arXiv:2302.03016v1 [math.DS] 6 Feb 2023

基于自适应相位-振幅坐标框架的非线性振荡降阶表征

Dan Wilson *[1] 和 Kai Sun[1]

[1]田纳西大学电气工程与计算机科学系，诺克斯维尔，TN 37996，美国

2023年2月7日

摘要

我们提出了一种通用策略，用于对呈现强非线性振荡的系统进行降阶建模。通过考察相对于稳定不动点定义的一族连续受迫周期轨道，并进一步利用基于相位-振幅的降阶策略，我们得到了一种低阶模型，能够准确捕捉由任意外部输入引起的非线性振荡。当振荡幅度较小时，系统动力学趋于局部线性化所得到的结果，即可完全由线性特征模态描述。对于振幅较大的振荡，其行为可以通过少数非线性模态的动力学来理解。我们通过多个示例展示了所提出的策略，其结果显著优于采用标准基于线性化的技术所得到的结果。

1 引言

我们提出并研究一种通用策略，用于对表现出强非线性振荡的系统进行降阶表示。这与线性振荡截然不同，后者可分解为特征模态的叠加，其增长、衰减和振荡速率由相应的特征值决定 [9], [12]。虽然这类方法可用于近似非线性系统中的低振幅振荡，但对于非线性系统中出现的大振幅振荡，则必须采用其他技术。

关于非线性振荡的早期研究提出了非线性正规模态的概念 [31], [32] ，即非线性系统所允许的一种同步振荡，它是对线性模态的非线性扩展。后续研究 [37], [34] 将这些非线性正规模态视为二维不变流形，它们与相关的线性特征子空间相切。综述文章 [16] 和 [2] 探讨了将非线性正规模态用于分析非线性振荡的最新成果及其推广。后续研究[11] 进一步提出了谱子流形的概念，即作为线性模态子空间的非线性扩展、最光滑的不变流形。研究谱子流形上的动力学，可以揭示非线性振荡的信息，并提取相关的骨干曲线 [30], [39]。

*通讯作者：dwilso81@utk.edu

从更广泛的视角来看，非线性振荡的降阶建模可以视为一个动力学表征问题 [27]。例如，基于 Koopman 的方法试图利用一个线性但可能是无限维的算子来表征一般非线性系统的动力学 [6], [25], [26]。与局部线性化技术截然不同，后者考察某个标称解邻域内的动力学；基于 Koopman 的方法则可用于为可观测量的完全非线性动力学建立线性表征，进而通过 Koopman 特征模态的叠加来分析非线性振荡。从实践角度来看，实施基于 Koopman 的方法所面临的主要挑战，是识别一个合适的有限基，以表征可能为无限维的 Koopman算子。在某些情况下，可以通过找到 Koopman 不变子空间，为非线性系统提供精确的线性有限维表征 [40], [17], [5]。更常见的是，采用动态模态分解等数据驱动算法 [35], [20], [43] ，为 Koopman算子的作用提供有限维线性近似。

与其刻画Koopman算子的完整作用，许多作者建议使用Koopman 特征函数的一个子集，为表示完全非线性系统的动力学建立降阶坐标系 [24], [56], [15], [21]。其中包括等稳定坐标框架 [24], ，该框架考虑衰减最慢的Koopman 特征模态的等值集，以构成降阶基。以往的研究 [46], [47], [45], [52]已在开发各种模型降阶算法时考虑了这一通用坐标系，这些算法适用于具有不动点和周期轨道的系统。通过仅保留衰减较慢的分量并截断其余分量，可以获得高精度的降阶模型，其中仅包含少量状态变量。

结合等稳坐标基，近期研究 [49], [51] 提出了一种自适应坐标系，该坐标系考虑了使用不同参数集时出现的一族稳定极限环或不动点。通过从这一族吸引子中自适应地选择标称吸引子，只要状态保持在吸引子附近（即根据等稳态坐标的幅值进行衡量），就可以减小截断误差，从而得到精度很高但仍大幅降阶的模型。尽管使用这一自适应降阶策略获得的初步结果颇具前景 [48], [50], [41], ，但关于其实现仍有许多未解问题。例如，通常没有系统的方法来选择参考轨迹族。此外，尽管 [48] 讨论了一些用于自适应选择标称吸引子的启发式方法，以限制截断误差，但如何完成这一任务并不总是显而易见。

本文考虑一种通用策略，利用上述自适应相位-振幅降阶方法，对具有稳定不动点的系统中的非线性振荡进行表征。本文的主要贡献是提出并研究一种系统化策略，用于定义与自适应相位-振幅降阶策略结合使用的参考轨线。由此得到的降阶模型能够考虑由任意强迫引起、远超线性范围的大振幅振荡。当振荡幅度较小时，系统动力学会趋近于局部线性化所得的结果。此外，所提出的方法还可用于明确考虑多个非线性模态之间的相互作用。本文结构安排如下：第 2 节介绍相位及相位-振幅降阶技术的必要背景，并以此作为所提出的模型降阶策略的起点。第 3 节介绍所提出的方法，并详细列出实现所需的步骤。第 4 节通过三个示例系统进行数值说明：简单摆、非线性平面振子的耦合群体，以及由同步发电机构成的电力系统模型。在每个示例中，所提出的策略都远胜于采用局部线性化技术的其他方法。第 5 节介绍

总结。

2 振荡系统的基于相位的降阶技术背景

考虑如下形式的常微分方程

$$\dot{x} = F(x, u), \tag{1}$$

其中， F 决定一般的非线性动力学， $x \in \mathbb{R}^N$ 为状态， $u \in \mathbb{R}^M$ 为输入。假设当 $u = 0$ 时，方程 (1) 存在一个稳定不动点 x_0，且 $F(x_0, 0) = 0$。令$\Delta x = x - x_0$，通过标准线性化可得到如下形式的模型

$$\Delta\dot{x} = A\Delta x + Bu, \tag{2}$$

其中，$A = \frac{\partial F}{\partial x}$ 和 $B = \frac{\partial F}{\partial u}$均在 $x = x_0$ 和 $u = 0$处求值。假设A 的所有特征值均为单根，即互不相同。在不动点的邻域内，当 $u = 0$时，方程 (2) 的解具有如下形式

$$\Delta x(t) = \sum_{j=1}^{N} s_j v_j \exp(\lambda_j t) + O(||\Delta x||^2), \tag{3}$$

其中，(λ_j, v_j) 是矩阵 A 的一个特征值/特征向量对，而 s_j 是将 Δx 投影到特征子空间后得到的相应系数。分解式 (3) 可利用与复数特征值相关的特征向量，对式 (2) 中的线性振荡进行分析。借助多种线性控制技术，也可以轻松考察非零输入的影响[38], [12]。然而，只有当 Δx 和 u 都足够小时，这种线性化才有效，因此无法用于许多实际应用。为克服这一局限，本文提出的策略是施加额外的周期强迫，并利用由此产生的周期轨道来刻画远离不动点处的动力学。该方法将以基于相位-振幅的降阶建模方法为起点，相关内容将在下文简要概述。

2.1 相位约化

考虑如下形式的一般常微分方程

$$\dot{y} = F(y, p) + u(t), \tag{4}$$

其中， $y \in \mathbb{R}^N$ 表示状态， F 描述动力学， $p \in \mathbb{R}^M$ 是参数集， u 是加性输入。假设 $p = q$ 取某个常数，且当 $u = 0$时，方程 (4) 存在一个稳定的$T(q)$周期轨道 y_q^γ。等时线 [10], [57] 可用于定义该极限环吸引域内所有位置的振荡相位。令 $\theta_1 \in [0, 2\pi)$为与某个初始条件 $a(0) \in y_q^\gamma$对应的相位，则 θ_1 等时线由所有满足以下条件的 $b(0)$构成

$$\lim_{t\to\infty} ||a(t) - b(t)|| = 0, \tag{5}$$

其中， $||\cdot||$ 是某种向量范数。根据方程（5），共享同一等时面的初始条件会以相同的方式渐近收敛到周期轨道。通常，相位 $\theta(y, q)$

经过缩放后，在（4）的流下有 $\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi}{T}(q) = \omega(q)$。鉴于相位的定义，可以通过只关注周期轨道附近的一个邻域并变换到相位坐标，来进行标准的相位约化 [8], [18], [57],

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= \frac{\partial\theta}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\\ &= \frac{\partial\theta}{\partial y}\cdot\Big(F(y,q)+u(t)\Big)\\ &= \omega(p) + Z^T(\theta,q)u(t) + O(||y-y_q^\gamma(\theta)||^2),\end{aligned} \tag{6}$$

其中，$Z(\theta,q) = \frac{\partial\theta}{\partial y}$ 在 $y_q^\gamma(\theta)$处取值，点表示点积，^{T}表示转置。上文中，$\frac{\partial\theta}{\partial x}\cdot F(y,q) = \omega$，因为当 $u=0$ 时，$\frac{d\theta}{dt} = \omega$。通常会截断高阶项，得到一个闭式常微分方程，从而可以用一维约化来表示原始 N 维系统的行为。形式如（6）的相位约化已被广泛用于分析和理解弱扰动振荡系统中出现的动力学 [8], [3], [55], [36], [29]。

2.2 相位-振幅约化

方程（6）仅在弱强迫极限下有效。考虑大幅度输入时，必须考虑表示周期轨道横向方向的振幅坐标。有多种策略可用于纳入基于振幅的效应的影响 [56], [42], [22], [53], [19], [7], [33]。这里，我们将使用 Floquet 坐标来完成此任务。考虑（4）的周期轨道，并令 $\Delta y = y - y_q^\gamma(\theta)$，在线性近似下可写为 $\Delta\dot{y} = J\Delta y$，其中 J 是在 $x_q^\gamma(\theta(t))$ 处取值的雅可比矩阵。定义 Φ 为该 $T(p)$ 周期线性时变系统的单值矩阵，若 Φ 可对角化，则在 y_q^γ 附近可利用 Floquet 理论 [14] 写为

$$y - y_q^\gamma(\theta) = \sum_{j=1}^{N-1}\psi_j g_j(\theta,q) + O(\psi_1^2) + \cdots + O(\psi_{N-1}^2), \tag{7}$$

其中，$g_j(\theta,\ q)$ 是 Floquet 特征函数，而 ψ_1、.....、ψ_{N-1} 是与之相关的 Floquet 坐标。请注意，在式（7）中，第 N 个 Floquet 特征函数的贡献被吸收到相位坐标中。借助等稳坐标的概念，方程（7）还可以扩展到非线性精度阶；等稳坐标 [46], [52]可在极限环的整个吸引域中定义。在线性阶下，可以利用方程（7）中的 Floquet 特征函数扩展式（6）中的相位约化，从而得到相位-振幅约化

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \omega(q) + Z^T(\theta,q)u(t),\\ \dot{\psi}_j &= \kappa_j(q)\psi_j + I_j^T(\theta,q)u(t),\\ j &= 1,\ldots,N-1.\end{aligned} \tag{8}$$

此处 $I_j(\theta,\ q) = \frac{\partial\psi_j}{\partial y}$ 在 $y_q^\gamma(\theta)$ 处取值，κ_j 是与 j^{th} Floquet 特征函数对应的 Floquet 指数。虽然方程 (8) 仍仅在底层方程 (4) 的状态 y 保持接近底层周期轨道 y_q^γ时才有效，但这些额外信息仍然有用，例如可用于控制设计 [28], [56]。请注意，诸如 [46] 和 [52] 之类的参考文献将 ψ_1，.....，ψ_{N-1} 称为等稳坐标；由于等稳坐标与 Floquet 坐标在线性阶上相同，并且本文仅考虑给定周期轨道上这些坐标的线性阶动力学，因此本文将这些振幅坐标称为 Floquet 坐标。

2.3 自适应相位-振幅约化

如果需要考虑使系统远离其参考周期轨道的输入，可以使用自适应相位-振幅约化 [49], [48]。为实施这一策略，假设对于某个允许的 $q \in \mathbb{R}^M$，当 q保持恒定时，方程 $\dot{y} = F(y,\ q)$ 存在一个周期轨道 y_q^γ。对于这些轨道中的每一个，都可以定义一个扩展相位 $\theta(x,\ q)$ 和一组扩展 Floquet 坐标 $\psi_1(x,\ q)$ ....., $\psi_{N-1}(x,\ q)$。请注意，相位坐标除相差一个常数外是唯一的，因此必须消除歧义；例如，可以选择某个庞加莱截面的交点，使其对应于每个极限环上的一个相位等值集。随后可将方程 (4) 重写为

$$\dot{y} = F(y,q) + U_e(y,u,p,q), \tag{9}$$

其中

$$U_e(y,u,p,q) = F(y,p) - F(y,q) + u(t). \tag{10}$$

按此方式重写后，动力学可以相对于参考轨道 y_q^γ 来描述，其有效输入为 U_e。如 [49], 所述，允许 q 为非静态（即允许参考轨道发生变化），再转换到相位和 Floquet 坐标，并截断所有 O（$||y - y_q^\gamma\ (\theta)\ ||^2$）项，可得

$$\begin{aligned}
\dot{\theta} &= \omega(q) + Z^T(\theta,q)U_e + D^T(\theta,q)\dot{q},\\
\dot{\psi}_j &= \kappa_j(q)\psi_j + I_j^T(\theta,q)U_e + E_j^T(\theta,q)\dot{q},\\
j &= 1,\ldots,N-1,\\
\dot{q} &= G_q(q,\theta,\psi_1,\ldots,\psi_{N-1},U_e).
\end{aligned} \tag{11}$$

上文中，$D\ (\theta,\ q)\ \in \mathbb{R}^M$，其中 i^{th} 元素描述了 q 的变化如何导致 θ的变化；类似地，每个 E_j $(\theta,\ q)\ \in \mathbb{C}^M$ 刻画了 q 的变化如何影响 Floquet 坐标。关于这些项的计算，详见 [49]。项 G_q 规定了参数集 q的更新规则。当 $||y-y_q^\gamma\ (\theta)\ ||$保持较小时，方程（11）有效。根据方程（7），只要 Floquet 坐标 $\psi_1,\ \ldots,\ \psi_{N-1}$保持较小，$y - y_q^\gamma$就会保持较小。因此，通过设计 G_q 使每个 Floquet 坐标都保持较小，即使所考虑的输入较大，也可以使用自适应约化（11）准确表示底层系统（4）的动力学。

注意，方程（11）的维度实际上高于原方程（4）的维度（$N+M$维与 N 维）。为了得到降阶方程，在许多情况下，如果大量 Floquet 坐标所对应的 Floquet 指数为负且绝对值较大，使其能够快速衰减，那么这些坐标可以很好地近似为零 [56], [49]。在其他情况下，当输入 U_e 与坐标 ψ_j 正交时，可以忽略该坐标（$\theta,\ p$）[54]。关于如何选择 G_p 的一般启发式方法将在 [49]中讨论。

