arXiv:2302.03017v1 [quant-ph] 6 Feb 2023

# 借助相干链路的量子本征态广播

Benjamin F. Schiffer[1,2,*] 和 Jordi Tura[3]

[1] *Max-Planck-Institut für Quantenoptik, Hans-Kopfermann-Str. 1, D-85748 Garching, Germany*

[2] *Munich Center for Quantum Science and Technology (MCQST), Schellingstr. 4, D-80799 Munich, Germany*

[3] *Instituut-Lorentz, Universiteit Leiden, P.O. Box 9506, 2300 RA Leiden, The Netherlands*（日期：2023年2月7日）

制备局域哈密顿量的基态，是理解量子多体系统的一项关键问题，在多个物理学领域中均有应用，并与组合优化相关。虽然已有多种量子算法能够从初始近似出发，以高精度和可证明的保证制备基态，但当前设备仅支持浅电路。本文考虑这样一种情形：在分布式量子计算架构中，Alice 和 Bob 希望制备相同的哈密顿量本征态。我们证明，当设备能够共享有限的纠缠时，可以降低本征态制备算法的电路深度。尤其是，其中一台设备拥有近乎完美的本征态时，将其广播给另一台设备会更加高效。我们的方法只要求每台设备使用一个与外部纠缠的辅助量子比特。我们表明，在近收敛区域内，每次运行协议时，非期望振幅的平均相对抑制可提升至 $1/(2\sqrt{e}) \approx 0.30$，优于仅使用单设备运行相同协议所达到的 $1/e \approx 0.37$ 平均相对抑制。

引言。— 本征态，尤其是基态，对于理解物理模型和解决组合优化问题至关重要。由于制备局域哈密顿量的基态是 QMA 完全问题 [1]，一般而言，预计不存在高效的量子算法。然而，在量子计算机上制备基态仍具有显著优势，因为量子多体基态的表示本身就比经典计算机节省指数级的存储空间。

迄今已有多种用于制备基态的量子算法。这包括量子相位估计算法（QPE）[2]，以及量子绝热算法（QAA）[3, 4]，和滤波算法 [等近似算法

5–7] 或变分算法 [8]。量子绝热算法涉及制备初始哈密顿量的平凡基态，然后将哈密顿量充分缓慢地演化为目标哈密顿量。量子绝热算法的运行时间与绝热路径上基态和第一激发态之间最小谱隙的倒数及最终误差 [9, 10]呈多项式关系。近年来，变分算法方法日益普及。由于这类方法具有启发式性质，难以为其提供性能保证；在实践中，量子电路的表达能力以及训练过程中的（噪声）贫瘠高原 [11] 也可能妨碍其性能。量子相位估计仍然是精确制备基态的重要算法，人们也研究了它的各种变体，使其更适用于早期量子设备，例如，这些变体只需一个辅助量子比特 [12, 13]。这些协议侧重于评估本征态能量，而本征态能量与制备本征态本身密切相关。

除了当前设备的相干时间有限之外，量子比特（qubits）的数量也不多。事实上，增加量子比特数量似乎是一项重大的工程挑战。要构建更强大的量子计算机，另一种途径可能是分布式量子计算，即不同的量子设备能够共享部分纠缠。近期，超导量子比特实验已演

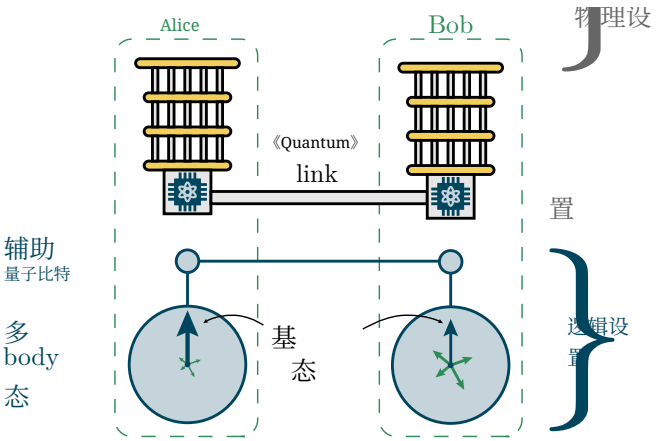


图 1. 量子广播协议示意图：两个量子设备通过相干量子链路连接，该链路支持有限程度的纠缠共享。在我们的设置中，设备 Alice 能够制备出对 $H$ 基态较好的近似态（因此基态矢量更大），而 Bob 只能制备出同一状态较粗略的近似态。通过施加持续随机时间$U = \exp(-iH\tau)$的受控量子动力学，并投影到辅助量子比特的全对称子空间（由测量结果标示），即可在 Bob 处以任意精度制备基态，且速度远快于没有 Alice 帮助时。

示了空间分离的量子设备之间的相干微波量子链路 [14, 15]。受这类实验进展的启发，人们开始思考如何利用这种架构。分布式量子计算的一个尤为相关的应用，似乎是精确的基态制备与验证问题。没有量子链路时，可以进行跨平台验证：多次制备目标态，以执行随机测量；其最坏情况下的复杂度随量子比特数量呈指数增长 [16, 17]。此前，人们已在量子设备之间通信的背景下研究过分布式量子计算 [18–20]。

我们将在此探讨一种尤为有趣的情形：某量子设备 *Alice* 能够制备哈密顿量基态的较好近似态，而另一台设备 *Bob* 只能制备同一基态粗略得多的近似态（参见图 1）。由于无克隆定理 [2], , 无法直接将 Alice 的量子态复制给 Bob。不过，Alice 可以协助 Bob 获得更精确的本征态。

本文通过一种分布式量子算法来解决这一问题，以任意精度制备哈密顿量的本征态。我们的协议受到迭代量子相位估计算法的启发，其核心是将控制相应量子动力学的辅助量子比特投影到全对称子空间。这样，各量子设备只需共享有限的纠缠，即仅辅助量子比特彼此交互，因此适用于实验实现 [14, 15, 21]。我们证明，在电路受限的情况下，设备间共享纠缠能够提高为 Bob 制备的基态精度。在协议的每次迭代中，辅助量子比特会指示子空间投影是否成功；随着量子态趋近于目标本征态，成功概率也会趋近于 1，从而使后选择开销保持较低。

在 Alice 和 Bob 的状态接近收敛至基态的极限下，我们证明，相对于基态振幅，Bob 的非期望振幅在每次迭代中平均会受到因子 $1/(2\sqrt{e}) \approx 0.30$ 的抑制，这与 Alice 缺席时的情况形成对照 $1/e \approx 0.37$。我们的分析还辅以数值模拟
这表明，在状态尚未接近收敛至基态的阶段，分布式协议同样具有优势。我们将算法的讨论扩展至这样一种情形：多个通过相干链路连接的设备协同加速基态制备，除一个设备外，每个设备都可以访问近乎完美的基态；此时，子空间投影与辅助量子比特上的量子舒尔变换相关 [22, 23]。

单设备上的基态制备。— 首先，

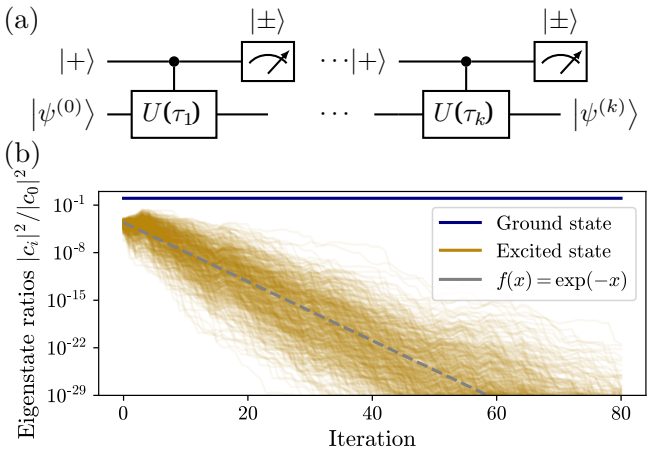


图 2。（a）通过受控动力学 $U(\tau_i) = \exp(-iH\tau_i)$，在每次迭代中制备 $H$ 的主导本征态的量子电路。随机的 $\{\tau_i\}$ 与谱中将目标本征态分隔开的能隙的倒数成正比。受控动力学结束后，在 $\sigma^x$ 基下测量辅助量子比特。（b）对单份协议进行数值模拟，最多运行 $k = 100$ 步，所用模型为 ZZXZ 模型 $H = \sum_{i=1}^{n=9}($ $\sigma_i^z\sigma_{i+1}^z + \sigma_i^x + \sigma_i^z)$。此处展示了一个经过后选择的实例，协议成功制备了基态。协议迅速收敛至基态，次主导振幅的相对抑制趋势与平均值 $f(x) = \exp(-x)$相符。

我们通过分析单设备协议中的迭代量子相位估计来介绍主要工具集。在该迭代量子相位估计中，我们旨在以任意精度制备哈密顿量$H$ 的本征态。首先制备该本征态的初始近似$|\psi^{(0)}\rangle$ ，例如通过绝热态制备 [4]。随后，在协议的每次迭代中，系统在 $H$ 作用下演化 $\tau_k$时间，同时由处于 $|+\rangle$态的辅助量子比特进行控制。我们定义 $U_k = U(\tau_k) = \exp(-iH\tau_k)$。最后，在 $\sigma^x$基上测量辅助量子比特。当获得“0”比特时，测量会将协议第 $k$次迭代时的状态从 $|\psi^{(k-1)}\rangle$ 投影为（未归一化的）状态 $(I+U_k)\,|\psi^{(k-1)}\rangle$；否则投影为 $(I-U_k)\,|\psi^{(k-1)}\rangle$。重要的是，每次迭代的演化时间 $\tau_k$ 都在足够大的区间 $\tau_k \in [0, \mathcal{O}(1/\Delta)]$ 内随机选取，其中 $\Delta$ 是将目标态与谱中的其他本征态分隔开的最小能隙。重复执行该协议，并将前一次的输出态作为新的输入态 [图 2(a)]。

众所周知，标准量子相位估计可用于将给定的量子态投影到哈密顿量的某个本征态上 [24], , 包括迭代量子相位估计 [12]。本文分析迭代量子相位估计中本征态制备的标度行为，其中初始态是目标态的近似。我们将协议第（$k+1$）次迭代之前的状态写成本征基 $H$ 下的形式：$|\psi^{(k)}\rangle = \sum_i c_i^{(k)}\,|\phi_i\rangle$。通过贝叶斯方法，我们证明，平均而言，

电路的每次运行都会抑制任意非主导振幅与主导振幅之比$|c_j^{(k)}|^2/|c_d^{(k)}|^2$。当该比值接近 1 时，抑制作用很小；当该比值趋近于 0 时，平均抑制因子收敛至 $1/e$ [图2(b)]。因此，按比值衡量的非期望振幅抑制会随步骤数呈指数增长 $k$。由于该协议具有概率性，收敛到主导本征态并不总能得到保证，但辅助量子比特的测量会标示成功或失败。若协议失败，最初处于次主导地位的本征态将成为新的主导本征态，之后其振幅平均而言会得到放大。总成功概率可通过类似量子相位估计的方法推导，结果为 $\gamma^2$ ，其中与目标本征态的初始重叠为 $\gamma = |c_d^{(0)}|$。我们将第 $k$次迭代中电路的作用写作量子信道 $\rho \to (\rho + U_k \rho U_k^\dagger)/2 =: \mathcal{E}_k(\rho)$。因此，获得特定本征态 $H|\phi_i\rangle = \lambda_i |\phi_i\rangle$ 的概率为

$$P_i = \langle\phi_i| \mathcal{E}_k \left( \cdots \mathcal{E}_1 \left( |\psi^{(0)}\rangle\langle\psi^{(0)}| \right) \cdots \right) |\phi_i\rangle = |c_i|^2. \quad (1)$$

显然， $H$ 的本征态是信道序列 $\mathcal{E}_k \circ \cdots \circ \mathcal{E}_1$的不动点。其他状态则会被投影至某个本征态，这类似于迭代玻恩规则（参见 [25, 26]）。

直观而言，该协议之所以能成功制备主导本征态，是因为每次迭代中对辅助量子比特的测量与随机变量 $\varphi_j^{(k)} := \lambda_j \tau_k$ 相关，其概率为 $P_{|0\rangle}^{(k)} = \sum_l |c_l^{(k-1)}|^2 \cos^2(\varphi_l^{(k)}/2)$ 和 $P_{|1\rangle}^{(k)} = 1 - P_{(k)|0\rangle}$；推导过程见补充材料。如果存在一个占主导地位的振幅，例如基态$c_0^{(k)} \lesssim 1$ 的振幅，并且随机抽取的值（$\varphi_0^{(k)} \bmod 2\pi$）接近零，那么在辅助量子比特上观测到$|0\rangle$ 的可能性就会增加。该测量会在基态振幅上印刻一个与 $\cos^2(\varphi_0^{(k)}/2)$ 成正比且相对较大的相位因子。然而，其他非主导项 $c_j^{(k)}$ 、$j \neq 0$更可能获得较小的相位因子，因为各自的 $\varphi_j^{(k)}$ 与测得的比特相关性较弱。补充材料中对这一论证进行了形式化推导，并表明在近收敛区域内，平均相对抑制为 $1/e$ 。原则上，这种方法可用于制备任意本征态。对于局域哈密顿量，某些本征能量之间的间隔必然会变得指数级小。对于这些情况，我们的算法将会

