x 和 α 有时看起来非常相似，而它们又经常同时作为指标变量出现在同一组求和中，这使问题更加突出。显然，就连原文的乌克兰排字工有时也颇感棘手，并在许多地方排错了符号。我尽可能修正了这些问题。剩下的（或新出现的）错误当然都由我负责。

这些文章的原文是乌克兰语，作者是一位在哈尔科夫工作的数学家。乌克兰拥有悠久而引以为傲的数学卓越传统，无数乌克兰数学家都为这个领域作出了重要贡献。Sushkevich的数学之路饱经战争与暴行的摧残：他经历了两次世界大战，亲眼目睹昔日学生Wodjysławski在大屠杀中遭杀害（以及他所认识的、无疑还有无数其他人的遇害）。如今，几乎令人难以置信的是，俄罗斯入侵乌克兰后，这些暴行竟再次重演。这场入侵伴随着国家支持的企图，妄图抹去乌克兰人民的文化、遗产、历史和语言。作为数学家，我们必须继续推动并维护乌克兰语作为数学交流和教育语言的使用，不仅在乌克兰国内，也要在国际上如此，并继续支持乌克兰同事。我希望通过这篇译文为这一目标尽一份力，让更多人能够接触到乌克兰数学知识。

本译文收录的六篇原文中，有五篇发表于与哈尔科夫直接相关的期刊。哈尔科夫是乌克兰第二大城市，布尔什维克于1919年宣布其为乌克兰苏维埃社会主义共和国的首都；直到1934年，它一直是该共和国的首都。Sushkevich于1914年迁居此地，1918年因战争离开，前往沃罗涅日，直到1929年才返回。不久之后，他获任哈尔科夫国立大学的正教授。第二次世界大战期间，他在纳粹占领下始终留在当地。纳粹入侵期间，哈尔科夫成为激烈战斗的焦点，在纳粹德国与苏联之间多次易手。1943年最终解放时，这座城市已沦为废墟；全市百分之七十遭到摧毁，战前人口所剩不到三分之一。读到这样的惨状，人们不禁会觉得那已是遥远的过去；的确，直到2022年，维基百科“哈尔科夫战役”消歧义页面上只列出了五场这样的战役，而且都发生在1943年之前。如今，该页面却列出了七场。愿这个数字永远不要再增加。愿2023年为我在乌克兰的朋友、同事以及乌克兰人民带来和平。

乌克兰万岁！英雄们万岁！

C. F. Nyberg-Brodda
古斯塔夫·埃菲尔大学
2023年2月7日

将半群扩展为完整群

A.K.SUSHKEVICH （哈尔科夫）

1. 下文将引用我的著作《Über Semigruppen》（《论半群》），该文刊于本《通讯》第4辑第VIII卷。半群与群的区别在于：群满足无限可逆律，而半群只满足唯一可逆律。也就是说，并非每个半群都有单位元；如果半群中存在单位元，也并非每个元素在该半群中都有逆元。真正的半群必定是无限的，因为在有限系统中，唯一可逆律蕴含无限可逆律。在上述著作中，我证明了一般情形下，半群 $\mathfrak{S}$ 可以分为两部分：

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{G} + \mathfrak{H};$$

其中 $\mathfrak{G}$ （称为“群部分”）是一个普通的（有限或无限）群，它可以仅由一个元素 E （单位元）构成，也可以为空；而 $\mathfrak{H}$ （“主部”）是一个没有单位元的半群——必定是无限的，而且必定存在。此外，我们有：

$$\text{if } A \subset \mathfrak{G}, \text{ then } \mathfrak{H}\mathfrak{G} \subset \mathfrak{H}, A\mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}; \tag{1}$$

$$\text{if } P \subset \mathfrak{H}, \text{ then } \mathfrak{G}P \subset \mathfrak{H}, P\mathfrak{G} \subset \mathfrak{H}; \mathfrak{S}P \subset \mathfrak{H}, P\mathfrak{S} \subset \mathfrak{H}. \tag{2}$$

接下来我们将证明，对于给定的半群，可以通过加入新元素，为其添加一个“补充部分”，使之成为一个群；这也说明了“半群”这一名称的由来。

2. 我们先考虑群部分缺失的情形，即 $\mathfrak{S} = \mathfrak{H}$ 是一个没有单位元的半群；显然，其中没有任何元素具有逆元。设 P、Q、R、S、.....是 $\mathfrak{H}$ 中互不相同的元素。我们构造新元素 P、Q、R、S、.....，使得 $\mathfrak{H}$ 中的每个元素都对应于一个新元素，该新元素用同一字母上方加一撇来表示。我们为这些新元素的复合规定如下规则：每当 $PQ = R$，就令 $QP = \overline{R}$。这样，新元素的集合也构成一个半群 $\overline{\mathfrak{H}}$，它与 $\mathfrak{H}$ 反同构。

接下来，我们创建一个新元素 E，并将其视为来自 $\mathfrak{H}$ 和 $\overline{\mathfrak{H}}$ 的所有元素的双侧单位元。接下来，我们定义：

$$X\overline{X} = \overline{X}X = E \tag{3}$$

对于每个来自 $\mathfrak{H}$ 的元素 X 及其对应元素 $\overline{X} \subset \overline{\mathfrak{H}}$。

最后，我们创建若干个新元素——“乘积”：

$$P\overline{Q}, \overline{P}Q, P\overline{Q}R, \overline{P}Q\overline{R}, P\overline{Q}R\overline{S}, \overline{P}Q\overline{R}S, \ldots \tag{4}$$

使得来自 $\mathfrak{H}$ 的“因子”与来自 $\overline{\mathfrak{H}}$ 的“因子”交替出现。我们将立即省略括号书写这些“乘积”，因此结合律对它们而言仅由定义即可成立。

两个乘积（4）的“乘积”只需将因子彼此相邻书写即可构成，例如：

$$P\overline{Q}R\cdot U\overline{V}=P\overline{Q}(RU)\overline{V};$$
$$T\overline{S}\cdot\overline{P}Q\overline{R}=T(\overline{S}\overline{P})Q\overline{R};$$

在此，我们利用 $\mathfrak{H}$的乘法表将 RU 替换为一个元素；同理，利用 $\mathfrak{H}$的乘法表将 SP替换为一个元素。

乘积（4）有时可以“缩短”；例如，考虑

$$P\overline{Q}R\overline{S}T,$$

使得在 $\mathfrak{H}$ 的乘法表中有：

$$R=US; \tag{5}$$

在这种情况下

$$P\overline{Q}R\overline{S}T=P\overline{Q}US\overline{S}T=P\overline{Q}UET=P\overline{Q}(UT)=P\overline{Q}V,$$

若 $UT=V$。此外，若在 $\mathfrak{H}$ 的乘法表中有

$$\overline{Q}=\overline{W}\overline{V}, \tag{6}$$

那么我们有：

$$P\overline{Q}R\overline{S}T=P\overline{W}\overline{V}V=P\overline{W}E=P\overline{W}.$$

然而，应当注意，给定 R 和 S，并不总是存在一个 U 使方程（5）成立；给定 V和 Q，也并不总是存在一个 W使方程（6）成立，因为无限可逆律在此完全不起作用。

当且仅当能够按照指定方式，利用等式（3）、（5）和（6）将一个乘积（4）变换为另一个乘积（4）时，才认为这两个乘积（4）相等。否则，我们认为这些乘积（4）彼此不同。

我们用 $\mathfrak{H}_1$ 表示由 $\mathfrak{H}$中的所有元素、$\mathfrak{H}$中的所有元素以及所有不同的乘积（4）构成的系统；那么 $\mathfrak{H}_1$ 是一个群；事实上，$\mathfrak{H}_1$ 中任意两个元素的乘积都存在且属于 $\mathfrak{H}_1$；根据定义，$\mathfrak{H}_1$ 中的结合律成立；在 $\mathfrak{H}_1$ 中，元素 E 是单位元，并且 $\mathfrak{H}_1$ 中的每个元素在$\mathfrak{H}_1$中都有一个逆元；例如，对于

$$P\overline{Q}R\overline{S}T$$

逆元是

$$\overline{T}S\overline{R}Q\overline{P},$$

因为很容易看出，它们的乘积等于 E.

3. 现在考虑一般情形，即当 $\mathfrak{S}=\mathfrak{G}+\mathfrak{H}$ 时，也就是存在群部分 $\mathfrak{G}$ 的情形。我们按照第 2 节的方法，为半群 $\mathfrak{H}$ 构造对应的群 $\mathfrak{H}_1$。现在需要将群 $\mathfrak{H}_1$ 和 $\mathfrak{G}$ 合并起来。首先，我们注意到，由 (2) 定义的元素 E 并不是一个新元素：我们必须将 E 取作群 $\mathfrak{G}$ 的单位元，因为 $\mathfrak{G}$ 和 $\mathfrak{H}_1$ 必须是我们要构造的群的子群，而同一群的子群总是有一个共同单位元。接下来只需定义 $\mathfrak{G}$ 中的元素与 $\mathfrak{H}$ 中的元素的乘积；我们定义：

$$\begin{cases} A\overline{P}=\overline{Q}, & \text{if } PA^{-1}=Q; \\ \overline{P}A=\overline{R}, & \text{if } A^{-1}P=R; \end{cases} \tag{7}$$

其中，A 是来自 $\mathfrak{G}$ 的某个元素，而 P，Q，R 是 $\mathfrak{H}$中的元素。注意，此时：

$$A=\overline{Q}P=P\overline{R}. \tag{8}$$

一般而言，若 A 是 $\mathfrak{G}$的任意元素，且 P 是 $\mathfrak{H}$的任意元素，那么在 $\mathfrak{H}$ 中总存在元素 Q 和 R，使方程（8）成立。因此，整个群$\mathfrak{G}$ 作为子群包含于群 $\mathfrak{H}_1$ 中。关系式（8）导出了乘积（4）之间的新关系：例如，设 A，B 是 $\mathfrak{G}$中的两个元素，且对于（8）：

$$A = \overline{Q}P, \quad B = \overline{S}R;$$

$AB = C$ 也是 $\mathfrak{G}$的一个元素，因此根据（8）：

$$C = \overline{V}U;$$

其中，P，Q，R，S，U，V都是 $\mathfrak{H}$中的元素；因此，我们有：

$$\overline{Q}P\overline{S}R = \overline{V}U$$

还有许多这样的等式。也就是说，姑且说，把群$\mathfrak{G}$ “包含”到群 $\mathfrak{H}_1$中之后，它就“缩小”了：一些（甚至许多）原本被视为不同的元素如今合并成了一个。

4. 众所周知，每个群都可以由一组“生成元”[1]（生成元素）以及生成元之间的一组基本关系来定义：有了这些，我们就可以构造该群的凯莱表（对于无限群，这张表当然也是无限的；在这里，我们可以扩展并构造任意大的表），也就是说，我们将得到包含该群全部规律的整个群，其中包括我们行动的一般规律。这里，我们的观点非常重要：我们可以立即看出，基本规律都得到了满足，因为结合律、单位元的存在以及逆元的存在，都反映在基本关系的形式之中：当若干因子的乘积不加括号地写出时，结合律显然成立。当然，元素 E 和逆元都包含在基本关系中，因此可以认为它们都存在。例如，所谓的 8 阶二面体群（正方形的对称群）定义为 $\{P, Q\}$，或者由两个生成元 P，Q定义，它们满足以下三个关系：

$$P^4 = E, \quad Q^2 = E, \quad Q^{-1}PQ = P^{-1}.$$

显然，在这种情况下，我们预先假定了单位元 E和逆元的存在。不过，通过使这些基本关系更加复杂并增加其数量，可以避免在其中引入 E 或逆元：这些关系本身就会得出单位元和逆元均存在的结论。对于 8 阶二面体群，这会得到以下关系：

$$P^5 = P, \quad Q^3 = Q, \quad P^4 = Q^2, \quad QPQ = P^3.$$

这里没有明确包含 E或逆元，但例如，单位元 E 的存在可由前三个关系，即 $E = P^3 = Q^2$，推出。

今后，我们将预先假定结合律成立。对于半群和群，我们都将建立生成元系统以及它们之间成立的基本关系（生成元和关系的数量可以是有限的，也可以是无限的）。群与半群的区别在于，群的基本关系要求存在单位元，并且每个生成元都存在逆元（这是每个元素都有逆元的充要条件）；而对于半群，单位元

[1]下文中，我们将把它们视为彼此独立。

可以存在，但并非所有生成元都有逆元。如果给定的半群不含群部分，那么基本关系中就不包含单位元（因此也不包含逆元）。

如果给定的群或半群由一组生成元及其间的关系定义，而我们只取整个生成元系统的一部分，以及仅涉及这些生成元的关系，那么这些生成元便生成一个群或半群——即给定群或半群的一个子群或子半群。[2]