3 定义非线性振荡模态的所提技术推导

3.1 所提策略概述

总体目标是用一组合适的非线性模态来表征模型 (1) 中的振荡，这些模态在远超弱扰动极限的范围内仍然有效。为了构建一种

能够利用第2.3节所述自适应相位-振幅约化的表述，考虑具有额外输入的同一系统

$$\dot{x} = F(x,u) + \alpha(q,t). \tag{12}$$

这里，x、F和u分别表示方程（1）中定义的状态、动力学和输入，$q \in \mathbb{R}^M$是时变参数集，而$\alpha(q,t)$是周期为T的外部周期输入。假设当$u = \alpha = 0$时，存在一个不动点x_0。令$s \in [0,T)$，方程（12）可改写为自治方程组：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x,u) + \alpha(q,s), \\ \dot{s} &= 1. \end{aligned} \tag{13}$$

令$y = [x^T\ s]^T \in \mathbb{R}^{N+1}$，假设当$u = 0$时，对于$q$的所有允许取值，方程（13）都存在一个周期轨道

$$y_q^\gamma(t) = \begin{bmatrix} x_q^\gamma(t) \\ \mathrm{mod}(t,T) \end{bmatrix}. \tag{14}$$

按照第2.3节中的表述，对于每个y_q^γ，都可以定义一个扩展相位$\theta(x,\ q)$以及一组 Floquet 坐标$\psi_1(x,\ q)$ ……，$\psi_N(x,\ q)$（注意，Floquet 坐标共有N个，因为$y \in \mathbb{R}^{N+1}$）。可以考虑将方程（13）改写为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x,0) + \alpha(q,s) + U_e(x,q,s), \\ \dot{s} &= 1 + f_\theta(x,q,s), \end{aligned} \tag{15}$$

其中$f_\theta(x,\ q,\ s) \in \mathbb{R}$是一个函数，其形式稍后将讨论；

$$U_e(x,q,s) = F(x,u) - F(x,0) - \alpha(q,s). \tag{16}$$

上述方程（15）中的x动力学与支配方程（1）的动力学完全相同。注意到方程（15）可以写成与方程（9）相同的一般形式，首先考虑相位坐标，可写为

$$\dot{\theta} = \omega(q) + Z_1^T(\theta,q)U_e + Z_2(\theta,q)f_\theta + D^T(\theta,q)\dot{q}, \tag{17}$$

其中$Z_1(\theta,q) \in \mathbb{R}^N$和$Z_2(\theta,q) \in \mathbb{R}^1$分别由与周期轨道$y_q^\gamma(t)$和$\omega = 2\pi/T$相关的$Z(\theta,q)$的前$N$个元素和最后一个元素构成。为进一步简化（17），注意方程（13）中的周期轨道由强迫$\alpha(q,s)$驱动。由于该周期轨道是周期强迫的结果，当q保持不变时，可以证明$\theta(q,s) = \mathrm{mod}(\theta_0 + \omega s, 2\pi)$（参见[44]），其中$\theta_0$是任意常数。因此，$Z_2(\theta,q) = \partial\theta/\partial s = \omega(q)$，而$Z_1(\theta,q)$是一个维数适当的零向量。由于$\theta_0$是任意的，最方便的做法是对所有$q$取$\theta_0 = 0$，从而得到$D(\theta,q) = 0$。考虑到这些简化，方程（17）变为$\dot{\theta} = \omega(q) + \omega(q)f_\theta$。再考虑振幅坐标，形式为（11）的完整自适应相位-振幅约化为

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega(q) + \omega(q)f_\theta, \\ \dot{\psi}_j &= \kappa_j(q)\psi_j + I_{j,1}^T(\theta,q)U_e + I_{j,2}(\theta,q)f_\theta + E_j^T(\theta,q)\dot{q}, \\ & \quad j = 1,\ldots,\beta, \\ \dot{q} &= G_q(q,\theta,\psi_1,\ldots,\psi_N,U_e). \end{aligned} \tag{18}$$

上文中，每个$I_{j,1}(\theta,q) \in \mathbb{C}^N$和$I_{j,2}(\theta,q) \in \mathbb{C}$分别构成与周期轨道$y_q^\gamma(t)$相关的$I_j(\theta,q)$的前$N$个元素和最后一个元素。在式 (18) 中，假设

Floquet 坐标 $\psi_{\beta+1},\ldots,\psi_N$ 具有较大的 Floquet 指数，因此衰减迅速，可以忽略。

在推导方程（18）时，外部强迫 $\alpha(q,\ t)$ 是任意的。如下文各节所示，通过适当选择 $\alpha(q,\ t)$，方程（18）可得出一组大幅简化的降阶常微分方程，其中周期轨道 x_q^γ 在强迫幅值较小时与线性模态密切相关，但也可扩展到远超线性范围的区域。

3.2 不动点附近单个非线性振荡模态的适当轨线构造

第 3.2 至 3.4 节接下来的分析与推导考虑一个周期轨道的单参数族，即在考察单个非线性振荡模态时取 $q\in\mathbb{R}^1$。若考虑额外的非线性模态，则必须考虑一个 M 参数的解族，其中 $M>1$。这一情形将在第 3.7 节讨论。

首先，假设在方程（12）中，当 $u=\alpha=0$ 时，存在一个不动点 x_0，满足 $F(x_0,\ 0)=0$，其解由方程（3）的特征分解给出。设 $(\lambda_1,\ v_1)$ 和 $(\lambda_2,\ v_2)$ 是与单个振荡线性模态相关联的一对简单共轭复特征值/特征向量对。为简单起见，假设选取特征值，使得虚部$(\lambda_1)>0$。这些特征值将归一化为 $||v_1||_2=||v_2||_2=1$，其中 $||\cdot||_2$ 是二范数。注意，这仍留有一个额外的自由度，因为对于任意 $\phi\in\mathbb{R}$，$v_1\exp(i\phi)$（其中 $i=\sqrt{-1}$）仍是一个特征向量。为完全确定 v_1，我们要求—$\arg(e_j^Tv_1)=-\pi$，其中 e_j 是标准单位基的第 j^{th} 个元素，$\arg(\cdot)$ 表示复数的辐角，而 j 可任意选取。注意，也可以采用其他归一化方式。

接下来，设 w_1 和 w_2 为分别对应于右特征向量 v_1 和 v_2的左特征向量。在与特征向量 $v_3,\ldots v_N$正交的超平面上定义 $\mu_i(t)=w_i^T(x(t)-x_0)$，解的形式为

$$x(t)=x_0+\sum_{j=1}^{2}\mu_j(0)v_j\exp(\lambda_jt). \tag{19}$$

为简单起见，此处假设 $\psi_j(0)\in\mathbb{R}$。考虑根据式（19）演化的轨线，$|\mu_1|$ 的等值集由周期轨道描绘

$$x(t)=x_0+\sum_{j=1}^{2}\mu_j(0)v_j\exp(i[\text{Imag}(\lambda_j)+\Delta\omega\text{sign}(\text{Imag}(\lambda_j))]t). \tag{20}$$

上文中的项 $\Delta\omega$ 会影响方程（20）所定义轨道的周期。必须满足 $\Delta\omega\neq0$ 和 $-$虚部$(\lambda_1)/3<\Delta\omega<$虚部$(\lambda_1)$，从而使与所得周期轨道相关的单值矩阵的特征值互异；这一点稍后会更加清楚。接下来，考虑方程（12），取 $u=0$，但 $\alpha(t)\neq0$，通过求解可得到形式为（20）的解

$$\begin{aligned}F(x_0,0)+&\frac{\partial F}{\partial x}(x(t)-x_0)+\alpha(t)+O(||x-x_0||^2)=\frac{dx}{dt}\\&=\sum_{j=1}^{2}\mu_j(0)v_ji[\text{Imag}(\lambda_j)+\Delta\omega\text{sign}(\text{Imag}(\lambda_j))]\exp(i[\text{Imag}(\lambda_j)+\Delta\omega\text{sign}(\text{Imag}(\lambda_j))]t),\end{aligned} \tag{21}$$

其中，左侧是 $x - x_0$ 取较小值时方程（12）的近似，右侧则由对（20）直接求导得到。对 $\alpha(t)$ 求解方程（21）并化简后得到

$$\begin{aligned}\alpha(t) = &-2\mu_1(0)\mathrm{Real}(\lambda_1)\Big[\mathrm{Real}(v_1)\cos((\mathrm{Imag}(\lambda_1)+\Delta\omega)t)\\ &-\mathrm{Imag}(v_1)\sin((\mathrm{Imag}(\lambda_1)+\Delta\omega)t)\Big]\\ &-2\Delta\omega\mu_1(0)\Big[\mathrm{Imag}(v_1)\cos((\mathrm{Imag}(\lambda_1)+\Delta\omega)t)\\ &+\mathrm{Real}(v_1)\sin((\mathrm{Imag}(\lambda_1)+\Delta\omega)t)\Big]+O(||x-x_0||^2).\end{aligned} \tag{22}$$

这些受迫周期轨道可用于定义一族受迫周期轨道，以便在弱受迫极限下使用（18）中的自适应相位-振幅约化。为此，令 $q = \mu_1(0) = O(\epsilon)$，其中 $0 < \epsilon \ll 1$，取

$$\begin{aligned}x_q^\gamma(t) &= x_0 + \sum_{j=1}^{2} q v_j \exp(i[\mathrm{Imag}(\lambda_j)+\Delta\omega\,\mathrm{sign}(\mathrm{Imag}(\lambda_j))]t)\\ &= x_0 + 2q\Big[\mathrm{Real}(v_1)\cos((\mathrm{Imag}(\lambda_1)+\Delta\omega)t) - \mathrm{Imag}(v_1)\sin((\mathrm{Imag}(\lambda_1)+\Delta\omega)t)\Big],\\ \alpha(q,t) &= \sum_{j=1}^{2} q\Big[-\mathrm{Real}(\lambda_j) + i\,\mathrm{sign}(\mathrm{Imag}(\lambda_j))\Delta\omega\Big]v_j\exp(i(\mathrm{Imag}(\lambda_j)+\mathrm{sign}(\mathrm{Imag}(\lambda_j)))t)\\ &= -2q\mathrm{Real}(\lambda_1)\Big[\mathrm{Real}(v_1)\cos((\mathrm{Imag}(\lambda_1)+\Delta\omega)t) - \mathrm{Imag}(v_1)\sin((\mathrm{Imag}(\lambda_1)+\Delta\omega)t)\Big]\\ &\quad -2\Delta\omega q\Big[\mathrm{Imag}(v_1)\cos((\mathrm{Imag}(\lambda_1)+\Delta\omega)t) + \mathrm{Real}(v_1)\sin((\mathrm{Imag}(\lambda_1)+\Delta\omega)t)\Big].\end{aligned} \tag{23}$$

应用方程（23）规定的输入 $\alpha(q,\ t)$，可得到一个周期为 $T = 2\pi/(\text{虚部}(\lambda_1) + \Delta\omega)$的周期轨道 $x_q^\gamma(t)$。该轨道可写成形式（14），随后根据大幅简化的相位-振幅约化（18）进行分析。为说明这一点，注意与周期轨道（14）相关的雅可比矩阵可写为

$$J(t) = \begin{bmatrix} J_0 & \frac{\partial\alpha}{\partial s} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \epsilon P(t) + O(\epsilon^2), \tag{24}$$

其中，J_0 是 F 在 $x = x_0$ 和 $u = 0$处的雅可比矩阵，方程（24）中的零项是维数适当的向量，$\frac{\partial\alpha}{\partial s}$ 在 $s = t$处取值，而$P(t)$由 F的二阶偏导数组成。考虑到（24），对于形式为（14）的周期轨道，令 $\Delta y = y - y_q^\gamma(t)$，邻近解的主导阶演化满足

$$\Delta\dot{y} = \begin{bmatrix} J_0 & \frac{\partial\alpha}{\partial s} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\Delta y + \epsilon P(t)\Delta y. \tag{25}$$

方程 (25) 的解可用于求得与周期轨道 y_q^γ 相关的 Floquet 特征函数和 Floquet 特征值。注意，方程 (25) 是周期为 $T = 2\pi/(\mathrm{Imag}(\lambda_1) + \Delta\omega)$ 的线性时变系统。因此，单值矩阵 Φ（即给出关系 $\Delta y(T) = \Phi y(0)$ 的矩阵）可以通过首先注意到方程 (25) 在主导阶上是线性时不变的来近似求得

阶 ϵ，从而

$$\begin{aligned}\Phi &= \exp\left(\begin{bmatrix} J_0 & \frac{\partial \alpha}{\partial s} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T\right) + O(\epsilon) \\ &= \begin{bmatrix} \exp(J_0 T) & X \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + O(\epsilon) \\ &= \Phi_0 + O(\epsilon), \end{aligned} \tag{26}$$

其中，exp(·)表示矩阵指数，$X \in \mathbb{R}^N$，而 Φ_0 由 Φ的 O(1)项组成。上式中，第二行是利用 O(1)项的块三角结构得到的。

Φ 的特征值以及相应的左、右特征向量（分别记为λ_j^Φ、 w_j^Φ和v_j^Φ）分别决定了与式（14）中的周期轨道相关的Floquet乘子和Floquet 特征函数。注意，此处使用符号（λ_j^Φ、 v_j^Φ）表示单值矩阵 Φ的特征值与特征向量对；这不同于 J_0 的特征值与特征向量对，后者记为（λ_j、v_j）。如附录B所述，只要 $\lambda_j^{\Phi_0}$是单的，对 Φ_0 施加 $O(\epsilon)$扰动，就会使所得特征值和特征向量发生 $O(\epsilon)$阶的偏移。因此，在 ϵ的主导阶下，通过考察 Φ_0的特征值和特征向量，即可得到Floquet乘子和 Floquet 特征函数。对于 J_0的任意特征值、右特征向量和左特征向量三元组（λ_j、v_j、w_j）

$$v_j^{\Phi_0} = \begin{bmatrix} v_j \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{27}$$

是一个右 特征向量，其特征值为 $\lambda_j^{\Phi_0} = \exp(\lambda_j T)$。还可以验证 t

$$w_j^{\Phi_0} = \begin{bmatrix} w_j \\ X^T w_j / (\exp(\lambda_j T) - 1) \end{bmatrix}, \tag{28}$$