在随机能量处表现得像一个滤波器。这就是我们关注基态的原因：在有隙相中，能隙被一个常数从下方限定；而在临界情况下，能隙可能随系统大小以逆多项式速度消失。

*Alice* 和 *Bob* 的量子广播。——我们的主要结果是一种分布式量子算法，用于从一个设备向另一个设备广播量子本征态

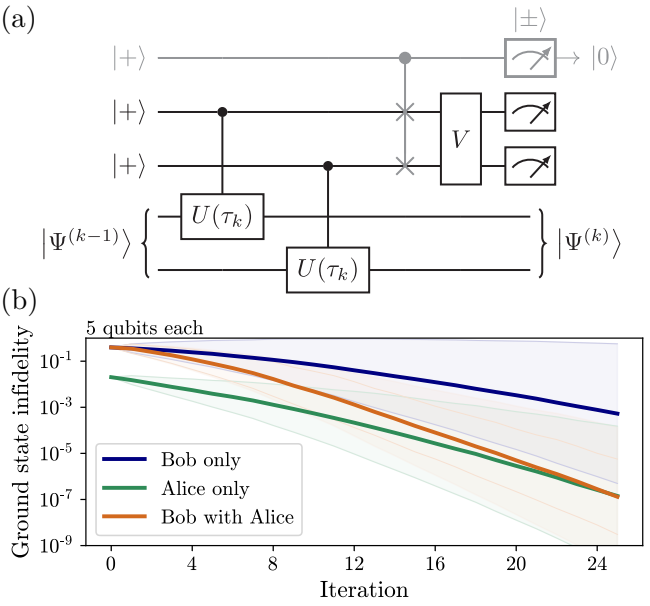


图 3。（a）该协议所涉及的量子电路：Alice 拥有基态的良好近似，而 Bob 则试图从对基态较为粗略的近似出发，以任意精度制备基态。电路中灰色部分（第一条线路和受控 SWAP 门）投影到对称子空间，仅量子广播的两种变体中的一种需要该部分。（b）量子广播协议的数值示例，对成功投影到对称子空间的结果进行后选择平均。阴影区域表示数据的一个标准差。借助量子链路得到 Alice 的帮助后，Bob 的收敛速度显著提高。我们使用了与图 2（b） 相同的哈密顿量。

（Alice）传送到另一个设备（Bob）。该协议所需的纠缠共享有限：每个设备中只有一个辅助量子比特需要与另一个设备中的一个量子比特相互作用。该设置的示意图见图 1，电路见图 3(a)。在 Alice 和 Bob 两侧分别施加相同的受控动力学后，对两个辅助量子比特进行联合操作，使两个设备上的状态产生纠缠。我们考虑该协议的两种变体，因为它们各有不同优势。第一种变体（图 [3(a)]中黑色部分）通过选择$V = [(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, -1, 0), (1, 0, 0, -1)]/\sqrt{2}$，对辅助量子比特施加贝尔基变换。第二种变体（包括图[3(a)]中的灰色部分）使用受控 SWAP 操作，然后对辅助量子比特施加 Hadamard 门（$V = H \otimes H$），以在 $\sigma_x$基下进行测量。辅助量子比特成功投影到对称空间后，由第一个辅助量子比特发出预示信号。在收敛至基态的极限下，第$k$次迭代中将状态投影到全对称子空间的成功概率$P_{\mathrm{sym}}^{(k)}$ 趋近于 $\lim_{k\to\infty} P_{\mathrm{sym}}^{(k)} = 1$。因此，如果初始重叠 $\gamma$ 较大，总体后选择开销较低；我们估计其标度为 $\mathcal{O}(1/\gamma^2)$

对于广播设置的变体 1，鉴于当前设备仅支持相当浅的电路，该协议可在目标精度下，以电路深度换取预示重复。

在图3(b) 中，我们展示了变体 $V = H \otimes H$的量子广播协议的平均性能，并对成功投影到全对称子空间的结果进行后选择。我们分别比较 Alice 和 Bob 单独采用该协议时，以及采用所述协议时的收敛速度。由于通过纠缠与 Alice 协调，Bob 收敛到基态的速度显著更快。为简单起见，假设 Alice 拥有完美的基态（$|c_{A,\,0}| = 1$），而 Bob 的近似态正趋近于 $|c_{B,\,0}| \to 1$。对于成功投影到对称子空间后选择的情况，非期望振幅$c_{B,\,j}$，$j > 0$ 的平均相对抑制略弱于变体 1，在近收敛极限下每轮达到 $1/e^{9/8} \approx 0.32$ 。在近收敛区域之外，我们的数值研究表明，当 Alice 拥有完美本征态时，变体 1 的表现优于变体 2。不过在实际中，Alice 可能只有较好的近似态。在这种情况下，数值结果表明，随着保真度差异的数量级增大，变体 1 的性能会下降；当保真度变得相近时，变体 2 最终会更优，这一点可以从 [图3(b)]中看出。

除了广播场景之外，跨平台验证还能让 Alice 和 Bob 以一种可确认的方式收敛到同一本征态 $|\phi_i\rangle\,|\phi_i\rangle$ 。为此，我们只需要两个相同的初始近似 $|\psi\rangle\,|\psi\rangle$。图3(a) 中的同一电路可用于此目的（参见补充材料）。自然地，如果 $|\psi\rangle \approx |\phi_i\rangle$该协议更有可能产生两个第$i$个本征态的副本，那么这一点可能尤其重要，特别是在缺少合适的量子存储器时。

一个有趣的改编方式是使用 $\tilde{V} = [(\sqrt{2}, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 1, -1, 0), (0, 0, 0, \sqrt{2})]/\sqrt{2}$，从而在 $\tilde{U}$ 的本征基下得到施密特分解：$|\Psi\rangle = \sum_i c_{AB,ii}\,|\phi_i\rangle\,|\phi_i\rangle$；这或许对其他量子算法，或例如热场双态的相关研究有所助益 [27]。

扩展到多设备设置。 — 我们还考虑扩展到 $p$ 个 Alice，她们都拥有对同一本征态非常好的近似，而另一端只有一个 Bob。一种自然的推广是将所有辅助量子比特投影到对称空间。对于两个设备，这种投影可以通过简单的方式实现（如图 3(a) 所示），也可以对两个辅助量子比特执行受控 SWAP 操作，使额外辅助量子比特的测量结果指示投影到了对称子空间还是反对称子空间。对于更多设备，投影到全对称子空间与量子 Schur 变换有关，且可高效实现 [22]。

我们旨在理解该方法在

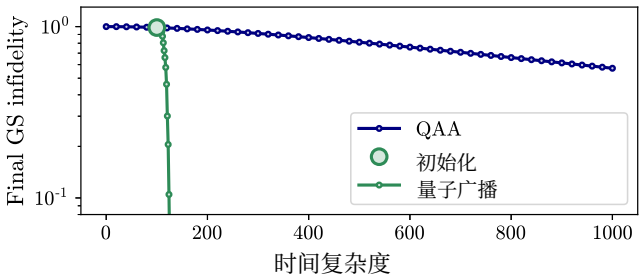


图 4. 将量子广播协议与量子绝热算法结合，用于包含 5 个量子比特的 ZZXZ 模型实例。若要以所需精度制备基态，可以放慢绝热扫描。另一种做法是使用较差的近似来初始化受量子相位估计启发的量子广播协议。当最小绝热能隙不出现在扫描末端时，仅考虑算法的时间复杂度，冷却算法的表现显著优于演化时间更长的量子绝热算法。

$p$较大极限下的标度行为。比特串“00. . . 0”和“11. . . 1”似乎具有最大的相对抑制效果，而且也便于进行解析处理。对于这一选择（我们推测它是最优的），我们证明相对抑制渐近趋于 $1/4$。这与第一种变体中仅有两个设备时比特串“01”对应的数值一致，这表明本文讨论的协议能够加速基态收敛的程度存在上限。计算过程请参阅补充材料。

应用。——本文提出的方法能够从一个近似态精确制备基态。该近似态可通过绝热算法获得 [4]。我们可以比较本方法所需时间与绝热算法用于基态制备的额外时间，并在图 4中展示一个示例。这里，我们采用相互作用强度较大的 ZZXZ 模型，使得绝热能隙小于最终哈密顿量的谱隙：$H_T = \sum_{i=1}^{n=9} (7\sigma_i^z\sigma_{i+1}^z + \sigma_i^x + \sigma_i^z)$。在量子绝热算法（QAA）的数值模拟中，我们平滑地插值 $H(s) = (s-1)H_0 + sH_T$，从一个平凡哈密顿量 $H_0 = \sum_{i=1}^{n=9} \sigma_i^z$ 出发，以观察所考虑区域内的指数误差抑制。我们注意到，对于转化为基态求解问题的优化问题，其目标哈密顿量的谱隙通常为常数量级 [28]。

与其在绝热扫描结束时使用此处介绍的冷却程序，也可以考虑在准绝热演化的中间步骤中使用它们。每当瞬时态与哈密顿量的真实基态偏离过大（或者可能与合适的修正哈密顿量 [29] 的基态偏离过大）时，便可通过非破坏性方法 [30]，检测到；此时，进行数次量子相位估计迭代可能会显著提高瞬时态与基态的重叠。

讨论与展望。— 我们提出了一种分布式量子协议，可实现任意精度的基态制备。与迭代量子相位估计相比，如果另一台量子设备上有更好的基态近似，且两台设备能够共享有限量的纠缠，我们的协议达到特定基态保真度所需的重复次数更少。我们在此采用了比 Koczor 的工作 [31] 更弱的假设：只有辅助量子比特发生相互作用。这似乎更符合实验实现中的实际情况 [14]。对于近收敛区域及更优情形，我们通过解析推导得出了分布式协议相较于单设备协议在本征态制备上的加速效果，并通过数值计算对其进行了定性探索。量子广播协议的一项关键优势是能够通过预示内置地验证制备出的状态。

我们的算法受到量子相位估计的启发，并依赖于相对难以实现的受控量子动力学。因此，分布式协议中实现的深度降低恰逢其时，对早期量子设备也具有现实意义。在此我们指出，已有方案提出用合适的时钟或参考态来替代受控动力学 [7]。此外，中性原子模拟器无需代价高昂的Trotter演化即可实现条件量子动力学 [32]。

在我们的协议中，辅助量子比特会被测量，但由于我们的目标是制备基态，而非求出基态能量，因此不会使用测量结果。未来的改进或许可以利用测得的比特，在协议执行过程中逐步优化演化时间和测量基的选择。

作者感谢 J. Ignacio Cirac、Tom O'Brien 和 Dolev Bluvstein 富有见地的讨论。本研究获得欧盟"地平线2020"研究与创新计划资助（资助协议编号：899354，FET Open SuperQuLAN），并获得 ERC StG FINE-TEA-SQUAD 资助（资助协议编号：101040729）。本研究是慕尼黑量子谷的一部分，该项目由巴伐利亚州政府通过巴伐利亚高科技议程 Plus 提供资金支持。J.T. 也感谢 Quantum Delta计划提供的支持。本出版物也是"Quantum Inspire – 云端荷兰量子计算机"项目（项目编号 [NWA.1292.19.194]）的一部分。该项目隶属于 NWA 研究计划"联合体路线研究（ORC）"，由荷兰科学研究组织（NWO）资助。J.T. 感谢 Google Research Scholar计划提供支持。

* 通讯作者：Benjamin.Schiffer@mpq.mpg.de

[1] J. Kempe、A. Kitaev 和 O. Regev，复杂性局域哈密顿量问题，《SIAM计算杂志》35, 1070 (2006)。[2] M. A. Nielsen 和 I. L. Chuang，*Quantum Computation and Quantum Information (10th Anniversary edition)*（剑桥大学出版社，2016）。[3] A. Messiah，*Quantum mechanics: Volume II*（North-Holland Publishing Company，阿姆斯特丹，1962）。[4] E. Farhi、J. Goldstone、S. Gutmann 和 M. Sipser，《通过绝热演化进行量子计算》，arXiv 预印本 quant-ph/0001106 (2000)。[5] D. Poulin 和 P. Wocjan，《在量子计算机上制备量子多体系统的基态》，《物理评论快报》102, 130503 (2009)。[6] Y. Ge、J. Tura 和 J. I. Cirac，《使用更少量子比特实现更快的基态制备和高精度基态能量估计》，《数学物理杂志》60, 022202 (2019)。[7] S. Lu、M. C. Ba˜nuls 和 J. I. Cirac，《有限能量下量子模拟的算法》，《PRX Quantum》2, 020321 (2021)。[8] M. Cerezo、A. Arrasmith、R. Babbush、S. C. Benjamin、S. Endo、K. Fujii、J. R. McClean、K. Mitarai、X. Yuan、L. Cincio 和 P. J. Coles，《变分量子算法》，《自然综述：物理》3, 625 (2021)。[9] S. Jansen、M.-B. Ruskai 和 R. Seiler，《绝热近似的界及其在量子计算中的应用》，《数学物理杂志》48, 102111 (2007)。[10] N. Wiebe 和 N. S. Babcock，《改进绝热量子演化的误差标度》，《新物理学杂志》14, 013024 (2012)。[11] S. Wang、E. Fontana、M. Cerezo、K. Sharma、A. Sone、L. Cincio 和 P. J. Coles，《变分量子算法中的噪声诱导贫瘠高原》，Nature Communications 12, 10.1038/s41467-021-27045-6 (2021)。[12] T. E. O'Brien、B. Tarasinski 和 B. M. Terhal，《小规模（有噪声）实验中的多个本征值量子相位估计》，《新物理学杂志》21, 023022 (2019)。[13] R. Santagati、J. Wang、A. A. Gentile、S. Paesani、N. Wiebe、J. R. McClean、S. Morley-Short、P. J. Shadbolt、D. Bonneau、J. W. Silverstone、*et al.*，《见证量子模拟哈密顿量谱的本征态》，《科学进展》4, eaap9646 (2018)。[14] P. Magnard、S. Storz、P. Kurpiers、J. Sch¨ar、F. Marxer、J. L¨utolf、T. Walter、J.-C. Besse、M. Gabureac、K. Reuer、*et al.*，《空间分离低温系统中超导电路之间的微波量子链路》，《物理评论快报》125, 260502 (2020)。[15] P. Harvey-Collard、J. Dijkema、G. Zheng、A. Sammak、G. Scappucci 和 L. M. Vandersypen，《由虚微波光子介导的相干自旋-自旋耦合》，《物理评论X》12, 021026 (2022)。[16] A. Elben、B. Vermersch、R. van Bijnen、C. Kokail、T. Brydges、C. Maier、M. Joshi、R. Blatt、C. F. Roos 和 P. Zoller，《中等规模量子设备的跨平台验证》，《物理评论快报》124, 010504 (2020)。[17] A. Elben、S. T. Flammia、H.-Y. Huang、R. Kueng、J. Preskill、B. Vermersch 和 P. Zoller，《随机测量工具箱》，《自然综述：物理》5, 9 (2022)。[18]J. I. Cirac、A. K. Ekert、S. F. Huelga 和 C. Macchiavello，《在噪声

