arXiv:2302.03019v2 [cs.RO] 7 Feb 2023

接触几何：通过自旋模型对偶性进行多足机器人接触规划

Baxi Chong*[1]、Di Luo*[2 3 4]、Tianyu Wang[1 5],Gabriel B. Margolis[6],Juntao He[1 5], Pulkit Agrawal[2 6], Marin Solja˘ci´c[7],和 Daniel I. Goldman[1 5]l 佐治亚理工学院物理系，美国佐治亚州亚特兰大 30332[2]美国国家科学基金会人工智能与基本相互作用人工智能研究所[3]麻省理工学院理论物理中心，美国马萨诸塞州剑桥 02139[4]哈佛大学物理系，美国马萨诸塞州剑桥 02138[5]佐治亚理工学院机器人与智能机器研究所，美国佐治亚州亚特兰大[6] 麻省理工学院 Improbable AI 实验室[7] 麻省理工学院物理系，美国马萨诸塞州剑桥 02139

摘要——**接触规划对于运动系统至关重要。具体而言，恰当的接触规划能够实现多样化的行为（例如，无肢运动体的侧向蜿蜒运动），并促进依赖速度的步态转换（例如，四足运动体的行走—小跑—疾驰）。接触规划面临的挑战不仅包括确定运动体与环境之间建立和解除接触的序列，还包括确定内部形状变化的序列（例如身体弯曲和肢体肩关节振荡）。当前大多数先进的接触规划算法都聚焦于传统机器人（例如双足机器人和四足机器人）以及传统任务（例如向前运动），而针对多足机器人的通用接触规划研究仍然不足。本文表明，利用几何力学框架，在给定内部形状变化序列的情况下，可以获得全局最优接触序列。因此，我们将接触规划问题简化为图优化问题，以确定内部形状变化。借助运动中的时空对称性，我们将图优化问题映射为自旋模型的特殊情形，从而能够在多项式时间内获得全局最优解。我们将该方法用于开发六足机器人的新型向前运动和侧向蜿蜒行为，以及一只 12 足蜈蚣的新型运动行为。我们通过数值模型和机器人物理模型验证了预测结果，并获得了新颖且**有效**的运动行为**。

I. 引言

接触规划对于生物和机器人运动体都至关重要。在生物系统中，形态各异的动物能够协调身体节段，与基底建立和解除接触。如果与身体内部运动（例如肢体回缩/前伸）恰当同步，这种按顺序发生的基底接触便能产生有效的自推进，从而实现稳定且有目的的运动 [18, 19, 23, 15, 22, 32, 2]。然而，要在机器人对应体中复现生物运动颇具挑战。例如，接触规划不协调会导致无腿系统 [7, 32] 和有腿系统 [35]出现不稳定行为。

在实践中，足式运动的接触规划已得到广泛研究。Full 和

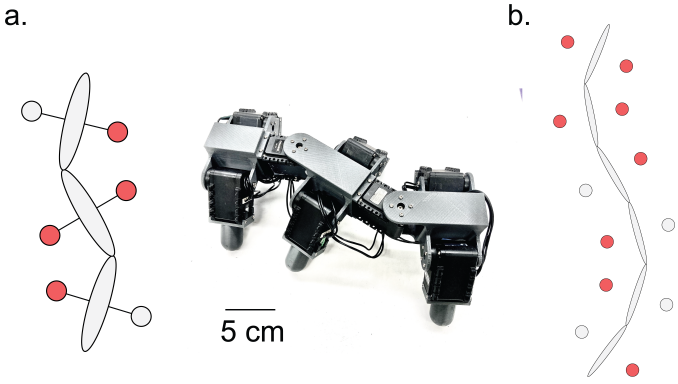

图 1. **多足机器人：几何模型与机器人物理模型**(a)（左）几何六足模型和（右）机器人物理六足模型。(b) 十二足蜈蚣的几何模型。

Koditschek [15]简化了控制与接触规划。具体而言，在模板[1]，中，通过采用简单模型忽略生物体和地形的复杂度，以揭示动力学的一般模式。例如，随着速度增加，四足运动的模板包含从行走到小跑再到疾驰的步态转换 [13, 18, 19]：通过为行走、小跑和疾驰规定落足模式，该模板简化了四足机器人的高层步态设计。结合针对形态学、生物力学及环境细节进行适当的低层适应（按照 [15]的说法，称为“锚点”），这种方法使机器人的性能得以接近生命系统 [4, 20, 39, 2]。

近期一些双足机器人和四足机器人平台的研究已展示出稳健且动态的运动能力。近期关于足式机器人的研究主要聚焦于锚点设计 [25, 30, 24, 21, 14],，部分原因是双足机器人/四足模板 [42,15, 18, 19]方面已有详尽的文献记录。近期的锚点设计依赖于实时闭环反馈控制技术，例如模型预测控制 [24]或强化学习 [21]。尽管这些方法有效，

[1] 共同贡献。联系邮箱：bchong9@gatech.edu、diluo@mit.edu

[1]“模板”是一种“包含能够表现出感兴趣行为的最少数量变量和参数”的行为 [15]。

但它们需要大量的机载计算资源，以及高质量的本体感知传感器或视觉传感器。

然而，在某些应用中，Sensors 可能不可靠，且计算资源有限。例如，执行搜救任务的机器人必须应对有限的视觉能力和潜在的硬件损坏 [41]。同样，超低成本和/或超小型机器人需要采用与其有限的感知和计算能力相适配的控制方法。为了降低机器人制造成本并拓展机器人的应用范围，研究人员探索了对 Sensors 和控制器依赖较少的机器人运动框架 [11]。具体而言，已有研究开发了六足机器人 [38], , 其额外的腿能够帮助避免灾难性故障（例如稳定性丧失）。然而，增加腿的数量需要进行运动模式协调，因此会为接触规划引入更高的维度。据我们所知，针对六足机器人或一般多足运动体的步态设计（接触规划）研究仍然有限。