是 Φ_0^T 的特征向量，其特征值为 $\lambda_j^{\Phi_0} = \exp(\lambda_j T)$，因此也是 Φ_0 对应的左特征向量。由此可知，与式 (14) 中的周期轨道相关联的 Floquet 指数为

$$\begin{aligned}\kappa_j &= \frac{\log(\exp(\lambda_j T))}{T} + O(\epsilon) \\ &= \frac{\log|\exp(\lambda_j T)|}{T} + i\frac{\arg(\exp(\lambda_j T))}{T} + O(\epsilon) \\ &= \mathrm{Real}(\lambda_j) + i\frac{\arg(\exp(i\mathrm{Imag}(\lambda_j)T))}{T} + O(\epsilon) \\ &= \mathrm{Real}(\lambda_j) + i\mathrm{Imag}(\lambda_j) - \frac{2\pi i m}{T} + O(\epsilon). \end{aligned} \tag{29}$$

上文注意到，对于任意值的 k，$\exp(a+bi) = \exp(a+bi+2k\pi i)$。因此，(29) 要求 log(exp($\lambda_j T$)) 的虚部始终位于区间 $(-\pi, \pi]$。因此，对于每个 Floquet 指数，必须在最后一行适当选取 m。另请注意，由于下文方程（20）对 $\Delta\omega$ 的限制，在考虑 κ_1 时，$m = 1$；这一点马上会变得重要。通过求解方程（A3）的周期解，可以得到相应的 Floquet 特征函数。为此，将方程（24）的雅可比矩阵取至主导阶 ϵ，方程（A3）变为

$$\dot{g}_j = \left(\begin{bmatrix} J_0 & \frac{\partial \alpha}{\partial s} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \kappa_j \mathrm{Id}\right) g_j + O(\epsilon). \tag{30}$$

取至主导阶 ϵ 时，使方程（30）产生周期解的初始条件由 Φ 的右特征向量给出，这些特征向量已在 (27) 中给出。鉴于此，注意对于任意 $g_j \propto \begin{bmatrix} v_j^T & 0 \end{bmatrix}^T$，方程（30）可简化为

$$\begin{aligned} \dot{g}_j &= g_j(\lambda_j - \kappa_j) + O(\epsilon) \\ &= g_j(\mathrm{Imag}(\lambda_j) - \mathrm{Imag}(\kappa_j))i + O(\epsilon) \\ &= g_j 2\pi i m/T + O(\epsilon) \\ &= g_j(\mathrm{Imag}(\lambda_1) + \Delta\omega) i m + O(\epsilon), \end{aligned} \tag{31}$$

其中， m 是一个整数。上面，第三行是通过代入公式（29）的最后一行得到的，第四行则是注意到 $T = 2\pi/$(虚部(λ_1) $+\Delta\omega$) 后得到的。考虑方程（31），在主导阶下 ϵ，如果 g_j 在时间 $t = 0$时与 $\begin{bmatrix} v_j^T & 0 \end{bmatrix}^T$ 成正比，那么在阶为 $1/\epsilon$ 的时间尺度上，它仍保持成正比。因此，对方程（31）在一个周期内积分，最终得到解

$$g_i(t) = \begin{bmatrix} v_j \\ 0 \end{bmatrix} \exp((\mathrm{Imag}(\lambda_1) + \Delta\omega) i m t) + O(\epsilon). \tag{32}$$

Floquet 坐标的梯度可以通过求解方程（A2）得到。在主导阶下 ϵ，该方程为

$$\dot{I}_j = -\left(\begin{bmatrix} J_0^T & 0 \\ \frac{\partial \alpha}{\partial s} T & 0 \end{bmatrix} - \kappa_j \mathrm{Id} \right) I_j + O(\epsilon). \tag{33}$$

与获得解 g_j 的方法类似，利用由方程（28）得到的左特征向量作为初始条件，可以证明方程（33）沿解轨迹可写为

$$\dot{I}_j = \begin{bmatrix} -I_{j,1}(\mathrm{Imag}(\lambda_1) + \Delta\omega) i m \\ -(\frac{\partial \alpha}{\partial s}^T I_{j,1} - \kappa_j I_{j,2}) \end{bmatrix} + O(\epsilon), \tag{34}$$

其中，$I_{j,\ 1}(t) \in \mathbb{C}^N$ 是 $I_j(t)$ 的前 N 个元素，而 $I_{j,\ 2}(t) \in \mathbb{C}$ 是最后一个元素。因此，方程（33）的解具有以下形式：

$$I_j(t) = \begin{bmatrix} w_j \exp(-(\mathrm{Imag}(\lambda_1) + \Delta\omega) i m t) \\ \rho_j(t) \end{bmatrix} + O(\epsilon), \tag{35}$$

其中 $\rho_j(t) \in \mathbb{C}$ 是周期性的。根据附录A中的公式（38），通过考虑约束条件（A5），可以进一步简化 $\rho_1(t)$。变量替换为 $\theta = \omega t$ 后，该约束条件变为

$$I_1^T(t) \frac{\partial y^\gamma}{\partial t} = 0. \tag{36}$$

项 $\partial y^\gamma / \partial \theta$ 可通过对（23）直接求导得到；代入（36）可得

$$\begin{aligned} 0 &= I_1^T(t) \frac{\partial y^\gamma}{\partial t} \\ &= \begin{bmatrix} w_1^T \exp(-(\mathrm{Imag}(\lambda_1) + \Delta\omega) i t) & \rho(t) \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^2 q i (\mathrm{Imag}(\lambda_j) + \mathrm{sign}(\mathrm{Imag}(\lambda_j))\Delta\omega) v_j \exp((\mathrm{Imag}(\lambda_j) + \mathrm{sign}(\mathrm{Imag}(\lambda_j))\Delta\omega) i t) \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= q i (\mathrm{Imag}(\lambda_1) + \Delta\omega) + \rho_1(t). \end{aligned} \tag{37}$$

在上面的第二行中，如公式（29）正下方所述，$m = 1$ 对于 I_1，从而得到最后一行的简化结果。最终可得 $\rho_1(t) = -qi$(虚部$(\lambda_1) + \Delta\omega)$，因此

$$I_1(t) = \begin{bmatrix} w_1 \exp(-(\text{Imag}(\lambda_1) + \Delta\omega)it) \\ -qi(\text{Imag}(\lambda_1) + \Delta\omega) \end{bmatrix} + O(\epsilon). \tag{38}$$

3.3 不动点附近振荡模态的自适应相位振幅约化

结合第3.2节中关于输入 $\alpha(q, t)$ 以及 Floquet坐标 $I_j(t)$ 梯度的推导，方程（18）中的自适应约化可大幅简化。注意，在公式（23）、（32）和（38）中，$\theta = \frac{2\pi}{T}t = \omega t$ 沿轨线。因此，在考虑相位坐标时，可以使用代换 $t = \theta/\omega$。在本小节中，假设自适应参数 q 是一个 $O(\epsilon)$ 项。根据方程（18），ψ_1 的动力学为

$$\begin{aligned} \dot{\psi_1} &= \kappa_1(q)\psi_1 + I_{1,1}^T(\theta, q)U_e + I_{1,2}(\theta, q)f_\theta + E_1(\theta, q)\dot{q} \\ &= \kappa_1(q)\psi_1 + \exp(-i\theta)w_1^T U_e - qi\omega f_\theta + E_1(\theta, q)\dot{q}, \end{aligned} \tag{39}$$

其中，$I_{1,\,1}(\theta, 1)$ 和 $I_{1,\,2}$ 在方程（34）下方定义为 $I_1(\theta, q)$ 的首末分量。在第二行中，使用了方程（38）中的关系，并通过坐标变换 $\theta = \omega t$ 将各项写成 θ 的函数，其中 $\omega = \text{Imag}(\lambda_1) + \Delta\omega$。此外，如附录A所述，$E_1(\theta, q)$ 可根据下式计算

$$\begin{aligned} E_1(\theta, q) &= -I_1^T(\theta, q)\frac{\partial x^\gamma}{\partial q} \\ &= -\begin{bmatrix} w_1 \exp(-i\theta) \\ -qi\text{Imag}(\lambda_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^2 v_j \exp((-1)^{j+1}i\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= -1, \end{aligned} \tag{40}$$

其中，第二行是将（38）代入 $I_1(\theta, q)$，并利用（23）得到 $\partial x^\gamma/\partial q$（定义见附录A）后得出的。在公式（39）中，$\dot{q}$ 和 f_θ 可以任意选取；具体而言，令这些项为

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \text{Real}(\exp(-i\theta)w_1^T)U_e, \\ f_\theta &= \frac{\text{Imag}(\exp(-i\theta)w_1^T)U_e}{q\omega}, \end{aligned} \tag{41}$$

可得

$$\dot{\psi_1} = \kappa_j(q)\psi_1. \tag{42}$$

回顾方程（29），当 q 是 ϵ 阶项时，Real$(\kappa_j(q)) =$ Real$(\lambda_j) + O(\epsilon)$；当 q 足够小时，Real$(\kappa_j(q)) < 0$，使得 $\lim_{t\to\infty}\psi_1 = 0$，并且可以忽略 ψ_1 和 $\psi_2 = \psi_1^*$ 的动力学。综上，方程（18）中的自适应约化变为

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega(q) + \frac{\text{Imag}(\exp(-i\theta)w_1^T)U_e}{q}, \\ \dot{q} &= \text{Real}(\exp(-i\theta)w_1^T)U_e, \\ \dot{\psi_j} &= \kappa_j(q)\psi_j + I_{j,1}^T(\theta, q)U_e + I_{j,2}(\theta, q)f_\theta + E_j(\theta, q)\dot{q}, \\ j &= 3, \ldots, \beta. \end{aligned} \tag{43}$$

再次说明，如果 Real($\kappa_j(q)$) 的对应值为负且绝对值较大，使得暂态迅速衰减，则忽略 Floquet坐标 ψ_j。

值得考察未扰动情形下方程（43）的动力学，即当$u = 0$时的情形。在这种情况下， $U_e = -\alpha(q,\ \theta)$，将$\theta =$(虚部($\lambda_1$) $+ \Delta\omega$)t代入方程（23）即可得到该式。直接将这些项相乘并化简（利用 $w_1^T v_1 = 1$ 和 $w_1^T v_1^* = 0$，因此实部(w_1^T)实部(v_1) $= 0.5$、虚部(w_1^T)虚部(v_1) $= -0.5$、实部(w_1^T)虚部(v_1) $= 0$，且虚部(w_1^T)实部(v_1) $= 0$），可以发现，当 $u = 0$时，方程（43）的 θ 和 q动力学可化简为

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \mathrm{Imag}(\lambda_1),\\ \dot{q} &= q\mathrm{Real}(\lambda_1).\end{aligned} \tag{44}$$

请注意，方程（44）给出的表示具有与作用-角坐标系完全相同的动力学（例如参见 [24]），且适用于具有复特征值的线性系统。还请注意，第3.2节和第3.3节的结果在 $q = O(\epsilon)$时有效，也就是说，当状态足够接近其对应的不动点，从而能够依据局部线性化表示动力学时有效。然而，如后续各节所示，这一策略可以扩展到稳定不动点附近范围之外很远的区域，以考察非线性振荡。

3.4 扩展　　远超稳定不动点的非线性振荡　　t

第3.2节和第3.3节讨论了如何为靠近不动点的位置构造适当的自适应约化轨线。这一策略可以很容易地扩展到考虑远离不动点的轨线。为此，首先考虑方程（13）的一般周期轨道 $y^\gamma_{q_0}$；当 $u = 0$ 与 $q_0 \in \mathbb{R}$ 为 O（ϵ）项时，该轨道由此产生。回想一下，这是一个受迫周期轨道，其 α（q_0，t）形式如方程（23）所示。与第3.2节一样，我们令 g_1（t）和 g_2（t）分别为方程（32）和（29）中给出的 Floquet 指数 κ_1 和 κ_2 所对应的 Floquet特征模态。可以定义一个相邻的周期轨道

$$\begin{aligned}y^\gamma_{q_0+\Delta q}(t) &= y^\gamma_{q_0}(t) + \sum_{j=1}^{2} \Delta q g_j(t)\\ &= y^\gamma_{q_0}(t) + 2\Delta q\mathrm{Real}(g_1(t)),\end{aligned} \tag{45}$$

其中 Δq 也是一个 O（ϵ）项，而第二行的简化源于以下事实：g_1（t）$= g_2^*$（t）。接下来，我们寻求外部强迫 α（$q_0 + \Delta q$，t）$= \alpha$（q_0，t）$+ \Delta\alpha$（q_0，t），使其对应方程（45）所要求的周期轨道。为此，对（45）求时间导数可得

$$\dot{y}^\gamma_{q_0+\Delta q}(t) = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x^\gamma_{q_0+\Delta q}(t) \\ \mathrm{mod}(t,T)\end{bmatrix} = \dot{y}^\gamma_{q_0}(t) + \sum_{j=1}^{2}\Delta q\dot{g}_j(t). \tag{46}$$

同样，沿着这条新的周期轨道，考虑底层模型（13）的动力学，也可以得到

$$\begin{aligned}\dot{x}^\gamma_{q_0+\Delta q}(t) &= F(x^\gamma_{q_0+\Delta q}(t),0) + \alpha(q_0,t) + \Delta\alpha(q_0,t),\\ &= F(x^\gamma_{q_0}(t),0) + \frac{\partial F}{\partial x}\left(\sum_{j=1}^{2}\Delta q g_{j,1}(t)\right) + \alpha(q_0,t) + \Delta\alpha(q_0,t) + O(\epsilon^2).\end{aligned} \tag{47}$$

在上式中，偏导数在 $x^{\gamma}_{q_0}(t)$ 和 $g_{j,\ 1}(t)$ 处求值，$\in \mathbb{C}^N$ 对应于 g_j 的前 N 个元素。结合方程（47）和（46）的前 N 项，并注意到 $\dot{x}^{\gamma}_{q_0}(t) = F(x^{\gamma}_{q_0}(t),\ 0) + \alpha(q_0,\ t)$，可得

$$\begin{aligned}\Delta\alpha(q_0,t) &= \sum_{j=1}^{2}\Delta q\dot{g}_{j,1}(t) - \frac{\partial F}{\partial x}\left(\sum_{j=1}^{2}\Delta q g_{j,1}(t)\right) + O(\epsilon^2)\\ &= 2\Delta q\mathrm{Real}(\dot{g}_{1,1}(t)) - 2\Delta q\frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{Real}(g_{1,1}(t)) + O(\epsilon^2),\end{aligned} \tag{48}$$

其中，第二行可通过注意到 $g_1(t) = g_1^*(t)$ 得到。因此，选择

$$\alpha(q_0+\Delta q,t) = \alpha(q_0,t) + 2\Delta q\mathrm{Real}(\dot{g}_{1,1}(t)) - 2\Delta q\frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{Real}(g_{1,1}(t)), \tag{49}$$