信道上的分布式量子计算》，《物理评论A》59, 4249 (1999)。[19] H. Buhrman、R. Cleve、J. Watrous 和 R. de Wolf，《量子指纹识别》，《物理评论快报》87, 167902 (2001)。[20] H. Buhrman、R. Cleve、S. Massar 和 R. de Wolf，《非定域性与通信复杂度》，《现代物理评论》82, 665 (2010)。[21] C. Monroe、R. Raussendorf、A. Ruthven、K. R. Brown、P. Maunz、L.-M. Duan 和 J. Kim，《具有原子存储器和光子互连的规模化模块化量子计算机架构》，《物理评论A》89, 022317 (2014)。[22] D. Bacon、I. L. Chuang 和 A. W. Harrow，《用于舒尔变换和 Clebsch-Gordan 变换的高效量子电路》，《物理评论快报》97, 170502 (2006)。[23] H. Krovi，《高维量子舒尔变换的高效实现》，《Quantum》3, 122 (2019)。[24] D. S. Abrams 和 S. Lloyd，《用于寻找本征值和特征向量、可提供指数级速度提升的量子算法》，《物理评论快报》83, 5162 (1999)。[25] J.-S. Xu、M.-H. Yung、X.-Y. Xu、S. Boixo、Z.-W. Zhou、C.-F. Li、A. Aspuru-Guzik 和 G.-C. Guo，《类恶魔算法量子冷却及其在量子光学中的实现》，《自然·光子学》8, 113 (2014)。[26] Y. Chen 和 T.-C. Wei，《通过迭代测量辅助量子比特实现谱投影的量子算法》，《物理评论A》101, 032339 (2020)。[27] W. Cottrell、B. Freivogel、D. M. Hofman 和 S. F. Lokhande，《如何构建热场双态》，《高能物理学杂志》2019, 58 (2019)。[28] S. Ebadi、A. Keesling、M. Cain、T. T. Wang、H. Levine、D. Bluvstein、G. Semeghini、A. Omran、J.-G. Liu、R. Samajdar、X.-Z. Luo、B. Nash、X. Gao、B. Barak、E. Farhi、S. Sachdev、N. Gemelke、L. Zhou、S. Choi、H. Pichler、S.-T. Wang、M. Greiner、V. Vuleti´c 和 M. D. Lukin，《利用里德堡原子阵列对最大独立集进行量子优化》，《科学》376, 1209 (2022)。[29] A. Benseny 和 K. Mølmer，《重新审视绝热定理：绝热跃迁出人意料的优异性能》，《物理评论A》103, 062215 (2021)。[30] B. F. Schiffer、J. Tura 和 J. I. Cirac，《绝热光谱学与变分量子绝热算法》，《PRX Quantum》3, 020347 (2022)。[31] B. Koczor，《近期量子设备的指数误差抑制》，《物理评论X》11, 031057 (2021)。[32] D. Bluvstein、A. Omran、H. Levine、A. Keesling、G. Semeghini、S. Ebadi、T. T. Wang、A. A. Michailidis、N. Maskara、W. W. Ho、S. Choi、M. Serbyn、M. Greiner、V. Vuleti´c 和 M. D. Lukin，《控制驱动的里德堡原子阵列中的量子多体动力学》，《科学》371, 1355 (2021)。

# 补充材料：通过纠缠共享实现本征态的量子广播

## 目录

A. 单设备上的本征态制备1. 量子线路与过程映射 2. 计算期望振幅因子的贝叶斯方法 3. 计算平均相对抑制 2 2 3 5

B. 量子广播：双辅助量子比特变体 1. 量子线路与过程映射 2. 计算期望振幅因子的贝叶斯方法 3. 通过纠缠共享实现的平均相对抑制 4. 投影失败带来的开销 7 7 8 9 10

C. 量子广播：三辅助量子比特变体（$V = H \otimes H$） 12
1. 量子线路与过程映射 2. 计算期望振幅因子的贝叶斯方法 12
3. 通过纠缠共享实现的平均相对抑制 13 15

D. 投影到联合乘积基的协议 17

E. 向多设备的推广 1. 投影到对称子空间 2. 关于使用受控错排算符的一种变体的评论 19 19 21

F. 存在对称性时的考量 21

## 附录 A：在单设备上制备本征态

我们关注一类受量子相位估计启发的算法：给定某个本征态的初始近似，以所需的精度制备该本征态。这里，我们考虑图 S1 所示的单设备情形。

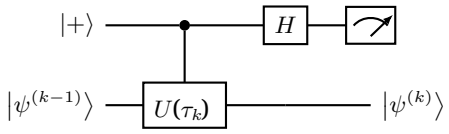


图 S1. 将一个量子电路（本质上是哈达玛测试电路）应用于初始态 $|\psi^{(k-1)}\rangle$。随后重置辅助量子比特，并将输出态 $|\psi^{(k)}\rangle$ 作为下一个初始态。

### 1. 量子电路与过程映射

我们首先说明，反复应用哈达玛电路如何在平均意义上放大主导本征态。该协议要求能够实现受控幺正演化：将辅助量子比特初始化为 $|+\rangle$ 态，然后对 $H$ 施加时长为 $\tau_k$的受控哈密顿量演化 $U$，我们将其简记为 $U(\tau_k)$，并在 $\sigma_x$ 基中测量辅助量子比特。为了分析电路单次运行的行为，我们将 $U$ 以及 $|\psi\rangle$ 中的初始态写成 $H$ 的本征基形式：

$$U(\tau_k) = e^{-i\tau_k H} = \sum_j e^{-i\tau_k \lambda_j} |\phi_j\rangle \langle\phi_j| = \sum_j e^{i\varphi_j} |\phi_j\rangle \langle\phi_j| , \tag{S1}$$

为简化记号，我们省略了 $k$ 标签，并令 $|\psi\rangle = \sum_j c_j |\phi_j\rangle$ 取值为 $c_j \in \mathsf{C}$。初始态包含的量子比特数为 $n$（因此本征态数为 $N = 2^n$）。测量前的复合系统可描述为

$$\frac{1}{2}\left(|0\rangle\left(|\psi\rangle + U|\psi\rangle\right) + |1\rangle\left(|\psi\rangle - U|\psi\rangle\right)\right) \tag{S2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(|0\rangle \sum_j c_j(1 + e^{i\varphi_j})|\phi_j\rangle + |1\rangle \sum_j c_j(1 - e^{i\varphi_j})|\phi_j\rangle\right). \tag{S3}$$

我们关注以下过程：$|c_j^{(0)}|^2 \mapsto |c_j^{(k)}|^2$，其中 $k$ 表示当前迭代。分析中，我们采用以下假设：

(1) 电路无噪声。

(2) 变量 $\varphi_j^{(k)} := \lambda_j \tau_k \bmod 2\pi$ 对所有 $j$，$k$ 都是独立同分布的，服从 $\varphi_j^{(k)} \sim \mathsf{Unif}[0, 2\pi]$ 分布。

为证明 (2)，对每次迭代，我们需要将演化时间 $\tau_k$ 视为一个均匀分布的非负随机变量，使得 $\tau_k \in O(1/\Delta)$。这保证了相对于基态，所有本征相位都被有效随机化。此外，各自本征相位之间的任何统计依赖性都会消除，因此 $\varphi_0$ 和 $\varphi_j$ 在统计上相互独立。这是因为 $\Delta$ 是 $H$的谱隙。自然，只要能够保证我们关注的本征能量与距其最近的本征能量之间的最小距离，也可以对基态以上的本征态进行类似论证，并可将该最小距离取为 $\Delta$。此外，当我们关注基态时，分析将表明，较高取值的 $j$之间的统计依赖性不再重要，因为 $|c_j| \ll 1$。因此，我们得到一族随机变量 $\varphi_j^{(k)} := \lambda_j \tau_k \bmod 2\pi \sim \mathsf{Unif}[0, 2\pi]$，它们独立同分布。

我们可以定义一个过程映射 $\mathsf{p}$ 将本征态布居向量 $\{|c_j^{(k-1)}|^2\}_j$ 转换为下一个本征态布居向量

。第 $k$ 次迭代的过程映射可描述为

$$|c_j^{(k-1)}|^2 \mapsto |c_j^{(k)}|^2 = |c_j^{(k-1)}|^2 \times \frac{S_(i,j)^{(k)}}{N^{(k)}} = |c_j^{(k-1)}|^2 \times \begin{cases} \dfrac{(1+\cos(\varphi_j^{(k)}))}{\sum_l |c_l^{(k-1)}|^2(1+\cos(\varphi_l^{(k)}))} & \text{with prob. } \Pr_{|0\rangle}^{(k)}, \\ \dfrac{(1-\cos(\varphi_j^{(k)}))}{\sum_l |c_l^{(k-1)}|^2(1-\cos(\varphi_l^{(k)}))} & \text{with prob. } \Pr_{|1\rangle}^{(k)}. \end{cases} \tag{S4}$$

$S_j^{(\alpha)}$ 是分别乘到第 $j$ 个本征态在迭代（$k-1$）时的布居上的相位因子，而 $N^{(\alpha)}$ 是归一化。辅助量子比特中测得 $|0\rangle$ 或 $|1\rangle$ 的概率为

$$\Pr_{|0\rangle}^{(\alpha)} = \sum_l \frac{|c_l^{(\alpha-1)}|^2}{2}(1+\cos(\varphi_l^{(\alpha)})), \quad \text{and} \quad \Pr_{|1\rangle}^{(\alpha)} = \sum_l \frac{|c_l^{(\alpha-1)}|^2}{2}(1-\cos(\varphi_l^{(\alpha)})). \tag{S5}$$

该算法收敛到一个本征态（参见附录 F） $H$。这里我们关注的是量化收敛到本征态的速度。为简单起见，在分析中我们将该本征态视为基态。因此，我们引出以下定义：

**定义1（主导本征矢量）**对于具有非简并谱的哈密顿量 $H = \sum_i \lambda_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$ 和量子态 $|\psi\rangle = \sum_i c_i |\phi_i\rangle$，$|\psi\rangle$ 当且仅当 $|c_d|^2 > |c_i|^2, \forall i \neq d$时，具有唯一的主导本征矢量 $|\phi_d\rangle$ 。我们将主导度 $D := |c_d|^2 - |c_s|^2$ 定义为从主导本征态 $|\phi_d\rangle$ 到次主导本征态$|\phi_s\rangle$ 的距离，其中 $|c_d|^2 > |c_s|^2 > |c_i|^2, \forall i \notin \{d, s\}$。

在该算法中，我们希望制备的本征态是主导本征态，其初始振幅为 $|c_d^{(0)}|^2$，初始主导度为 $D^{(0)}$。在协议经过前 $k$ 轮后，$|c_j^{(k)}|^2$ 是由下式描述的随机变量：

$$|c_j^{(0)}|^2 \mapsto |c_j^{(k)}|^2 = |c_j^{(0)}|^2 \times \frac{S_j^{(1)} S_j^{(2)} \cdots S_j^{(k)}}{N^{(1)} N^{(2)} \cdots N^{(k)}}. \tag{S6}$$

### 2. 期望振幅因子的贝叶斯方法

$S_j^{(\alpha)}$ 和 $N^{(\alpha)}$ 可以视为随机变量。根据假设 (2)，对于每个$\alpha$，$j$，$S_j^{(\alpha)}$ 彼此独立。我们注意到，$|c_j^{(\alpha)}|^2$ 只取决于上一轮 $\alpha-1$的结果。注意，我们可以将该过程描述为一个处于无限状态空间中的离散时间马尔可夫链。在分析中，我们考虑同一迭代时两个振幅的比值，因此无需考虑归一化

$$\frac{|c_j^{(k)}|^2}{|c_d^{(k)}|^2} = \frac{|c_j^{(0)}|^2}{|c_d^{(0)}|^2} \times \frac{S_j^{(1)} S_j^{(2)} \cdots S_j^{(k)}}{S_d^{(1)} S_d^{(2)} \cdots S_d^{(k)}}. \tag{S7}$$

我们在分母中使用 $d$ （主导态）的索引，因为我们关注的是量化非主导振幅被抑制的速度。取自然对数可得

$$\log\left(\frac{|c_j^{(k)}|^2}{|c_d^{(k)}|^2}\right) = \log\left(\frac{|c_j^{(0)}|^2}{|c_d^{(0)}|^2}\right) + \log\left(S_j^{(1)}\right) - \log\left(S_d^{(1)}\right) + \cdots + \log\left(S_j^{(k)}\right) - \log\left(S_d^{(k)}\right). \tag{S8}$$

几乎收敛到基态，因此我们可以考察在此极限下 $\log\left(|c_j^{(k)}|^2/|c_d^{(k)}|^2\right)$ 的期望值。我们假设，对于 $j \neq d$，$|c_d^{(\alpha)}|^2 \to 1$和 $|c_j^{(\alpha)}|^2 \to 0$ ，从而认为 $S_j^{(\alpha)}$ （以及 $S_d^{(\alpha)}$ ）均为独立同分布。于是，根据中心极限定理，我们得出：如果 $S_j^{(\alpha)}$ 的方差有限，则 $S_j^{(\alpha)}$ 服从对数正态分布。因此，我们希望计算 $S_j^{(\alpha)}$ 的矩。注意到，对于每个 $\alpha$，$\varphi_j^{(\alpha)}$ 均为 $\varphi_j^{(\alpha)} \sim \mathrm{Unif}[0, 2\pi]$ 独立同分布。然而，由于获得“0”或“1”的概率取决于