本文为一般多足运动体建立了一个几何力学模型。具体而言，在第二节中，我们建立了一个经过详细阐述的机器人与基底相互作用的物理模型，并将多足运动体的接触规划问题描述为一个图优化问题。此外，利用运动中的时空对称性，我们将该图优化问题映射为自旋模型的一个特殊情形 [33], , 从而能够在多项式时间内获得全局最优解。我们应用这一框架研究六足机器人和蜈蚣式运动。我们研究了六足机器人运动中的前进和侧向蜿蜒行为，并为六足机器人确定了一组有效的侧向蜿蜒步态。我们还研究了蜈蚣（12 条腿的机器人）运动，并获得了有效步态。我们使用机器人物理模型检验了六足机器人步态预测，结果与预测吻合良好。

II. 方法

A. 几何力学

1) 运动学重构方程：在惯性效应可忽略不计（相较于摩擦力）的运动学系统中，运动方程 [31] 可近似为

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\dot{\boldsymbol{r}}, \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{\xi} = [\xi_x, \xi_y, \xi_\theta]^T$ 表示前进、侧向和旋转方向上的机体速度；$\boldsymbol{r}$ 表示内部形状变量（例如关节角，见图 2 中的 $\boldsymbol{r} = [\alpha_1, \alpha_2]$ ）；$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$是局部连接矩阵，用于编码环境约束和动量守恒。局部连接矩阵$\boldsymbol{A}$ 可通过阻力理论（RFT）对地面反作用力（GRF）进行建模，从而数值求得 [26, 40, 43]。具体而言，运动体所受的净地面反作用力是其所有处于支撑相的节段所受地面反作用力之和[2]。RFT 将运动体处于支撑相的节段所受阻力分解为

[2]如果某一节段与地面接触，我们就认为它处于支撑相。

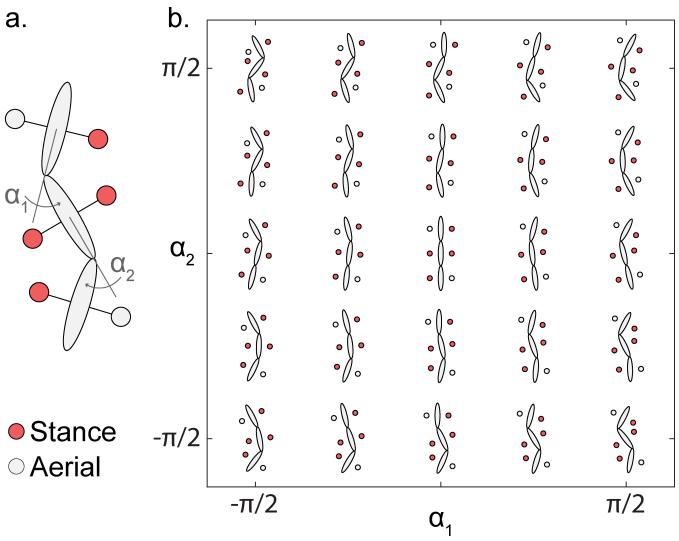

图 2. **六足机器人的形状空间** (a) 形状变量和接触模式。图中标出了形状变量（躯体弯曲关节）。处于支撑相和腾空相的肢体分别以红色标记和空心圆标记。(b) 几何六足机器人模型的形状空间。

两个分量：$\boldsymbol{F}_{\parallel}$ 和$\boldsymbol{F}_{\perp}$，分别是沿平行于和垂直于身体节段方向的反作用力。根据地面反作用力的几何关系和物理学原理，可以根据机体速度 $\boldsymbol{\xi}$、约化躯体形状$\boldsymbol{r}$以及约化形状速度 $\dot{\boldsymbol{r}}$ [37, 34]计算每个节段所受的反作用力。假设运动为准静态运动，我们认为任意时刻施加于系统的总净力为零：

$$\boldsymbol{F} = \sum_{i\in I}\left[\boldsymbol{F}^i_{\parallel}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}) + \boldsymbol{F}^i_{\perp}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}})\right] = 0, \tag{2}$$

其中，I 是所有处于支撑相的节段的集合。在给定的机体形状$\boldsymbol{r}$下，式 (2) 将形状速度 $\dot{\boldsymbol{r}}$与机体速度 $\boldsymbol{\xi}$联系起来。因此，根据隐函数定理和线性化过程，我们可以数值求得局部连接矩阵$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$。在我们的实现中，我们使用 MATLAB 函数*fsolve*求解式 (2)。显然，局部连接矩阵 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$取决于接触模式$I$。

接下来，我们考虑步态[3] 与其产生的位移之间的关系。沿步态路径ϕ 的位移可通过对以下常微分方程（[17]）积分得到：

$$g(T) = \int_{\phi} L_{g(\boldsymbol{r})}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \tag{3}$$

其中$g(\boldsymbol{r}) = [x(\boldsymbol{r}), y(\boldsymbol{r}), \alpha(\boldsymbol{r})]$ 表示在位置$r \in \phi$处，从世界坐标系中观察到的机体坐标系的位置和旋转；T 为一个步态周期的时长，而$g(T) = [\Delta x, \Delta y, \Delta\alpha]$ 表示一个步态周期内机体坐标系相对于世界坐标系的平移和旋转。注意，L_g是相对于 $\alpha(\boldsymbol{r})$ [34]的旋转矩阵。