即可得到（45）所要求的主导阶周期轨道 ϵ。

可以验证，在主导阶 ϵ 下，方程（48）和（49）得出的结果与方程（23）中的结果相同（注意，q_0 和 Δq 均为 $O(\epsilon)$ 项）。不过，这些定义为将所提出的方法扩展到线性范围之外提供了一种策略。为此，假设已得到一条轨道 $x^{\gamma}_{q_0+k\Delta q}$，其对应的输入为 $\alpha(q_0 + k\Delta q, t)$，其中 $k \in \mathbb{N}$。项 $I_j(t, q_0 + k\Delta q)$ 和 $g_j(t, q_0 + k\Delta q)$ 均可分别由方程（A2）和（A3）得到。这里需要指出的是，$q_0 + k\Delta q$ 不再受限于必须为 $O(\epsilon)$ 项，因此 g_j 和 I_j 现在都是 t 和 q 的函数。每个 $g_j(q,t)$ 都必须适当归一化，以确保 $g(t,q)$ 连续；回顾一下，方程（19）上方定义的特征向量 v_1 和 v_2 经过缩放，使得 $||v_1||_2 = ||v_2||_2 = 1$、$v_1 = v_2^*$，且 $\arg(e_j^T v_1) = -\pi$，其中 e_j 是适当维度的标准单位基中的第 j^{th} 个元素，而 j 可以任意选取。为使缩放与方程（32）得出的 $g_1(t,q)$ 和 $g_2(t,q)$ 相匹配，我们要求对于所有 q，$||g_1(0,q)||_2 = ||g_2(0,q)||_2 = 1$，$g_1(0,q) = g_2^*(0,q)$，且 $\arg(e_j^T g_1(0,q)) = -\pi$。随后，可据此定义一条新的周期轨道及其对应的外部输入

$$\begin{aligned}x^{\gamma}_{q_0+(k+1)\Delta q}(t) &= x^{\gamma}_{q_0+k\Delta q}(t) + \Delta q\sum_{j=1}^{2} g_i(t, q_0+k\Delta q),\\ \alpha(q_0+(k+1)\Delta q,t) &= \alpha(q_0+k\Delta q,t) + 2\Delta q\mathrm{Real}(\dot{g}_{1,1}(t, q_0+k\Delta q))\\ &\quad - 2\Delta q\frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{Real}(g_{1,1}(t, q_0+k\Delta q)).\end{aligned} \tag{50}$$

请注意，由（50）定义的周期轨道在 Δq中达到主导阶精度。为便于实际实现，并避免这些误差在每次迭代中累积，通常需要找到邻近的真正周期解，例如可以通过牛顿迭代实现这一点。重复这一过程，可以定义一族延伸到线性范围之外的周期轨道；在线性范围之外，局部线性化将不再适用。对于这族周期轨道，考虑方程（18）中的自适应约化，ψ_1 Floquet 坐标的动力学为

$$\dot{\psi}_1 = \kappa_1(q)\psi_1 + I_{1,1}^T(\theta,q)U_e + I_{1,2}(\theta,q)f_\theta + E_1(\theta,q)\dot{q}. \tag{51}$$

与第3.3节一样，考虑到附录A中讨论的 $E_1(\theta,q)$，可以计算出 $E_1(\theta,q)$

根据

$$\begin{aligned} E_1(\theta,q) &= -I_1^T(\theta,q)\frac{\partial x^\gamma}{\partial q} \\ &= -I_1^T(\theta,q)\left(\sum_{j=1}^{2} g_i(\theta, q_0 + k\Delta q)\right) \\ &= -1, \end{aligned} \tag{52}$$

其中，第二行是对（50）中的 $\partial x^\gamma/\partial q$ 求偏导，并利用变量代换 $\theta = \omega t$将每个g_i 视为 θ 的函数后得到的；第三行则由关系式（A4）得出。再次回顾，自适应约化（18）中的 f_θ 和 $\dot{p}$可以任意选取。在求取

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ f_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{Real}(I_{1,2}(\theta,q)) \\ 0 & -\mathrm{Imag}(I_{1,2}(\theta,q)) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathrm{Real}(I_{1,1}^T(\theta,q))U_e \\ \mathrm{Imag}(I_{1,1}^T(\theta,q))U_e \end{bmatrix}, \tag{53}$$

方程（51）变为 $\dot{\psi}_1 = \kappa_1(q)\psi_1$ ；当 t 趋于无穷大时，只要对所有允许的 q均有实部$(\kappa_j(q)) < 0$ ，该式就趋于零。利用方程（53）确定 $\dot{q}$ 和 f_θ后，可以忽略 ψ_1 和 $\psi_2 = \psi_1^*$ 的动力学。要使方程（53）中的逆矩阵存在，必须满足虚部$(I_{1,\ 2}(\theta,\ \ q)) \neq 0$；回顾第3.2节中的讨论，当 q 较小时，这一条件在极限情况下可以得到保证。

与第3.3节的结果类似，取 $\dot{q}$ 和 f_θ 满足式（53）的要求，则式（18）中的自适应约化变为

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega(q) + \omega(q) f_\theta, \\ \dot{q} &= G_q(q,\theta,U_e), \\ \dot{\psi}_j &= \kappa_j(q)\psi_j + I_{j,1}^T(\theta,q)U_e + I_{j,2}(\theta,q)f_\theta + E_j(\theta,q)\dot{q}, \\ j &= 3,\ldots,N, \end{aligned} \tag{54}$$

其中 $G_q(q,\theta,U_e)$ =实部$(I_1^T,1(\theta,q))U_e$–实部$(I_1,2(\theta,q))$虚部$(I_1^T,1(\theta,q))U_e$/虚部$(I_1,2(\theta,q))$，且 f_θ =–虚部$(I_1^T,1(\theta,q))U_e$/虚部$(I_1,2(\theta,q))$。当 q很小时，方程（54）简化为方程（43）。尽管如此，由式（50）迭代定义的周期轨道族可以扩展到简单线性化技术不再适用的状态范围。

在接下来的结果中，也将考虑有效无强迫固有频率，其定义为取 $u = 0$时对所有 θ 对应的无强迫固有频率求平均。在这种情况下，$U_e = -\alpha(q,\ \theta)$，因此

$$\begin{aligned} \bar{\omega}(q) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[\omega(q) + \omega(q) f_\theta\right] d\theta \\ &= \omega(q) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[\omega(q)\frac{\mathrm{Imag}(I_{1,1}^T(\theta,q))\alpha(q,\theta)}{\mathrm{Imag}(I_{1,2}(\theta,q))}\right] d\theta, \end{aligned} \tag{55}$$

其中， f_θ 按照方程（53）的要求取值。根据（55）的定义以及方程（44）的结果（该结果在 $q = O(\epsilon)$时有效，即状态接近底层不动点时）， $\bar{\omega}(q)$ =虚部(λ_1)在 q 为 ϵ 阶项时，其主导阶为 ϵ 。

3.5 考虑具有非静态周期的外部强迫

通过方程（50）迭代构造的周期轨道族具有相同的周期。在某些情况下，可能需要改变给定周期轨道的固有频率。为此，考虑一个 T-周期解 $x_q^\gamma(t)$：当采用 T-周期输入 $\alpha(q,\ t)$并取 $u=0$时，该解满足方程（12）。回想 $\omega=2\pi/T$，通过对 $\alpha(q,\ t)$作适当调整，即可得到周期轨道 $x_q^\gamma(\frac{\omega+\Delta\omega}{\omega}t)$。为此，将所需的周期轨道代入方程（12），得

$$\dot{x}_q^\gamma\left(\frac{\omega+\Delta\omega}{\omega}t\right)\left(1+\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)=F\left(x_q^\gamma\left(\frac{\omega+\Delta\omega}{\omega}t\right),0\right)+\hat{\alpha}(q,t), \tag{56}$$

其中，$\hat{}\alpha$是为方程（56）提供解的输入。注意到 $\dot{x}_q^\gamma=F(x_q^\gamma(t)\ u)\ +\alpha(q,t)$，取

$$\hat{\alpha}(q,t)=\alpha\left(q,\left(\frac{\omega+\Delta\omega}{\omega}\right)t\right)+\frac{\Delta\omega}{\omega}\dot{x}_q^\gamma\left(\frac{\omega+\Delta\omega}{\omega}t\right), \tag{57}$$

可为方程（56）提供解，并得到所需的周期轨道。考虑方程（13）中的自治方程系统，回想 $s\in[0,T)$，可得

$$\begin{aligned}\dot{x}&=F(x,u)+\hat{\alpha}(q,s),\\ \dot{s}&=\frac{\omega+\Delta\omega}{\omega},\end{aligned} \tag{58}$$

当 $u=0$时，存在经过适当时间平移的周期轨道 $x_q^\gamma(\frac{\omega+\Delta\omega}{\omega}t)$，其周期为 $\hat{}T=2\pi/(\omega+\Delta\omega)$，固有频率为 $\hat{}\omega=\omega+\Delta\omega$。这种对外部施加的强迫进行的平移，可与方程（50）中迭代定义的周期轨道结合实施。注意到给定轨道的周期平移后，$\partial x^\gamma/\partial q$ 保持不变；因此，在考虑非静态周期时，方程（54）中的自适应约化总体结构保持不变，主要区别在于 ω 变为 q的函数。

按照上述策略改变振荡周期，通常会改变与底层周期轨道相关的 Floquet 指数。例如，当 $q=O(\epsilon)$时，考虑将自然周期从 T 调整为 $T+\Delta T$，这是根据方程（57）对外部强迫进行修改所导致的。尽管周期发生了变化，但由于底层轨道保持不变，对照方程（59），与（58）的周期轨道相关的单值矩阵可按下式求得

$$\begin{aligned}\Phi&=\exp\left(\begin{bmatrix}J_0 & \frac{\partial\alpha}{\partial s}\\ 0 & 0\end{bmatrix}T\right)+O(\epsilon)\\ &=\begin{bmatrix}\exp(J_0T) & \hat{X}\\ 0 & 1\end{bmatrix}+O(\epsilon)\\ &=\hat{\Phi}_0+O(\epsilon),\end{aligned} \tag{59}$$

$\hat{}$其中，项 X above 与式 (26) 中的 X 不同，这是因为 $\partial\alpha/\partial s$不同。尽管如此，式 (27) 中的右特征向量也是 Φ 的右特征向量，其特征值为 $\exp(\lambda_j(T+\Delta T))$。

根据式 (29) 中的关系，相应的 Floquet 指数为

$$\begin{aligned}\hat{\kappa}_j &= \frac{\log(\exp(\lambda_j(T+\Delta)))}{T+\Delta T} + O(\epsilon) \\ &= \frac{\log|\exp(\lambda_j(T+\Delta T))|}{T+\Delta T} + i\frac{\arg(\exp(\lambda_j(T+\Delta T)))}{T+\Delta T} + O(\epsilon) \\ &= \mathrm{Real}(\lambda_j) + i\frac{\arg(\exp(i\mathrm{Imag}(\lambda_j)(T+\Delta T)))}{T+\Delta T} + O(\epsilon) \\ &= \mathrm{Real}(\lambda_j) + i\frac{\mathrm{Imag}(\lambda_j)(T+\Delta T) - 2\pi m}{T+\Delta T} + O(\epsilon) \\ &= \kappa_j + \frac{2\pi m i \Delta T}{T^2} + O(\Delta T^2) + O(\epsilon). \end{aligned} \tag{60}$$

上面最后一行是以 $\Delta T = 0$为中心进行泰勒展开得到的。请注意，关系式（60）仅在 q 为 O（ϵ）项的极限情况下才成立。与方程（29）中的κ_j 值相比，改变周期只会在主导阶 ϵ改变所得 Floquet 指数的虚部。

3.6 实施步骤列表 实施所提出的模型降阶方法的步骤 h

第 3.1–3.5 节详细介绍了所提出的降阶建模策略，实施该策略所需的步骤总结如下:

1) 为模型（1）确定一个合适的不动点 x_{ss}，即满足 F（$x_{\mathrm{ss}}, 0$） $= 0$。确定一对与单个振荡线性模态相关联的共轭复数单特征值及其特征向量（λ_1, v_1）和（λ_2, v_2）。将特征值排序，使得虚部（λ_1） > 0。

2) 对 v_1 和 v_2 进行适当归一化，使得 $||v_1||_2 = ||v_2||_2 = 1$、 $v_1 = v^*$ 和 $\arg(e_j^T v_1) = -\pi$。请注意，只要在实现此策略时始终采用一致的归一化方式，也可以使用其他归一化方式。

3) 令 $T = 2\pi/(\mathrm{Imag}(\lambda_1) + \Delta\omega)$，其中 $\Delta\omega$ 是公式（20）下方定义的非零常数。另令 q_0 为一个较小的正数。根据方程（23）求得 T-周期轨道 $x_{q_0}^{\gamma}(t)$，该轨道由应用 $\alpha(q_0,\ t)$ 得到。对于这个初始轨道， q_0 必须足够小，才能使线性化对其底层动力系统的近似足够准确。

4) 考虑由（13）表示的自治系统，利用上一步计算出的项，计算周期轨道 $y_{q_0}^{\gamma}(t)$ 的项 $g_1(\theta,\ q_0)$ 和 $I_1(\theta,\ q_0)$。具体来说，首先求出与单值矩阵相关的特征值 $\lambda_1^{\Phi_0} \approx \exp(\lambda_j T)$，其对应的 Floquet 指数为 $\kappa_1(q_0)$，定义见公式（29）。项 $g_1(\theta,\ q_0)$ 可通过求解方程（A3）的周期解，并将其归一化为 $||g_1(0,\ q_0)||_2 = 1$，且对于所有 q， $\arg(e_j^T g_1(0,\ q_0)) = -\pi$ （与上文步骤 2 中给出的归一化方式一致）来求得。随后，可根据公式（A4）规定的归一化方式，求解方程（A2）的周期解，从而计算 $I_1(\theta,\ q_0)$。

5）对于一个较小的正数常量 Δq，定义相邻的周期轨道 $x_{q_0+\Delta q}^{\gamma}(t)$ 及其对应的输入 $\alpha(q_0 + \Delta q)$，二者均按照方程（50）计算。

6) 使用步骤 5 中得到的周期轨道，为自治系统（13）定义周期轨道 $y_{q_0+\Delta q}^{\gamma}(t)$。通过适当缩放，计算该周期轨道的 $g_1(\theta,\ q_0 + \Delta q)$ 和 $I_1(\theta,\ q_0 + \Delta q)$。

7) 根据方程（50），继续迭代定义相邻的周期轨道及其相关输入。对于每个新识别出的轨道，计算相关周期轨道的 $g_1(\theta, q)$ 和 $I_1(\theta, q)$。请注意，随着周期轨道逐渐远离不动点，Floquet 指数 $\kappa_1(q)$ 通常会缓慢变化。所得信息用于定义支配方程（ 54 ）中 θ 和 q 的动力学。