定理。 如果给定的半群有群部分，那么作为一个群，群部分由给定半群中那些其逆元的存在性可由基本关系推出的生成元所定义。

证明。 如果存在群部分，那么也存在一个单位元，因此它的存在性可由该半群的基本关系推出。群部分和任何群一样，由其生成元生成；我们需要证明，除去那些同时也是整个半群生成元的生成元之外，群部分没有其他生成元，也就是说，给定半群的生成元的任何乘积都不可能有逆元，只要该乘积中至少有一个元素没有逆元；这一点可直接由我先前提到的著作《Über Semigruppen》中的定理 8 得出[3]。 □

对于给定半群的主部，它不仅由该半群中那些没有逆元的生成元生成，因为有可能某个群部分中的元素与主部中的元素相乘，所得元素属于主部，却不能仅由那些没有逆元的生成元生成。因此，为了构成给定半群 $\mathfrak{S}$ 的主部 $\mathfrak{H}$ 的完备生成元系统，必须在 $\mathfrak{S}$ 的生成元系统中加入一定数量（有限或无限）的生成元；这些生成元没有逆元，并且由 $\mathfrak{H}$ 中的生成元与群部分 $\mathfrak{G}$ 中的生成元共同生成。

5. 现在回到补充给定半群、使其成为群的问题。设 X 是一个不含群部分的给定半群（或者设它是一般半群的主部）；设 $U, V, W, \ldots$ 是 $\mathfrak{H}$ 的一个完备（独立）生成元系统；其中没有一个元素有逆元。我们为它们构造逆元：$\overline{U}, \overline{V}, \overline{W}, \ldots$。对于每个关系

$$UVW\cdots = U_1V_1W_1\cdots$$

在 U，V，W，$\cdots$ 之间，我们建立了关系

$$\overline{W}\overline{V}\overline{U}\cdots = \overline{W}_1\overline{V}_1\overline{U}_1\cdots$$

在 U，V，W 之间，并构造一个半群 $\mathfrak{H}$，其生成元为 U，V，W，$\overline{.....}$，且与 $\mathfrak{H}$ 反同构；若 $UVW\cdots = P$，则记作：

$$\cdots\overline{W}\overline{V}\overline{U} = \overline{P}.$$

关系 (3) 只要求对我们的生成元 U、V、W、.....、U、V、W、$\overline{.....}$ 成立；显然，由此可知，关系 (3) 对 X 中的每个元素，以及 X 中的每个元素也都成立。接下来，群 $\overline{\mathfrak{H}}_1$ 的构造与第2节和第3节中的相同。

---

[2]此外，可能出现这样的情况：一个群含有一个子半群，反之亦然，即一个半群含有一个子群；例如，半群的群部分是该半群的一个子群。[3]《哈尔科夫数学学会通讯》第4辑，第8卷（1934），第26页。

现在，我们不取 $\mathfrak{H}$ 的全部生成元，而只取其中一部分 U、V、W、.....；所选生成元生成某个半群 $\mathfrak{H}'$ ——它是 $\mathfrak{H}$ 的一个子半群；我们将这个半群 $\mathfrak{H}'$ 扩充为一个群 $\mathfrak{H}'_1$，为此先构造一个与$\mathfrak{H}'$反同构的半群 $\mathfrak{H}'$。接下来，对于来自 $\mathfrak{H}$ 的所有 元素 P、Q、..... 以及来自 $\mathfrak{H}'$ 的所有元素 R、S、..... ，我们考虑乘积 (4)；这些乘积构成一个半群 $\mathfrak{H}_2$，其中还包含 $\mathfrak{H}'_1$ 的一个子群，而后者是 $\mathfrak{H}_2$ 的群部分。因此，我们可以将半群扩充为这个半群；起初，该半群没有群部分，而扩充后的半群则有群部分。对于具有群部分的半群，也可以进行这种扩充。因此，我们将逐步扩充这个半群，最终将它变成一个群。

请注意，半群生成元之间的关系并非任意；唯一可逆律带来了诸多限制。例如，若这些关系蕴含某个生成元存在单位元，那么它们也必然蕴含该单位元同时也是此半群所有生成元的单位元。

请注意，给定半群的子半群的生成元不一定只是该半群的一组生成元，也可以是它们的乘积。设 $\mathfrak{F}$ 是给定半群 $\mathfrak{H}$的一个子半群， $P = UVW\cdots$是 $\mathfrak{F}$的一个生成元，其中 U， V， W，.....是 $\mathfrak{H}$的生成元。按照指定方式将半群 $\mathfrak{F}$ 补充为一个群后，我们得到 P的逆元 P；但通过同样的方式，根据我在《Über Semigruppen》一文中的定理3，我们也能得到 U， V， W，.....的逆元，前提是 $\mathfrak{F}$ 的单位元也被视为 $\mathfrak{H}$ 以及由$\mathfrak{F}$ 和$\mathfrak{H}$中的元素构成的乘积（4）的单位元。因此，若在构造半群 $\mathfrak{F}$时使用了 $\mathfrak{H}$ 的所有生成元，那么我们也就将整个半群 $\mathfrak{H}$ 补充为一个群（也就是说，借助以同样方式构造的元素 P，即半群 $\mathfrak{F}$各生成元的逆元）；与此同时，当然还必须确立唯一可逆律所要求的附加关系。例如，若 $P = UVW$，并引入P使得 $PP = E$，则这意味着：

$$UVW\overline{P} = U(VW\overline{P}) = E;$$

因此， $VW\overline{P} = \overline{U}$是 U的逆元，这意味着还必须附加以下条件：

$$(VW\overline{P})U = E, \tag{9}$$

因为

$$(VW\overline{P})U(VW\overline{P}) = (VW\overline{P})E = E(VW\overline{P});$$

根据唯一可逆律，可由此推出（9）。此外：

$$V(W\overline{P}U) = E,$$

因此，$W\overline{P}U = \overline{V}$是 V的逆元；最后，

$$W\overline{P}UV = W(\overline{P}UW) = E,$$

因此，$\overline{P}UV = \overline{W}$是 W的逆元

例： 设有一个循环半群：

$$\{A\} = A + A^2 + A^3 + \dots \text{ in inf.};$$

它有一个子半群：

$$\{A^2\} = A^2 + A^4 + A^6 + \dots \text{ in inf.};$$

我们将最后一个补充部分扩展到整个群；为此，只需构造一个元素 A^2 和一个元素 E，使得：

$$A^2\overline{A^2} = \overline{A^2}A^2 = E;$$

但于是 $A(AA^2)\overline{\ } = E$，由此可知 $AA\overline{A^2} = A\overline{\ }$是 A的逆元。因此，除其他关系外，还有：

$$\overline{A}A\overline{A^2} = \overline{A}\overline{A}$$

$$E\overline{A^2} = (\overline{A})^2, \text{ i.e.: } \overline{A^2} = (\overline{A})^2.$$

6. 还要提及这样一种情形：给定半群满足交换律；我们称这样的半群为阿贝尔半群。此时，在将半群补充为一个群时，必须假定半群 $\mathfrak{H}_1$（它也是阿贝尔半群）中的每个元素都与给定半群 $\mathfrak{H}$中的每个元素可交换。在这种情况下，乘积 **(4)** 有以下两种类型之一：

$$R\overline{Q}, \quad \text{or} \quad \overline{Q}R,$$

它们彼此相等；因此 $\mathfrak{H}_1$ 是阿贝尔的。

7. 半群扩张为群定理与将整环扩张为域的定理（即所谓的“分式域构造定理”）十分相似；这里的半群对应于整环，群对应于域，群部分对应于整环中所谓的“单位元”集合；单位元 E 对应于所谓的“单位元 ε”。当然，在证明分式域构造定理时，会采用元素对方法（a, b），并设立公设来确定这些元素对的相等、求和与乘积。[4] 不过，也可以采用我们在 §2 中使用的方法：不含单位元的整环关于乘法构成一个阿贝尔半群；因此，我们将其扩张为一个群，方法是引入一个元素ε（若原本没有），并为每个元素 a 引入一个逆元 $\bar{a}$，使得 $a\bar{a} = \bar{a}a = \varepsilon$。接着，我们引入新的乘积：$ab$。通过这一过程，我们便将整环关于乘法扩张成了一个群；接下来只需规定该群上的加法运算，并用以下公式表示：

$$ab + c\bar{d} = (ad + bc)b\bar{d} \tag{10}$$

此外，对于形如 b 的项，我们将其写作：εb。最后，我们设：$0 \cdot b = 0$。现在只需证明，对于由方程 **(10)** 定义的这种加法，所有通常的加法定律均成立；它与乘法之间满足分配律；并且对于给定整环中写作如下形式的元素，这种加法与通常的加法一致：

$$a = a\bar{\varepsilon}, \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon.$$

这一点的证明并不困难。

[4]例如参见范德瓦尔登，《现代代数》，第一部分，第三章，第 12 节。第一部分已有俄语译本。

论一类广群的某些性质

A. K. Sushkevich 教授

1. 本文是我对一种有趣的广义无限群所做研究的继续[1]。这类群定义为满足以下条件的群：结合律、右侧无限可逆律以及左侧唯一可逆律。若$\mathbf{G}$是这样的群，且P是它的任意一个元素，那么很容易看出：

$$P\mathbf{G} = \mathbf{G}; \quad \mathbf{G}P \subset \mathbf{G}.$$

复合$\mathbf{G}P$是一个与$\mathbf{G}$属于同一类型的群，由形如GP的所有不同元素组成（对所有$G \subset \mathbf{G}$）；而在复合$P\mathbf{G}$中，$\mathbf{G}$中的每个元素都会出现多次。

定理。 群$\mathbf{G}P$通常与群$P\mathbf{G}$同构，即群$\mathbf{G}$。

我所说的广义同构，换言之，就是多对一同构。

证明。令X遍历群$\mathbf{G}$的所有元素；再令$\mathbf{G}P$中的元素XP对应于$P\mathbf{G}$中的元素PX，也就是说，对应于$\mathbf{G}$中的元素；于是：

$$\begin{gathered}\text{if } XP \text{ corresponds to } PX,\\ YP \qquad " \qquad PY,\\ \text{then } (XPY)P \qquad " \qquad P(XPY),\end{gathered}$$

也就是说，乘积$XP.YP$对应于乘积$PX.PY$，这也就证明了我们的定理。还要指出，尽管对于互不相同的X、X'、X''，.....，元素XP、$X'P$、$X''P$，.....可能相等，因为方程$PX = Q$（其中Q是$\mathbf{G}$的一个给定元素）有许多解X、X'、X''，.....，而对应的乘积XP、$X'P$、$X''P$，.....将全都相等。因此，所得到的$\mathbf{G}P$与$\mathbf{G}$之间的同构是广义的。□

这里重要的是，$\mathbf{G}P$是群$\mathbf{G}$的一部分，且这一部分与整个群$\mathbf{G}$之间存在多对一同构。我们也可以在群$\mathbf{G}$中定义一种新运算，从而在群$\mathbf{G}P$与$\mathbf{G}$之间建立简单的同构，具体如下：

$$X \circ Y = XPY.$$

$$\begin{gathered}\text{那么，当元素 } XP \text{ 来自}\mathbf{G}P \text{ 对应于}\mathbf{G}\text{中的 } X,\\ \text{而元素 } YP \text{“”“”} Y \text{ 来自}\mathbf{G},\\ \text{then the product } XP.YP = (XPY)P \text{ corresponds to:}\\ XPY = X \circ Y,\end{gathered}$$

也就是说，元素X和Y的新“乘积”。

[1]参见我的文章《关于广义无限群的一种奇异类型》。哈尔科夫数学会通讯，第4辑，第9卷（1934），第34–44页。

2. 在普通群理论中，用生成元（生成元素）及其之间的基本关系来定义群，具有重要意义。这些概念也可以推广到有限广义群和无限广义群；对于无限群，生成元的数量可以是有限的，也可以是无限的。给定群的所有性质，以及其作用的主要规律，都可以从该群生成元之间的关系中推导出来。

定理。 本文所讨论类型的群不可能具有有限个生成元。

证明。 设 $A_1, A_2, \dots A_m$ 是给定的生成元集合：我们将证明它们不可能生成本文所述类型的群。注意，群 $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ 中的每个元素都可以写成如下形式：

$$P = A_x^{\alpha_x} A_\lambda^{\alpha_\lambda} \cdots A_\rho^{\alpha_\rho}, \tag{1}$$