方程（3）的积分可近似为：

[3]“步态”是形状空间中的一条闭环路径。

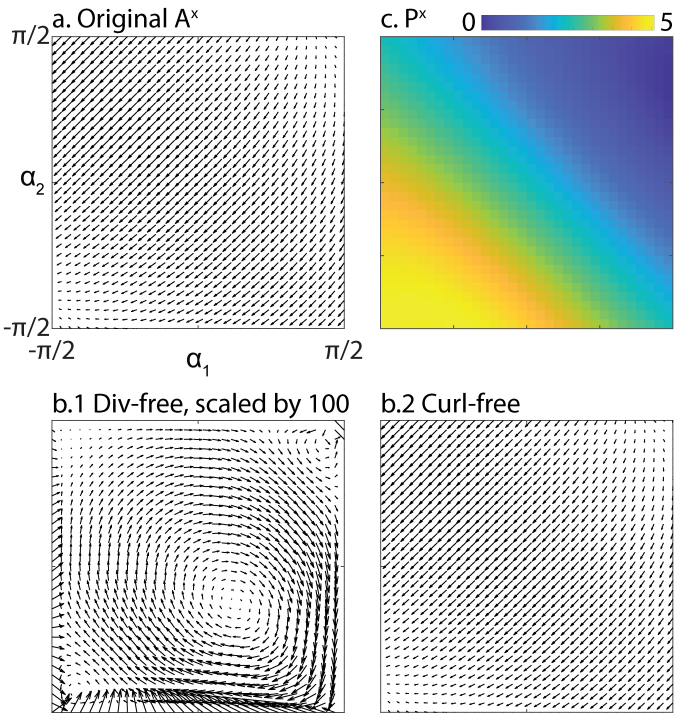

图 3. **连接向量场与霍奇-亥姆霍兹分解** (a) 在图 2 所示接触模式下计算得到的连接向量场（A^x）。(b.1) 原始向量场的无散分量。为便于展示，向量场的大小放大了 100 倍。(b.2) 原始向量场的无旋分量。(c) 根据原始向量场的无旋分量计算得到的势函数。所有面板中的坐标轴均相同

$$g(T) \approx \int_{\phi} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\phi} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^x(\boldsymbol{r}) \\ \boldsymbol{A}^y(\boldsymbol{r}) \\ \boldsymbol{A}^\theta(\boldsymbol{r}) \end{bmatrix} d\boldsymbol{r}, \tag{4}$$

其中，$\boldsymbol{A}^x(\boldsymbol{r})$、$\boldsymbol{A}^y(\boldsymbol{r})$、$\boldsymbol{A}^\theta(\boldsymbol{r})$分别是局部连接的三行，依次表示前向、侧向和旋转向量场。通过恰当选择机体坐标系 [17, 28]，可以优化公式 4 中近似的准确性。向量场的一个示例（$\boldsymbol{A}^x$）如图 3a 所示。根据上述推导，一个周期内的净位移可以近似为沿步态路径对局部连接向量场进行线积分。

B. 接触序列优化

在前一节中，我们只考虑具有固定接触模式的运动问题，即I 与形状变量无关。现在，我们考虑接触模式发生变化的运动问题。首先，我们将探讨已知形状变化序列的接触规划问题。具体而言，设$Q = \{r_i,\ i \in \{1, 2, \ldots M\} \mid r_i \in \mathbb{R}^2\}$为一组按序排列的形状变量。我们定义，接触切换只能发生在Q中的某个指定形状变量处。考虑一条依次连接Q中所有形状的步态路径 ϕ，我们的目标是确定最优的

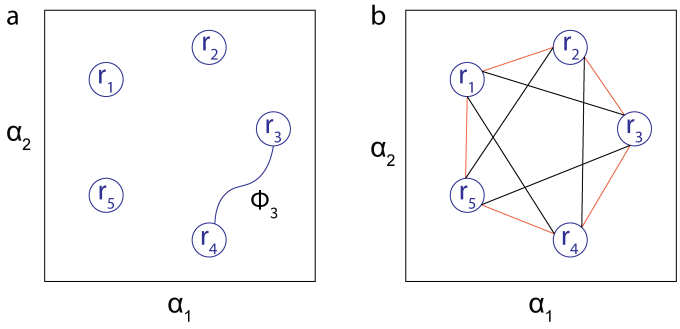

图 4. **形状空间中的步态路径** (a) 我们用一组形状变量 $\{r_i\}$对形状空间进行采样。 ϕ_3 是连接r_3 与r_4的示例路径。 ϕ_3 是连接所有采样形状变量的闭环步态路径的一部分。(b) 黑色标示的作弊步态路径示例。我们用红色标示唯一的非作弊步态路径。

接触序列和步态路径 ϕ，使向前（或横向）位移最大化。

我们首先将闭环步态路径 ϕ 分解为分段曲线 ϕ_i，连接r_i 与r_{i+1} （图 4a）。随后，从 ϕ 出发的前向位移为：

$$\Delta x = \sum_{i=1}^{M} \int_{\phi_i} \boldsymbol{A}^x_{I(i)}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \tag{5}$$

其中，$I(i)$ 表示分段曲线ϕ_i上的接触模式，$\boldsymbol{A}^x_{I(i)}$ 表示在接触模式$I(i)$处求得的前向向量场。注意，图 5 中的优化可以解耦并分别进行优化：

$$\max_{\phi,\ I(\phi)} \Delta x = \max_{\phi,\ I(\phi)} \sum_{i=1}^{M} \int_{\phi_i} \boldsymbol{A}^x_{I(i)}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{6}$$

现在我们考虑解耦后的优化问题。利用霍奇-亥姆霍兹定理 [16]，我们可以将向量场分解为无旋分量和无散分量（图 3b）。值得注意的是，在大多数实际的硬地面运动问题中，无散分量的幅值与无旋分量相比可以忽略不计 [6, 10, 1]，因此我们可以专注于向量场的无旋分量。对于无旋向量场，线积分与路径无关。令$P^x_{I(i)}$ 表示$\boldsymbol{A}^x_{I(i)}$ 中无旋分量的势函数（图 3c），则我们可以进一步简化式 6：

$$\max_{\phi,\ I(\phi)} \Delta x = \max_{\phi,\ I(\phi)} \sum_{i=1}^{M} \left(P^x_{I(i)}(r_i) - P^x_{I(i)}(r_{i+1})\right). \tag{7}$$

因此，借助这种线性且解耦的形式，我们将接触规划问题简化为公式 7 中的线性优化问题。

C. 形状变化序列优化

在上一节中，我们假设形状变化序列预先固定，并得到一个线性优化问题的形式

用于接触规划问题。随后，我们探讨形状变化序列优化。首先，我们在形状空间中采样一些形状。设 $Q_{all} = \{r_i、\ i \in \{1,\ 2,\ .....M\} \mid r_i \in \mathbb{R}^2\}$ 为采样形状变量的集合。设 I_{all}（包含 N 个元素）为多足运动体的接触状态集合。对 $\Delta x(C)$进行的位移优化可以近似表示为：

$$\max_{C,\ I(C)} \sum_{i \in C} \left(P^x_{I(i)}(r_{c(i)}) - P^x_{I(i)}(r_{c(i+1)}) \right), \tag{8}$$