$\varphi_j^{(\alpha)}$，我们实际能够获得的概率分布是以辅助量子比特的测量结果为条件的 $\varphi_j^{(\alpha)}$ 的分布。因此，假设我们观测到“0”，$\varphi_j^{(\alpha)}$ 就不再是均匀分布，而是根据系数 $\{c_j\}$ 的函数呈现偏置。

因此，我们采用贝叶斯方法来计算矩 $S_j^{(\alpha)}$，并首先回顾最基本形式的贝叶斯定理：

$$p(A|B) = \frac{p(B|A)p(A)}{p(B)}. \tag{S9}$$

鉴于我们在辅助量子比特上观测到 $|0\rangle$，且系数为 $\{c_j^{(\alpha-1)}\}$，一组 $\varphi_j^{(\alpha)}$ 的概率密度为

$$p\left(\varphi_j^{(\alpha)}\middle||0\rangle, \{c_j^{(\alpha-1)}\}\right) = \frac{p\left(|0\rangle\middle|\varphi_j^{(\alpha)}, \{c_j^{(\alpha-1)}\}\right) \times p\left(\varphi_j^{(\alpha)}\middle|\{c_j^{(\alpha-1)}\}\right)}{p\left(|0\rangle\middle|\{c_j^{(\alpha-1)}\}\right)} \tag{S10}$$

这只是将贝叶斯定理应用于以 $\{c_j^{(\alpha-1)}\}$ 为条件的概率密度。请注意，在不以测得的辅助量子比特为条件时，一组 $\varphi_j^{(\alpha)}$ 的概率密度与 $\{c_j^{(\alpha-1)}\}$ 无关，因为 $\tau_k$ 是独立于 $\{c_j^{(\alpha-1)}\}$ 选取的，因此我们有

$$p\left(\varphi_j^{(\alpha)}\middle|\{c_j^{(\alpha-1)}\}\right) = p\left(\varphi_j^{(\alpha)}\right) = \frac{1}{(2\pi)^N}. \tag{S11}$$

此外，在给定一组 $\{c_j^{(\alpha-1)}\}$ 但不以 $\varphi_j^{(\alpha)}$ 为条件时，测量到 $|0\rangle$ 的概率为

$$p\left(|0\rangle\middle|\{c_j^{(\alpha-1)}\}\right) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} p\left(|0\rangle\middle|\varphi_j^{(\alpha)}, \{c_j^{(\alpha-1)}\}\right) d\varphi_1^{(\alpha)}\ldots d\varphi_N^{(\alpha)} = \frac{1}{2} \tag{S12}$$

其中我们使用了此前给出的概率

$$p\left(|0\rangle\middle|\varphi_j^{(\alpha)}, \{c_j^{(\alpha-1)}\}\right) = \Pr{}_{|0\rangle}^{(\alpha)} \tag{S13}$$

在式 S5中。我们可以将这三项全部代入式S10，得到

$$p\left(\varphi_j^{(\alpha)}\middle||0\rangle, \{c_j^{(\alpha-1)}\}\right) = \frac{1}{(2\pi)^N}\sum_l |c_l^{(\alpha-1)}|^2(1+\cos(\varphi_l^{(\alpha)})). \tag{S14}$$

为了将中心极限定理应用于方程 S8，我们计算 $\log\left[S_j^{(\alpha)}\right] = \log\left[1+\cos(\varphi_j^{(\alpha)})\right]$的一阶矩和二阶矩。（对 $\varphi$ 变量取）期望值为

$$\begin{aligned}
\mu_{j,\alpha} =& \mathbb{E}\left[\log\left[S_j^{(\alpha)}\right]\middle||0\rangle, \{c_j^{(\alpha-1)}\}\right] && \text{(S15)}\\
=& \frac{1}{(2\pi)^N}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\log\left[1+\cos(\varphi_j^{(\alpha)})\right]\left(\sum_l |c_l^{(\alpha-1)}|^2\left[1+\cos(\varphi_j^{(\alpha)})\right]\right) d\varphi_1^{(\alpha)}\ldots d\varphi_N^{(\alpha)} && \text{(S16)}\\
=& \frac{1}{(2\pi)}\int_0^{2\pi}\log\left[1+\cos(\varphi_j^{(\alpha)})\right]\left[1+|c_j^{(\alpha-1)}|^2\cos(\varphi_j^{(\alpha)})\right] d\varphi_j^{(\alpha)} && \text{(S17)}\\
=& |c_j^{(\alpha-1)}|^2 - \log(2) && \text{(S18)}
\end{aligned}$$

而对于方差，我们需要计算

$$\sigma_{j,\alpha}^2 = \mathrm{Var}\left[\log\left[S_j^{(\alpha)}\right]\middle||0\rangle, \{c_j^{(\alpha-1)}\}\right] = \mathbb{E}\left[\log\left[S_j^{(\alpha)}\right]^2\middle||0\rangle, \{c_j^{(\alpha-1)}\}\right] - \mathbb{E}\left[\log\left[S_j^{(\alpha)}\right]\middle||0\rangle, \{c_j^{(\alpha-1)}\}\right]^2. \tag{S19}$$

我们计算

$$\mathbb{E}\left[\log\left[S_j^{(\alpha)}\right]^2\middle||0\rangle,\{c_j^{(\alpha-1)}\}\right]=\frac{1}{(2\pi)}\int_0^{2\pi}\log\left[1+\cos(\varphi_j^{(\alpha)})\right]^2(1+|c_j^{(\alpha-1)}|^2\cos(\varphi_j^{(\alpha)}))d\varphi_j^{(\alpha)} \tag{S20}$$

$$=\frac{\pi^2}{3}+\log(2)^2-|c_j^{(\alpha-1)}|^2(2+\log(4)) \tag{S21}$$

并得到方差

$$\sigma_{j,\alpha}^2=\frac{\pi^2}{3}-|c_j^{(\alpha-1)}|^2\left(2+|c_j^{(\alpha-1)}|^2\right)<\infty, \tag{S22}$$

该方差是有限的。请注意，对于互补情形，当测量 $|1\rangle$ 时，由于三角函数的对称性，相关的矩会得到相同的结果。因此，我们将$\mu_{j,\ \alpha}$ 和$\sigma_{j,\ \alpha}^2$ 写作不显式依赖于辅助量子比特的测量结果。

为了应用中心极限定理，我们要求 $\log\left[S_j^{(\alpha)}\right]$ 独立同分布。在趋近基态的极限下，这两个条件都成立。我们用 $k_0$ 表示进入近收敛状态后的迭代次数。为简单起见，我们因此考虑此极限下 $\log\left(|c_j^{(\alpha)}|^2/|c_d^{(\alpha)}|^2\right)$的相关矩，这意味着我们假设对于 $j\neq d$， $|c_d^{(\alpha)}|^2\to 1$ 和 $|c_j^{(\alpha)}|^2\to 0$ 近似为常数，即它们也不再依赖于前一次迭代。在这种情况下，如果 $S_j^{(\alpha)}$ 的方差有限，则 $S_j^{(\alpha)}$ 服从对数正态分布，而这里确实如此。我们指出，这一结论适用范围更广，因为存在扩展版的中心极限定理（如李雅普诺夫定理或林德伯格定理），它们在稍宽松一些的假设下仍然成立。

对于近似收敛极限 $\{\ldots,\log\left[S^{(k_0)}{}_j\right],\ldots,\log\left[S^{(k_0+m)}{}_j\right]\}$ 下的一系列 $m$ 样本，根据中心极限定理（CLT），这些样本之和趋近于正态分布

$$\mathcal{LS}_j=\sum_{\alpha=k_0}^{k_0+m}\log\left[S_j^{(\alpha)}\right]\sim\mathcal{N}\left(-m\log(2),m\pi^2/3\right) \tag{S23}$$

当 $m$较大时。对于主导振幅，分别有

$$\mathcal{LS}_d=\sum_{\alpha=k_0}^{k_0+m}\log\left[S_d^{(\alpha)}\right]\sim\mathcal{N}\left(-m(1-\log(2)),m(\pi^2/3-3)\right). \tag{S24}$$

对于 reference， $-\log(2)\approx-0.693$ 和 $1-\log(2)\approx0.307$； $\pi^2/3\approx3.29$ 和 $\pi^2/3-3\approx0.29$。

### 3. 计算平均相对抑制

在本节中，我们关注比值的分布 $|c_j^{(k_0+m}|^2/|c^{(k_0+m)})_d|^2$ 其中 $j\neq d$，因此利用公式 S7我们首先计算

$$\exp(\mathcal{LS}_j-\mathcal{LS}_d)\sim\text{Lognormal}\left(-m,m(2\pi^2/3-3)\right). \tag{S25}$$

我们关注近收敛区域中每轮的平均相对抑制。次主导振幅的平均抑制是该分布的均值

$$\exp(\mathcal{LS}_j-\mathcal{LS}_d)^{1/m}\sim\text{Lognormal}\left(-1,(2\pi^2/3-3)/m\right). \tag{S26}$$

由于对数正态分布 Lognormal($\mu$， $\sigma^2$) 的均值为 exp($\mu+\sigma^2/2$)，因此现在可以将预期抑制写为

$$\lim_{m\to\infty}\exp\left(-1+\frac{2\pi^2/3-3}{2m}\right)=\exp(-1). \tag{S27}$$

由此，我们推导出了非主导本征态 $|\phi_j\rangle$ 相对于主导本征态$|\phi_d\rangle$ 的预期抑制，它是二者各自振幅之差的函数。显然，次主导本征态与主导本征态这一对的预期抑制最弱。从定性上看，次主导振幅与主导振幅相差越大，我们预期比值受到的抑制越强（参见式S18）。我们注意到，两个本征态可能发生交叉，即最初占主导的振幅变为新的次主导本征态，从而降低制备最初的主导本征态的可能性。正文对此进行了讨论，这也是玻恩规则的结果。

## 附录 B：量子广播：双辅助量子比特变体

这里我们仿照单设备算法，计算具有两个辅助量子比特的量子广播协议的相对平均抑制。该协议单次迭代的电路如图所示。S2，其算符为 $V$ 定义如下

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{S1}$$

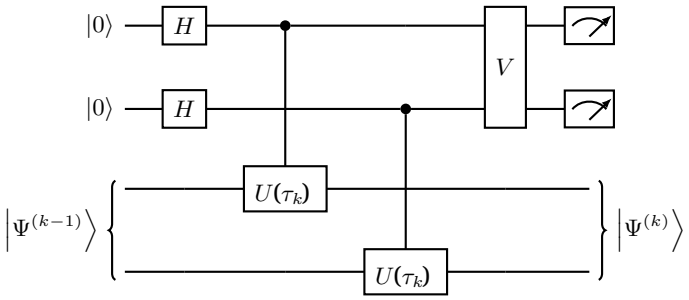


图 S2. 两个辅助量子比特分别控制两台量子设备上相应动力学过程的量子广播电路。辅助量子比特初始化为 $|0\rangle$ 态，随后分别通过局部 Hadamard变换变为 $|+\rangle$ 。测量在计算基中进行。

### 1. 量子电路与过程映射

首先，我们写出一般 $V$ 的量子电路作用。我们定义 $|\psi'\rangle := U|\psi\rangle$。为建立直观认识，我们先考虑 $|\Psi^{(0)}\rangle = |\psi\rangle|\psi\rangle$ 的情况，并考虑图 S2 中电路的一次迭代。在进行计算基测量之前，电路的全局态为

$$\frac{1}{2}\Big[V|00\rangle|\psi\psi\rangle + V|01\rangle|\psi\psi'\rangle + V|10\rangle|\psi'\psi\rangle + V|11\rangle|\psi'\psi'\rangle\Big]. \tag{S2}$$

将算符 $V$ 代入我们的定义，可得

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\Big[|00\rangle\big(|\psi\psi\rangle + |\psi'\psi'\rangle\big) + |01\rangle\big(|\psi\psi'\rangle + |\psi'\psi\rangle\big) + |11\rangle\big(|\psi\psi\rangle - |\psi'\psi'\rangle\big) + |10\rangle\big(|\psi'\psi\rangle - |\psi\psi'\rangle\big)\Big] \tag{S3}$$

$$\begin{aligned} =&\frac{1}{2\sqrt{2}}\Big[|00\rangle\sum_{i,j} c_i c_j(1+e^{i(\varphi_i+\varphi_j)})|\phi_i\phi_j\rangle + |01\rangle\sum_{i,j} c_i c_j(e^{i\varphi_i}+e^{i\varphi_j})|\phi_i\phi_j\rangle \\ &+ |11\rangle\sum_{i,j} c_i c_j(1-e^{i(\varphi_i+\varphi_j)})|\phi_i\phi_j\rangle) + |10\rangle\sum_{i,j} c_i c_j(e^{i\varphi_i}-e^{i\varphi_j})|\phi_i\phi_j\rangle\Big]. \end{aligned} \tag{S4}$$

一般情况下，当输入为 $|\Psi^{(k-1)}\rangle$时，Alice 和 Bob 持有的状态通常可能是纠缠的，这意味着式 $c_{ij}$ 中的系数为 $c_i c_j$ 而非 S4。我们已经看到，随着算法收敛到相同的本征态对 $|10\rangle$ ，在辅助量子比特上测得 $|\Psi\rangle \approx |\phi_j\rangle|\phi_j\rangle$的概率趋近于零。我们在第 B4节分析后选择开销。当在辅助量子比特上观测到某个比特串时，振幅会乘以各自对应的局部相位因子。第 $k$次