其中，指标 $x, \lambda, \dots, \rho$（其个数任意但有限）取自 1、2、.. . 、 m（允许重复）。

已知[1] 本文所述类型的群中每个元素都有许多右单位元：我们将生成元 $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_m$ 的这些右单位元集合分别记为$A_1, A_2, \dots, A_m$（这些集合可能有公共元素；甚至可能其中一个集合包含其他一个或多个集合）。此外，我们知道，集合 E_λ 中各元素的右单位元都包含在同一个集合 E_λ中。结合律保证，元素（1）的右单位元中包括 $\mathbf{E}_\rho$ 的所有元素，也就是最后一个生成元因子 A_ρ 的 P的全部右单位元。由此可知，本文群中任意元素 P的右单位元集合至少包含这些集合 $\mathbf{E}_\lambda$中的一个。

考察元素 E_1 和集合$\mathbf{E}_1$, , 并用$\mathbf{F}_1$ 表示$\mathbf{E}_1$的右单位元集合；正如我们已经知道的：

$$\mathbf{E}_1 \supset \mathbf{F}_1.$$

集合$\mathbf{E}_1$ 和$\mathbf{F}_1$ 不可能彼此相同，因为例如， E_1 属于$\mathbf{E}_1$,, 却不属于$\mathbf{F}_1$ （因为我们所讨论的这类群没有幂等元）。另一方面，正如我们所见，集合$\mathbf{F}_1$ 至少包含$\mathbf{E}_\lambda$中的一个，例如$\mathbf{E}_2$, , 因此：

$$\mathbf{E}_1 \supset \mathbf{F}_1 \supset \mathbf{E}_2.$$

但是，采用类似的推理，我们可以证明$\mathbf{E}_2$ 也包含$\mathbf{E}_\lambda$中的一个集合，例如$\mathbf{E}_3$, , 但并不与之重合；等等。由于$\mathbf{E}_\lambda$ 的集合数量有限，因此至多经过 m 步，我们就会得出结论：其中一个集合$\mathbf{E}_\lambda$包含自身作为真子集；这是矛盾的。换言之，这就证明了我们的定理。□

[1]参见我上文引用过的著作。

广义群领域的研究

A. K. Sushkevich 教授

概要

自1929年年底起，我在哈尔科夫期间对广义群领域进行了以下研究：

我提出了一种方法，可用阶高于秩的矩阵表示“左群”和右群，以及核型群[1]。为此，我使用了矩形矩阵，并结合 Kronecker 定理：每个阶为 m、秩为 n（其中 $m > n$）的矩阵，都可以表示为两个矩形矩阵的乘积：一个有 m 行、n 列，另一个有 n 行、m 列，且二者的秩均为n。我提出了一种方法，可将普通矩阵群（阶和秩均为n）变换为阶为 m、秩为 n（且 $m > n$）的矩阵群；随后用这类矩阵构造左群和右群；最后，我提出了一种为给定核群构造这类矩阵的方法。在此，问题归结为求解含若干未知数的二次方程组，其中未知数的数量多于变量的数量。

采用类似的方法，我利用矩形矩阵和方阵表示了混合 A. Loewy 群[2] 和 Brandt 群胚[3]。

接下来，我着手研究在无限可逆律和唯一可逆律不成立时如何推广无限群的问题；不过在这里，这两条定律有着实质性的差异。如果我们只保留无限可逆律，而舍弃唯一可逆律，就会得到所谓的“半群”；早在20世纪初，人们就已知晓半群[4]。我详细研究了半群的结构，并证明在一般情形下，它们总能通过“补充”成为完整群。

接下来，我将核型群的概念推广到无限群的情形；但在这里，这种类型的含义与有限群中的并不相同：它只是一种特殊情形，我采用与研究有限广义群时相似的方法，用矩阵对其进行了表示。这一推广不仅涉及群，也涉及半群；这一推广的特殊情形包括“左”和“右”半群及群。但这仍不是“左”（或“右”）半群最一般的情形，也就是说，这种半群是满足左（或右）唯一可逆律的结合广义群。我也研究了这一一般情形。

除此之外，我还研究了一类引人注目的无限广义群，这一类型在有限广义群理论中没有对应物；它是一个结合群，其中左侧唯一可逆律和右侧

[1]关于这类群的理论，见我的著作：《关于不满足唯一可逆律的有限群》，《数学年刊》，第99卷（1928年）。[2]A. Loewy，《关于抽象定义的变换系统或混合群》。克雷尔数学杂志，第**157** 卷（1927年）。[3]H. Brandt，《关于群概念的一种推广》。《数学年刊》，第**96** 卷（1926年）。[4]L. E. Dickson，《论半群》。美国数学会汇刊，第**6** 卷（1905年）。

无限制可逆律成立。一个此类群的例子可由可数无限个符号的排列理论给出：取最低行中所有符号互不相同、但有无限多个符号被省略的那些排列。[5] 我的学生 M. Wojdysławski 发现了此类群的另一个例子，即所有递增实值函数的集合 $f(x)$，其中 x 在区间 (0，1) 内，并满足条件 $f(0) = 0$， $f(1) < 1$。这里的群运算与通常一样，是将一个函数代入另一个函数。

最后，我说明了 Rauter[6]的“超群”（“Übergruppe”）与普通群之间的联系，具体来说：除了给定群的元素之外，我们还考虑由该群元素构成的所有复合体，只计入组成复合体的不同元素；这些复合体按普通方式相乘。因此，所有这些复合体连同各个单独的元素构成了 Rauter 的“超群”；（我已对此作了详细研究）。

我的所有研究成果都刊载于以下几篇论文中。

关于广义群的矩阵表示。《哈尔科夫数学会科学纪要》，第4辑，第VI卷（1933年）。

*Über Semigruppen.*哈尔科夫数学会科学纪要，第4辑，第VIII卷（1934年）。

论广义无限群的一种奇特类型哈尔科夫数学会科学纪要，第4辑，第IX卷（1934）。

将半群扩展为一个完整的群。哈尔科夫数学会科学纪要，第4辑，第XII卷（1935年）。

论半群的推广。哈尔科夫数学会科学纪要，第4辑，第XII卷（1935年）。

论 *Rauter* 超群与普通群之间的关系《数学杂志》，第38卷（1934）。

广义群某一类型的一些性质。哈尔科夫国立大学科学纪要。为庆祝哈尔科夫国立大学建校130周年，2–3（1935年）。

我目前正在撰写一部关于广义群的专著，届时将对上述所有研究作更为详细的阐述。

我今后的研究目标是：找出能够用有限阶矩阵表示的广义群类型的特征。

[5]这基本上是 Baer 和 F. Levi 给出的同一个例子——《完备不可约群公理系统》——《海德堡科学院会议报告》，数学与自然科学部，1932年，第2篇。[6]Rauter——《抽象合成系统或超群》。克雷尔数学杂志，第159卷（1928年）。

关于秩为1的矩阵群

A. K. Sushkevich（哈尔科夫）

第 1 节 元素及其复合的定义（乘法）

设 P 为一个给定的域，可以是数域或抽象域；我们考察域 P 上的 n 维向量空间，并且只取其中的 单位向量，即形如 $\mathbf{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ 的向量，使得

$$\mathbf{a}^2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1. \tag{1}$$

我们将把向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{a}'$ 组成的有序对，以及来自 P 的标量乘数 α，作为我们的元素。使用大写拉丁字母，我们将其写成如下形式：

$$A=(\mathbf{a},\mathbf{a}')\alpha \tag{2}$$

（$\mathbf{a}$ 是元素 A 的左向量，而 $\mathbf{a}'$ 是其右向量）。我们将为每个元素 A 关联一个绝对值，其由下式确定：

$$|A|=\mathbf{a}\mathbf{a}'\alpha. \tag{3}$$

（$\mathbf{a}\mathbf{a}'$ 是向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a}'$的数量积，并且是 P[1]中的一个元素。）在所有这些元素中，我们挑出数量倍数为 $\alpha=0$的元素；我们将所有这类元素视为彼此相等，并简单地记作 0；这就是零元，或简称零。

对于两个非零元素 $A=(\mathbf{a},\mathbf{a}')\alpha$ 和 $B=(\mathbf{b},\mathbf{b}')\beta$（即 $\alpha\neq0,\beta\neq0$），当且仅当 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$、$\mathbf{a}'=\mathbf{b}'$ 且 $\alpha=\beta$ 时，我们认为它们相等。

现在，我们通过以下公式定义这些元素 $A=(\mathbf{a},\mathbf{a}')\alpha$ 和 $B=(\mathbf{b},\mathbf{b}')\beta$ 的复合（乘法）：

$$AB=(\mathbf{a},\mathbf{b}')\alpha\beta\mathbf{a}'\mathbf{b}, \tag{4}$$

其中，$\mathbf{a}'\mathbf{b}$ 仍是向量$\mathbf{a}'$ 与$\mathbf{b}$的通常数量积。

由定义（4）容易看出，对于我们的乘法，结合律成立，而交换律一般不成立。特别地，由（4）式可得：有：

$$A^2=AA=(\mathbf{a},\mathbf{a}')\alpha^2\mathbf{a}\mathbf{a}'=(\mathbf{a},\mathbf{a}')\alpha|A|=A|A|. \tag{5}$$

公式（4）表明：如果元素 A 或 B 中有一个等于 0（或 $A=0$ 和 $B=0$ 都等于 0），或者当 $\mathbf{a}'b=0$ 时，也就是说，当向量 $\mathbf{a}'$ 和 $\mathbf{b}$ 正交时；在后一种情况下，我们称元素 A 在左侧与 B 正交，并称 B 在右侧与 A 正交。

[1]如果 P是一个数域，那么 $|A|$ 不一定是正整数。

§2. 正则元素与幂零元素

考虑给定元素 A 的绝对值为 $|A|=0$ 的情形；根据（3），首先当 $\alpha=0$ 时会出现这种情况，其次当 $A=0$ 时，或者当 $\mathbf{aa}'=0$ 时，最后，当元素 A 的左向量和右向量正交时也会出现这种情况；根据（5），在最后一种情况下 $A^2=0$，我们称 A 为一个指数为2 的幂零元素。如果任意元素 A 在左侧与 B 正交，那么正如我们所看到的 $AB=0$，BA 是一个幂零元素，因为：$BA=(\mathbf{b},\mathbf{a}')\beta\alpha\mathbf{b}'\mathbf{a}'$，并且向量 $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{a}'$ 正交。

绝对值 $|A|$ 不为零的元素 A 称为<替换 id='3'>正则</替换>元素。正如我们所见，两个正则元素的乘积可能是幂零元素——当且仅当这两个元素彼此正交时才如此。反过来，两个幂零元素的乘积也可能是正则元素——当且仅当这两个元素不彼此正交时才如此。一般而言，任意两个非零元素 A 和 B 的乘积是正则元素，当且仅当A 和 B 不彼此正交。幂零元素与自身正交。

考虑方程：

$$AX=B \tag{6}$$

其中 A 和 B 是给定元素。若 $A=0$且 $B\neq 0$，则此方程显然在 X中无解；若 $A=B=0$，则每个元素 X 都是该方程的一个解。因此，当 $A\neq 0$且 $A\neq 0$和 $B\neq 0$时，方程（6）的解为：元素 $X=0$，以及每个在右侧与 A正交的元素 X。

现在令 $A=(\mathbf{a},\mathbf{a}')\alpha\neq 0$、$B=(\mathbf{b},\mathbf{b}')\beta\neq 0$；记 $X=(\mathbf{x},\mathbf{x}')\xi$；则由方程（6）和公式（4）可得：

$$(\mathbf{a},\mathbf{x}')\alpha\xi\mathbf{a}'\mathbf{x}=(\mathbf{b},\mathbf{b}')\beta. \tag{7}$$

这意味着对于 $A\neq 0$ 和 $B\neq 0$，方程（6）有解，当且仅当 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$，并且这样的解有无穷多个；它们全部由以下公式给出：

$$X=(\mathbf{x},\mathbf{b}')\frac{\beta}{\alpha\mathbf{a}'\mathbf{x}} \tag{8}$$

其中 x 是任意的（单位）向量。

同理，我们有：方程

$$YA=B \tag{6a}$$

对于 $A\neq 0$ 和 $B\neq 0$ 有解，当且仅当 $\mathbf{a}'=\mathbf{b}'$，并且这样的解有无穷多个；它们全部由以下公式给出：

$$Y=(\mathbf{b},\mathbf{x}')\frac{\beta}{\alpha\mathbf{a}\mathbf{x}'} \tag{8a}$$

其中 $\mathbf{x}'$ 是任意的（单位）向量。

如果两个元素具有相同的左向量，就称它们为左共轭；如果具有相同的右向量，就称它们为右共轭；最后，如果它们的左向量和右向量都分别相同，也就是说，两个元素仅相差一个标量乘数，则称它们为一般共轭（从两侧共轭）。

现在可以将前述结果表述如下：方程（6）有解，当且仅当 A 和 B 左共轭；所有解 X 都与 B右共轭。对于方程（6a），只需将“左”和“右”互换，便可得到类似的结论。