其中$C \subset M$ 是有序的形状变化，而 $\Delta x(C)$ 是由此产生的位移。请注意，C 不仅指定了形状，还指定了形状变化的顺序。换言之，即便元素相同，C中仍可能存在不同的序列组合。然而，许多序列组合都可以视为“作弊”。例如，考虑图 4b 中的一组形状，其中红色和黑色分别表示两种序列组合。在我们的框架中，我们力求使一个 周期内的位移最大化。因此，图 4b 中的黑色路径相较于红色路径具有不公平的优势，因为黑色路径在一个周期内绕原点两圈。为避免“作弊”并简化分析，我们规定形状只能沿一个方向变化（例如顺时针方向）。这样，给定C中的元素，就只有一条连接所有元素的有效路径。

实际上，改变接触模式总是需要耗费有限的时间和能量。为计入这类成本，我们在代价函数中引入了一些接触切换惩罚项。

$$\max_{C,\ I(C)} \left(-\lambda S(C) + \sum_{i \in C} \left(P^x_{I(i)}(r_{c(i)}) - P^x_{I(i)}(r_{c(i+1)}) \right) \right), \tag{9}$$

其中，C 是图上的一个环，$S(C)$表示沿路径C发生的接触切换次数，而 λ 是某个惩罚系数。请注意，鉴于该惩罚系数具有明确的物理意义，我们认为未来工作中可以通过实验测量 λ 。考虑到式9的离散性质，它可以表述为一个图优化问题。

我们还可以将上述优化问题进一步表述为图优化问题。定义V为节点v_{ij}的集合，其中索引j表示形状，索引i表示接触模式。在每个时间步，我们可以改变接触模式或形状。因此，若i = k或j = l，则存在一条边连接两个顶点v_{ij}和v_{kl} 。令d为边上的权重集合。对于连接v_{ij} 和v_{il}的边，其权重为$d_{ijil} = P^{I(i)}(r_j) - P^{I(i)}(r_j)$。请注意，权重$d_{ijil}$可以为负。对于连接$v_{ij}$和$v_{kj}$的边，其权重$d_{ijkj}$为0，也就是说，在形状固定时改变接触模式不会导致位移。采用上述记号，式9中的优化问题可以重新表述为寻找一个环C，使沿C的权重总和与 $-\lambda S(C)$相加后达到最大。

由于连接向量场具有路径无关性，我们确定了d_{ijil}的以下性质：(1) 反对称性：$d_{ijil} = -d_{ilij}$；以及 (2) 可加性：$d_{ijil} + d_{ilik} = d_{ijik}$。

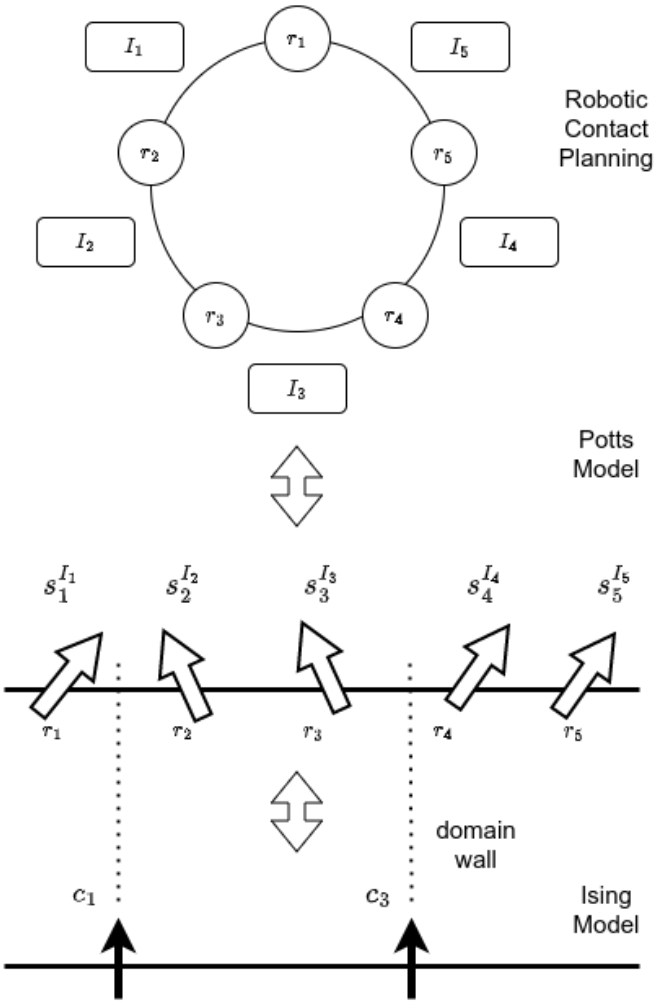

图 5.（上）机器人接触模式与波茨模型之间的映射。（下）波茨模型与伊辛模型之间的对偶性。

III. 自旋模型的映射与求解

一般而言，耦合接触规划和形状变化优化问题需要在规模为N^M 的空间中进行搜索，其中N 是接触模式的数量，M 是形状变量的数量。随着腿和关节数量的增加，暴力搜索的扩展性会变得很差。相反，为了高效地获得解，我们建立了步态优化问题与物理学中的两种自旋模型——波茨模型 [36] 和伊辛模型 [33]——之间的联系。在此框架中，最优形状序列等价于这些自旋模型的基态。本节将介绍如何映射到波茨模型和伊辛模型，以及如何利用问题的特殊结构实现高效的步态优化。

我们首先将形状序列问题映射到一个 Z_N-自旋模型。Z_N-自旋模型考虑由M个自旋组成的阵列，这些自旋位于M 个格点上，其中每个自旋具有N 种内部状态。每个自旋可以与其他自旋相互作用，也可以

受到局域磁场的作用。该模型在物理学中广为人知，可用于描述磁性，其中每个自旋都可以被视为一块小磁铁。具体来说，当$N = 2$时，它就简化为著名的伊辛模型 [33]。众所周知，伊辛模型与图优化问题有着深刻的联系，并为许多 NP 完全和 NP 难问题提供等价表述 [29]。