迭代对应的过程映射为

$$|c_{ij}^{(k-1)}|^2 \mapsto |c_{ij}^{(k)}|^2 = |c_{ij}^{(k-1)}|^2 \times \frac{S_{(i,j),|b\rangle}^{(k)}}{N_{|b\rangle}^{(k)}} \tag{S5}$$

$$= |c_{ij}^{(k-1)}|^2 \times \begin{cases} \left[1+\cos(\varphi_i^{(k)}+\varphi_j^{(k)})\right]/\left(4N_{|00\rangle}^{(k)}\right) & \text{with } \Pr_{|00\rangle}^{(k)}, \\ \left[1+\cos(\varphi_i^{(k)}-\varphi_j^{(k)})\right]/\left(4N_{|01\rangle}^{(k)}\right) & \text{with } \Pr_{|01\rangle}^{(k)}, \\ \left[1-\cos(\varphi_i^{(k)}+\varphi_j^{(k)})\right]/\left(4N_{|11\rangle}^{(k)}\right) & \text{with } \Pr_{|11\rangle}^{(k)}, \\ \left[1-\cos(\varphi_i^{(k)}-\varphi_j^{(k)})\right]/\left(4N_{|10\rangle}^{(k)}\right) & \text{with } \Pr_{|10\rangle}^{(k)}, \end{cases} \tag{S6}$$

其中，我们更明确地表示了 $S$ 对辅助量子比特测量结果的依赖（参见公式S4），该结果用下标 $|b\rangle$表示。为方便起见，我们将 $S$ 中的因子 $1/4$ 吸收到归一化因子$N$中，因此可以重新定义 $S^{(k)}{}_{(i,j)\,|b\rangle} := 1 \pm \cos(\varphi_i^{(k)} \pm \varphi_j^{(k)})$，其中符号的选取与公式S6相同。注意，概率 $\Pr{}_{|b\rangle}^{(\alpha)} = [1 \pm \cos(\varphi_i^{(k)} \pm \varphi_j^{(k)})]/4$ 之和为一：$\sum_{b\in\{0,1\}^2} \Pr{}_{|b\rangle}^{(\alpha)} = 1$。

### 2. 期望振幅因子的贝叶斯方法

与单设备情形一样，我们将 $S^{(\alpha)}{}_{(i,j)\,|b\rangle}$ 视为随机变量，其中测量结果比特串记作 $b$。现在，我们将测得某个比特串 $b$的概率写作 $\Pr{}_{|b\rangle}^{(\alpha)} = p\Big(|b\rangle \Big| \varphi_i^{(\alpha)}, \{c_{ij}^{(\alpha-1)}\}\Big)$，也就是说，该概率取决于系数 $\{c_{ij}^{(\alpha-1)}\}$ 以及演化时间与本征能量的乘积$\varphi_i^{(\alpha)}$（注意，由于 Alice 和 Bob 的演化时间相同，这些量对两者也相同）。按照与单设备情形相同的思路，我们列出给定一组系数时观测到某个比特串的概率

$$p\Big(|00\rangle \Big| \{c_{ij}^{(\alpha-1)}\}\Big) = p\Big(|11\rangle \Big| \{c_{ij}^{(\alpha-1)}\}\Big) = \frac{1}{4}, \tag{S7}$$

$$p\Big(|01\rangle \Big| \{c_{ij}^{(\alpha-1)}\}\Big) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sum_i |c_{ii}^{(\alpha-1)}|^2, \tag{S8}$$

$$p\Big(|10\rangle \Big| \{c_{ij}^{(\alpha-1)}\}\Big) = \frac{1}{4}\sum_{i\neq j} |c_{ij}^{(\alpha-1)}|^2. \tag{S9}$$

此外，我们注意到观测到 $\varphi_i^{(\alpha)}$ 的先验概率密度为

$$p\Big(\varphi_i^{(\alpha)} \Big| \{c_{ij}^{(\alpha-1)}\}\Big) = p\Big(\varphi_i^{(\alpha)}\Big) = 1/(2\pi)^N \tag{S10}$$

或者，一对 $\left(\varphi_i^{(\alpha)}, \varphi_j^{(\alpha)}\right)$ 的先验概率密度为

$$p\Big(\varphi_i^{(\alpha)}, \varphi_j^{(\alpha)} \Big| \{c_{ij}^{(\alpha-1)}\}\Big) = p\Big(\varphi_i^{(\alpha)}, \varphi_j^{(\alpha)}\Big) = 1/(2\pi)^N. \tag{S11}$$

接下来，我们采用与单设备协议中相同的贝叶斯方法计算期望振幅因子。这里，我们仅给出期望值的解析计算，因为所得各阶矩与单设备情形相同：振幅因子 $\log\left[S_i^{(\alpha)}{}_{(,j)\,|00\rangle}\right]$ 的期望值为

$$\mu_{(i,j),\alpha,|00\rangle} = \mathbb{E}\left[\log\left[S_{(i,j),|00\rangle}^{(\alpha)}\right] \Big| |0\rangle, \{c_{ij}^{(\alpha-1)}\}\right] \tag{S12}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^N}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} \log\left[1+\cos(\varphi_i^{(k)}+\varphi_j^{(k)})\right] \times \left(\sum_{l,p} |c_{lp}^{(\alpha-1)}|^2\left[1+\cos(\varphi_l^{(k)}+\varphi_p^{(k)})\right]\right) d\varphi_1^{(\alpha)}\ldots d\varphi_N^{(\alpha)} \tag{S13}$$

$$= |c_{ij}^{(\alpha-1)}|^2 - \log(2). \tag{S14}$$

由于对称性，我们有 $\mu_{(i,j),\alpha,|11\rangle} = \mu_{(i,j),\alpha,|00\rangle}$。因此，“00”和“11”比特串的行为与单设备情形相同，且在此处出现的总概率为 $1/2$。“10”比特串对应于向反对称空间的投影，这会使相同的本征态振幅 $|c_{dd}|^2$ 变为零。

接下来需要分析比特串“01”对应的电路行为。首先，我们计算$\mu_{(d,d),\ \alpha,\ |01\rangle}$。这里不需要积分，因为 $S^{(\alpha)}_{(d,\ d)\ |01\rangle}$ 与 $\varphi_i^{(\alpha)}$ 无关：

$$\begin{aligned}\mu_{(d,d),\alpha,|01\rangle} =& \mathbb{E}\left[\log\left[S^{(\alpha)}_{(d,d),|01\rangle}\right]\middle|\,|0\rangle, \{c_{ij}^{(\alpha-1)}\}\right] && \text{(S15)}\\ =& \mathbb{E}\left[\log\left[1+\cos(\varphi_d^{(\alpha)}-\varphi_d^{(\alpha)})\right]\middle|\,|0\rangle, \{c_{ij}^{(\alpha-1)}\}\right] && \text{(S16)}\\ =& \log(2)。 && \text{(S17)}\end{aligned}$$

接下来，我们计算$\mu_{(d,j),\ \alpha,\ |01\rangle}$，其中 $d \neq j$。首先，我们写出 $\varphi_i^{(\alpha)}$ 的偏置概率密度函数，其形式为

$$\begin{aligned}p\left(\varphi_i^{(\alpha)}\middle|\,|01\rangle, \{c_{ij}^{(\alpha-1)}\}\right) =& \frac{p\left(|01\rangle\,\middle|\,\{\varphi_i^{(\alpha)}\}, \{c_{ij}^{(\alpha-1)}\}\right)\times p\left(\varphi_i^{(\alpha)}\middle|\{c_{ij}^{(\alpha-1)}\}\right)}{p\left(|01\rangle\,\middle|\,\{c_{ij}^{(\alpha-1)}\}\right)} && \text{(S18)}\\ =& \frac{1}{(2\pi)^N}\frac{1}{1+\sum_l |c_{ll}^{(\alpha-1)}|^2}\sum_{i,j}|c_{ij}^{(\alpha-1)}|^2\left[1+\cos(\varphi_i^{(\alpha)}-\varphi_j^{(\alpha)})\right]. && \text{(S19)}\end{aligned}$$

然后，$\log\left[S^{(\alpha)}_{d\ \ (,\ j)\ \ |01\rangle}\right]$ 的期望值为

$$\begin{aligned}\mu_{(d,j),\alpha,|01\rangle} =& \mathbb{E}\left[\log\left[S^{(\alpha)}_{(d,j),|01\rangle}\right]\middle|\,|0\rangle, \{c_{ij}^{(\alpha-1)}\}\right] && \text{(S20)}\\ =& \frac{1}{1+\sum_l |c_{ll}^{(\alpha-1)}|^2}\frac{1}{(2\pi)^N}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\log\left[1+\cos(\varphi_d^{(\alpha)}-\varphi_j^{(\alpha)})\right]\\ & \times\sum_{l,p}|c_{lp}^{(\alpha-1)}|^2\left[1+\cos(\varphi_l^{(\alpha)}-\varphi_p^{(\alpha)})\right]d\varphi_1^{(\alpha)}\ldots d\varphi_N^{(\alpha)} && \text{(S21)}\\ =& \frac{1}{1+\sum_l |c_{ll}^{(\alpha-1)}|^2}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\Bigg\{\log\left[\ldots\right]_{dj}\sum_a|c_{aa}^{(\alpha-1)}|^2\left[\ldots\right]_{aa}+\log\left[\ldots\right]_{dj}|c_{dj}^{(\alpha-1)}|^2\left[\ldots\right]_{dj}\\ & +\log\left[\ldots\right]_{dj}|c_{jd}^{(\alpha-1)}|^2\left[\ldots\right]_{dj}+\log\left[\ldots\right]_{dj}\sum_{(a,b)\in R}|c_{ab}^{(\alpha-1)}|^2\left[\ldots\right]_{ab}\Bigg\}d\varphi_1^{(\alpha)}\ldots d\varphi_N^{(\alpha)} && \text{(S22)}\\ =& \frac{1}{1+\sum_l |c_{ll}^{(\alpha-1)}|^2}\Bigg\{-2\log(2)\sum_a|c_{aa}^{(\alpha-1)}|^2+(1-\log(2))|c_{dj}^{(\alpha-1)}|^2\\ & +(1-\log(2))|c_{jd}^{(\alpha-1)}|^2-\log(2)\sum_{(a,b)\in R}|c_{ab}^{(\alpha-1)}|^2\Bigg\} && \text{(S23)}\\ =& -\log(2)+\frac{|c_{dj}|^2+|c_{jd}|^2}{1+\sum_l |c_{ll}^{(\alpha-1)}|^2}, && \text{(S24)}\end{aligned}$$

其中 $R^c := \bigcup_a\{(a,a)\}\cup\{(d,j)\}\cup\{(j,d)\}$，并且我们使用简写 $\left[\ldots\right]_{lp} := \left[1+\cos(\varphi_l^{(\alpha)}-\varphi_p^{(\alpha)})\right]$。如果对 $\varphi_i^{(\alpha)}$ 采用均匀分布，我们将得到 –log(2)，也就是说，公式 S24 中的第二项是一种修正；当非主导振幅 $|c_{dj}|^2$ 和 $|c_{jd}|^2$ 趋于零时，该修正也趋于零。注意，在广播设置中，$|c_{jd}|^2 \to 0$，因为我们假设 Alice 对基态有近乎完美的近似。

### 3. 通过纠缠共享实现平均相对抑制

与单设备情形类似，我们计算电路每轮在近收敛区域内的平均抑制，其中 $|c_{dd}^{(\alpha-1)}|^2 \to_\alpha 1$ 且 $|c_{ds}^{(\alpha-1)}|^2 \to_\alpha 0$。每轮的预期抑制因子为（参见 S27）

$$\exp\left(\mu_{(d,s),\alpha,|01\rangle}-\mu_{(d,d),\alpha,|01\rangle}\right)=\exp\left(-2\log(2)\right)=1/4 \qquad \text{(S25)}$$

在极限 $m \to \infty$ 下，对于测得的“01”比特串。现在结合已计算出的期望值，对于“00”和“11”测量，抑制因子在近收敛区域内收敛至 $1/e$ 。因此，在始终投影到对称子空间的条件下，按其发生概率加权的总抑制因子为

$$\frac{1}{e^{1/2}}\frac{1}{4^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{e}} \approx 0.30 \tag{S26}$$

且小于单设备情形下的数值，当时我们有 $1/e \approx 0.37$。

#### 4. 投影失败导致的开销

对于相干时间有限的含噪量子设备，一种有效的算法策略是牺牲更多的协议重复次数，以提升量子算法的性能指标。基于这一思路，我们利用测得的比特串进行预示，以判断是否需要重新启动协议。在此，我们估算观察到“10”比特串所带来的算法开销，因为这要求重新启动协议。观察到“10”的概率在方程 S9 中给出，并取决于对角概率 $\sum_i |c_{ii}^{(\alpha-1)}|^2$。我们引入记号$\sum_{i,\ j}|c_{ij}|^2 = ||\vec{C}||_2^2 = ||\vec{C}_{\mathrm{d}}||_2^2 + ||\vec{C}_{\mathrm{od}}||_2^2$=1，其中

$$||\vec{C}_{\mathrm{d}}||_2^2 = \sum_i |c_{ii}|^2 \tag{S27}$$

是对角元素的范数。让我们专注于证明向对角收敛的条件；即，对所有 $i \neq j$，满足$c_{i,\ j} = 0$ 。

作为一阶近似，我们考察观测到的比特串对 $||\vec{C}_{\mathrm{d}}||^2$ 的影响。对于比特串“00”和“11”，我们采取保守做法，即认为对角范数保持不变。对于“10”，在接近收敛的极限下，非对角 $c_{i,\ j}$ 的相对抑制为 $1/4$ 。我们考虑这样一个区域：$S^{(k)}{}_{(i,\ j)\,|b\rangle}$的依赖性足够弱，从而中心极限定理成立；因此，我们可以通过比较 $\mu_{(d,j),\ \alpha,\ |01\rangle}$ 与 $\mu_{(d,d),\ \alpha,\ |01\rangle}$ 来计算平均抑制因子，正如我们在第 B 3 节中所做的那样。我们将 $\mu_{(d,j),\ \alpha,\ |01\rangle} < -\log(2) + 1/2$ 界定为 $|c_{dj}|^2 < 1/2$，并且在广播场景中为 $|c_{jd}|^2 = 0$。然后，对于观测到的“01”，平均抑制因子更小（即更好），ვიდრე

$$\exp(-2\log(2) + 1/2) = \sqrt{e}/4 \approx 0.41 < 1/2. \tag{S28}$$

因此，我们有新的　　期望振幅经过一次迭代变换后，平均而言至少与.....一样有利

$$\mathbb{E}\left[||C^{\vec{(k)}}{}_{\mathrm{d}}||_2^2\right] = \begin{cases} ||\vec{C}_{\mathrm{d}}^{(k-1)}||_2^2 & \text{with expected prob.} \quad p\Big(|00\rangle \vee |11\rangle \,\Big|\, \{c_{ij}^{(\alpha-1)}\}\Big) = 1/2, \\ \dfrac{2||\vec{C}_{\mathrm{d}}^{(k-1)}||_2^2}{1+||\vec{C}_{\mathrm{d}}^{(k-1)}||_2^2} & \text{with expected prob.} \quad p\Big(|01\rangle \,\Big|\, \{c_{ij}^{(\alpha-1)}\}\Big) = \frac{1}{4}\left(1+||\vec{C}_{\mathrm{d}}||_2^2\right), \\ 0 & \text{with expected prob.} \quad p\Big(|10\rangle \,\Big|\, \{c_{ij}^{(\alpha-1)}\}\Big) = \frac{1}{4}\left(1-||\vec{C}_{\mathrm{d}}||_2^2\right). \end{cases} \tag{S29}$$