最后，方程（6a）和（6a）有解，当且仅当元素 A 和 B 一般共轭；每个方程都有多个解。

请注意，无论元素 A 和 B是否正则、是否幂零，或其中一个正则而另一个幂零，上述所有结论都成立。方程（6）的解 X 中，既有正则解，也有幂零解；在后一种情况下，向量$\mathbf{x}$ 将位于垂直于向量 $\mathbf{b}'$的超平面内。类似的结论也适用于方程（6a）。

若元素 A 和 B 是正则且一般共轭的，则方程 (6) 和 (6a) 有且仅有一个共同解，该解也与 A和 B一般共轭：

$$X = Y = (\mathbf{a}, \mathbf{a}')\frac{\beta}{\alpha \mathbf{a}\mathbf{a}'} \tag{9}$$

且该解也是正则的。注意，这些元素要么全都一般共轭，要么同时全都正则，要么同时全都幂零。

§3. 幂等元

存在满足 $E^2 = E$的元素 E。这包括元素 0。考虑一个不等于 0 的幂等元 $E =$（$\mathbf{e}$,$\mathbf{e}'$）ε；则

$$E^2 = (\mathbf{e}, \mathbf{e}')\varepsilon^2 \mathbf{e}\mathbf{e}' = E$$

由此 $|E| = \mathbf{e}\mathbf{e}'\varepsilon = 1$。反过来，很容易看出，绝对值等于 1 的元素（即域 P的乘法单位元）是幂等的。因此，我们有：

元素 E 是幂等的，当且仅当 $|E| = 1$。幂等元有无穷多个；对于每个正则元素 A，都存在唯一一个与之一般共轭的幂等元 I，它同时也是 A（相对于元素之间的乘法）的唯一双侧单位元，并且是所有与 A一般共轭的元素的双侧单位元。

令 $A = (\mathbf{a},\mathbf{a}')\alpha$；若 $I = (\mathbf{a}, \mathbf{a}')\rho$，其中 ρ由以下条件定义：

$$|I| = \mathbf{a}\mathbf{a}'\rho = 1$$

i.e.

$$\rho = \frac{1}{\mathbf{a}\mathbf{a}'},$$

那么容易看出 $AI = IA = A$。

容易看出，幂等元 $E = (\mathbf{e},\mathbf{e}')\varepsilon$ 是所有与之右共轭的元素$X = (\mathbf{x},\mathbf{e}')\xi$ 的右单位元；也是所有与之左共轭的元素 $Y = (\mathbf{e},\mathbf{y})\eta$的左单位元，而不论这些元素 X、Y是正则的还是幂零的。

然而，幂零元素没有双侧单位元。

还要注意，幂等元 E 的标量乘数ε 等于 1，当且仅当 $\mathbf{e} = \mathbf{e}'$，也就是说，当 $E = (\mathbf{e}, \mathbf{e})$ 时。显然，此时 $E^2 = E$。反过来，当 $\varepsilon = 1$ 时，我们也有 $\mathbf{e}\mathbf{e}' = 1$，这意味着单位向量$\mathbf{e}$ 和 $\mathbf{e}'$ 方向相同，因此它们必定相等。

§4 一般共轭元素

正如我们所见，这种形式的元素彼此只相差一个标量因子；因此它们要么全是正则的，要么全是幂零的。

所有彼此一般共轭的正则元素构成一个阿贝尔群，它同 P 的乘法群同构（也就是说，该群与 P 具有相同的乘法，且元素相同，只是排除零元）。

事实上，容易看出，两个正则且一般共轭的元素的乘积本身也是正则元素，与两个因子都共轭，且与因子的次序无关；结合律显然成立；并且由第2节可知，左、右两侧都具有无限制可逆性。设彼此一般共轭的这些元素具有如下形式： $A = (\mathbf{a},\ \mathbf{a}')\alpha$；我们用 $\mathfrak{G}_{\mathbf{a},\ \mathbf{a}'}$ 定义它们所构成的普通群；其中的单位元是它们唯一的幂等元（第3节）：

$$I = (\mathbf{a}, \mathbf{a}')\rho; \quad \rho = \frac{1}{\mathbf{a}\mathbf{a}'}.$$

A的逆元为：

$$A^{-1} = (\mathbf{a}, \mathbf{a}')\xi, \quad \text{where}\, \xi = \frac{\rho}{\alpha\mathbf{a}\mathbf{a}'} = \frac{1}{\alpha(\mathbf{a}\mathbf{a}')^2}.$$

现在，我们在 $\mathfrak{S}_{\mathbf{a}、\ \mathbf{a}'}$ 中的元素 A 与 P 中的元素 α （零元素除外）之间定义如下双射：

元素 $A(\mathbf{a},\ \mathbf{a}')\alpha$ 对应于 $\frac{\alpha}{\rho}$；元素 $B = (\mathbf{a},\ \mathbf{a}')\beta$ 对应于 $\frac{\beta}{\rho}$；因此元素

$$AB = (\mathbf{a}, \mathbf{a}')\alpha\beta\mathbf{a}\mathbf{a}' = (\mathbf{a}\mathbf{a}')\frac{\alpha\beta}{\rho}$$

对应于 $\frac{\alpha\beta}{\rho^2} = \frac{\alpha}{\rho}\cdot\frac{\beta}{\rho}$；因此，这个对应是一个同构，而且是一个简单同构，因为对于不同的 A 和 B，$\frac{\alpha}{\rho}$ 和 $\frac{\beta}{\rho}$ 也各不相同，反之亦然。

现在来考虑所有彼此一般共轭的幂零元素： $A = (\mathbf{a},\ \mathbf{a}')\alpha$ 对于不同于 P的不同 α，且都不等于零；使得$\mathbf{a}\mathbf{a}' = 0$。所有这类元素的集合记为$\mathfrak{N}_{\mathbf{a},\ \mathbf{a}'}$。$\mathfrak{N}_{\mathbf{a},\ \mathbf{a}'}$ 中的任意两个元素总是正交的，也就是说，它们的乘积总是等于零，或者：

$$\mathfrak{N}^2_{\mathbf{a},\mathbf{a}'} = 0.$$

将元素0添入$\mathfrak{N}_{\mathbf{a},\ \mathbf{a}'}$，便得到所谓的“零群”，即一种广义结合群，其中任意一对元素的乘积总是等于0——该群的“核”。

§5 单侧共轭的元素

我们将考察所有具有相同向量的元素的集合，也就是彼此右共轭的元素。该集合 $\mathfrak{A}_a$ 分为复合体（群）$\mathfrak{G}_{x,\ a}$（其中 $xa \neq 0$）和复合体$\mathfrak{N}_{y,\ a}$ （其中 $ya = 0$）；这些复合体彼此没有共同元素。我们可以用符号表示为：

$$\mathfrak{A}_a = \sum_x \mathfrak{G}_{x,a} + \sum_y \mathfrak{N}_{y,a}. \tag{10}$$

（此处与群论中一样，$+$和“和”指的不是一种作用，而只是将各个元素或复合体组合成一个单一复合体。）来自 $\mathfrak{N}_{y,\ a}$ 的每个元素都与来自 $\mathfrak{G}_{x,\ a}$的每个元素右正交；即（第 1 节，第 2 节）：

$$\mathfrak{G}_{x,a}\mathfrak{N}_{y,a} = 0$$

而

$$\mathfrak{R}_{y,a}\mathfrak{G}_{x,a} = \mathfrak{R}_{y,a}. \tag{11}$$

我们还有

$$\mathfrak{G}_{x,a}\mathfrak{G}_{x',a} = \mathfrak{G}_{x,a} \tag{12}$$

因为两个正则的右共轭元素的乘积也正则，这一点很容易看出。

所有正则的右共轭元素构成一个左群：

$$\mathfrak{A}'_a = \sum_x \mathfrak{G}_{x,a}. \tag{13}$$

（左群是满足左侧无限可逆律和左侧唯一可逆律的结合群。）

事实上，根据（12），$\mathfrak{A}'_a$ 满足群性质；还需证明，对于来自 $\mathfrak{A}'_a$ 的所有元素 A 和 B，方程（6a）总恰有一个解$Y \subset \mathfrak{A}'_a$，但这可由§2直接推出：若 $A = (r,\ a)\alpha$，$B = (s,\ a)\beta$，那么根据§2中的方程（8a），方程（6a）的每个解都具有以下形式：

$$Y = (s, x)\frac{\beta}{\alpha r x}$$

而在这些解中，只有一个属于 $\mathfrak{A}'_a$，即当 $x = a$ 时：$Y_a = (s,\ a)\frac{\beta}{\alpha r a}$。由此可知，$Y_a$ 与 B一般共轭，也就是说，它们属于同一个普通群 $\mathfrak{G}_{s,\ a}$，与 B相同。

注意，当 $A \subset \mathfrak{A}'_a$ 或者 $B = (y,\ a)\beta \subset \mathfrak{R}_{y,\ a}$ 时，方程（6a）总有解 Y；但这些解中只有一个属于 $\mathfrak{A}_a$，即：

$$Y = (y, a)\frac{\beta}{\alpha r a}$$

而这个解属于复数$\mathfrak{R}_{y,\ a}$——也就是说，与 B 所属的复数相同。

集合 $\mathfrak{A}_a$ 的第二部分，即 $\sum_u \mathfrak{R}_{y,\ a} = \mathfrak{R}_a$，连同元素 0 构成一个“零”群，因为其中任意两个元素的乘积都等于零。

因此，集合 $\mathfrak{A}_a$ 的全体元素连同元素 0 构成一个可称为广义左群的结构；其结构如下图式所示：

	0	$\mathfrak{R}_{y,a}$	$\mathfrak{G}_{x,a}$
0	0	0	0
$\mathfrak{R}_{y,a}$	0	0	$\mathfrak{R}_{y,a}$
$\mathfrak{G}_{x,a}$	0	0	$\mathfrak{G}_{x,a}$

表1

由表1可知，除此之外，取并非全部而只是一些（任意多个；如果 P是无限的，也可以是无限多个）复合体 $\mathfrak{R}_{y,\ a}$ 以及其中的一些群 $\mathfrak{G}_{x,\ a}$，再添加元素 0，同样可以得到一个与整体群 $\mathfrak{A}_a + 0$ 同类型的广义左群，其结构图式与表1中的相同。

关于广义左群所述的一切，现在都可以重复应用于由所有左共轭元素组成的广义右群，也就是说，应用于同一个左向量 a –再加上元素 0。此类元素的集合 $\mathfrak{B}_a$ 可表示为：

$$\mathfrak{B}_a = \sum_x \mathfrak{G}_{a,x} + \sum_y \mathfrak{R}_{a,y}. \tag{10a}$$

所有 $\mathfrak{G}_{a,x}$ 都是彼此一般共轭的元素所构成的普通群；而$\mathfrak{R}_{a,y}+0$ 是一个零群；群复合体 $\mathfrak{G}_{a,x}$ 和 $\mathfrak{R}_{a,y}$ 中没有任何元素相同。我们有：

$$\mathfrak{R}_{a,y}\mathfrak{G}_{a,x}=0;\quad \mathfrak{R}_{a,y'}\mathfrak{R}_{a,y}=0;\quad \mathfrak{G}_{a,x}\mathfrak{R}_{a,y}=\mathfrak{R}_{a,y} \tag{11a}$$

$$\mathfrak{G}_{a,x}\mathfrak{G}_{a,x'}=\mathfrak{G}_{a,x'}. \tag{12a}$$

所有左共轭的正则元素构成一个右群：

$$\mathfrak{B}'_a=\sum_x \mathfrak{G}_{a,x}. \tag{13a}$$

我们也可以不取所有的群$\mathfrak{G}_{a,\ x}$ 和复合体$\mathfrak{R}_{a,\ y}$，而只取其中一些，再加上元素 0；这样便得到一个与 $\mathfrak{B}_a+0$具有相同结构的广义右群；其结构如下图式所示：

	0	$\mathfrak{R}_{a,y}$	$\mathfrak{G}_{a,x}$
0	0	0	0
$\mathfrak{R}_{a,y}$	0	0	0
$\mathfrak{G}_{a,x}$	0	$\mathfrak{R}_{a,y}$	$\mathfrak{G}_{a,x}$