A. 波茨模型

如果将形状变量 r_j 视为格点索引 j，并将接触模式 I_j 视为自旋内部状态，那么变量对 (r j, I j) 可映射为格点 j 上的自旋变量 s_j^i（或等价地，图 5 中的 s^Ij）。通过定义 $s_j^i = e^{2\pi i/N}$和 $d_i'j(j+1) = d_ij(j+1)e^{-2\pi i/N}$，位移 $P^x_{I(i)}(r_{c(}j)) - P^x_{I(i)}(r_{c(}j+1)$ 可与自旋变量的局域磁场能 $d_i'j(j+1)s_j^i$相关联。此处，$d_i'j1$ 被解释为 Z_N-自旋模型的局域磁场。由于形状序列优化问题定义在一个环上，因此可以将其映射为具有周期性边界条件的 Z_N-自旋模型，如下所示：

$$H = -\sum_j d'_{ij(j+1)} s^i_j \tag{10}$$

使式 8 取最大值的最优形状序列，等价于使能量最小的哈密顿量基态。在这种情况下，当每个独立自旋 s_j^i都取最大的 $d_{ij(j+1)}$时，便达到基态。这也称为贪心解。转换回形状序列的表述，我们得到如下贪心算法。

贪心算法。式 8 中最优位移的解为

$$\Delta x(C) = \sum_{i\in C} \max_{I(i)} \left(P^x_{I(i)}(r_{c(i)}) - P^x_{I(i)}(r_{c(i+1)}) \right), \tag{11}$$

对于每个 $r_{c(i)}$，我们选择使 $P^x_{I(i)}(r_{c(i)}) - P^x_{I(i)}(r_{c(i+1)}$ 最大的 $I(i)$。□

如果进一步考虑式 9 中改变接触模式的代价，惩罚项为 λ，那么这等价于引入耦合为 λ 的最近邻自旋相互作用，由此得到一个具有非均匀磁场的波茨模型 [36]

$$H_s = -\sum_j d'_{ij(j+1)} s^i_j - \lambda \delta_{s^i_j, s^i_{j+1}} \tag{12}$$

其中 $\delta_{s^i_j,\ s^i_{j+1}} = 1$ 当 $s^i_j = s^i_{j+1}$ 时取值为 1，否则为 0。

形状序列与波茨模型之间的映射也在图 5 上半部分进行了描述。对于该模型，搜索复杂度为N^M。基态预计会随 λ不同而呈现不同现象。当 λ较小时，系统处于无序状态，每个自旋都遵循局域场，最优形状序列接近贪心解。当 λ较大时，自旋趋于对齐，系统呈铁磁性。最优形状序列接近均匀步态模式，或仅包含少量跳变的步态模式。

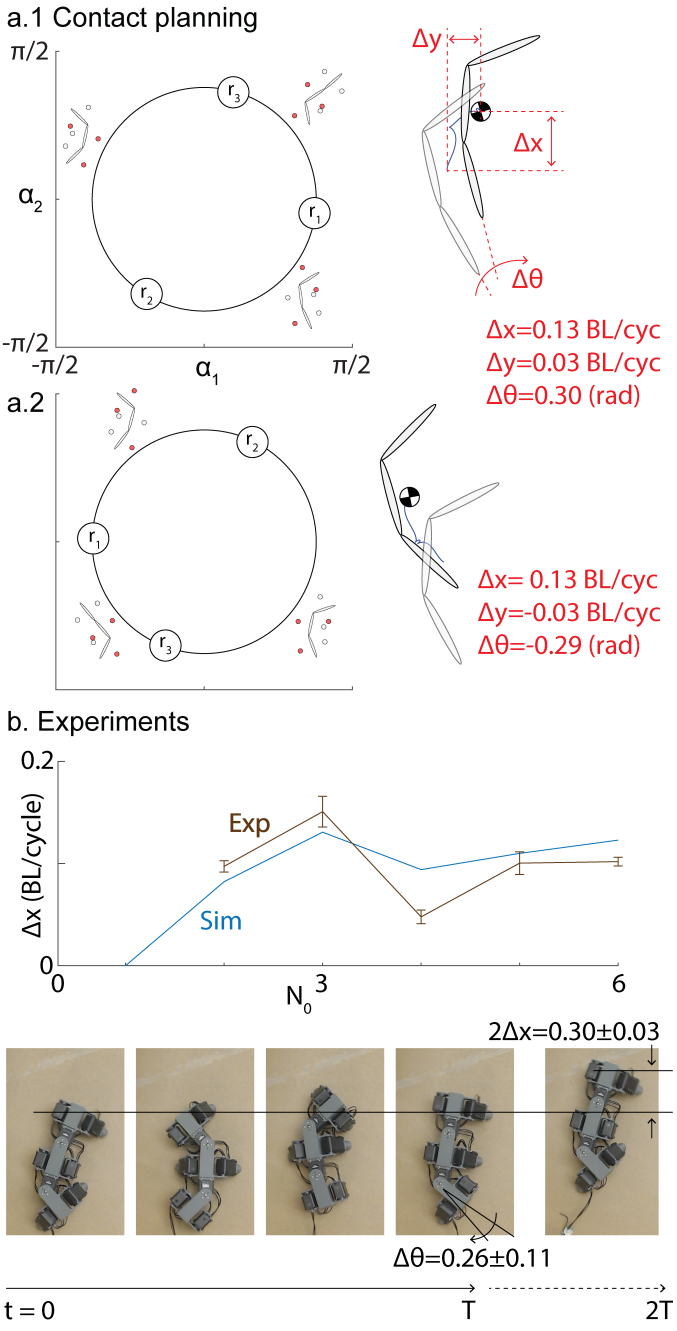

图 6. **六足机器人前向运动的接触规划**（a.1）每个步态周期包含六次接触模式变化（六拍）的侧向蜿蜒六足步态接触规划。左图展示接触模式序列以及形状变化。右图展示接触规划产生的净位移。所有面板中的坐标轴均相同。（a.2）展示了反对称步态的步态构造及其产生的位移。（b）数值与实验验证。（上）具有不同N_0，（接触模式变化次数）的侧向蜿蜒步态，其数值模拟与实验结果吻合良好。（下）机器人执行六拍步态$N_0 = 6$的快照。