令 $x^{(k)} = \mathbb{E}\left[||\vec{C}^{(k)}{}_{\mathrm{d}}\ ||_2^2\right]$。在这个简化模型中，我们只需研究在什么条件下 $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = 1$。求解 $x^{(k)}$ 的差分方程可得

$$x^{(k)} = \frac{2^k x^{(0)}}{1 + x^{(0)}(2^k - 1)}. \tag{S30}$$

在不计“00”或“11”结果的条件下（因为它们提升 $||\vec{C}^{(k)}{}_{\mathrm{d}}\ \ ||_2^2$ 的能力有限，因此此处将忽略），观测到“01”比特串 $p$ 次的概率为

$$\prod_{k=1}^{p}\left(\frac{1}{2} + \frac{x^{(k)}}{2}\right) = \frac{1 + (2^{p+1}-1)x^{(0)}}{2^p(x^{(0)}+1)}, \tag{S31}$$

其渐近趋于 $2x^{(0)}/(1+x^{(0)})$。

因此，我们预期在某次迭代中观察到投影到反对称空间（比特串“10”）的概率将由下式给出

$$1-\frac{2x^{(0)}}{1+x^{(0)}}=\frac{1-||\vec{C}_{\mathrm{d}}^{(0)}||_2^2}{1+||\vec{C}_{\mathrm{d}}^{(0)}||_2^2} \tag{S32}$$

因此，对于初始基态重叠 $\gamma=|c_B^{(0)}{}_{,\ 0}|$ 在广播设置中，$||\vec{C}^{(0)}{}_{\mathrm{d}}\ \ ||_2^2=\gamma^2+\sum_{i>0}|c_{ii}|^2$ 是由于重启导致的总算法成本增加，其表示为 $\mathcal{O}(1/\gamma^2)$。

**附录 C：量子广播：三辅助量子比特变体（$V = H \otimes H$）**

我们讨论一种协议变体，其中控制动力学的两个辅助量子比特被投影到对称子空间。随后，在进行计算基测量之前，通过施加 Hadamard 门，在 $\sigma^x$-基中测量这两个量子比特。协议一次迭代的电路如图S3 所示；该电路通过在包含受控 SWAP 门的正文电路图中选择算符 $V = H \otimes H$ 而得到。该算符 $V$ 表示为

$$V = H \otimes H = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{S1}$$

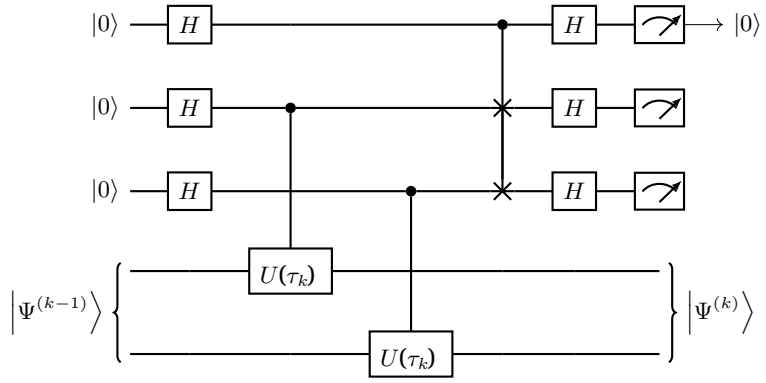


图 S3. 量子广播 电路，增加一个辅助量子比特，用于投影到对称子空间。在该协议中，我们后选择 ob 在第一个辅助量子比特上执行 $|0\rangle$ 。

**1. 量子电路与过程映射**

我们先考察电路（对于此变体，现在包含受控 SWAP 门）对一般 $V$ 的作用。记 $|\psi'\rangle := U|\psi\rangle$。同样，我们先考虑 $|\Psi^{(0)}\rangle = |\psi\rangle|\psi\rangle$ 的情况。在进行计算基测量之前，电路正在制备全局态

$$\begin{aligned} &\frac{|0\rangle}{4}\Big[2V|00\rangle|\psi\psi\rangle + V|01\rangle\big(|\psi\psi'\rangle + |\psi'\psi\rangle\big) + V|10\rangle\big(|\psi\psi'\rangle + |\psi'\psi\rangle\big) + 2V|11\rangle|\psi'\psi'\rangle\Big] \\ &+\frac{|1\rangle}{4}\Big[V|01\rangle\big(|\psi\psi'\rangle - |\psi'\psi\rangle\big) + V|10\rangle\big(|\psi'\psi\rangle - |\psi\psi'\rangle\big)\Big]. \end{aligned} \tag{S2}$$

对于 $V = H \otimes H$ 的一种选择，我们得到

$$\begin{aligned} &\frac{|0\rangle}{4}\Big[|00\rangle(|\psi\psi\rangle + |\psi\psi'\rangle + |\psi'\psi\rangle + |\psi'\psi'\rangle)) + |01\rangle(|\psi\psi\rangle - |\psi'\psi'\rangle)) \\ &\quad + |10\rangle(|\psi\psi\rangle - |\psi'\psi'\rangle)) + |11\rangle(|\psi\psi\rangle - |\psi\psi'\rangle - |\psi'\psi\rangle + |\psi'\psi'\rangle))\Big] \\ &+\frac{|1\rangle}{4}\Big[|01\rangle(|\psi'\psi\rangle - |\psi\psi'\rangle)) + |10\rangle(|\psi\psi'\rangle - |\psi'\psi\rangle))\Big]. \end{aligned} \tag{S3}$$

我们观察到，在这个变体中，同样地，随着算法收敛到本征态 $|\psi\rangle \approx |\phi_j\rangle$，在第一个辅助量子比特上测得 a $|1\rangle$ 的概率趋近于零。现在，我们用 $H$ 的本征基表示该状态：

$$\begin{aligned}
&\frac{|0\rangle}{4}\Big[\,|00\rangle\sum_{i,j}c_{ij}(1+e^{i\varphi_i}+e^{i\varphi_j}+e^{i(\varphi_i+\varphi_j)})\,|\phi_i\phi_j\rangle+|01\rangle\sum_{i,j}c_{ij}(1-e^{i(\varphi_i+\varphi_j)})\,|\phi_i\phi_j\rangle\\
&\quad+|10\rangle\sum_{i,j}c_{ij}(1-e^{i(\varphi_i+\varphi_j)})\,|\phi_i\phi_j\rangle)+|11\rangle\sum_{i,j}c_{ij}(1-e^{i\varphi_i}-e^{i\varphi_j}+e^{i(\varphi_i+\varphi_j)})\,|\phi_i\phi_j\rangle\,\Big]\\
&\frac{|1\rangle}{4}\Big[\,|01\rangle\sum_{i,j}c_{ij}(e^{i\varphi_i}-e^{i\varphi_j})\,|\phi_i\phi_j\rangle+|10\rangle\sum_{i,j}c_{ij}(e^{i\varphi_j}-e^{i\varphi_i})\,|\phi_i\phi_j\rangle\,\Big].
\end{aligned}\tag{S4}$$

量子广播协议的过程映射为

$$|c_{ij}^{(k-1)}|^2 \mapsto |c_{ij}^{(k)}|^2 \tag{S5}$$

$$= |c_{ij}^{(k-1)}|^2 \times \frac{S_{ij}^{(k)}}{N^{(k)}} \tag{S6}$$

$$= |c_{ij}^{(k-1)}|^2 \times \begin{cases}
\big[1+\cos(\varphi_i^{(k)})\big]\big[1+\cos(\varphi_j^{(k)})\big]/\big(4N_{|000\rangle}^{(k)}\big) & \text{with } \Pr{}_{|000\rangle}^{(k)},\\
\big[1-\cos(\varphi_i^{(k)}+\varphi_j^{(k)})\big]/\big(8N_{|001\rangle}^{(k)}\big) & \text{with } \Pr{}_{|001\rangle}^{(k)},\\
\big[1-\cos(\varphi_i^{(k)}+\varphi_j^{(k)})\big]/\big(8N_{|010\rangle}^{(k)}\big) & \text{with } \Pr{}_{|010\rangle}^{(k)},\\
\big[1-\cos(\varphi_i^{(k)})\big]\big[1-\cos(\varphi_j^{(k)})\big]/\big(4N_{|011\rangle}^{(k)}\big) & \text{with } \Pr{}_{|011\rangle}^{(k)},
\end{cases} \tag{S7}$$

这里我们仅考虑第一个辅助量子比特为“0”的经典比特串，因为在协议中，我们会对这一测量结果进行后选择，而它对应于对对称子空间的投影。接下来，我们再次将因子 $1/4$ 或 $1/8$分别吸收到归一化中。测得不同比特串的概率为

$$\Pr{}_{|000\rangle}^{(\alpha)} = \frac{1}{4}\sum_{i,j}|c_{ij}^{(\alpha-1)}|^2\big[1+\cos(\varphi_i^{(k)})\big]\big[1+\cos(\varphi_j^{(k)})\big], \tag{S8}$$

$$\Pr{}_{|001\rangle}^{(\alpha)} = \Pr{}_{|010\rangle}^{(\alpha)} = \frac{1}{8}\sum_{i,j}|c_{ij}^{(\alpha-1)}|^2\big[1-\cos(\varphi_i^{(k)}+\varphi_j^{(k)})\big], \tag{S9}$$

$$\Pr{}_{|011\rangle}^{(\alpha)} = \frac{1}{4}\sum_{i,j}|c_{ij}^{(\alpha-1)}|^2\big[1-\cos(\varphi_i^{(k)})\big]\big[1-\cos(\varphi_j^{(k)})\big] \tag{S10}$$

此外，为完整起见，我们也列出反对称情形：

$$\Pr{}_{|100\rangle}^{(\alpha)} = \Pr{}_{|111\rangle}^{(\alpha)} = 0, \tag{S11}$$

$$\Pr{}_{|101\rangle}^{(\alpha)} = \Pr{}_{|110\rangle}^{(\alpha)} = \frac{1}{8}\sum_{i,j}|c_{ij}^{(\alpha-1)}|^2\big[1-\cos(\varphi_i^{(k)}-\varphi_j^{(k)})\big]. \tag{S12}$$

我们确实可以验证，概率之和为一 $\sum_{b\in\{0,1\}^3}\Pr{}_{|b\rangle}^{(\alpha)}=1$。在下文中，我们将概率写作条件概率 $\Pr{}_{|000\rangle}^{(\alpha)} = p\Big(\,|000\rangle\,\Big|\varphi_i^{(\alpha)},\ \{c_{ij}^{(\alpha-1)}\}\Big)$ 等，因为概率取决于系数以及演化时间与本征能量的乘积。

### 2. 期望振幅因子的贝叶斯方法

我们采用贝叶斯方法计算期望振幅因子，与单设备协议中的做法相同。这里，我们将解析计算限制在期望值上，并通过数值方法确认方差是有限的。为了计算一阶矩，我们需要 $\varphi_i^{(\alpha)}$ 的分布。与前几节类似，我们列出

需要代入贝叶斯公式的项

$$p\Big(\,|000\rangle\,\Big|\{c_{ij}^{(\alpha-1)}\}\Big)=p\Big(\,|011\rangle\,\Big|\{c_{ij}^{(\alpha-1)}\}\Big)=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\sum_i|c_{ii}^{(\alpha-1)}|^2, \tag{S13}$$

$$p\Big(\,|001\rangle\,\Big|\{c_{ij}^{(\alpha-1)}\}\Big)=p\Big(\,|010\rangle\,\Big|\{c_{ij}^{(\alpha-1)}\}\Big)=\frac{1}{8}. \tag{S14}$$

根据贝叶斯规则，我们有

$$p\Big(\varphi_i^{(\alpha)}\Big|\,|001\rangle\,,\{c_{ij}^{(\alpha-1)}\}\Big)=\frac{p\Big(\,|001\rangle\,\Big|\varphi_i^{(\alpha)},\{c_{ij}^{(\alpha-1)}\}\Big)\times p\Big(\varphi_i^{(\alpha)}\Big|\{c_{ij}^{(\alpha-1)}\}\Big)}{p\Big(\,|001\rangle\,\Big|\{c_{ij}^{(\alpha-1)}\}\Big)} \tag{S15}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^N}\sum_{i,j}|c_{ij}^{(\alpha-1)}|^2\big[1-\cos(\varphi_i^{(k)}+\varphi_j^{(k)})\big] \tag{S16}$$