下面还将强调一些关于所提出策略实现的通用说明:

- 如果对于所有相关的 q，某个 Floquet 坐标 ψ_j 对应的 Floquet 指数 $\kappa_j(q)$ 均为负且绝对值较大，则通常可以忽略该坐标的动力学。如果某个等稳坐标 ψ_j 不能被忽略，则对于每条周期轨道，可以在计算 $I_1(\theta, q)$ 和 $g_1(\theta, q)$ 后立即计算 $I_j(\theta, q)$ 和 $g_j(\theta, q)$。注意，$\kappa_j(q) = \log(\lambda_j^{\Phi})/T$，其中 λ_j^{Φ} 是单值矩阵的一个适当特征值。

- 正如正文中所述，在确定能够得到周期轨道$x^{\gamma}_{q+\Delta q}(t)$的 $\alpha(q+\Delta q, t)$ 时，方程（50）仅在 Δq^2阶以内有效。为防止这些误差在多次迭代中累积（从而得到非周期解），通常有必要将根据（50）计算得到的每个 $x^{\gamma}_{q+\Delta q}(t)$ 视为一个近似猜测，并使用牛顿迭代通过数值方法确定周期解。

- 随着 q 的值增加，如果虚部$(\lambda_1)T$变为 2π 的倍数，λ_1^{Φ} 可能成为重特征值。若发生这种情况，则无法保证 Floquet 特征函数$g_1(\theta, q)$关于 q 保持连续，因此无法使用自适应相位振幅约化。采用第 3.5 节讨论的策略对周期进行细微调整，有助于避免这一问题。对于给定的 q，计算出 $\alpha(q, t)$ 和 $x^{\gamma}_{q+\Delta q}(t)$ 后，可以根据方程（57）调整外部输入，从而改变振荡周期。

3.7 考虑多个非线性振荡模态的多个自适应参数

第 3.2 至 3.4 节的分析得出了一个与单个非线性模态振荡相关的自适应参数。采用这一公式也可以考虑多个振荡模态，但必须确保相关 Floquet坐标 ψ_3，……，ψ_N 的幅值保持较小，即其他振荡模态的振幅必须较小。通过考虑额外的自适应参数来研究多个非线性模态的影响相对直接，最终可得到一个具有 $n > 1$ 的 n 维周期轨道族。

为此，假设已根据方程（50）迭代得到适用于 $q_1 \in [0, q_{1,\max}]$ 的周期轨道单参数族 $x^{\gamma}_{q_1}(t)$ 及其对应的输入 $\alpha(q_1, t)$。为了纳入一个额外的非线性模态，可以利用这组初始周期轨道定义轨道的三参数族 $x^{\gamma}_{q_1,q_2,q_3}$ ，以及相应的输入三参数族 $\alpha(q_1, q_2, q_3, t)$。与第3.4节讨论的策略类似，设 $g_3(q_1, q_2, q_3, t)$ 和 $g_4(q_1, q_2, q_3, t)$ 为对应于共轭复 Floquet 坐标 $\psi_3 = \psi_4^*$ 的 Floquet 特征函数，即对应于第二振荡模态（注意，$g_1(q_1, q_2, q_3, t)$ 和 $g_2(q_1, q_2, q_3, t)$ 仍是与第一振荡模态相关联的 Floquet 特征函数）。与对 g_1 和 g_2 的缩放类似，我们要求对于所有 q_1, q_2, q_3， $||g_3(q_1, q_2, q_3, 0)||_2 = ||g_4(q_1, q_2, q_3, 0)||_2 = 1$， $g_3(q_1, q_2, q_3, 0) = g_4^*(q_1, q_2, q_3, 0)$，且 $\arg(e_j^T g_3(q_1, q_2, q_3, 0)) = -\pi$；其中 e_j 是标准单位基中适当维度的元素， j 可任意选取。

首先，取 $x^{\gamma}_{q_1,\ 0,\ 0}(t)$ 和 $\alpha(q_1,\ 0,\ 0,\ t)$，使其与针对给定的 q_1 值、由方程（50）得到的周期轨道和输入相同，随后可按如下方式添加第二维：

$$x^{\gamma}_{q_1,q_2+\Delta q_2,0}(t) = x^{\gamma}_{q_1,q_2,0}(t) + \Delta q_2 \sum_{j=3}^{4} g_j(q_1, q_2, 0, t), \tag{61}$$

及其对应的输入

$$\alpha(q_1, q_2 + \Delta q_2, 0, t) = \alpha(q_1, q_2, 0, t) + \Delta q_2 \sum_{j=3}^{4} \dot{g}_j(q_1, q_2, 0, t) - \frac{\partial F}{\partial x}\Big(\sum_{j=3}^{4} \Delta q_2 g_j(q_1, q_2, 0, t)\Big), \tag{62}$$

对于 $q_2 \in [q_{2,\min}, q_{2,\max}]$。随后，可以按照.....增加第三维

$$x^{\gamma}_{q_1,q_2,q_3+\Delta q_3}(t) = x^{\gamma}_{q_1,q_2,q_3}(t) + i\Delta q_3 \sum_{j=3}^{4} g_j(q_1, q_2, q_3, t), \tag{63}$$

及其对应的输入

$$\alpha(q_1, q_2, q_3 + \Delta q_3, t) = \alpha(q_1, q_2, q_3, t) + i\Delta q_3 \sum_{j=3}^{4} \dot{g}_j(q_1, q_2, q_3, t) - \frac{\partial F}{\partial x}\Big(\sum_{j=3}^{4} i\Delta q_3 g_j(q_1, q_2, q_3, t)\Big), \tag{64}$$

对于 $q_3 \in [q_{3,\min}, q_{3,\max}]$。请注意，与根据方程（50）迭代定义的周期轨道和输入类似，由方程（61）和（63）定义的周期轨道在 Δq 中精确到主导阶。为了实际实现，通常需要找到邻近的、真正的周期解，以避免这些误差在每次迭代中不断累积；例如，可以使用牛顿迭代来完成这一点。

考虑由方程（61）和（63）定义的周期轨道族的附加维度，令 $\vec{q} \equiv [q_1, q_2, q_3]^T$，$\psi_1$ 和 ψ_3 Floquet 坐标的动力学为

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= \kappa_1(\vec{q})\psi_1 + I^T_{1,1}(\theta, \vec{q})U_e + I_{1,2}(\theta, \vec{q})f_\theta + E^T_1(\theta, \vec{q})\dot{\vec{q}}. \\ \dot{\psi}_3 &= \kappa_3(\vec{q})\psi_3 + I^T_{3,1}(\theta, \vec{q})U_e + I_{3,2}(\theta, \vec{q})f_\theta + E^T_3(\theta, \vec{q})\dot{\vec{q}}. \end{aligned} \tag{65}$$

请注意，由于上述方程中考虑了 3 个自适应参数，E_1 andE_3 均为 3 维向量。再次强调，$\vec{q}$ 和 f_θ 可以任意选取。类似于方程（53）的结构，令

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ f_\theta \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = -A(\theta, \vec{q})^{-1} \begin{bmatrix} \mathrm{Real}(I^T_{1,1}(\theta, \vec{q})U_e) \\ \mathrm{Imag}(I^T_{1,1}(\theta, \vec{q})U_e) \\ \mathrm{Real}(I^T_{3,1}(\theta, \vec{q})U_e) \\ \mathrm{Imag}(I^T_{3,1}(\theta, \vec{q})U_e) \end{bmatrix}, \tag{66}$$

with

$$A(\theta, \vec{q}) = \begin{bmatrix} \mathrm{Real}(E_{1,1}(\theta, \vec{q})) & \mathrm{Real}(I_{1,2}(\theta, \vec{q})) & \mathrm{Real}(E_{1,2}(\theta, \vec{q})) & \mathrm{Real}(E_{1,3}(\theta, \vec{q})) \\ \mathrm{Imag}(E_{1,1}(\theta, \vec{q})) & \mathrm{Imag}(I_{1,2}(\theta, \vec{q})) & \mathrm{Imag}(E_{1,2}(\theta, \vec{q})) & \mathrm{Imag}(E_{1,3}(\theta, \vec{q})) \\ \mathrm{Real}(E_{3,1}(\theta, \vec{q})) & \mathrm{Real}(I_{3,2}(\theta, \vec{q})) & \mathrm{Real}(E_{3,2}(\theta, \vec{q})) & \mathrm{Real}(E_{3,3}(\theta, \vec{q})) \\ \mathrm{Imag}(E_{3,1}(\theta, \vec{q})) & \mathrm{Imag}(I_{3,2}(\theta, \vec{q})) & \mathrm{Imag}(E_{3,2}(\theta, \vec{q})) & \mathrm{Imag}(E_{3,3}(\theta, \vec{q})) \end{bmatrix}, \tag{67}$$

其中 $E_{1,\ j}$ 和 $E_{3,\ j}$ 分别对应于 E_1 和 E_3的 j^{th} 项。采用这一参数更新值选择后，方程（65）变为 $\dot{\psi}_j = \kappa_j(\vec{q})\psi_j$，其中 $j = 1,\ 2$。若对于 $j = 1,\ 2$，$\text{Real}(\kappa_j(\vec{q})) < 0$，则当 t 趋于无穷时，两个等稳坐标都趋于零，其动力学可以忽略。当然，要使（53）成立，$A(\theta,\ \vec{q})^{-1}$ 必须对所有 $\vec{q}$ 和 θ都存在。当 $||\vec{q}|| = O(\epsilon)$时，可以通过求解方程（30）和（33）的直接解，分别计算 Floquet 特征函数的相关项以及 Floquet 坐标的梯度，从而直接求得其中一些项，结果为

$$A(\theta, \vec{q}\,) \approx \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q_1(\text{Imag}(\lambda_1) + \Delta\omega) & 0 & 0 \\ 0 & \text{Real}(I_{3,2}(\theta, \vec{q})) & -1 & 0 \\ 0 & \text{Imag}(I_{3,2}(\theta, \vec{q})) & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{68}$$

不在 g 对角 在方程（68）的对角结构中，当 $||\vec{q}|| = O(\epsilon)$ 时，可逆性得到保证 .

取 $\vec{q}$ 和 f_θ，如方程（66）所要求，自适应约化（18）变为

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega(q) + \omega(q) f_\theta, \\ \dot{\vec{q}} &= G_q(\vec{q}, \theta, U_e), \\ \dot{\psi}_j &= \kappa_j(\vec{q})\psi_j + I_{j,1}^T(\theta, \vec{q})U_e + I_{j,2}(\theta, \vec{q}) f_\theta + E_j^T(\theta, \vec{q})\,\dot{\vec{q}}, \\ j &= 5, \ldots, \beta. \end{aligned} \tag{69}$$

与方程（54）相比，方程（69）同时考虑了两个非线性振荡模态，但总共需要三个自适应参数。与前述公式一样，如果对于任意 $j \geq 5$，$\kappa_j(\vec{q})$ 在所有允许的 $\vec{q}$ 下均为负且绝对值较大，通常可以忽略相应的 Floquet 坐标 ψ_j，从而得到一个降阶模型。

最后需要指出的是，将上述策略推广到两个以上的非线性模态并不困难。然而，这可能会带来难以承受的计算开销，因为每增加一个非线性模态，就需要额外增加两个自适应参数，从而导致计算所需的周期轨道族及其相应 Floquet 特征函数的工作量呈指数增长。

4 所提出方法的示例说明

4.1 简单摆

作为一个用于说明所提出策略实现的初步示例，考虑带有黏性阻尼的简单摆动力学:

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2, \\ \dot{x_2} &= -\frac{g}{L}\sin(x_1) - \frac{b}{mL^2}x_2 + \frac{u(t)}{mL^2}. \end{aligned} \tag{70}$$

这里，x_1 和 x_2 分别对应角位置，ϕ 和速度 $\phi_\circ$ 一个质量为 $m = 0.104$ Kg 的质点由一根长度为 $L = 9.8$ m、无质量的刚性杆悬挂，u 为力矩输入，$g = 9.8\text{m/s}^2$为重力加速度，$b = 1$ Kg $\cdot\text{m}^2/s$ 为黏性阻尼系数。当$u = 0$ 摆在 $x_1 = x_2 = 0$处有一个稳定不动点；线性化固定点的特征值为$\lambda_{1,\ 2} = -0.050 \pm 0.999i$。我们强调，方程 (70) 已经是低维的，且非线性相对简单。本例旨在帮助理解所提出策略的实现。

如第3.6节所述，所提出的策略被用于表示该模型，从而得到形式为 (54) 的相位-振幅模型。请注意，对于这个特定示例，由于底层模型本身已经是二维的，因此此方法不会降低维度。所得相位-振幅模型由外部强迫作用下产生的不同周期轨道组成，如图1的 A 面板所示，这些轨道以类振幅参数 q为函数。尽管这些轨道看起来相似，但它们并不沿总能量等值集运动，即 $E = mgL(1-\cos(\phi)) + \frac{1}{2}mL^2\dot{\phi}^2$，如 B 面板所示。根据 (55) 计算的有效固有频率见 C 面板，与振幅较大的轨道具有较长振荡周期这一现象一致。在本例中，无法继续追踪超过 $\phi \approx \pm\pi$ 的轨道，因为该处对应摆完成一整圈旋转；在此点附近，所得 Floquet乘子由共轭复数转变为实数值，导致无法在此点之后使用迭代 (50)。

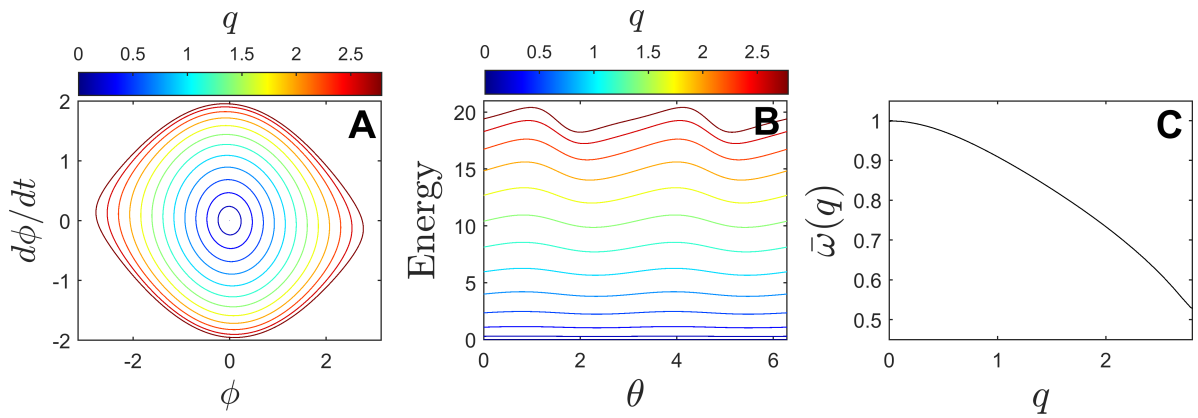

图1：将式（70）中的简单摆表示为式（54）的形式。面板 A 展示了不同类振幅变量 q 值下得到的受迫周期轨道。这些轨道与面板 B 所示的总能量等值集相似（但并不完全相同）。面板 C 展示了有效固有频率随 q 的变化。