表 2

§6 全体元素构成的广义群

将全体元素（对于给定的域 P 和给定的 n）记为 $\mathfrak{H}$，则可以说，$\mathfrak{H}$ 是一个广义结合群，它不满足无限可逆性定律和唯一可逆性定律[2]，并有一个同时也是核的零元 0。除元素 0 外，这个群 $\mathfrak{H}$ 由所有不同 a对应的所有可能复合体 $\mathfrak{A}_a$ 构成，或者由所有不同 b对应的所有复合体 $\mathfrak{B}_b$ 构成；最后，也可以由所有不同 a对应的所有可能普通群$\mathfrak{G}_{a,\ b}$ 和复合体$\mathfrak{R}_{a',\ b'}$构成，其中 $ab\neq 0$ 且所有不同的 a'，b' 满足 $a'b'=0$（见§5）；用符号表示如下：

$$\mathfrak{H}=0+\sum_a \mathfrak{A}_a=0+\sum_b \mathfrak{B}_b=0+\sum_{a,b}\mathfrak{G}_{a,b}+\sum_{a',b'}\mathfrak{R}_{a',b'};\quad (ab\neq 0, a'b'=0). \tag{14}$$

由第 1 节中的公式（4），根据 $a'b\neq 0$，我们推得：

$$\mathfrak{G}_{a,a'}\mathfrak{G}_{b,b'}=\mathfrak{G}_{a,b'}\quad \text{or}\quad =\mathfrak{R}_{a,b'}, \tag{15}$$

取决于 $ab'\neq 0$ 还是 $ab'=0$。在相同条件下：$\mathfrak{R}_{a,\ a'}\mathfrak{R}_{b,\ b'}$（当 $aa'=bb'=0$ 时），或$\mathfrak{G}_{a,\ a'}\mathfrak{R}_{b,\ b'}$（当 $aa'\neq 0=bb'$ 时），或 $\mathfrak{R}_{a,\ a'}\mathfrak{G}_{b,\ b'}$（当 $aa'=0\neq bb'$ 时），或$\mathfrak{R}_{a,\ a'}\mathfrak{G}_{b,\ b'}$（当 $aa'=0\neq bb'$ 时），等于 $\mathfrak{G}_{a,\ a'}$（当 $ab'\neq 0$ 时），或 $\mathfrak{R}_{a,\ b'}$（当 $ab'=0$ 时）。由此很容易推出：

$$\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_b=0+\mathfrak{A}_b;\quad \mathfrak{B}_a\mathfrak{B}_b=0+\mathfrak{B}_a. \tag{16}$$

此外：

$$\mathfrak{B}_a\mathfrak{A}_b=\mathfrak{G}_{a,b}+0,\quad \text{or}\ =\mathfrak{R}_{a,b}+0, \tag{17}$$

[2]关于广义群，参见我的著作：《论不满足唯一可逆律的有限群》，《数学年刊》，**99**（1928年）；《论半群的一种推广》，《哈尔科夫数学学会通讯》，第 4 辑，**12**（1935年）；另请参见我的专著《广义群理论》，DNTVU，1937年，第 III、IV 章。

取决于是否为 $ab \neq 0$ 或 $ab = 0$;

$$\mathfrak{A}_b \mathfrak{B}_a = \mathfrak{H} - 0, \quad \text{or } = 0, \tag{18}$$

取决于 $ab \neq 0$ 还是 $ab = 0$。

这样，群 $\mathfrak{H}$ 是由“核”型群组成的集合，我已在上述著作中对其进行了研究。在这个群 $\mathfrak{H}$中，可以区分出许多“核”型群作为子群。设 $a_1, a_2, \ldots, a_r$ 和 $b_1, b_2, \ldots, b_s$ 是两组单位向量，满足 $a_x b_\lambda \neq 0 (k = 1, 2, \ldots, r;\ \lambda = 1, 2, \ldots, s)$。我们用 $\mathfrak{G}_{a_x, b_\lambda}$ 表示以下元素群：$(a_x, b_\lambda)\alpha$，其中 α 遍历 P的所有非零元素。我们有 rs 个这样的群 $\mathfrak{G}_{a_x, b_\lambda}$，它们共同构成一个“核”型群$\mathfrak{K}$；其中 $\mathfrak{A}_{b_\lambda} = \sum_{x=1}^{r} \mathfrak{G}_{a_x, b_\lambda}$ 是左群，而 $\mathfrak{B}_{a_x} = \sum_{\lambda=1}^{s} \mathfrak{G}_{a_x, b_\lambda}$是右群，并且

$$\mathfrak{K} = \sum_{\lambda=1}^{s} \mathfrak{A}_{b_\lambda} = \sum_{x=1}^{r} \mathfrak{B}_{a_x} = \sum_{x=1}^{r} \sum_{\lambda=1}^{s} \mathfrak{G}_{a_x, b_\lambda}.$$

数 r 和 s也可以相等于 ∞ （如果域 P 是无限的）。

§7 秩为1的矩阵

我们在前几段中讨论的“元素”，无非是 n 阶且秩为1的矩阵（元素 0 除外，它是零矩阵）。事实上，在秩为1的矩阵中，所有行都两两线性相关，所有列也都两两线性相关；因此，秩为1的矩阵可以写成如下形式:

$$\begin{pmatrix} c_1 c_1' & c_1 c_2' & \cdots & c_1 c_n' \\ c_2 c_1' & c_2 c_2' & \cdots & c_2 c_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n c_1' & c_n c_2' & \cdots & c_n c_n' \end{pmatrix} \tag{19}$$

其中，并非所有 c_x 和所有 c_λ 都等于零，也就是说:

$$c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2 = k \neq 0, c_1^2 + c_2^2 + \cdots + {c_n'}^2 = l \neq 0.$$

若令 $a_x = \frac{c_x}{\sqrt{k}}$，且 $a_\lambda' = \frac{c_\lambda'}{\sqrt{l}}$，则可将（19）改写为:

$$\sqrt{kl} \begin{pmatrix} a_1 a_1' & a_1 a_2' & \cdots & a_1 a_n' \\ a_2 a_1' & a_2 a_2' & \cdots & a_2 a_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n a_1' & a_n a_2' & \cdots & a_n a_n' \end{pmatrix} = \sqrt{kl} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} (a_1', a_2' \cdots, a_n') \tag{20}$$

here $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1, {a_1'}^2 + {a_2'}^2 + \cdots + {a_n'}^2 = 1$, so the rectangular matrices $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 一个$(a_1', a_2' \cdots, a_n$可视为单位向量$\mathbf{a}, \mathbf{a}'$，方程 20 以与我们用方程 (2) 表示“元素”相同的方式，给出一个秩为1的矩阵 (19)

在第 1 节中，对于 $\alpha = \sqrt{kl}$。根据矩阵乘法的通常规则，我们有：

$$\begin{pmatrix} a_1a'_1 & a_1a'_2 & \cdots & a_1a'_n \\ a_2a'_1 & a_2a'_2 & \cdots & a_2a'_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_na'_1 & a_na'_2 & \cdots & a_na'_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1b'_1 & b_1b'_2 & \cdots & b_1b'_n \\ b_2b'_1 & b_2b'_2 & \cdots & b_2b'_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_nb'_1 & b_nb'_2 & \cdots & b_nb'_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1b'_1 & a_1b'_2 & \cdots & a_1b'_n \\ a_2b'_1 & a_2b'_2 & \cdots & a_2b'_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb'_1 & a_nb'_2 & \cdots & a_nb'_n \end{pmatrix} \cdot (a'_1b_1 + a'_2b_2 + \cdots + a'_nb_n),$$

这说明，按照第 1 节中方程 (4) 的定义，我们的“元素”之间的乘法不过是通常的矩阵乘法。因此，第 6 节中讨论的群 $\mathfrak{H}$ 以及前几段中讨论的子群，都不过是阶为 n、秩为 1 的矩阵群（连同秩为 0 的零矩阵），而 $\mathfrak{H}$ 则是这类群中最一般的一个。

还有一点需要讨论。在第 1–6 节中，我们将域 P 的元素作为标量因子α、β、ξ.....。但由方程 (20) 可知，该因子$\alpha = \sqrt{kl}$ 也可能是无理数，也就是说，有必要扩张域 P。如果 P 是全体实数的域，或者更一般地说，是某个包含其所有元素的平方根 $\sqrt{\alpha}$ 的抽象域 α，那么就没有必要扩张 P。但即使在一般情形下，也没有必要通过域扩张将 P作为域进行扩张：我们只将 P（不含零元）视为一个乘法群，方法是考虑 P 的所有非零元素的所有（“正”）平方根；换言之，我们将考虑由 P 的非零元素的平方根组成的乘法群 P'（容易验证，P' 确实是一个通常的阿贝尔群）。现在，考虑向量 (2) 的元素，其中$\mathbf{a}$、$\mathbf{a}'$是域 P 上的单位向量，而标量因子 α 是群 P' 的元素。对于这样的元素，第 1–6 节中的所有进一步结论仍然成立；群 $\mathfrak{G}_a$、$_b$ 现在只不过与群 P' 同构。

关于某些类型的奇异矩阵

A. K. Sushkevich 教授

第 1 节. 本文将考察所谓的“奇异”m阶方阵，即秩 r 小于其阶的矩阵： $r < m$。其特点是有一个特征根为 0；若根 0 的重数为 α，则 $\alpha \geq m - r$，且这样的矩阵恰有 $m - r$ 个与根 0 对应的初等因子。特别地，对于这样的矩阵 A，所有与根 0 对应的初等因子都是一次的；我们称这样的矩阵为 A 正则矩阵；它具有如下性质：其所有幂 A^2， A^3，.....的秩 r都相同；反过来，这一性质也刻画了正则矩阵。最后，还可以给正则矩阵下另一种定义，正如我在《广义群的矩阵表示》（《哈尔科夫数学会纪要》，第 4 辑，第 6 卷，1933 年，第 27–38 页）一文中所做的那样：我在那里提到了 Kronecker 定理，即每个 A m 阶、秩为 r 的矩阵都可以表示为一个乘积

$$A = KL \tag{1}$$

一个秩为 r 的 mr-矩阵[1] K 和一个秩为 r 的 rm-矩阵 L。现在考察乘积 $A_1 = LK$，可知它是一个阶为 r 、秩为 $\leq r$ 的方阵。因此，矩阵 A 是正则的，当且仅当矩阵 A_1 是非奇异的，也就是说，秩 $= r$时。这是正则矩阵的第三种定义。

特别地，每个幂等矩阵 I 都是正则的，正是因为 $I^2 = I$。如果$I = KL$ 是类似于 (1) 的一种分解（其中假设 I 的阶为 m 、秩为r），那么很容易看出，矩阵：$LK = E_r$ 是一个阶为 r 的单位矩阵。事实上，等式 $I^2 = I$ 给出：

$$KLKL = KE_rL = KL;$$

因此： $LKE_rLK = LKLK$，由此可得： $E_r^3 = E_r^2$。又由于 E_r 是非奇异的，便可推出

$$E_r^2 = E_r;$$

因此， E_r 是一个阶为 r的单位矩阵，因为单位矩阵是给定阶数下唯一的非奇异幂等矩阵。

定理。 存在许多阶为 m 、秩为 r 的矩阵，它们以给定的幂等矩阵I 为双侧单位元；所有这些矩阵都是正则的，并构成一个普通群。

证明。 设 A_1 是一个阶为 r的非奇异矩阵；那么 $A = KA_1L$ 是一个阶为m 、秩为 r的矩阵，[2]，它有一个双侧单位元；事实上：

$$AI = KA_1LKL = KA_1E_rL = KA_1L = A;$$

同理，我们也有 $IA = A$。若 $B_1 \neq A_1$ 是另一 个r阶非奇异矩阵，则 $B = KB_1L \neq A$，因为由 $B = A$ 可得 $LBK = LAK$，所以

[1]也就是说，一个有 m 行、 r 列的矩形矩阵。[2]参见我先前提及的文章“Über die Matrizendarstellung der verallgemeinerten Gruppen”，第 1 节，定理1。

$B_1 = A_1$；但 B 也以 I 为其双侧单位元。因此，定理的第一部分得证。反过来，假设 A 是任意一个 n 阶、秩为 r且具有双侧单位元 I的矩阵。令 $LAK = A_1$；矩阵 A_1 的阶为 r；我们需要证明其秩 $= r$，但这可由下式推出：

$$KA_1L = KLAKL = IAI = A,$$

因为 A 的秩为 r。为了完成定理的证明，有必要证明这样的矩阵 A 相对于 I 有一个“逆”矩阵，即存在这样的矩阵 A'，其阶也为 m，秩为 r，并具有双侧单位元 I，使得

$$AA' = A'A = I.$$

但这样的矩阵是： $A' = KA_1^{-1}L$，其中 A_1^{-1} 是非奇异矩阵 A_1 的逆矩阵； A_1^{-1} 也是一个阶为 r 的非奇异矩阵。事实上：

$$AA' = KA_1LKA_1^{-1}L = KA_1E_rA_1^{-1}L = KA_1A_1^{-1}L = KE_rL = KL = I;$$

对于 $A'A = I$，同理可得。[3] □

注记。 也很容易证明，存在许多阶为 m、秩为 p 的矩阵，它们只有给定的幂等元作为右单位元（或仅作为左单位元）。但这些矩阵不构成一个群（即使是广义群），因为它们不满足群性质：其中也包括非正则矩阵。