并分析 $|001\rangle$（以及 $|010\rangle$）测量中振幅因子的期望值。我们可以计算$\mu_{(i,j),\ \alpha,\ |001\rangle}=\mu_{(i,j),\ \alpha,\ |010\rangle}$ 为

$$\mu_{(i,j),\alpha,|001\rangle}=\mathbb{E}\left[\log\left[S^{(\alpha)}_{(i,j),|001\rangle}\right]\Big|\,|001\rangle\,,\{c_{ij}^{(\alpha-1)}\}\right] \tag{S17}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^N}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\log\big[1-\cos(\varphi_i^{(k)}+\varphi_j^{(k)})\big]$$

$$\times\left(\sum_{l,p}|c_{lp}^{(\alpha-1)}|^2\big[1-\cos(\varphi_i^{(k)}+\varphi_j^{(k)})\big]\right)d\varphi_1^{(\alpha)}\ldots d\varphi_N^{(\alpha)} \tag{S18}$$

$$=|c_{ij}^{(\alpha-1)}|^2-\log(2), \tag{S19}$$

这表明其抑制行为与单设备情形相同。

现在我们来考虑比特串“000”对应的结果。根据贝叶斯规则，我们得到

$$p\Big(\varphi_i^{(\alpha)}\Big|\,|000\rangle\,,\{c_{ij}^{(\alpha-1)}\}\Big)=\frac{p\Big(\,|000\rangle\,\Big|\varphi_i^{(\alpha)},\{c_{ij}^{(\alpha-1)}\}\Big)\times p\Big(\varphi_i^{(\alpha)}\Big|\{c_{ij}^{(\alpha-1)}\}\Big)}{p\Big(\,|000\rangle\,\Big|\{c_{ij}^{(\alpha-1)}\}\Big)} \tag{S20}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{2}\sum_a|c_{aa}^{(\alpha-1)}|^2}\frac{1}{(2\pi)^N}\sum_{i,j}|c_{ij}^{(\alpha-1)}|^2\big[1+\cos(\varphi_i^{(k)})\big]\big[1+\cos(\varphi_j^{(k)})\big]. \tag{S21}$$

接下来，我们可以计算 $\mu_{(i,j),\alpha,|000\rangle}$：

$$\mu_{(i,j),\alpha,|000\rangle} \tag{S22}$$

$$=\mathbb{E}\left[\log\left[S^{(\alpha)}_{(i,j),|000\rangle}\right]\middle|\,|000\rangle\,,\{c_{ij}^{(\alpha-1)}\}\right] \tag{S23}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{2}\sum_a|c_{aa}^{(\alpha-1)}|^2}\frac{1}{(2\pi)^N}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\log\Big(\big[1+\cos(\varphi_i^{(k)})\big]\big[1+\cos(\varphi_j^{(k)})\big]\Big)$$
$$\times\left(\sum_{l,p}|c_{lp}^{(\alpha-1)}|^2\big[1+\cos(\varphi_l^{(k)})\big]\big[1+\cos(\varphi_p^{(k)})\big]\right)d\varphi_1^{(\alpha)}\ldots d\varphi_N^{(\alpha)} \tag{S24}$$

$$=\frac{(2\pi)^{-N}}{1+\frac{1}{2}\sum_a|c_{aa}^{(\alpha-1)}|^2}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\left\{\log\big[\ldots\big]_i\left(\sum_{l,p}|c_{lp}^{(\alpha-1)}|^2\big[\ldots\big]_{lp}\right)+i\leftrightarrow j\right\}d\varphi_1^{(\alpha)}\ldots d\varphi_N^{(\alpha)} \tag{S25}$$

$$=\frac{(2\pi)^{-N}}{1+\frac{1}{2}\sum_a|c_{aa}^{(\alpha-1)}|^2}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\left\{\log\big[\ldots\big]_i\left(|c_{ii}^{(\alpha-1)}|^2\big[\ldots\big]_{ii}+\sum_{a\neq i}\big(|c_{ia}^{(\alpha-1)}|^2+|c_{ai}^{(\alpha-1)}|^2\big)\big[\ldots\big]_{ia}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sum_{a\neq i}|c_{aa}^{(\alpha-1)}|^2\big[\ldots\big]_{aa}+\sum_{a\neq b\neq i\neq a}|c_{ab}^{(\alpha-1)}|^2\big[\ldots\big]_{ab}\right)+i\leftrightarrow j\right\}d\varphi_1^{(\alpha)}\ldots d\varphi_N^{(\alpha)} \tag{S26}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{2}\sum_a|c_{aa}^{(\alpha-1)}|^2}\left\{\left(|c_{ii}^{(\alpha-1)}|^2\left[\frac{7}{4}-\frac{3}{2}\log(2)\right]+\sum_{a\neq i}\big(|c_{ia}^{(\alpha-1)}|^2+|c_{ai}^{(\alpha-1)}|^2\big)\big[1-\log(2)\big]\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sum_{a\neq i}|c_{aa}^{(\alpha-1)}|^2\left[-\frac{3}{2}\log(2)\right]+\sum_{a\neq b\neq i\neq a}|c_{ab}^{(\alpha-1)}|^2\big[-\log(2)\big]\right)+i\leftrightarrow j\right\} \tag{S27}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{2}\sum_a|c_{aa}^{(\alpha-1)}|^2}\left\{\left(-\log(2)+|c_{ii}^{(\alpha-1)}|^2\left[\frac{7}{4}-\frac{1}{2}\log(2)\right]+\sum_{a\neq i}\big(|c_{ia}^{(\alpha-1)}|^2+|c_{ai}^{(\alpha-1)}|^2\big)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sum_{a\neq i}|c_{aa}^{(\alpha-1)}|^2\left[-\frac{1}{2}\log(2)\right]\right)+i\leftrightarrow j\right\} \tag{S28}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{2}\sum_a|c_{aa}^{(\alpha-1)}|^2}\left\{\left(-\log(2)\left(1+\frac{1}{2}\sum_a|c_{aa}^{(\alpha-1)}|^2\right)+\frac{7}{4}|c_{ii}^{(\alpha-1)}|^2+\sum_{a\neq i}\big(|c_{ia}^{(\alpha-1)}|^2+|c_{ai}^{(\alpha-1)}|^2\big)\right)+i\leftrightarrow j\right\} \tag{S29}$$

$$=-2\log(2)+\frac{1}{1+\frac{1}{2}\sum_a|c_{aa}^{(\alpha-1)}|^2}\left[\frac{7}{4}|c_{ii}^{(\alpha-1)}|^2+\frac{7}{4}|c_{jj}^{(\alpha-1)}|^2+\sum_{a\neq i}\big(|c_{ia}^{(\alpha-1)}|^2+|c_{ai}^{(\alpha-1)}|^2\big)+\sum_{a\neq j}\big(|c_{ja}^{(\alpha-1)}|^2+|c_{aj}^{(\alpha-1)}|^2\big)\right] \tag{S30}$$

其中我们使用了简写 $\big[\ldots\big]_l:=\big[1+\cos(\varphi_l^{(k)})\big]$ 和 $\big[\ldots\big]_{lp}:=\big[1+\cos(\varphi_l^{(k)})\big]\big[1+\cos(\varphi_p^{(k)})\big]$。对于满足 $|c_{dd}|^2\to1$ 的近收敛区域，我们得到

$$\mu_{(d,d),\alpha,|000\rangle}=-2\log(2)+\frac{7}{3} \tag{S31}$$

and

$$\mu_{(d,s),\alpha,|000\rangle}=-2\log(2)+\frac{7}{6}, \tag{S32}$$

分别 。由于三角函数的对称性，我们有 $\mu_{(i,j),\alpha,|000\rangle}=\mu_{(i,j),\alpha,|011\rangle}$ .

### 3. 纠缠共享下的平均相对抑制

我们计算了 $\log\big[S^{(\alpha)}_{d\ (,\ j)\ |b\rangle}\big]$ 的平均振幅因子。由于无需通过方差来计算非期望振幅的平均相对抑制，因此未对方差进行解析求值。数值计算

表明，方差确实是有限的，这是中心极限定理适用的必要条件。最后，在第 C2 节所考虑的范围内，我们将每轮针对“000”（或“011”）测量的平均相对抑制计算为

$$\exp\left(\mu_{(d,s),\alpha,|000\rangle} - \mu_{(d,d),\alpha,|000\rangle}\right) = \exp\left(-7/6\right) \tag{S33}$$

在极限 $m \to \infty$ 下。对于“001”和“010”测量，类比单设备情形，每轮的抑制因子收敛于 $\exp(-1)$。考虑到在近收敛区域内各比特串出现的概率，总体每轮抑制因子为

$$\exp(-7/6)^{6/8}\exp(-1)^{2/8} = \exp(-9/8), \tag{S34}$$

在单设备协议中优于 $\exp(-1)$。

**附录 D：投影到联合乘积基的协议**

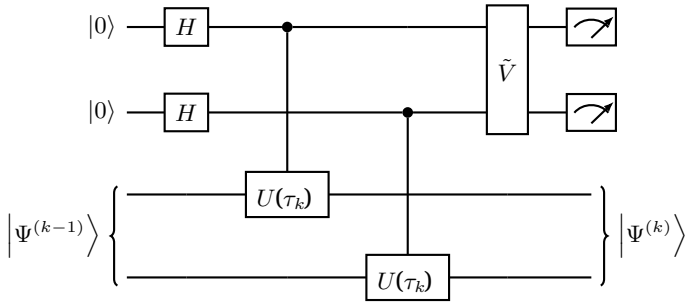


图 S4. 用于将两个设备投影到联合乘积基的变体电路。

在此从而考虑将 Alice 和 Bob 上的两个量子态投影到它们共有的乘积特征基。该态的结构为 $|\Psi\rangle = \sum_i c_{AB,ii} |\phi_i\rangle |\phi_i\rangle$，即在本征基下的施密特分解。这类态在量子信息处理中至关重要，也可能广泛应用于其他量子算法。对于算符 $\tilde{V}$，这里我们将使用

$$\tilde{V} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{S1}$$

并重复 $\tilde{V}$ 计算的关键步骤。我们将新的选择代入 $V$ 方程S2 并得到

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \Big[ \sqrt{2} |00\rangle |\psi\psi\rangle + |01\rangle \big( |\psi\psi'\rangle + |\psi'\psi\rangle \big) + \sqrt{2} |11\rangle |\psi'\psi'\rangle + |10\rangle \big( |\psi'\psi\rangle - |\psi\psi'\rangle \big) \Big] \tag{S2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \Big[ \sqrt{2} |00\rangle \sum_{i,j} c_{ij} |\phi_i\phi_j\rangle + |01\rangle \sum_{i,j} c_{ij} (e^{i\varphi_i} + e^{i\varphi_j}) |\phi_i\phi_j\rangle$$

$$+ \sqrt{2} |11\rangle \sum_{i,j} c_{ij} e^{i(\varphi_i+\varphi_j)} |\phi_i\phi_j\rangle) + |10\rangle \sum_{i,j} c_{ij} (e^{i\varphi_i} - e^{i\varphi_j}) |\phi_i\phi_j\rangle \Big]. \tag{S3}$$

过程映射如下

$$|c_{ij}^{(k-1)}|^2 \mapsto |c_{ij}^{(k)}|^2 \tag{S4}$$

$$= |c_{ij}^{(k-1)}|^2 \times \frac{S^{(k)}_{(i,j),|b\rangle}}{N^{(k)}_{|b\rangle}} \tag{S5}$$

$$= |c_{ij}^{(k-1)}|^2 \times \begin{cases} 1/\big(4N^{(k)}_{|00\rangle}\big) & \text{with} \quad \Pr{}^{(k)}_{|00\rangle}, \\ \big[1 + \cos(\varphi_i^{(k)} - \varphi_j^{(k)})\big]/\big(4N^{(k)}_{|01\rangle}\big) & \text{with} \quad \Pr{}^{(k)}_{|001\rangle}, \\ 1/\big(4N^{(k)}_{|11\rangle}\big) & \text{with} \quad \Pr{}^{(k)}_{|11\rangle}, \\ \big[1 - \cos(\varphi_i^{(k)} - \varphi_j^{(k)})\big]/\big(4N^{(k)}_{|10\rangle}\big) & \text{with} \quad \Pr{}^{(k)}_{|10\rangle}. \end{cases} \tag{S6}$$

相关概率为

$$\Pr{}^{(\omega)}_{|00\rangle} = \Pr{}^{(\alpha)}_{|11\rangle} = \frac{1}{4}, \tag{S7}$$

$$\Pr{}^{(\alpha)}_{|01\rangle} = \frac{1}{4} \sum_{i,j} |c_{ij}^{(\alpha-1)}|^2 \big[1 + \cos(\varphi_i^{(k)} - \varphi_j^{(k)})\big], \tag{S8}$$

$$\Pr{}^{(\alpha)}_{|10\rangle} = \frac{1}{4} \sum_{i,j} |c_{ij}^{(\alpha-1)}|^2 \big[1 - \cos(\varphi_i^{(k)} - \varphi_j^{(k)})\big], \tag{S9}$$

我们记作

$$p\Big(|00\rangle\,\Big|\,\{c_{ij}^{(\alpha-1)}\}\Big) = p\Big(|11\rangle\,\Big|\,\{c_{ij}^{(\alpha-1)}\}\Big) = \frac{1}{4}, \tag{S10}$$

$$p\Big(|01\rangle\,\Big|\,\{c_{ij}^{(\alpha-1)}\}\Big) = \frac{1}{2}\sum_{i}|c_{ii}^{(\alpha-1)}|^2 + \frac{1}{4}\sum_{i\neq j}|c_{ij}^{(\alpha-1)}|^2, \tag{S11}$$

$$p\Big(|10\rangle\,\Big|\,\{c_{ij}^{(\alpha-1)}\}\Big) = \frac{1}{4}\sum_{i\neq j}|c_{ij}^{(\alpha-1)}|^2. \tag{S12}$$