图2展示了相位-振幅模型的准确性。A图显示了相位-振幅模型（黑线）对输入 $u(t) = 0.2t\sin(\frac{2\pi t}{12})$ 的响应输出，并将其与通过在不动点附近进行线性化而得到的模型输出（红线）进行比较。真实模型的输出以虚线表示。直到轨迹穿过最外层轨道之前，相位-振幅模型与完整模型的输出完全一致；此时，模型不再呈现可预测的振荡。请注意，由于状态落在受迫周期轨道族之外，相位-振幅模型无法用于此后的分析；尽管如此，它准确指出了规则振荡停止的时刻。相比之下，线性模型在小振幅振荡时与完整模型的输出吻合，但无法再现规则振荡突然偏离的现象。图2的B图显示了 ϕ 的轨迹，C图则显示了施加的输入。考虑其他会驱使状态超出呈现规则振荡的区域的输入时，这些结果在定性上也相似。

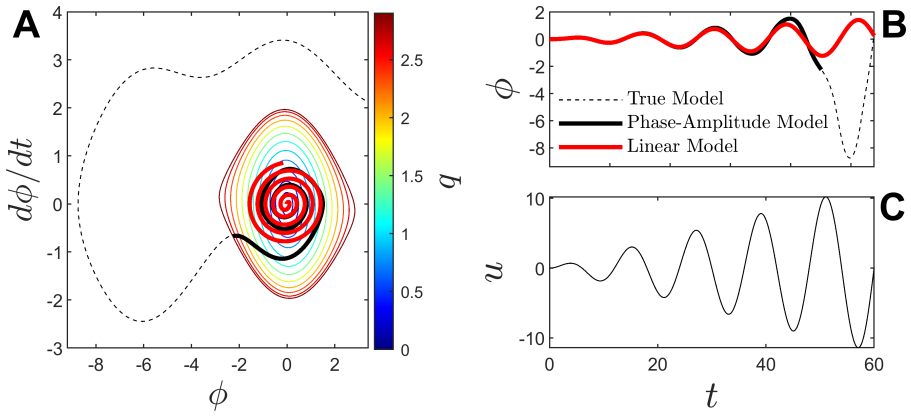

图2：将形式为 $u(t) = 0.2t\sin(\frac{2\pi t}{12})$ 的输入施加到式 (70) 的摆模型上，初始条件设在稳态附近。黑线、红线和虚线分别表示所提出的相位-振幅模型、线性化模型和真实模型对该输入的输出。作为参考，彩色线表示用于定义相位-振幅模型的受迫周期轨道。面板 B 给出了各模型对面板 C 所示输入的角位置轨迹。在此示例中，由于状态超出了受迫周期轨道的范围，相位-振幅模型无法在 $t = 45$ 之后继续仿真。尽管如此，这种超出范围的发生时刻和位置与真实模型仿真几乎完全一致。

4.2 平面振子的耦合群体

考虑一个由 N 耦合平面振子组成的异质群体模型

$$\dot{x}_j = \sigma x_j(\mu_j - r_j^2) - y_j(1 + \rho_j(r_j^2 - \mu_j)) + \frac{K}{N}\sum_{j\neq i} x_j + u(t),$$
$$\dot{y}_j = \sigma y_j(\mu_j - r_j^2) + x_j(1 + \rho_j(r_j^2 - \mu_j)), \tag{71}$$

对于 $i = 1, \ldots\ldots, N$，其中 x 和 y 表示笛卡尔坐标，$r_j^2 = (x_j^2 + y_j^2)$、$N = 10$、$K = 1.2$ 为耦合强度，而 $u(t)$ 是各个振子共有的输入。其他模型参数为 $\sigma = 0.1$、$\mu_j = -4 + 2j/9$ 和 $\rho_j = 0.4 - j/30$。模型中的各个单元与 [57] 中的径向等时钟相似；在没有耦合时，当 $\mu_i > 0$，Hopf分岔会产生一个稳定极限环。这里所有振子均满足 $\mu_i < 0$，因此当 $u(t)$ 保持为 0 时，该模型在所有 j 下均于 $x_j = y_j = 0$ 处存在稳定不动点。

对方程（71）的不动点进行线性化，可得到 10 对共轭复特征值。相关振荡模态的固有频率介于 1.23 至 2.57 rad/s 之间。特别值得关注的是特征值对 $\lambda_{1,\ 2} = -0.01 \pm 1.49i$，其衰减速率相较于次慢的特征值对 $\lambda_{3,\ 4} = -0.25 \pm 1.23i$更慢。该特征值对 $\lambda_{1,\ 2}$ 会使输入频率接近 1.5 rad/s 时出现共振峰；图3展示了由两种不同正弦输入（B 和 E 面板）产生的受迫响应（A 和 D 面板）。C 和 F 面板分别给出了对周期输入 0。07 sin(ωt) taking$\omega = 1.6$ 和 1。0 时稳态动力学的表示。不同颜色的轨道描绘了各个振子的稳态解，圆点则显示了某一时刻各振子的相对位置快照。

最终，正如后续结果所示，线性系统理论无法很好地刻画受迫响应峰值。令系统（71）的输出为 $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_1^N x_i$，在其稳定不动点附近对系统（71）进行线性化，并利用所得传递函数预测

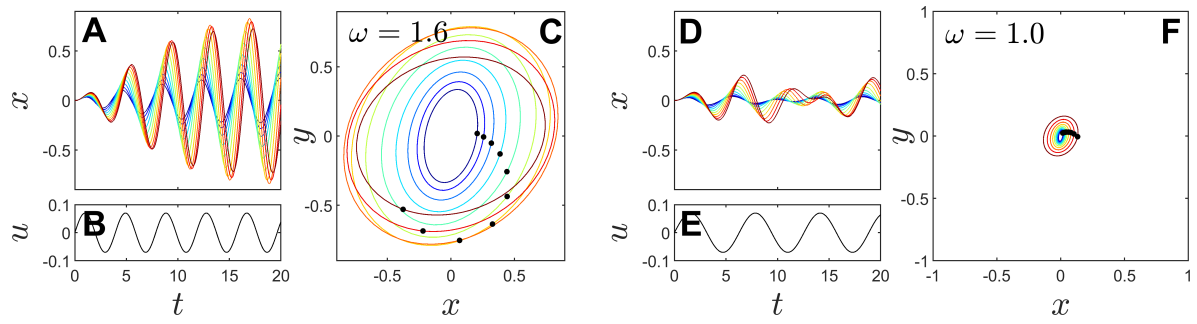

图3：方程（71）中的耦合振子模型对频率为 $\omega = 1.6$ （A、B 和 C 面板）和 $\omega = 1.0$ （D、E 和 F 面板）的正弦输入的受迫响应。A 和 D 面板分别显示从稳态开始时， x_i 对 B 和 E 面板中强迫的响应轨迹。C 和 F 面板显示稳态响应，不同颜色表示各振子的受迫稳态轨道，圆点表示某一快照时刻各振子的位置。

如面板 B 所示，对不同幅值的输入所产生的稳态响应。这里，振幅定义为在正弦强迫$u(t) = a \sin(\omega t)$作用下达到稳态时，在一个周期内 $\max(\bar{x}) - \min(\bar{x})$。如图3的面板 B 所示，线性化模型无法准确捕捉共振附近的受迫响应。事实上，取 $a = 0.10$ 所预测的峰值高度比真实受迫响应（虚线）高出 10 倍以上。此外，随着强迫振幅增大，共振峰向更高频率移动，这是任何线性模型都无法捕捉的特征。作为替代方法，将第3.6节所述的降阶建模策略应用于模型（71），以获得形式为（54）的模型。所得模型截断了与较快衰减模态相关的所有 Floquet坐标 $\psi_3, \ldots, \psi_N$；因此，所得非线性模型为二维模型。图3的面板 A 展示了受迫降阶模型的稳态响应，与线性模型相比，其匹配程度高得多。对于非线性模型，通过确定（54）在所示输入作用下的周期解，得到这些曲线。

图5提供了关于由式（54）构成的降阶模型的更多信息。对于不同的 q取值，面板A展示了各振子在与输入 $\alpha(q,\ t)$ 相关联的受迫周期轨道 x_q^γ上的轨迹。面板B展示了相应的输入 $\alpha(q,\ t)$。在面板A中，不同颜色对应给定振子的受迫周期轨道。在面板B中，不同颜色对应施加于给定振子的周期强迫，即 α_x 和α_y 分别表示施加于 x 和 y 坐标、从而产生周期解的输入。请注意，虽然方程（71）中的输入 $u(t)$ 仅出现在各振子的 x坐标动力学中，但输入 $\alpha(q,\ t)$ 同时施加于各振子的 x 和 y 坐标。面板A和B中的黑点展示了某一时刻的状态及施加的输入快照。面板A中各振子的周期解彼此相似，但并不完全相同于图5面板C所示、由正弦输入产生的轨道。对于接近共振频率的输入，单个模态即可准确捕捉大振幅振荡。图5面板C给出了由式（54）构成的降阶模型在不同 q 取值下的有效无外力振荡频率，该频率根据方程（55）计算。对于此模型，振荡的有效固有频率随振幅增加而升高。

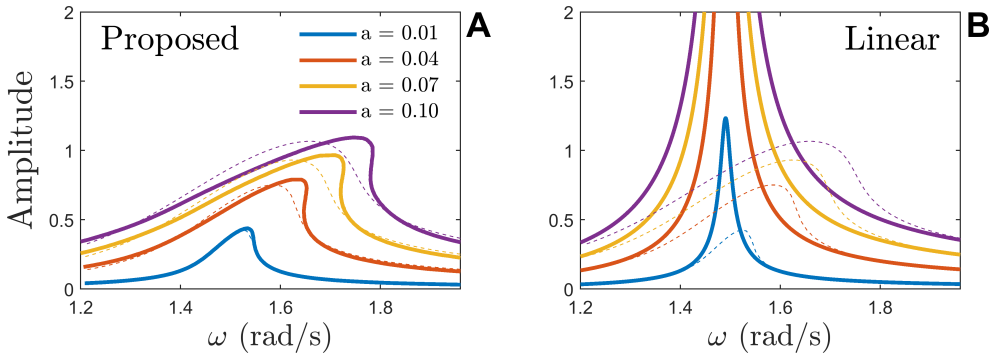

图4：考虑方程（71）中的耦合振子模型在正弦强迫 $u(t) = a\sin(\omega t)$ 下的稳态响应。振幅定义为稳态下 $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_1^N x_i$ 的最大值与最小值之差。图A和B分别展示了将所提出的、形式为（54）的降阶模型与通过对不动点处的方程（71）进行线性化而得到的线性模型进行比较的精度。降阶模型截断了所有 Floquet 坐标 $\psi_3, \ldots, \psi_N$，因此仅有2个维度。虚线表示通过方程（71）的仿真得到的完整模型的真实稳态响应。

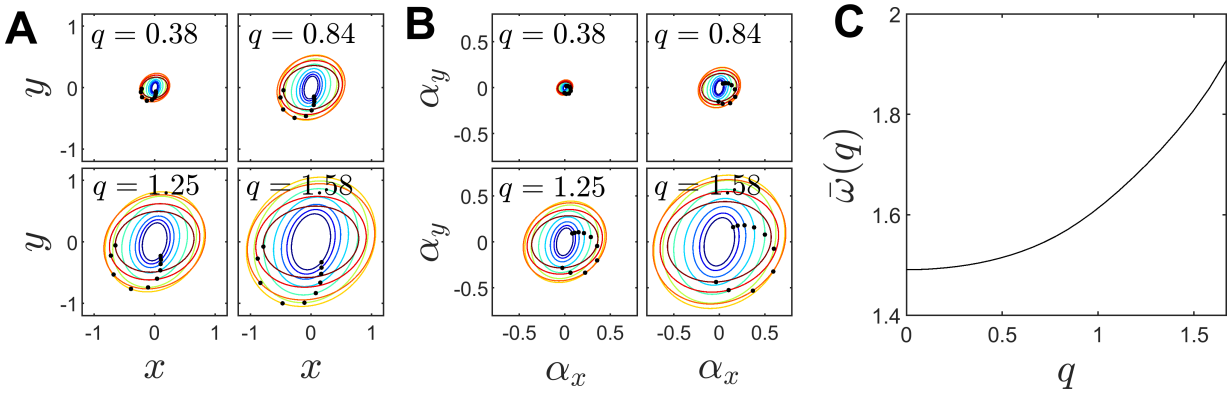

图5：将方程（71）中的耦合振子模型表示为形式（54）。图A展示了类振幅变量 q 取不同值时的受迫周期轨道，不同颜色对应不同振子的轨道。图B展示了不同 q 值下施加的输入 $\alpha(t, q)$。不同颜色的曲线表示在单次振荡过程中施加于各振子的输入。黑点表示周期轨道在某一时刻的状态和施加的输入快照。图C表明，根据（55）计算的有效固有频率随振荡振幅增加而增大。

4.3 电力系统模型

最后，我们考虑一个电力系统的数学模型，该模型由描述同步发电机、控制器及其他动态设备的常微分方程，以及描述电力网络的代数方程构成。此处采用经典的 m发电机系统模型（72）；其中，第 i台发电机由其摇摆方程表示，包括两个一阶微分方程，分别描述其转子角 δ_i （单位为弧度）和转子转速 ω_i （单位为弧度每秒），另有一个代数方程将其电功率输出$P_{e,\ i}$与网络中所有其他节点的转子角相耦合

发电机。

$$\begin{aligned}
&\dot{\omega}_i = \tfrac{\omega_0}{2H_i}\left(P_{m,i} - D_i\tfrac{\omega_i-\omega_0}{\omega_0} - P_{e,i}\right),\\
&\dot{\delta}_i = \omega_i - \omega_0,\\
&P_{e,i} = E_i^2 G_{ii} + \sum_{j=1,j\neq i}^{m} E_i E_j (G_{ij}\cos(\delta_i-\delta_j) + B_{ij}\sin(\delta_i-\delta_j)),\quad 1\le i\le m.
\end{aligned} \tag{72}$$