B. 与伊辛模型的基态对偶性

对于式 12 中的波茨模型，我们进一步将畴壁 c_{j+1} 定义为s_j和s_{j+1}之间存在不同的自旋构型，其中如果存在畴壁，则$c_{j+1} = 1$

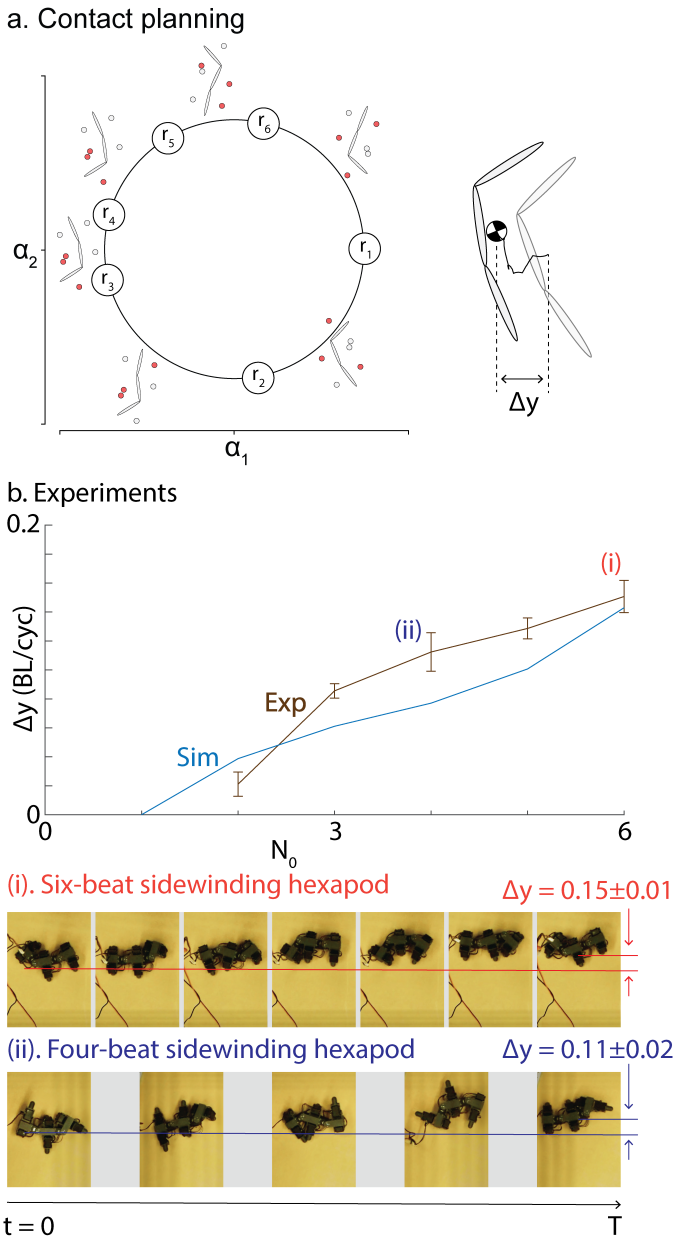

图 7. **侧蜿蜒六足机器人的接触规划** (a) 侧向蜿蜒六足步态的接触规划，每个步态周期内有六次接触模式变化（六拍）。左图展示接触模式序列及形状变化。右图展示接触规划产生的净位移。形状空间的坐标轴与图 6a 相同。(b) 数值与实验验证。(上) 数值模拟与不同 (N_0, 接触模式变化次数) 的侧向蜿蜒步态实验结果吻合良好。(下) 机器人执行六拍（i，$N_0 = 6$）和四拍（ii，$N_0 = 6$）步态的快照。

否则为 0。波茨模型与伊辛模型之间的映射如图 5 下半部分所示。由此可见，我们可以利用畴壁映射以及d_{ijl}的可加性，建立波茨模型与长程伊辛模型之间的基态对偶性。

定理1。 满足可加性的 d_{ijl} 的式*12*中的波茨模型与.....具有相同的基态能量

以下具有长程耦合 J_{jl} 的伊辛模型。

$$H_c = -\sum_j J_{jl} c_j c_l - \lambda \sum_i c_i \tag{13}$$

其中 J_{jl} =最大$_i d_{ijl}$。

证明。我们的目标是证明式12和式13具有相同的基态能量。为此，只需证明式12中的每一项都可以转换为式13中的相应项。考虑波茨模型中有 K 个位置的自旋彼此不对齐，这等价于伊辛模型中的 K 个畴壁。这在式12中产生能量代价 Kλ，对应于式13中的 $\lambda \sum$i c$_i$。对于每个固定的 K，式12的最小化等价于最小化 $-\sum$j $d'_{ij(j+1)} s^i_j$。这可以通过在两个畴壁 c$_j$ 和 c$_l$ 之间选择最大的 $\sum_{=}^{l-1}$k j d $_{ik(k+1)}$ 来实现。由于 d$_i$jl 的可加性，$\sum_{=}^{l-1}$k j d $_{ik(k+1)}$ =d$_i$jl。因此，式13中的项 $-\sum$j J jlc jc$_l$ 得以成立，其中 J jl = max$_i$d$_{ijl}$。□

我们注意到，一般而言，波茨模型与伊辛模型并不对偶，因为二者具有不同的自旋对称性。然而，此处的对偶性源于我们只研究基态以及d_{ijl} 的可加性，这在机器人接触问题中具有特殊性。该映射将原问题的复杂度从N^M 降低至 2^M。基于伊辛模型的哈密顿量，我们开发了一种畴壁搜索算法。

畴壁搜索算法。 指定要搜索的畴壁或跳变数量K 。计算所有具有K个c_j = 1的M位点自旋构型的能量$-\sum J_{ij} c_j c_i$。从所有构型中选择能量最低的构型作为解，并根据映射将其转换回形状序列。□