根据此前分析的协议，我们可以推断这一变体的行为。测量比特串“00”和“11”时，量子态保持不变。对于“01”，其行为与仅包含两个辅助量子比特的协议变体相同，即每次观测到“01”比特串时，相干项 $c_{ij}$ 其中 $i \neq j$ 都会被抑制。因此，该协议将联合量子寄存器投影为施密特分解形式：$|\Psi\rangle = \sum_i c_{AB,ii}\,|\phi_i\rangle\otimes|\phi_i\rangle$。然而，对于比特串“10”，由于这一测量结果会将系统投影到反对称空间中，协议需要重新初始化。因投影失败而无法投影到对称空间所产生的算法开销，与协议变体 1 相同。

## 附录 E：向多设备的推广

我们将讨论如何把量子广播协议扩展到更多设备。

### 1. 投影到对称子空间

图中展示了一个用于三个量子设备的电路：每个设备都通过与一个辅助量子比特交互，共享有限数量的纠缠。S5。这是双设备协议的一种自然推广；该协议变体通过受控 SWAP 操作（以及 $V = H \otimes H$）投影到对称子空间。此类推广通过将辅助量子比特投影到全对称子空间来实现。此投影可通过（受控）量子 Schur 变换实现，而该变换所需的门数相对于协议中的量子设备数量呈多项式增长 [22]。

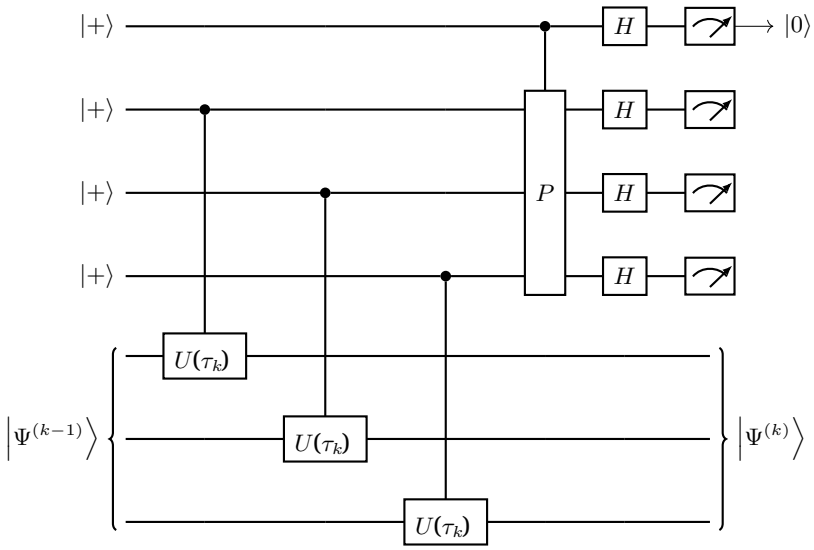


图 S5. 用于量子广播并生成多个近完美目标态的电路。 $P$ 是对辅助量子比特的全对称子空间的投影，并与量子舒尔变换有关。

我们将分析重点放在比特串测量“00. . . 0”和“11. . . 1”上，因为这两种测量便于进行更清晰的解析处理。对于 $p$ 量子设备，我们在量子广播方案的近收敛区域内解析计算了其他比特串对应的抑制因子；结果表明，“00. . . 0”和“11. . . 1”这两种比特串确实带来最大的抑制，我们推测这可能是最优的。因此，我们将重点放在“00. . . 0”和“11. . . 1”这两种比特串上。

这两个测量结果对应的过程映射为

$$|c_{ij\cdots z}^{(k-1)}|^2 \mapsto |c_{ij\cdots z}^{(k)}|^2 \times \frac{S^{(k)}_{(i,j,\ldots,z),|b\rangle}}{N^{(k)}_{|b\rangle}} \tag{S1}$$

$$\tag{S2}$$

$$= |c_{ij\cdots z}^{(k-1)}|^2 \times \begin{cases} \cos(\varphi_i^{(k)}/2)^2 \cdots \cos(\varphi_z^{(k)}/2)^2 / \left(N^{(k)}_{|0\ldots0\rangle}\right) & \text{with} \quad \Pr{}^{(k)}_{|0\ldots0\rangle}, \\ \sin(\varphi_i^{(k)}/2)^2 \cdots \sin(\varphi_z^{(k)}/2)^2 / \left(N^{(k)}_{|1\ldots1\rangle}\right) & \text{with} \quad \Pr{}^{(k)}_{|1\ldots1\rangle}. \end{cases} \tag{S3}$$

概率为

$$\Pr{}^{(\alpha)}_{|0\ldots0\rangle} = \sum_{i,j,\ldots,z} |c_{ij\cdots z}^{(\alpha-1)}|^2 \cos(\varphi_i^{(\alpha)}/2)^2 \cos(\varphi_j^{(\alpha)}/2)^2 \cdots \cos(\varphi_z^{(\alpha)}/2)^2 \tag{S4}$$

$$\Pr{}^{(\alpha)}_{|1\ldots1\rangle} = \sum_{i,j,\ldots,z} |c_{ij\cdots z}^{(\alpha-1)}|^2 \sin(\varphi_i^{(\alpha)}/2)^2 \sin(\varphi_j^{(\alpha)}/2)^2 \cdots \sin(\varphi_z^{(\alpha)}/2)^2. \tag{S5}$$

现在，我们回顾近收敛区域的假设：我们考虑这样的情况：除 Bob 外的所有其他量子设备上均有 $|c_d|^2 = 1$（即仅在主导本征态中存在布居）。在 Bob 上，我们希望通过量子广播，从初始近似制备主导态；此时主导态中的布居为（振幅 $|c_d|^2$），次主导态中的布居为（振幅 $|c_s|^2$），而所有其他本征态中的布居均为零： $|c_i|^2 = 0$，其中 $i \neq d$ 和 $i \neq s$。此外，在给定一组 $\{c_{ij\cdots z}^{(\alpha-1)}\}$ 的条件下，我们将观测到“00...0”比特串的概率（这与观测到“11...1”比特串的概率相同）近似为

$$p\Big(|0\ldots0\rangle\,\Big|\,\{c_{ij\cdots z}^{(\alpha-1)}\}\Big) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\sum_{i,j,\ldots,z}|c_{ij\cdots z}^{(\alpha-1)}|^2\cos(\varphi_i^{(\alpha)}/2)^2 d\varphi_1^{(\alpha)}\ldots d\varphi_N^{(\alpha)} \tag{S6}$$

$$\to \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|c_{dd\cdots d}^{(\alpha-1)}|^2\underbrace{\cos(\varphi_d^{(k)}/2)^2\cos(\varphi_d^{(k)}/2)^2\cdots\cos(\varphi_d^{(k)}/2)^2}_{p\text{ terms}}d\varphi_d^{(\alpha)} \tag{S7}$$

$$= \frac{\Gamma(p+1/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(p+1)} =: F, \tag{S8}$$

其中 $\Gamma(z)$ 为伽马函数（$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$）。由于三角函数的对称性，这两个比特串会得到相同的概率密度函数。在设备数量很多的极限下，观测到全为“00...0”或“11...1”的总概率 $p$ 服从幂律

$$\lim_{p\to\infty}\frac{2\,\Gamma(p+1/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(p+1)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{p}}. \tag{S9}$$

在近收敛区域的假设下，我们计算 $\log\left[S_i^{(\alpha)}{}_{(,j,\ldots,z)\,|00\ldots0\rangle}\right]$ 的一阶矩，得

$$\mu_{(d,d\ldots,d),\alpha,|00\ldots0\rangle} = \mathbb{E}\left[\log\left[S^{(\alpha)}_{(d,d\ldots,d),|00\ldots0\rangle}\right]\Big|\,|00\ldots0\rangle, \{c_{ij\cdots z}^{(\alpha-1)}\}\right] \tag{S10}$$

$$= \frac{1}{2\pi F}\int_0^{2\pi}\log\Big[\underbrace{\cos(\varphi_d^{(k)}/2)^2\cos(\varphi_d^{(k)}/2)^2\cdots\cos(\varphi_d^{(k)}/2)^2}_{p\text{ terms}}\Big]d\varphi_d^{(\alpha)} \tag{S11}$$

$$= \frac{1}{2\pi F}\int_0^{2\pi}p\log\Big[\cos(\varphi_d^{(k)}/2)^2\Big]\cos(\varphi_d^{(k)}/2)^{2p}d\varphi_d^{(\alpha)} \tag{S12}$$

$$= p\,[H(p-1/2) - H(p)], \tag{S13}$$

其中调和数 $H(z) := \int_0^1 \frac{1-t^z}{1-t}\,dt$。类似地，我们计算

$$\mu_{(s,d\ldots,d),\alpha,|00\ldots0\rangle} = \mathbb{E}\left[\log\left[S^{(\alpha)}_{(s,d,\ldots,d),|00\ldots0\rangle}\right]\Big|\,|00\ldots0\rangle, \{c_{ij\cdots z}^{(\alpha-1)}\}\right] \tag{S14}$$

$$= \frac{1}{2\pi F}\int_0^{2\pi}\log\Big[\underbrace{\cos(\varphi_s^{(k)}/2)^2\cos(\varphi_d^{(k)}/2)^2\cdots\cos(\varphi_d^{(k)}/2)^2}_{p\text{ terms}}\Big]d\varphi_d^{(\alpha)}d\varphi_s^{(\alpha)} \tag{S15}$$

$$= \frac{1}{2\pi F}\int_0^{2\pi}(p-1)\log\Big[\cos(\varphi_d^{(k)}/2)^2\Big]\cos(\varphi_d^{(k)}/2)^{2p}d\varphi_d^{(\alpha)} \tag{S16}$$

$$+ \frac{1}{2\pi F}\int_0^{2\pi}\log\Big[\cos(\varphi_s^{(k)}/2)^2\Big]\cos(\varphi_s^{(k)}/2)^{2p}d\varphi_d^{(\alpha)} \tag{S17}$$

$$= (p-1)[H(p-1/2) - H(p) - \log(4)]. \tag{S18}$$

综合以上结果，在 $p$ 趋于无穷大的极限下，平均抑制为

$$\lim_{p\to\infty}\exp[\mu_{(s,d\ldots,d),\alpha,|00\ldots0\rangle} - \mu_{(d,d\ldots,d),\alpha,|00\ldots0\rangle}] = \lim_{p\to\infty}\exp[-H(p-1/2) + H(p) - \log(4)] \tag{S19}$$

$$= \exp[-\log(4)] = \frac{1}{4}, \tag{S20}$$

对于“00...0”或“11...1”比特串，其平均相对抑制与针对“01”比特串的双拷贝协议（第 B节）相同。注意，对于 $p = 2$，我们可以得到 $\exp(-7/6)$ 中双拷贝协议的结果。

该结果仅在近收敛区域的极限下成立。事实上，针对两个设备的协议进行的数值分析表明，显式投影到对称子空间、随后在 $\sigma^x$基底上测量辅助量子比特的协议（第 C节），其表现可能优于第一个协议（第 B节），尽管在近收敛区域，前者的解析抑制因子不如后者。因此，本文提出的子空间方案或许具有实际应用价值，尽管解析抑制值并未表明它在渐近意义上有所改进。

### 2. 关于使用受控错排算符的一种变体的评论

我们简要讨论一种将双设备协议扩展到多个设备的替代方法。除了投影到全对称子空间（或受控投影）之外，将受控错排操作施加于辅助量子比特，也是一种将该协议推广到多设备情形的合理设想 [31]。然而，我们的分析表明，这种变体并未实现预期的抑制效果。

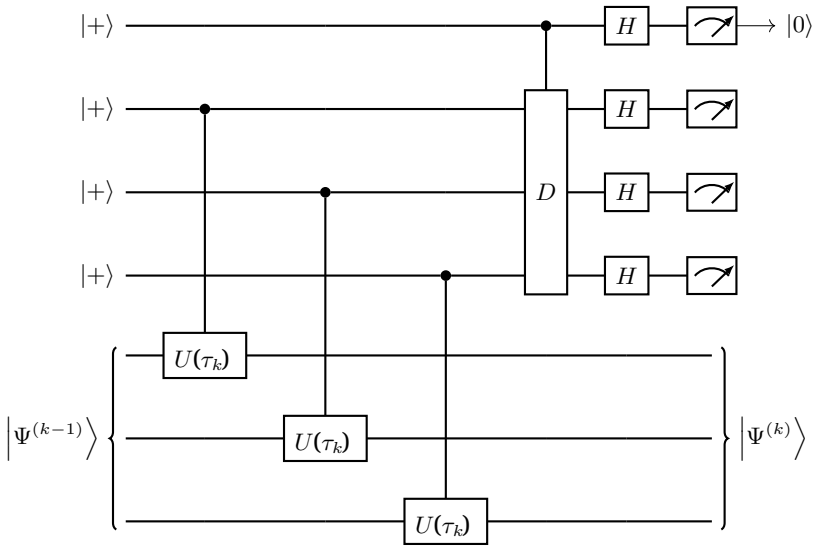


图 S6. 使用多个副本和错排算符制备主导本征态的电路方案。数值分析并未表明，与受控错排操作相比，投影到全对称空间能为量子广播带来更好的结果。

### 附录 F：存在对称性时的考量

在正文中，我们对 ZZXZ 模型 $H=\sum_{i=1}(J\sigma_i^z\sigma_{i+1}^z+\sigma_i^x+\sigma_i^z)$ 的广播协议进行了数值探究，并观察到其收敛至基态。这里，我们简要讨论当哈密顿量的谱具有对称性时，收敛可能会受到阻碍，并停滞在某一水平，而无法达到任意精度。不过，这个问题很容易解决。考虑哈密顿量 $H=\sum_{i=1}\sigma_i^z\sigma_{i+1}^z$。相应的基态能量记为 $\lambda_0$，最高激发态能量满足 $\lambda_{N-1}=-\lambda_0$。我们看到，两个随机变量 $\varphi_0=\tau\lambda_0$ 和 $\varphi_{N-1}=\tau\lambda_{N-1}$ 完全相关，而不是