其中，ω_0 是系统的同步转速。第 i 台发电机的其他参数包括：来自涡轮机的机械功率输入$P_{m,\,i}$（视为常数）、惯性时间常数H_i、阻尼系数 D_i，以及 E_i 电动势（在励磁控制下视为常数）。电力网络中的所有支路和负载均等效为恒定导纳，例如两台发电机之间的 $G_{ij}+jB_{ij}$，以及对地电导，例如 G_{ii}。有关该模型及其参数的更多详情见 [1]。这里我们考虑具有 $m=3$ 的三发电机电力系统模型，其中 [1], 是所谓的 IEEE三发电机九母线测试系统。

作为分析的初步步骤，我们以角度 δ_1 为参照来考察方程（72）的动力学，并据此定义 $\phi_{12}=\delta_1-\delta_2$ 和 $\phi_{13}=\delta_1-\delta_2$。相位差的动力学由下式给出

$$\dot{\phi}_{1j} = \omega_1 - \omega_j, \tag{73}$$

对于 $j=2,\ 3$。转子速度方程可表示为 ϕ_{12} 和 ϕ_{13}的函数，从而得到一个维度为5、在 $\begin{bmatrix}\phi_{12} & \phi_{13} & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0.30 & -0.19 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$处具有稳定不动点的模型。在稳态下，转子相位同步，频率相同，彼此的相位略有差异。与该不动点相关的特征值为$\lambda_{1,\,2} = -0.25 \pm 8.69i$,$\lambda_{3,\,4} = -0.25 \pm 13.36i$ 和 $\lambda_5 = -0.5$。前四个特征值对应振荡模态，其频率分别为1.38和2.12赫兹。较慢和较快的振荡模态分别称为模式1和模式2。分别利用这两个模态，按照第3.6节概述的策略，得到两个形式为（54）的不同降阶模型。第一个（分别为第二个）模型可容纳大振幅的非线性模态1（分别为模态2）振荡。图6的A面板（分别为C面板）展示了对应周期轨道在不同类振幅参数 q 下的二维投影；根据方程（55）计算得到的有效频率则显示在B面板（分别为D面板）。无法将周期轨道延续到图6的A面板和C面板所示范围之外；超过这一点后，其Floquet乘子会从共轭复数转变为实数，因此无法继续迭代方程（50）（该迭代作为第3.6节所述流程第7步的一部分实现）。值得注意的是，与第4.1节的简单摆示例类似，这一极限与模型（72）集体行为的定性变化相吻合：模型转变到相空间中不再产生振荡动力学的区域。

图6所述的每个模型都能够描述与单个非线性模态相关的大幅振荡。方程（54）中的变量 θ 和 q 捕捉主导模态的振荡。与另一模态相关的振荡则通过共轭复 Floquet 坐标 ψ_3 和 ψ_4 捕捉，并假设其幅值较小。图7展示了所得降阶模型在这一假设下的准确性。A、B 和 C 面板展示了非线性模态1的振荡，其中模式2的贡献各不相同（以 $t=0$ 处的 ψ_3 值量化）。当 $\psi_3=0$ 时，模型（54）的降阶仿真（蓝线）所得结果与方程（72）的全阶仿真（虚线）所得结果无法区分。随着模式2的贡献（以及 ψ_3 初始值的幅值）增大，全阶模型与降阶模型之间的误差也随之增大。作为比较，图中还给出了通过对稳定不动点处的动力学进行线性化而得到的模型的仿真结果

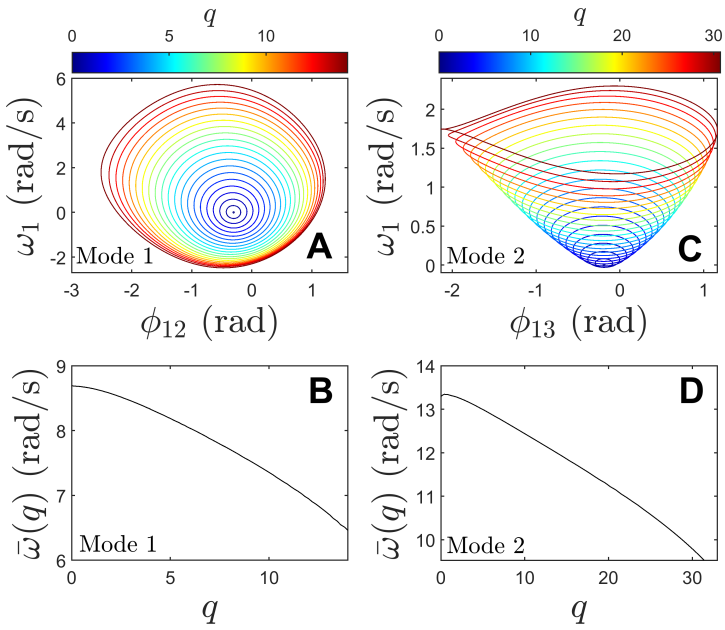

图6：A和C面板分别展示了与较慢和较快非线性振荡（模态1和模态2）相关的受迫周期轨道的二维投影。对于较小的类振幅参数 q，这些轨道与由各自特征值和特征向量决定的线性振荡几乎相同。对于 q 较大的情况，较大振幅的模态无法用线性振荡准确表示。B和D面板展示了根据方程（55）计算的各振荡模态的有效频率随 q的变化。对于每种模态，振荡幅度增大时，有效频率会降低。

（红线）；这里考察的振荡显然超出了线性化能够准确表征系统动力学的范围。D 面板展示了对于不同初始值 ψ_3，相位-振幅模型中变量 ϕ_{12} 和 ϕ_{23} 相关误差的二范数。E、F 和 G 面板给出了与 A、B 和 C 面板相应的结果，但考察的是非线性模态2的振荡，并要求模式1的振荡较小。同样，H 面板展示了在非主导模式贡献不同时，相位-振幅模型与全阶模型之间的误差。

第 3.7 节中的方法也用于同时考虑两个非线性振荡模态。这里，模式1（即由特征值 $\lambda_{1,2} = -0.25 \pm 8.69i$ 所对应的慢振荡模态）用于定义周期轨道 $x^{\gamma}_{q_1,0,0}(t)$，以及与之关联的输入 $\alpha(q_1,0,0)$，具体如第 3.7 节所述。利用方程（61）–（64）迭代定义一个三参数轨道族。实现这一策略时，g_3 对应于与模式2（即由特征值 $\lambda_{3,4} = -0.25 \pm 13.36i$ 所对应的快振荡模态）相关联的 Floquet 特征函数。利用这一信息可定义形式为（69）的模型，其中包含一个相位坐标和 3 个类振幅坐标 q_1, q_2 和 q_3，不含其他 Floquet 坐标，总维度为 4。该模型能够考虑模式1和模式2均有较大贡献的振荡。相比之下，用于获得图7结果的形式为（54）的模型，只能准确考虑模式1或模式2其中之一有较大贡献的非线性振荡，无法同时考虑两者。图8中的结果凸显了这一差异。双非线性模态模型采用初始条件 $\begin{bmatrix}\theta & p_1 & p_2 & p_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 5.1 & 2.1 & -2.1\end{bmatrix}$ 进行模拟，该初始条件对应于一种

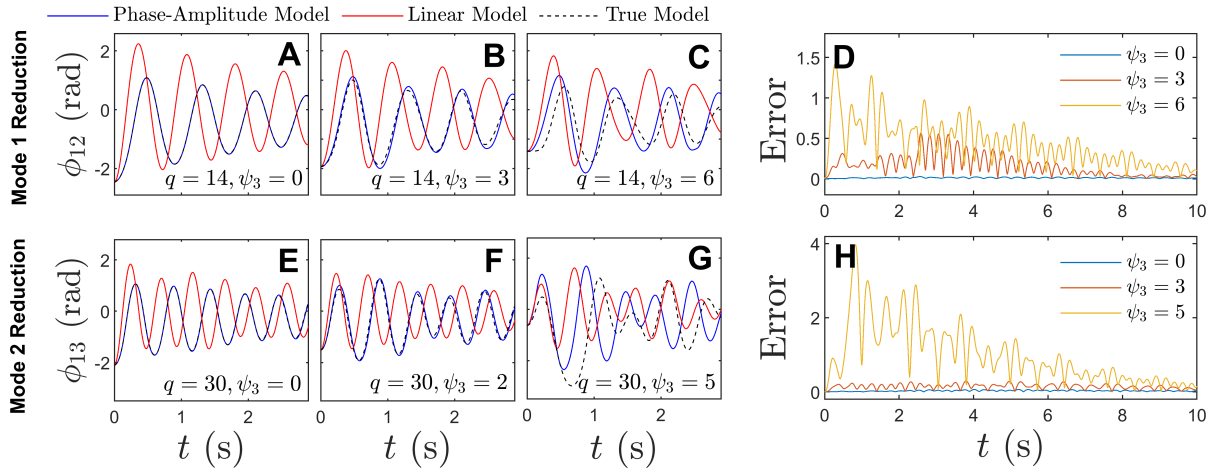

图7：A、B 和 C 面板（分别为 E、F 和 G 面板）展示了模式1（分别为模态2）中占主导地位的（非线性）振荡，其中非主导模态的贡献各不相同。 q 的大小与主导非线性模态的振幅相关，而 ψ_3 的大小与非主导模态的振幅相关。每个面板标出的初始条件经过选择，以突出非主导模态逐渐增强的影响，即令 ψ_3 取更大的值。此外，还给出了线性模型的仿真结果，该模型通过在稳定不动点处进行线性化得到，旨在说明此状态已超出线性化精度可靠的范围。D 和 H 面板展示了不同 ψ_3 初始值下，所提出的相位-振幅模型（54）与真实模型（72）之间相位差误差的二范数。非主导模态较小时，预测精度近乎完美。随着非主导模态增大，预测精度会下降。

状态，其振荡中模式1和模式2均有适度贡献。图8的 A 面板中，将双非线性模态模型的输出（蓝线）与真实模型的输出（虚线）进行比较，两者的结果几乎无法区分。在对单非线性模态模型进行模拟时，采用了一个相似的初始条件（即图7的 A–D 面板中使用的同一模型，结果以绿色表示）；该模型无法准确涵盖两个模态的贡献。作为参考，图中还以红色显示了通过对稳定不动点进行线性化得到的模型的模拟结果，其表现逊于另外两个模型。E 面板展示了各模型相位差误差的二范数。对于其他初始条件，所得结果在定性上也相似。

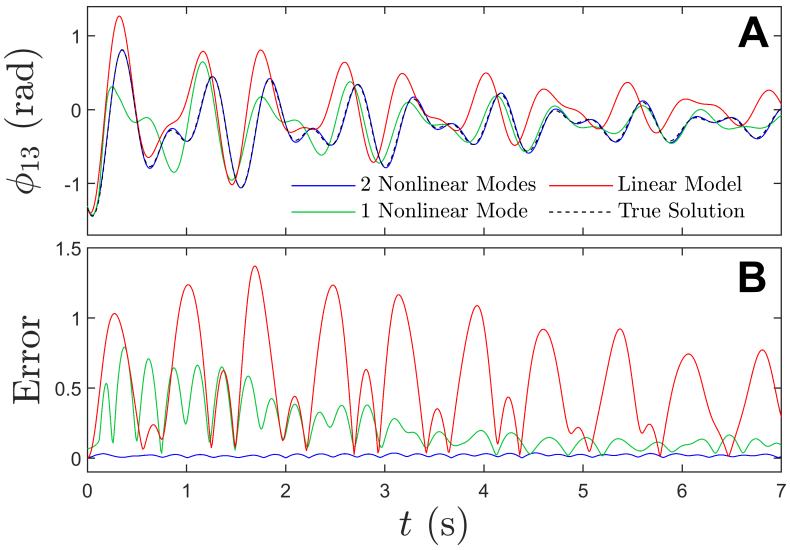

图8：考虑两个非线性振荡模态时，式 (72) 的降阶仿真。对于一个与模式1和模态2均有中等贡献相关联的初始条件，面板 A 显示了双非线性模态模型 (69) 中ϕ_{13} 的轨迹，并与真实模型的输出进行比较（分别以蓝色实线和虚线表示）。采用形式 (54) 的单非线性模态模型，以及通过对式 (72) 在其不动点处进行局部线性化得到的模型，其对应仿真分别以绿色和红色线条表示。面板 E 显示了所考察各模型的相位差误差的二范数。

5 讨论与结论

本研究借助近期开发的自适应相位-振幅约化技术 [49] ，提出了一种用于强非线性振荡系统降阶表征的通用方法。通过仔细定义与特定振荡模态相关的一族周期轨道，可以得到形式为 (54) 的降阶模型，该模型能够准确再现任意外部强迫下出现的大振幅非线性振荡；当振荡振幅较小时，所提出策略得到的模态在功能上与线性模态完全相同。如第 3.7 节所述，该方法还可用于考察多个非线性模态之间的相互作用。在第 4 节所考察的示例中，与通过局部线性化得到的非降阶模型相比，所提出的降阶建模策略显著改善了结果。

更为仔细地研究所提出的方法与其他非线性模型表示技术之间的关系，将具有普遍意义。所提出的方法与 [11] 中详细描述的谱子流形概念具有相似之处。当状态趋近于不动点时，在此极限情况下，两种方法都能得到与线性近似所得结果表现相似的模型。此外，两种技术都可以利用最慢衰减特征值之间谱隙的差异来获得降阶模型。然而，与此相反，谱子流形在流作用下是不变的，而用于构建降阶模型（并最终用于定义非线性模态）的周期轨道族并不是不变集。此外，谱子流形是相对于底层系统的无强迫动力学定义的，而外部强迫则是所提出方法实现过程中的固有组成部分。至于其他方法，尽管所提出的策略并未明确

考虑与不动点相关联的等稳坐标概念 [24], [23] （即 Koopman算子最慢衰减模态的等值集），但由于当状态趋近不动点时动力学相同，因此它也可能与所提出策略中由方程（54）所使用的振幅坐标存在联系。

尽管本研究的结果颇具前景，但仍有若干局限性有待解决。要实施所提出的方法，必须了解系统的底层方程；例如，在计算 Floquet 特征函数和 Floquet 坐标的梯度时，需要求解（A2）和（A3）。若要在数据驱动场景中实施该方法，还需要进行额外的改进。此外，原则上，该方法可用于考察任意数量非线性模态之间的相互作用，但随着所考察模态数量的增加，计算所需周期轨道的开销会迅速增长。事实上，按照方程（61）–（64）进行双模态约化时，相关迭代必须在三维空间中进行，而仅考察一个模态时只需在一维空间中进行。若系统包含许多非线性模态，则可能需要建立多个彼此独立的模型，分别刻画感兴趣的非线性模态小子集之间的相互作用。最后，在本研究所考察的示例中，我们无法考虑超出不动点吸引域的轨道。特别是对于简单摆（70）和电力系统模型（72），当状态趋近不动点吸引域的边界时，与周期轨道相关的 Floquet 乘子会变为实数值，从而无法继续进行用于定义周期轨道族的迭代。若能针对这一问题找到变通方法，将有助于拓展该方法的适用范围。