第 2 节。 每个阶为 m、秩为 r 的幂等矩阵，其特征根只有 0 或 1，且只有一次初等因子。由此可知，每个这样的幂等矩阵都有重数为 r的特征根 1，以及重数为 $m - r$的特征根 0，并且与下列矩阵相似：

$$E_m^{(r)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \underbrace{0}_{r} & \underbrace{0}_{r} & \underbrace{\cdots}_{r} & \underbrace{0}_{r} & \underbrace{0}_{m-r} & \underbrace{\cdots}_{m-r} & \underbrace{0}_{m-r} \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\0\\\cdots\\0\end{matrix}}\right\} r \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\\cdots\\0\end{matrix}}\right\} m-r \end{matrix}$$

因为矩阵 $E_m^{(r)}$不过是矩阵 I的若尔当标准形。因此，存在一个非奇异矩阵 P，使得 $P^{-1}IP = E_m^{(r)}$。

定理。 矩阵 P和 P^{-1} 可以通过适当“扩充”矩阵 K和 L （其中 $I = KL$，如第 *1* 节所示），构造为阶为 m的非奇异互逆矩阵。

证明。该定理可归结为以下命题：设我们给定一个归一化的双正交系统，它由两行 r m 维线性无关向量组成：$\mathsf{a}_\lambda = (a_{\lambda 1}, a_{\lambda 2}, \ldots, a_{\lambda m})$ 和 $\mathsf{b}_\lambda = (b_{\lambda 1}, b_{\lambda 2}, \ldots, b_{\lambda m})$，其中 $\lambda = 1, 2, \ldots, r$。那么需要证明的是，可以通过向向量 a_λ 的序列中添加向量 $\mathsf{x}_\mu = (x_{\mu 1}, x_{\mu 2}, \ldots, x_{\mu m})$，并添加向量 $\mathsf{y}_\mu = (y_{\mu 1}, y_{\mu 2}, \ldots, y_{\mu m})$ （在这两种情况下，$\mu = 1, 2, \ldots, s$，其中 $s = m - r$），来“扩展”这个双正交系统，使扩展后的系统仍然是一个归一化的双正交系统。

[3] 定理的最后这一部分，对我前文所引文章“Über die Matrizendarstellung...”第 1 节中的定理 4作了进一步细化。

因此，我们给定以下条件：

$$\sum_{\lambda=1}^{m} a_{\alpha\lambda} b_{\beta\lambda} = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{if } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{if } \alpha \neq \beta. \end{cases} \tag{2}$$

其中 α，$\beta = 1$，2，……，r。为了确定 $x_{\mu\nu}$，我们有以下等式：

$$\sum_{\mu=1}^{m} b_{\alpha\mu} x_{x\mu} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, r; \quad x = 1, 2, \ldots, s). \tag{3}$$

对于给定的 x，这是一个含有 m 个未知数x_{x1}，x_{x2}，……，x_{xm} 的 r 齐次线性方程组。该方程组的系数矩阵的秩为 r，因为r 向量 $\mathbf{b}_\lambda$ 线性无关。这样的方程组 (3) 有 $m - r = s$ 个线性无关的解，我们将其作为向量 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$，……，$\mathbf{x}_s$ 的分量。现在证明 $r + s = m$ 个向量 $\mathbf{a}_1$，……，$\mathbf{a}_r$，$\mathbf{x}_1$，……，$\mathbf{x}_s$ 都线性无关。假设：

$$c_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + c_r \mathbf{a}_r + d_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + d_s \mathbf{x}_s = 0;$$

由此得到：

$$\sum_{\alpha=1}^{r} c_\alpha a_{\alpha\lambda} + \sum_{x=1}^{s} d_x x_{x\lambda} = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, m). \tag{4}$$

我们将其乘以 $b_{\mu\lambda}$，并对 λ 从 1 到 m 求和：

$$\sum_{\lambda=1}^{m} \sum_{\alpha=1}^{r} c_\alpha a_{\alpha\lambda} b_{\mu\lambda} + \sum_{\lambda=1}^{m} \sum_{x=1}^{s} d_x x_{x\lambda} b_{\mu\lambda} = 0;$$

或者换句话说，

$$\sum_{\alpha=1}^{r} c_\alpha \sum_{\lambda=1}^{m} a_{\alpha\lambda} b_{\mu\lambda} + \sum_{x=1}^{s} d_x \sum_{\lambda=1}^{m} x_{x\lambda} b_{\mu\lambda} = 0; \tag{5}$$

根据（2），（5）中的第一项和等于 c_μ；根据（3），第二项和等于 0；因此，对于 $\mu = 1$, 2，……，r，我们有 $c_\mu = 0$。

但此时（4）化为：

$$\sum_{x=1}^{s} d_x x_{x\lambda} = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, m),$$

这意味着所有 $d_x = 0$ 都是线性无关的，因为向量 $\mathbf{x}_1$，……，$\mathbf{x}_s$ 线性无关。现在，已知矩阵：

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{r1} & & x_{11} & \cdots & x_{s1} \\ a_{12} & \cdots & a_{r2} & & x_{12} & \cdots & x_{s2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{1m} & \cdots & a_{rm} & & x_{1m} & \cdots & x_{sm} \end{bmatrix}$$

当 $|P| \neq 0$ 时，该矩阵是非奇异的。我们将改变记号，并按如下方式简化记号：$\mathbf{x}_1 = \mathbf{a}_{r+1}$，……，$\mathbf{x}_s = \mathbf{a}_m$，因此：

$$P = (a_{\alpha\beta}) \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m).$$

现在我们得到等式：

$$\sum_{\beta=1}^{m} a_{\alpha\beta} y_{\gamma\beta} = \sigma_{\alpha\gamma} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, m; \gamma \text{ is one of } 1, 2, \ldots, m). \tag{6}$$

对于固定的 γ，方程（6）是一个含有 m 个未知数的 m 个线性方程组成的方程组$y_{\gamma 1}$，$y_{\gamma 2}$、.....、$y_{\gamma m}$；该方程组的行列式为 $|P| \neq 0$；因此，对于固定的 γ，这个方程组有唯一解 $\mathbf{y}^{\gamma}=(\mathbf{y}^{\gamma 1}$，$\mathbf{y}^{\gamma 2}$，.....，$\mathbf{y}^{\gamma m})$。但是条件（2）蕴含，对于 $\gamma=1$，2，.....，r，我们有 $\mathbf{y}^{\gamma}=\mathbf{b}^{\gamma}$。此外，对于 $\gamma=r+1$，.....，m，我们也记 $\mathbf{y}^{\gamma}=\mathbf{b}^{\gamma}$，也就是说，我们也确定了 $b_{\alpha\beta}$ 对于 $\alpha=r+1$，.....，m 的值。

现在，如果我们写作：

$$Q=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{bmatrix}$$

那么由 (2) 得：$QP=E$，这意味着 $Q=P^{-1}$，因此也是一个非奇异矩阵。

现在，使用我们的记号，可得：

$$K=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{r1} \\ a_{12} & \cdots & a_{r2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{rm} \end{bmatrix},\quad L=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{bmatrix};$$

因此，由 (2) 可得：

$$LP=\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \underbrace{0}_{r} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{m};\ P^{-1}K=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} r \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m-r \end{matrix} \tag{7}$$

因此可得：

$$P^{-1}IP=(P^{-1}K)(LP)=\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \underbrace{0}_{r} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{m}=E_m^{(r)}$$

由此完成了我们定理的证明。 □

例。考虑矩阵：

$$I=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 10 & 10 & -4 \end{bmatrix};$$

不难看出，矩阵 I 是幂等的。我们可以取:

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

现在我们可以验证

$$KL = I, \quad LK = E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

现在将矩阵 K 扩展为一个三阶非奇异方阵 P:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & -1 & y \\ 4 & -2 & z \end{bmatrix};$$

因此 x, y, z 满足方程:

$$3x + 2y - z = 0, \quad x - y = 0.$$

我们可以设 $y = 1$，从而得到: $x = 1$, $z = 5$。因此:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

现在将 L 扩展为 P^{-1}:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ x & y & z \end{bmatrix};$$

其中现在 x, y, z 满足以下条件:

$$x + yz + 4z = 0, \quad -y - 2z = 0, \quad x + y + 5z = 1;$$

由此可得:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

现在可以验证， $PP^{-1} = P^{-1}P = E_3$; 且 $P^{-1}IP = E_3^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。

第3节. 令 I、K、L、P取与第2节中相同的值。则 $P^{-1}IP = E_m^{(r)}$。接下来，设 A 是一个阶为 m、秩为 r的矩阵，它以 I 为双侧单位元。于是（根据第 1 节），矩阵 $LAK = A_1$ 是一个阶为 r的非奇异矩阵，并且 $A = KA_1L$。现在令:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{bmatrix}$$

（这些值 $a_{\alpha\beta}$ 与第2节中使用的相同记号 $a_{\alpha\beta}$ 毫无关系）。于是（根据第2节中的（7））：

$$P^{-1}AP = (P^{-1}K)A_1(LP) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

因此，矩阵 $P^{-1}AP$ 具有如下形式：它是矩阵 A_1，但其下方和右侧各添有 $m-r$ 行零元素。我们将其简写为：

$$A_m^{(r)} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} A_1 & 0_{r,s} \\ 0_{s,r} & 0_s \end{bmatrix} \tag{8}$$

其中 $s = m - r$。

若 $\mathfrak{G}_1$ 表示所有阶为 m 且具有双侧单位元 I的矩阵所构成的普通群，则 $P^{-1}\mathfrak{G}_1 P$是与 $\mathfrak{G}_1$简单同构的群，它由所有阶为 m 且属于形式（8）的矩阵组成，其中 A_1 遍历所有可能的阶为 r的非奇异矩阵。

第4节。现在我们来考虑如下问题：求矩阵 $A_m^{(r)}$（见（8）、第3节）的所有右单位元 $X = (x_{\alpha\beta})$。条件 $A_m^{(r)}X = A_m^{(r)}$给出：

$$\sum_{\lambda=1}^{r} a_{\alpha\lambda}x_{\lambda\beta} = a_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r). \tag{9}$$

对于固定的 β，（9）是一个含有 r 个未知数 $x_{1\beta}$，$x_{2\beta}$、.....、$x_{r\beta}$的线性方程组；该方程组的行列式为 $|A_1| \neq 0$；因此，该方程组总有且仅有一个解；故这个唯一解为：$x_{\beta\beta} = 1$，$x_{\lambda\beta} = 0$（当 $\lambda \neq \beta$，$\lambda \leq r$时）。若 $\beta = r+1$、.....、m，则（9）的右端均为 $= 0$，且其中所有 $x_{\lambda\beta} = 0$（对于$\beta > r$）。最后，对于 $\lambda = r+1$、.....、m，所有 $x_{\lambda\beta}$均保持任意。因此：

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1r} & \alpha_{1,r+1} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{s1} & \alpha_{s2} & \cdots & \alpha_{sr} & \alpha_{s,r+1} & \cdots & \alpha_{sm} \end{bmatrix} \tag{10}$$

其中 $s = m - r$，且所有 $\alpha_{r\lambda}$ 均为任意值。容易验证，(10) 型的每个矩阵都是 $A_m^{(r)}$ 的右单位元；更一般地，它也是每个 (8) 型矩阵的右单位元，特别是对于 $E_m^{(r)}$而言。

类似地，我们发现，(8) 型矩阵的每个左单位元（特别是 $E_m^{(r)}$的左单位元）都具有以下形式：

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \beta_{11} & \cdots & \beta_{1s} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \beta_{21} & \cdots & \beta_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \beta_{r1} & \cdots & \beta_{rs} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_{r+1,1} & \cdots & \beta_{r+1,s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_{m1} & \cdots & \beta_{ms} \end{bmatrix} \tag{10a}$$

其中所有 $\beta_{x\lambda}$ 均为任意元素。我们看到， Y 类型的矩阵是 X类型矩阵的转置（X'）。

设 Z 为 $A_m^{(r)}$的双侧单位元；那么 Z 既具有（10）式的形式，也具有（10a）式的形式；因此， Z 将具有如下形式：

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \gamma_{s1} & \cdots & \gamma_{ss} \end{bmatrix} \tag{10b}$$

容易看出，矩阵 X、Y、Z的秩从不小于 r；但它们可以更大；这些矩阵既可以是非奇异的，也可以是非正规的；如果它们的秩为 $> r$，那么它们可以是非幂等的。但是，这三类矩阵均满足群性质，即两个右（或左、或双侧）单位元的乘积仍然是一个右（或左、或双侧）单位元。如果我们再规定 $A_m^{(r)}$的右（或左、或双侧）单位元的秩为 r，那么利用克罗内克著名定理可以很容易地证明：秩为 r 的任意右单位元必具有如下形式：

$$X_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1r} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{s1} & \alpha_{s2} & \cdots & \alpha_{sr} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{10c}$$