对偶性和畴壁搜索算法有几个优点。首先，它不受形状变量数量N 的影响，因此可以始终采用低阶表示 Z_2-自旋，而不是 Z_N-自旋。这对于泛化到具有多个形状变量的多足机器人尤其有帮助。其次，畴壁可以自然地解释为形状序列问题中的跳变。实际应用中，如果希望跳变次数K较少，那么只需对模型施加总自旋对称数或磁化强度K约束即可。在缺少此类对称性时，式 13 中的原始模型存在于大小为 2^M 的希尔伯特空间中，其中M 为形状变量的数量；而对称性约束有助于将希尔伯特空间的复杂度降至 Cr(M,K)。在这一对偶表述中，对于固定的自旋对称扇区，我们也可以忽略惩罚项 λ，因为该惩罚项只会使同一扇区中的能量产生一个常数偏移。值得注意的是，当跳变次数较大，即K ~ M/2 时，Cr(M, K) ~ $2^M/\sqrt{M}$ 呈近似指数级增长 [12]，这为机器学习在降维和高效近似方面的应用创造了机会。

IV. 实验设置

为测试我们的方法，我们使用了一台六足机器人，其机身具有两个旋转自由度，每条腿各有一个旋转自由度。该细长机身长 30 cm，由弯曲关节分段，各关节允许旋转至多 ±90 度。每个机身段两侧都装有肢体，可通过控制肩部的旋转关节将其抬起或放下。所有旋转关节均由 Dynamixel AX-12A 伺服电机驱动，机身连杆和附肢则使用聚乳酸材料 3D打印而成。实验期间，机身抬高至离地 5 cm，足尖设定为最高抬离地面 2 cm。实验在平坦坚硬的表面上进行，并假设存在干燥的库仑动摩擦，足地摩擦系数 $\mu = 0.35 \pm 0.06$。我们使用直接关节角度设定点指令来控制机器人的运动。每种步态均进行了三次重复实验，每次实验中机器人执行五个完整的环。

我们使用由 6 台 Flex 13 摄像机组成的 OptiTrack 动作捕捉系统，在机器人位置空间中监测其运动。沿机器人身体分布的红外反射标记的三维位置以 120 FPS 的帧率记录。数据采集于机器人执行五个步态周期期间，记录范围从第一个构型开始到最后一个构型结束。位移通过将几何中心轨迹投影到前向／水平方向轴上计算得出。

V. 结果

A. 六足机器人前进

我们首先应用该框架研究六足机器人的前向运动。我们将稳定接触模式（针对六足机器人）定义为至少三条腿处于支撑相。我们将单侧支撑[4] 视为不稳定接触模式。因此，总共有 20 种接触模式。我们通过圆形参数化对形状空间进行采样：$\alpha_1 = \pi/3 \sin(\tau)$、$\alpha_2 = \pi/3 \cos(\tau)$，并在一个周期内对 τ进行均匀采样。

在机器人运动中，足式运动的大多数不稳定行为都发生在接触切换期间 [3, 27]。为了避免过多的接触切换，我们研究了接触模式变化次数为N_0 的六足机器人前进步态，并将六足步态视为N_0的函数。应用我们的框架后，我们确定了五种$N_0 \in [2, \ldots 6]$的六足机器人前进步态。图 6a 展示了$N_0 = 3$ 的示例。

我们通过数值模拟 [8]验证了所识别的步态。我们以每环行进的体长数（体长/周期）为单位量化位移。我们注意到，除了前进方向上的大幅平移（Δx）外，还存在不可忽略的横向平移（Δy）和净旋转（$\Delta\theta$）。不可忽略的横向平移和旋转会给机器人的导航带来额外挑战。因此，我们着手最小化与向前运动相关的 Δx 和 $\Delta\theta$。

[4]三个处于支撑相的腿位于同一侧（左侧或右侧）。

我们观察到局部连接矩阵是对称的。对于任意接触模式 I(i)，我们都可以得到其反对称接触模式 I′(i)，使对侧腿（连接到同一身体节段的左腿和右腿）的接触状态翻转（图 6.a）。根据对称性，我们知道：$A^x_{I(i)}(r) = A^x_{I'}(i)(-r)$，$A^y\,I(i)(r) = -A^y\,I'(i)(-r)$，$A^\theta\,I(i)(r) = -A^\theta\,I'(i)(-r)$。换句话说，同时具有形状对称性（例如 r 和 −r）与接触对称性（例如从 I(i) 到 I′(i)），我们可以保持前向速度（ξ_x），同时使侧向和旋转速度（$\xi_y$and ξ_θ）方向相反。因此，我们知道，对于任意步态，都存在一个与之反对称的步态，其前向位移相同，而侧向位移和旋转方向相反。图 6.a 右侧面板展示了一个反对称步态示例。执行一个步态及其反对称步态时，我们可以消除不需要的侧向位移和旋转，从而实现纯前向运动。

我们在机器人物理六足模型上测试了所识别的步态。结果表明，纳入反对称步态可以消除侧向和旋转位移的产生。机器人物理实验与数值模拟结果吻合良好（图 6.b）。此外，我们识别出前进速度最高可达 0.15 体长/周期的六足步态；考虑到腿长相对较短（腿长为 ~0.1 体长），我们认为这一速度表现良好。

B. 侧蜿蜒六足机器人

人们通常认为，多足运动体向前运动的能力优于侧向运动，部分原因是肢体前伸/后缩运动在前后方向上受到限制（即肢体无法直接产生侧向运动）。近期关于四足机器人的研究 [5]表明，通过适当的身体弯曲协调，可以实现侧向运动，但速度相对较低（< 0.1 体长/环）。本文研究六足机器人的侧向运动行为（侧向蜿蜒运动）。我们认为，采用适当的接触规划，可以实现六足机器人的新型侧向蜿蜒运动。

使用与第 V-A 节相同的形状和接触模式样本，我们确定了侧向蜿蜒的六足步态随N_0变化的规律。图7展示了一个$N_0 = 6$ 的示例。我们首先使用数值模拟 [8]评估六足侧向蜿蜒步态的有效性。我们注意到，六足侧向蜿蜒步态的速度（0.15 ± 0.01 体长/周期）与六足前进步态相当。