本材料基于美国国家科学基金会（NSF）资助的工作，资助编号为 CMMI-2140527。

附录A 相位和相位-振幅降阶方程各项的计算

相位约化（6）中的相位梯度通常必须通过数值方法计算。该问题已得到广泛研究 [4], [8], [13]; 在保持 q 不变的情况下，可以通过求解伴随方程的周期解来获得 $Z(\theta,\ q)$ 的解

$$\dot{Z} = -J^T Z, \tag{A1}$$

其中， J 是在 y_q^γ 处计算的雅可比矩阵。方程（A1）始终有一个不衰减的 Floquet 指数。因此，周期解必须进行归一化，使得 $T^{2\pi}{}_{(q)} = F^T(y_q^\gamma(t)\ q)Z(\theta(t)\ q)$。如 [56]中所述，在相位-振幅变换方程（8）中定义的 $I_j(\theta,\ q)$（即 Floquet 坐标相对于状态的梯度）也可以通过求解周期解获得

$$\dot{I}_j = -(J^T - \kappa_j \mathrm{Id}) I_j, \tag{A2}$$

其中，κ_j 是与 ψ_j 相关的 Floquet 指数，Id 是适当维度的单位矩阵。同样，Floquet特征函数 $g_j(\theta,\ q)$ 可通过求解以下方程的周期解得到:

$$\dot{g}_j = (J - \kappa_j \mathrm{Id}) g_j. \tag{A3}$$

如 [46],中所述，方程（A2）和（A3）的解满足以下关系

$$g_k^T(\theta, q) I_j(\theta, q) = \begin{cases} 1 & \text{if } k = j, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{A4}$$

此外，

$$I_j^T(\theta,q)\frac{\partial y_q^\gamma}{\partial \theta}=0 \text{ for all } j. \tag{A5}$$

考虑方程（11）中的自适应相位-振幅降阶方程时，文献 [49] 建立了 $Z(\theta,q)$（分别为 $I_j(\theta,q)$）与项 $D(\theta,q)$（分别为 $E_j(\theta,q)$）之间的直接关系。具体而言，令 $\frac{\partial y^\gamma}{\partial q_j}|_{\theta_0,q}\equiv \lim_{a\to 0}(y^\gamma_{q+e_j a}(\theta_0)-y^\gamma_q(\theta_0))/a$ 其中 e_j 是标准单位基的第 j^{th}个分量，可以证明

$$e_k^T D(\theta,q)=-Z^T(\theta,q)\frac{\partial y_q^\gamma}{\partial q_k}, \tag{A6}$$

and

$$e_k^T E_j(\theta,q)=-I_j^T(\theta,q)\frac{\partial y_q^\gamma}{\partial q_k}. \tag{A7}$$

附录B 单特征值及对应特征向量的一阶扰动

设 $A\in\mathbb{R}^{N\times N}$ 有一个单（即唯一）特征值 λ，其对应的左、右特征向量分别为 w 和 v，并将其归一化，使得 $w^*v=1$、$v^*v=1$，且 $\arg(e_j^T v_1)=-\pi$。这里，e_j是标准单位基的第 j^{th} 个元素，$\arg(\cdot)$表示复数的辐角，j 可以任意选取，* 表示共轭转置。根据定义，λ 和 v 满足

$$f(A,v,\lambda)=0=Av-\lambda v. \tag{B1}$$

目标是刻画当矩阵 A 逐步变化至 $A+dA$时，特征值 $\lambda+d\lambda$ 和特征向量 $v+dv$ 所发生的变化。对方程（B1）取全微分可得

$$df=0=dAv-d\lambda v+Adv-\lambda dv, \tag{B2}$$

扰动后的特征值/特征向量对 $(\lambda+d\lambda, v+dv)$ 必须满足该式。左乘 w^* 并整理方程（B2），可得

$$w^*d\lambda v=w^*dAv+w^*Adv-w^*\lambda dv. \tag{B3}$$

利用 $w^*v=1$ 和 $w^*A=w^*\lambda$这一事实，上式可简化为

$$d\lambda=w^*dAv. \tag{B4}$$

再次考虑方程（B2），通过求解以下方程可得到特征向量的扰动

$$(A-\lambda\mathrm{Id})dv=d\lambda v-dAv, \tag{B5}$$

其中，Id 是适当维度的单位矩阵。上面的方程（B5）通过对（B2）进行变换得到。注意到 v 属于 $A-\lambda$Id 的零空间，方程（B5）只有在 w 与 $d\lambda v-dAv$ 正交时才有解。可以直接验证这一点：

$$\begin{aligned} w^*(d\lambda v-dAv)&=w^*v(w^*dAv)-w^*dAv\\ &=0, \end{aligned} \tag{B6}$$

其中，第一行等式右侧通过代入方程（B4）得到；第二行则是通过改变乘法顺序得到，同时注意到 $w^* dA v \in \mathbb{C}$，并回忆 $w^* v = 1$。因此，方程（B5）的所有解为

$$dv = (A - \lambda \mathrm{Id})^{\dagger}(d\lambda v - dA v) + v\alpha, \tag{B7}$$

对于任意 $\alpha \in \mathbb{C}$，其中 † 表示摩尔－彭若斯广义逆。此处，必须适当选择 α，使 $v + dv$ 满足所需的归一化条件。

参考文献

[1] P．M. Anderson 和 A．A. Fouad．电力系统控制与稳定性．Wiley 2003，。[2] K. Avramov 和 Y. Mikhlin。振动机械系统的非线性正规模态：理论发展的综述。《应用力学评论》，65:060802–1，2010。[3] E. Brown、P. Holmes 和 J. Moehlis。全局耦合振子网络。载于《非线性科学的视角与问题》，第 183–215 页。Springer，2003。[4] E. Brown、J. Moehlis 和 P. Holmes。关于神经振子群体的相位约化与响应动力学。《神经计算》，16(4):673–715，2004。[5] S. L. Brunton、B. W. Brunton、J. L. Proctor 和 J. N. Kutz。用于控制的非线性动力系统的 Koopman 不变子空间与有限维线性表示。《*PLOS ONE*》，11(2)，2016。[6] M. Budi˘si´c、R. Mohr 和 I. Mezi´c。应用Koopman理论。《混沌：非线性科学跨学科期刊》，22(4):047510，2012。[7] O. Castej´on、A. Guillamon 和 G. Huguet。瞬态状态刺激的相位-振幅响应函数。《数学神经科学杂志》，3:13，2013。[8] G. B. Ermentrout 和 D. H. Terman。《神经科学的数学基础》，第 35 卷。Springer，纽约，2010。[9] D. J. Ewins。模态测试：理论、实践与应用。John Wiley & Sons，2009。[10] J. Guckenheimer。等时线与无相位集。《数学生物学杂志》，1(3):259–273，1975。[11] G. Haller 和 S. Ponsioen。非线性正规模态与谱子流形：在模型降阶中的存在性、唯一性及应用。《非线性动力学》，86:1493–1534，2016。[12] J. P. Hespanha。《线性系统理论》。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2018。[13] F. C. Hoppensteadt 和 E. M. Izhikevich。弱连接神经网络。Springer，纽约，1997。[14] D. Jordan 和 P. Smith。非线性常微分方程：面向科学家和工程师的导论，第 10 卷。牛津大学出版社，牛津，2007。

[15] E. Kaiser、J. N. Kutz 和 S. Brunton。用于控制的 Koopman 特征函数数据驱动发现。*Machine Learning: Science and Technology*，2021年。[16] G. Kerschen、M. Peeters、J. C. Golinval 和 A. F. Vakakis。非线性正规模态，第一部分：结构动力学研究者的实用框架。*Mechanical Systems and Signal Processing*，23(1):170–194，2009。[17] M. Korda 和 I. Mezi´c。用于预测与控制的 Koopman 特征函数最优构造。*IEEE Transactions on Automatic Control*，65(12):5114–5129，2020。[18] Y. Kuramoto。*Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*。Springer-Verlag，柏林，1984。[19] W. Kurebayashi、S. Shirasaka 和 H. Nakao。强扰动极限环振子的相位约化方法。*Physical Review Letters*，111(21):214101，2013。[20] J. N. Kutz、S. L. Brunton、B. W. Brunton 和 J. L. Proctor。动态模态分解：复杂系统的数据驱动建模。Society for Industrial and Applied Mathematics，费城，PA，2016。[21] M. D. Kvalheim 和 S. Revzen。稳定不动点和周期轨道的全局 Koopman 特征函数的存在性与唯一性。*Physica D: Nonlinear Phenomena*，第 132959 页，2021年。[22] B. Letson 和 J. E. Rubin。用于周期动力学分析的 LOR：一站式方法。*SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*，19(1):58–84，2020。[23] A. Mauroy 和 I. Mezi´c。利用 Koopman算子的特征函数进行全局稳定性分析。*IEEE Transactions on Automatic Control*，61(11):3356–3369，2016。[24] A. Mauroy、I. Mezi´c 和 J. Moehlis。稳定不动点动力学作用–角表示的等稳态集、等时线和 Koopman谱。*Physica D: Nonlinear Phenomena*，261:19–30，2013。[25] I. Mezi´c。通过 Koopman算子的谱性质分析流体流动。*AnnualReview of Fluid Mechanics*，45:357–378，2013。[26] I. Mezi´c。Koopman算子的谱、函数空间中的谱展开与状态空间几何。《非线性科学杂志》，第 1–55 页，2019。[27] I. Mezi´c。Koopman算子、几何与动力系统学习。*Notices of theAmerican Mathematical Society*，68(7):1087–1105，2021年。[28] B. Monga 和 J. Moehlis。利用增广相位约化对生物振子进行最优相位控制。*Biological Cybernetics*，113(1-2):161–178，2019。[29] B. Pietras 和 A. Daffertshofer。耦合振子的网络动力学与相位约化技术。*Physics Reports*，2019。[30] S. Ponsioen、S. Jain 和 G. Haller。模型降阶至谱子流形以及高维机械系统中的受迫响应计算。*Journal of Sound and Vibration*，488:115640，2020。[31] R. M. Rosenberg。非线性双模态系统的正常模态。*Journal of Applied Mechan-ics*，27:263–268，1960。

[32] R. M. Rosenberg. 多自由度系统的非线性振动。《应用力学进展》，9:155–242, 1966.[33] M. Rosenblum 和 A. Pikovsky. 超越一阶近似的数值相位约化。《混沌：非线性科学跨学科期刊》，29(1):011105, 2019.[34] Christophe S. W. Shawand C. Pierre. 非线性连续系统的振动正规模态。*Journal of Sound and Vibration*, 169(3):319–347, 1994.[35] P. J. Schmid. 数值数据与实验数据的动态模态分解。《流体力学杂志》，656:5–28, 2010.[36] M. A. Schwemmer 和 T. J. Lewis. 弱耦合振子的理论。载于《神经科学中的相位响应曲线》，第3–31页。Springer, 2012.[37] S. Shaw 和 C. Pierre. 非线性正规模态与不变流形。*Journal of Soundand Vibration*, 150(1):170–173, 1991.[38] S. Skogestad 和 I. Postlethwaite. 多变量反馈控制：分析与设计。Wiley, 纽约, 1996.[39] R. Szalai, D. Ehrhardt 和 G. Haller. 多自由度机械振动的非线性模型辨识与谱子流形。《英国皇家学会会刊A辑：数学、物理与工程科学》，473(2202):20160759, 2017.[40] N. Takeishi, Y. Kawahara 和 T. Yairi. 学习Koopman不变子空间以进行动态模态分解。《神经信息处理系统进展》，30, 2017.[41] K. Toth 和 D. Wilson. 使用近周期输入控制耦合神经振荡。《混沌：非线性科学跨学科期刊》，32(3):033130, 2022.[42] K. C. A. Wedgwood, K. K. Lin, R. Thul 和 S. Coombes. 神经振子模型的相位-振幅描述。《数学神经科学杂志》，3(1):2, 2013.[43] M. O. Williams, I. G. Kevrekidis 和 C. W. Rowley. Koopman算子的数据驱动近似：扩展动态模态分解。《非线性科学杂志》，25(6):1307–1346, 2015.[44] D. Wilson. 具有分段光滑动力学和复Floquet乘子的振子的等稳态约化。《物理评论E》，99(2):022210, 2019.[45] D. Wilson. 振荡动力系统的数据驱动相位与等稳态约化建模框架。《混沌：非线性科学跨学科期刊》，30(1):013121, 2020.[46] D. Wilson. 远超弱扰动范式的相位-振幅约化。《物理评论E》，101(2):022220, 2020.[47]D. Wilson. 对外部输入响应的高精度等稳态动力学模型的数据驱动推断。《混沌：非线性科学跨学科期刊》，31(6):063137, 2021.

[48] D. Wilson. 使用大幅度输入对振荡时序与锁频进行最优控制：一种自适应相位-振幅坐标方法。*SIAM Journal on AppliedDynamical Systems*, 20(4):1814–1843, 2021.[49] D. Wilson. 一种不受 $\mathcal{O}(\epsilon)$输入约束的自适应相位-振幅约化框架。*SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 21(1):204–230, 2022.[50] D. Wilson. 使用自适应参数集进行动力学模型的数据驱动辨识。*Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 32(2):023118, 2022.[51] D. Wilson 和 S. M. Djouadi. 时变参数非线性偏微分方程的自适应等稳态约化。*IEEE Control Systems Letters*, 5(1):187–192, 2021.[52] D. Wilson 和 B. Ermentrout. 使用等稳坐标提高相位约化的精度并拓宽其适用范围。*Journal of Mathematical Biology*, 76(1-2):37–66, 2018.[53] D. Wilson 和 B. Ermentrout. 相位的操作性定义刻画受扰极限环振荡器的瞬态响应。*SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 17(4):2516–2543, 2018.[54] D. Wilson 和 B. Ermentrout. （不那么）弱耦合振子的增广相位约化。*SIAM*评论, 61(2):277–315, 2019.[55] D. Wilson 和 J. Moehlis. 神经元群体的最优混沌去同步。《SIAM Journal on Applied Dynamical Systems》，13(1):276–305, 2014.[56]D. Wilson 和 J. Moehlis. 周期轨道的等稳态约化。《物理评论E》，94(5):052213, 2016.[57] A. Winfree. 《生物时间的几何学》。施普林格出版社, 纽约, 第二版, 2001.