而任何秩为 r 的左单位元都必须具有以下形式：

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \beta_{11} & \cdots & \beta_{1s} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \beta_{21} & \cdots & \beta_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \beta_{r1} & \cdots & \beta_{rs} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{10d}$$

（其中 $\alpha_{x\lambda}$， $\beta_{x\lambda}$ 为任意元素）。因此，对于秩为 $r \in E_m^{(r)}$的 $A_m^{(r)}$，只有一个双侧单位元。矩阵 X_r 和 Y_r 是幂等的（因而也是正则的）。

前述页面可以找出任意阶为 m 、秩为 $r < m$的正则矩阵的所有右单位元、左单位元和双侧单位元。因此，我们有：

定理。 所有阶为 m 、秩为 $r < m$，且共享一个阶为 m 、秩为 r 的双侧单位元I 的普通矩阵，都共享相同的右单位元集合、相同的左单位元集合以及相同的双侧单位元集合。更确切地说，取 $P^{-1}IP = E_m^{(r)}$，则右单位元都具有以下形式： PXP^{-1}，其中秩为 r 的右单位元具有以下形式：PX_rP^{-1}；左单位元都具有以下形式： PYP^{-1}，其中秩为 r 的左单位元具有以下形式： PY_rP^{-1}；最后，双侧单位元具有以下形式： PZP^{-1}；其中X、 Y、 X_r、 Y_r、 Z 由公式 *(10)–(10d)* 给出。

例。 现在求所有阶为 3、秩为 2，且都以矩阵 $I = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 10 & 10 & -4 \end{bmatrix}$ 作为双侧单位元的矩阵的右、左和双侧单位元（见
§2）中的例子。我们有：

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

因此，我们将找出所有具有以下形式的右单位元：

$$PXP^{-1} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} P^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3+3\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3 & 2+2\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3 & -1-\alpha_1+\alpha_3 \\ 2+3\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3 & 3+2\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3 & -1-\alpha_1+\alpha_3 \\ 10+15\alpha_1+5\alpha_2-10\alpha_3 & 10+10\alpha_1-5\alpha_2-10\alpha_3 & -4-5\alpha_1+5\alpha_3 \end{bmatrix};$$

其中秩为 2 的是满足 $\alpha_3 = 0$ 的那些：

$$PX_2P^{-1} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 3+3\alpha_1+\alpha_2 & 2+2\alpha_1-\alpha_2 & -1-\alpha_1 \\ 2+3\alpha_1+\alpha_2 & 3+2\alpha_1-\alpha_2 & -1-\alpha_1 \\ 10+15\alpha_1+5\alpha_2 & 10+10\alpha_1-5\alpha_2 & -4-5\alpha_1 \end{bmatrix};$$

所有左单位元都具有以下形式：

$$PYP^{-1} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta_1 \\ 0 & 1 & \beta_2 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3-2\beta_1-2\beta_3 & 2-2\beta_1-2\beta_3 & -1+\beta_1+\beta_3 \\ 2-2\beta_1+2\beta_2-2\beta_3 & 3-2\beta_1+2\beta_2-2\beta_3 & -1+\beta_1-\beta_2+\beta_3 \\ 10-8\beta_1+4\beta_2-10\beta_3 & 10-8\beta_1+4\beta_2-10\beta_3 & -4+4\beta_1-2\beta_2+5\beta_3 \end{bmatrix};$$

其中秩为 2 的是满足 $\beta_3 = 0$ 的那些：

$$PY_2P^{-1} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta_1 \\ 0 & 1 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2\beta_1-2 & 2-2\beta_1 & -1+\beta_1 \\ 2-2\beta_1+2\beta_2 & 3-2\beta_1+2\beta_2 & -1+\beta_1-\beta_2 \\ 10-8\beta_1+4\beta_2 & 10-8\beta_1+4\beta_2 & -4+4\beta_1-2\beta_2 \end{bmatrix};$$

最后，我们通过令右单位元为以下形式，得到双侧单位元：

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \alpha_3 = \gamma, \quad \text{or setting, for the left, } \beta_1 = \beta_2 = 0, \beta_3 = \gamma :$$

$$PZP^{-1} = P\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \gamma\end{bmatrix}P^{-1} = \begin{bmatrix}3-2\gamma & \gamma 2-2\gamma & -1+\gamma\\ 2-2\gamma & 3-2\gamma & -1+\gamma\\ 10-10\gamma & 10-10\gamma & -4+5\gamma\end{bmatrix}.$$

对于 $\gamma = 0$，我们得到 I，正如预期；而对于 $\gamma = 1$，我们得到 E_3。

进一步注意到，这个双侧单位元 PZP^{-1} 可表示为$PZP^{-1} = I + \gamma N$的形式，其中 $N = \begin{bmatrix}-2 & -2 & 1\\ -2 & -2 & 1\\ -10 & -10 & 5\end{bmatrix}$ 是一个满足以下条件的矩阵：

$$IN = 0.$$

§5. 现在提出"逆"问题：求所有矩阵（阶为 m） $A = (a_{\alpha\beta})$，使得 $E_m^{(r)}$是一个右单位元。

暂记： $E_m^{(r)} = (x_{\alpha\beta})$；则条件 $AE_m^{(r)} = A$ 变为：

$$\sum_{\lambda=1}^{m} a_{\alpha\lambda}x_{\lambda\beta} = a_{\alpha\beta} \quad (\alpha,\beta = 1,2,\dots,m). \tag{11}$$

但我们知道，对于 $\alpha \neq \beta$，有 $x_{\alpha\beta} = 0$；因此，(11) 化为

$$a_{\alpha\beta}x_{\beta\beta} = a_{\alpha\beta} \quad (\alpha,\beta = 1,2,\dots,m). \tag{11a}$$

此外，对于 $\beta = 1$，有 $x_{\beta\beta} = 1$，2、.....、r；而对于 $\beta = r+1$、.....、m，有$x_{\beta\beta} = 0$。因此，对于 $\beta \leq r$，(11a) 恒成立，即 $a_{\alpha\beta}$ 可任意取值 $\beta \leq r$；而对于 $\beta > r$，方程 (11a) 得：$a_{\alpha\beta} = 0$。

因此，我们得到矩阵 A 可写成如下形式：

$$A = \begin{bmatrix}\alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1r} & 0 & \cdots & 0\\ \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{2r} & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mr} & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix} \tag{12}$$

其中，$a_{\alpha\beta}$（对于 $\alpha = 1,\dots,m$； $\beta = 1,\dots,r$）是任意的。

类似地，我们可以证明，任何满足 $E_m^{(r)}$为左单位元的矩阵 B（阶为 m）都具有如下形式：

$$B = \begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rm}\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix} \tag{12b}$$

其中，$b_{\alpha\beta}$（对于 $\alpha = 1,\dots,r$； $\beta = 1,\dots,m$）是任意的。

显然，形式为 (12) 的矩阵集合满足群性质，也就是说，这个集合是一个广义群；矩阵集合 (12a) 也是如此。这些矩阵 (12) 和 (12a) 的秩不大于 r。注意，矩阵X_r（见 §4，(10c)）属于 (12) 型，而矩阵 Y_r（见 §4，(10d)）属于 (12a) 型，即：

$$X_r E_m^{(r)} = X_r, \quad E_m^{(r)} Y_r = Y_r.$$

矩阵集合 (12) 与 (12a) 的交集是一个如下形式的矩阵：

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1r} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rr} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{12в}$$

对于这些矩阵，也只有对于这些矩阵， C 矩阵 $E_m^{(r)}$才是双侧单位元。这个群包括第3节中讨论的那些矩阵 $A_m^{(r)}$（见（8））；但那些矩阵的秩为 r，而我们的矩阵 C 的秩可以是 $\leq r$。注意，这类矩阵 C若秩为 r，则必定是正则的。

某些类型无穷矩阵的广义群

A. K. Sushkevich（哈尔科夫）

第 1 节。 本文将考察如下形式的无限有界矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{23} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \tag{1}$$

其中，系数 $a_{\alpha\beta}$均为实数，而向量 $\mathbf{a}_\lambda$ =($a_{\lambda 1}$，$a_{\lambda 2}$，.....)（ $\lambda = 1$，2，.....至无穷）在希尔伯特空间中构成一个正交归一向量系。这意味着：

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\alpha\lambda} a_{\beta\lambda} = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{if } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{if } \alpha \neq \beta. \end{cases} \tag{2}$$

如果向量系 $\mathbf{a}_\lambda$ 是一个完备的正交归一系统，那么矩阵 A 通常称为正交矩阵，此时还有

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\lambda\alpha} a_{\lambda\beta} = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{if } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{if } \alpha \neq \beta. \end{cases} \tag{3}$$

换言之，转置矩阵 A' 也是正交矩阵，而 $AA' = A'A = E$（单位矩阵）是 A 的逆矩阵（因此它存在）。

考虑到矩阵 E 也是正交的，正交矩阵的乘积仍然是正交的，并且结合律适用于有界矩阵的乘法，我们可以得出以下结论：

所有无限正交矩阵的集合构成一个普通群。

§2. 然而，我们将考虑这样一些矩阵 A：它们满足条件（2）但不满足条件（3），也就是说，向量的正交归一系统$\mathbf{a}_\lambda$ 并不完备。我们称这样的矩阵 A 左半正交矩阵。如果需要无穷多个向量才能将向量系$\mathbf{a}_\lambda$ 补充为完备的向量系，则称左半正交矩阵 A 是真的。

定理。 所有真左半正交矩阵的集合构成一个广义结合群，该群满足左侧的唯一可逆律和右侧的无限可逆律。

证明。 首先，我们证明这类矩阵的集合满足群性质。设 A 和 $B = (b_{\alpha\beta})$ 是两个这样的矩阵，并记它们的乘积为 $AB = C = (c_{\alpha\beta})$。我们将证明 C 是一个真左半正交矩阵。我们有

$$c_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\alpha\lambda} b_{\lambda\beta}.$$

我们考虑的所有级数都是绝对收敛的（因为我们的矩阵是有界的）：我们有

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} c_{\alpha\mu}c_{\beta\mu} = \sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\sum_{x=1}^{\infty} a_{\alpha x}b_{x\mu}\right)\left(\sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\alpha\lambda}b_{\lambda\mu}\right) = \sum_{x,\lambda=1}\left(a_{\alpha x}a_{\beta\lambda}\sum_{\mu=1}^{\infty} b_{x\mu}b_{\lambda\mu}\right) =$$

$$= \sum_{x,\lambda=1}^{\infty} a_{\alpha x}a_{\alpha\lambda}\delta_{x\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{x\lambda}a_{\beta\lambda} = \delta_{\alpha\beta}.$$

因此，已证明方程 (3) 对矩阵 C 成立。

现在，令 $\mathbf{a}' = (a'_1,\ a'_2,\ \ldots\ldots)$ 为任意一个与所有 a_λ 正交的向量。我们令

$$c'_\lambda = \sum_{x=1}^{\infty} a'_x b_{x\lambda}$$

现在我们将证明，向量 $\mathbf{c}' = (c'_1,\ c'_2,\ c'_3,\ \ldots\ldots)$ 与所有向量$\mathbf{c}_\alpha = (c_{\alpha_1},\ c_{\alpha_2},\ \ldots\ldots)$ 均不相同，并且它与每个 $\mathbf{c}_\alpha$ 正交。

现在假设 $\mathbf{c}' = \mathbf{c}_\alpha$，即 $c'_\lambda = c_{\alpha\lambda}$ 对每个 λ 都成立；那么我们有

$$\sum_{x=1}^{\infty}(a'_x - a_{\alpha x})b_{x\lambda} = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \ldots,\ \text{ad inf.}). \tag{4}$$

将（4）乘以 $b_{\mu\lambda}$，并对 λ 求和：

$$0 = \sum_{x=1}^{\infty}(a'_x - a_{\alpha x})\sum_{\lambda=1}^{\infty} b_{\alpha\lambda}b_{\mu\lambda} = \sum_{x=1}^{\infty}(a'_x - a_{\alpha x})\delta_{x\mu} = a'_\mu - a_{\alpha\mu}.$$

因此，对每个 μ都有 $a'_\mu = a_{\alpha\mu}$，由此得出 $\mathbf{a}' = \mathbf{a}_\alpha$。因此，由于 $\mathbf{a}'$ 不同于 $\mathbf{a}_\alpha$，这就产生了矛盾，所以必有 $\mathbf{c}'$ 不同于 $\mathbf{c}_\alpha$。于是我们有：

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} c_{\alpha\mu}c'_\mu = \sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\sum_{x=1}^{\infty} a_{\alpha x}b_{x\mu}\right)\left(\sum_{\lambda=1}^{\infty} a'_\lambda b_{\lambda\mu}\right) =$$

$$= \sum_{x,\lambda=1}^{\infty}\left(a_{\alpha x}a'_\lambda\sum_{\mu=1}^{\infty} b_{\alpha\mu}b_{\lambda\mu}\right) = \sum_{x,\lambda=1}^{\infty} a_{\alpha x}a'_\lambda\delta_{x\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\alpha\lambda}a'_\lambda = 0.$$

因此，向量 $\mathbf{c}'$ 与每个$\mathbf{c}_\alpha$正交。如果向量 $\mathbf{a}'$ 已归一化，那么$\mathbf{c}'$ 也已归一化，因为：

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} {c'_\alpha}^2 = \sum_{\alpha=1}^{\infty}\left(\sum_{x=1}^{\infty} a'_x b_{x\alpha}\right)\left(\sum_{\lambda=1}^{\infty} a'_\lambda b_{\lambda\alpha}\right) = \sum_{x,\lambda=1}^{\infty}\left(a'_x a'_\lambda\sum_{\alpha=1}^{\infty} b_{x\alpha}b_{\lambda\alpha}\right) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} {a'_\lambda}^2 = 1.$$

现在，我们将向量 $\mathbf{a}'$ 加入向量系 $\mathbf{a}_\alpha$，同时将向量 $\mathbf{c}'$ 加入向量系 $\mathbf{c}_\alpha$。现在可以找到一个归一化向量 $\mathbf{a}''$，它与所有$\mathbf{a}_\alpha$ 以及$\mathbf{a}'$正交；相应地，也可以找到一个归一化向量$\mathbf{c}''$，它与所有$\mathbf{c}_\alpha$以及$\mathbf{c}'$正交，如此等等，无穷无尽。因此，由于矩阵 A 是真左半正交矩阵，可知 C 也是真左半正交矩阵。

现在我们证明，所考察的矩阵满足左侧唯一可逆律。假设

$$BA = CA. \tag{5}$$

由方程 (2) 可得 $AA' = E$ （单位矩阵）。因此，将 (5) 两边右乘 A'，得到 $BE = CE$，即 $B = C$。

现在我们来证明右侧无限可逆律成立。假设有等式

$$AX = B, \tag{6}$$

对于给定类型的某个 $A = (a_{\alpha\beta})$、 $B = (b_{\alpha\beta})$，而 $X = (x_{\alpha\beta})$ 是一个未知矩阵。等式（6）得出：

$$\sum_{x=1}^{\infty} a_{\alpha x} x_{x\beta} = b_{\alpha\beta} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, \text{ ad inf. and } \beta = 1, 2, \dots, \text{ad inf.}). \tag{6a}$$

对于固定的 β，这是一个含有无限多个未知数 $x_{1\beta}$， $x_{2\beta}$、.....的无限个线性等式组成的系统。该系统是正交规范的。其通解可按如下方法求得。

设 $\mathbf{a}'_\rho = (a'_{\rho 1}, a'_{\rho 2}, \dots)$，其中 $\rho = 1, 2, \dots$趋于无穷，是一个向量，它补充部分系统 $\mathbf{a}_\alpha$，使之成为完备系统。除（6a）外，我们再取方程

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} a'_{\rho\mu} x_{\mu\beta} = v_{\rho\beta}, \tag{7}$$

其中（$v_{1\beta}$， $v_{2\beta}$，.....）是任意向量。那么，（6a）中的方程的通解为：

$$x_{\alpha\beta} = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu x} b_{\nu\beta} + \sum_{\sigma=1}^{\infty} a'_{\sigma x} v_{\sigma\beta}. \tag{8}$$

此公式定义了一个矩阵 X，因此可以有无穷多种定义方式。但我们仍需证明，任意这样的矩阵 X 都可以选为真左半正交矩阵。为此，我们选取 $v_{\alpha\beta}$ 使得

$$\mathbf{v}_\sigma = (v_{\sigma 1}, v_{\sigma 2}, \dots), \quad (\sigma = 1, 2, \dots, \text{ ad inf.})$$

将是归一化向量，彼此正交，并且与所有向量 $\mathbf{b}_\alpha$ =($b_{\alpha 1}$， $b_{\alpha 2}$，.....）正交。

例如，我们可以选择$\mathbf{v}_\sigma$ 所有向量，用来补充部分$\mathbf{b}_\alpha$，构成一个新的系统；也可以只选择这些向量中的一部分（当然，数量仍是无限的）。下面证明，此时条件（2）成立。我们有：

$$\begin{aligned}\sum_{\beta=1}^{\infty} x_{\alpha\beta} x_{\lambda\beta} = \sum_{\mu,\nu=1}^{\infty}\sum_{\beta=1}^{\infty} a_{\mu x} a_{\nu\lambda} b_{\nu\beta} b_{\nu\beta} + \sum_{\nu,\sigma=1}^{\infty}\sum_{\beta=1}^{\infty} a_{\mu x} a'_{\sigma\lambda} b_{\mu\beta} v_{\sigma\beta} + \\ + \sum_{\rho,\nu=1}^{\infty}\sum_{\beta=1}^{\infty} a_{\nu\lambda} a'_{\rho x} b_{\nu\beta} v_{\rho\beta} + \sum_{\rho,\sigma=1}^{\infty}\sum_{\beta=1}^{\infty} a'_{\rho x} a'_{\sigma\lambda} v_{\rho\beta} v_{\sigma\beta} = \\ = \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\mu x} a_{\mu\lambda} + \sum_{\rho=1}^{\infty} a'_{\rho x} a'_{\rho\lambda} = \delta_{x\lambda},\end{aligned}$$

因为这是正交向量完备系统 $\mathbf{a}^\mu$ 和 $\mathbf{a}'_\beta$的方程（3）。此外，我们还有

$$\sum_{\beta=1}^{\infty} b_{\mu\beta} b_{\nu\beta} = \delta_{\mu\nu}, \quad \sum_{\beta=1}^{\infty} b_{\mu\beta} v_{\sigma\beta} = \sum_{\beta=1}^{\infty} b_{\nu\beta} v_{\rho\beta} = 0, \quad \sum_{\beta=1}^{\infty} v_{\rho\beta} v_{\sigma\beta} = \delta_{\rho\sigma}.$$

这证明向量 $\mathbf{x}_\lambda = (x_{\lambda 1}, x_{\lambda 2}, \dots)$ 构成一个正交归一系统。现在我们将揭示该系统何时是完备的。为此，必须满足方程（3），即：

$$\delta_{\beta\gamma} = \sum_{x=1}^{\infty} x_{x\beta} x_{x\gamma} = \sum_{\mu,\nu=1}^{\infty} \sum_{x=1}^{\infty} a_{\mu x} a_{\nu x} b_{\mu\beta} b_{\nu\gamma} + \sum_{\mu,\sigma=1}^{\infty} \sum_{x=1}^{\infty} a_{\mu x} a'_{\sigma x} b_{\mu\beta} v_{\sigma\gamma} +$$
$$+ \sum_{\rho,\sigma=1}^{\infty} \sum_{x=1}^{\infty} a'_{\rho x} a'_{\sigma x} v_{\rho\beta} v_{\sigma\beta} = \sum_{\mu=1}^{\infty} b_{\mu\beta} b_{\mu\gamma} + \sum_{\rho=1}^{\infty} v_{\rho\beta} v_{\rho\gamma}$$

（这是因为中间两项求和均为零）。因此，向量的正交归一系统（$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$）是完备的。

反之，若此系统是完备的，则：

$$\sum_{x=1}^{\infty} x_{x\beta} x_{x\gamma} = \delta_{\beta\gamma},$$

也就是说，向量$\mathbf{x}_\lambda$ 构成完备正交归一系，且矩阵 X 是正交的。

然而，我们可以从该系统的后半部分（$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$）中以无穷多种方式选取许多向量 $v_{\alpha_1}, v_{\alpha_2}, \dots$，使其余向量$\mathbf{v}_\lambda$ 仍有无穷多个。我们将证明，在这种情况下，由方程（8）定义的向量$\mathbf{x}_\lambda$将构成一个不完备的正交归一系统，并且需要无穷多个向量才能将其补充为完备系统。为此，我们需要证明存在无穷多个与所有$\mathbf{x}_\lambda$正交的向量。但我们知道，（根据我们的条件）存在无穷多个彼此正交、且与所有$\mathbf{b}_\lambda$ 及所有已选 v_λ 向量正交的向量（下文将把这些已选向量v_λ 记作 $v_1, v_2, \dots$，而不记作 $v_{\alpha_1}, v_{\alpha_2}, \dots$）。

因此，令$\mathbf{y} = (y_1,\ y_2,\ \dots\dots)_\lambda$，它是与所有$\mathbf{b}$及所选 v_λ正交的无穷多个向量之一。这证明，方程（6）中的矩阵 X 可以有无穷多种定义方式，且均为真左半正交矩阵。定理得证。□

第3节。 如果将所有矩阵中的行与列互换，那么第2节中关于真左半正交矩阵的所有结论都可以“反转”。以这种方式得到的矩阵称为右半正交矩阵，相应地，称为真右半正交矩阵。现在很容易看出，以下定理成立：

定理。 所有真右半正交矩阵构成一个广义结合群，它满足右侧唯一可逆律和左侧无限可逆律。

第4节。 例如，考虑以下真左半正交矩阵的特殊情形；它们构成了第2节所讨论类型的一个广义群：

设矩阵 A 按如下方式构成：

(1) A 中的每一行都由零元素组成，只有该行中的一个元素例外，其值为 1；

(2) A 中的每一列都由零元素组成，除至多一个元素外，该元素值为 1；(3) A 中有无穷多列仅由零元素组成。

我们将证明，所有此类矩阵构成一个与 §2 中同类型的广义群。结合律和左侧唯一可逆律已在 §2 中得到证明。我们首先证明这些矩阵满足群性质。设 A 和 B 是两个这样的矩阵，且 $AB = C$。考察矩阵 C的第 α 行；它由矩阵 A 的第 α 行与矩阵 B的所有列复合而成。假设矩阵 A的第 α 行中的元素 1 位于第 β 列。如果 B 的某一给定列中完全没有单位元（也就是说，该列由零元素组成），或者该单位元不在第 β 个位置，那么矩阵 C 第 α 行中的相应元素将为 0。但由于 B 的第 β 行必定恰有一个元素 1——例如位于第 γ 列——因此，矩阵 A 的第 α 行与矩阵 B 的第 γ 列复合后，所得结果将完全相同；也就是说，在矩阵 C的第 α 行中，第 γ 列的元素为 1，而第 α 行的所有其他元素都为 0。因此，矩阵 C满足性质 1)。

现在考虑矩阵 C 的第 β 列。它由矩阵 A 的所有行与矩阵 B 的第 β 列复合而成。但是，如果 B 的第 β 列是“空”的（也就是说，其中只有零元素），那么 C 中的第 β 行也将为空。这就证明了 C 的性质 2) 和 3)。同时， C 中空列的数量将比 B 中的“更多”。

现在我们来证明我们这类矩阵的右侧无条件可逆律。设 A 和 B 是满足性质 1) 、 2) 和 3) 的两个矩阵。我们将证明，可以找到无穷多个同类型的矩阵 X，使得 $AX = B$。

假设 A 的第 α 行在第 β 列有元素 1，且 B 的第 α 行在第 γ 列有元素 1。那么在 X 中，我们将在第 β 行的第 γ 列放置元素 1，而 X 的第 β 行的所有其他元素都取为 0。但这并未确定 X 的所有行：其中仍有无穷多行尚未定义。我们将在 X 中用零元素填充这些未定义的行，每行仅在一个位置放置一个单位元，同时确保性质 2) 和 3) 对 X 仍然成立（这是可行的，因为数 γ 并未穷尽自然数集合；有无穷多个自然数不等于任何一个 γ）。

这就证明了我们关于具有性质 1)、2) 和 3) 的矩阵的论断。

将我们所有矩阵中的行与列互换，可得到另一类适当的右半正交矩阵，它们构成第3节类型的一个广义群。

我们指出，本节中具有性质 1)、2) 和 3) 的矩阵，无非是在符号（对象）可数集上的所谓“不充分”排列，也就是说，所有符号都出现且在下行中没有重复的排列。与此同时，适当矩阵对应于这样一种排列：其下行中不存在无限多个符号。

我们还指出，符号可数集上的“过多”排列（即所有符号都出现在底行中，且同一个符号可能出现多次）并不能给出半正交矩阵。

我将在别处讨论符号可数集上的不同类型的排列。