最后，我们在机器人物理模型上测试了所确定的步态，结果与数值模拟吻合良好。我们在图7b中展示了机器人执行六足侧向蜿蜒步态时的快照。

C. 侧向蜿蜒的蜈蚣

蜈蚣式运动具有挑战性，部分原因在于大量腿带来的众多接触状态 [9]。值得注意的是，在我们的框架中，计算复杂度不会随着腿数的增加而增长。因此，我们认为，我们的框架能够为蜈蚣式运动提供新的见解。本节将通过为一只十二足蜈蚣设计侧向蜿蜒步态，展示我们框架的通用性

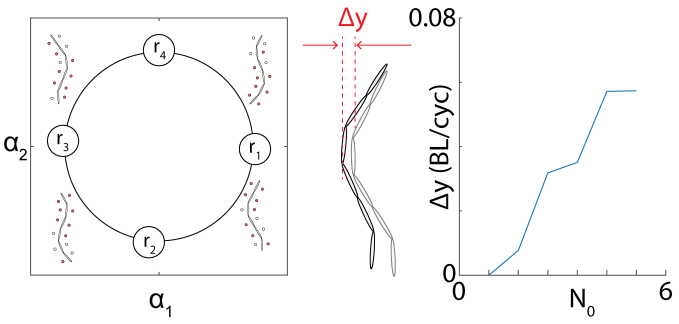

图 8。**侧向蜿蜒的蜈蚣的接触规划**（左）具有每个步态周期四次接触模式变化（四拍）的侧向蜿蜒的蜈蚣步态的接触规划。（中）接触规划产生的净位移。（右）受不同N_0影响的侧向蜿蜒的蜈蚣步态的数值模拟。

运动器。为简化起见，我们考虑至少有八条腿处于支撑相的接触模式。因此，总共有 794 种接触模式。我们使用形状基函数 [9]对形状变量进行采样。

利用我们的框架，我们在图 8 中展示了有效的侧向蜿蜒步态。从数值模拟中，我们注意到蜈蚣的侧向蜿蜒步态具有相当的绝对侧向位移。然而，由于蜈蚣的体长长得多，其归一化侧向位移（体长/周期）显著低于六足机器人（0.06体长/周期）。基于这一观察，我们假设，纵向长度的增加（腿数增加）不会提升运动体的侧向运动能力。

VI. 结论

在本文中，我们为一般的多足运动建立了一个几何力学模型，并将接触规划问题简化为图优化问题。我们进一步建立了接触规划问题与波茨模型和伊辛模型之间的映射，从而能够在多项式时间内求解最优形状序列。我们利用该框架研究了六足机器人和蜈蚣（12 条腿）的运动。我们获得了六足机器人在前进和侧向两个方向上的有效前进步态和侧向蜿蜒步态。此外，我们确定了一组关于N_0, 次接触变化的步态。我们在机器人物理模型上检验了这一预测。我们的工作为研究多足机器人的运动提供了一种通用方法，而图优化问题和自旋模型的重新表述则为机器学习的应用开辟了未来机会。

在当前工作中，我们研究了在平坦地形上精确执行接触模式时的运动。然而在实际中，机器人的运动可能会受到接触模式不确定性的影响。未来的工作可以建立一个关于接触模式执行的概率模型，并将其与自旋模型的有限温度和熵特性联系起来。基于此，我们假设存在一些步态，能够抵御接触不确定性，从而确保机器人在噪声地形上可靠运动。这种鲁棒性将为实现以下目标铺平道路：打造仅需极少感知和反馈控制、即可穿越复杂环境的机器。

致谢

作者感谢以下机构提供的资助：美国国家科学基金会—西蒙斯基金会东南数学与生物学中心（西蒙斯基金会 SFARI 594594）、美国陆军研究办公室（ARO）多学科大学研究计划（MURI）、美国陆军研究办公室资助项目 W911NF-11-1-0514、邓恩家族教授席位，以及美国国家科学基金会人工智能与基本相互作用人工智能研究所（IAIFI）。

参考文献

[1] Silas Alben。利用各向同性摩擦实现高效滑动运动。*Physical ReviewE*，99(6):062402，2019。[2]Henry C Astley、Chaohui Gong、Jin Dai、Matthew Travers、Miguel M Serrano、Patricio A Vela、Howie Choset、Joseph R Mendelson、David L Hu 和 Daniel I Goldman。正交身体波的调制使侧向蜿蜒运动具有更强的机动性。美国国家科学院院刊，112(19): 6200–6205，2015。[3]Long Bai、Hao Hu、Xiaohong Chen、Yuanxi Sun、Chaoyang Ma 和 Yuanhong Zhong。弯腿六足机器人的基于CPG的步态生成及平滑步态转换。*Sensors*，19(17):3705，2019。[4] Pranav A Bhounsule、Jason Cortell 和 Andy Ruina。Ranger 的设计与控制：一种节能型动态行走机器人。载于*AdaptiveMobileRobotics*，第 441–448 页。World Scientific，2012。[5]Baxi Chong 、Yasemin Ozkan Aydin、Chaohui Gong、Guillaume Sartoretti、Yunjin Wu、Jennifer M Rieser、Haosen Xing、Perrin E Schiebel、Jeffery W Rankin、Krijn B Michel 等。协调侧向身体弯曲与腿部运动，实现伸展姿势下的四足运动。*The International Journal of Robotics Research*，第 0278364921991158 页，2021。[6] Baxi Chong、Tianyu Wang、Bo Lin、Shengkai Li、Howie Choset、Grigoriy Blekherman 和 Daniel I Goldman。推动侧向蜿蜒运动前进：通过几何力学优化无肢机器人的接触模式。载于*Robotics:Scienceand Systems*，2021。[7] Baxi Chong、Tianyu Wang、Jennifer M Rieser、Bo Lin、Abdul Kaba、Grigoriy Blekherman、Howie Choset 和 Daniel I Goldman。调节身体波的频率，以提升侧向蜿蜒机器人的性能。*TheInternationalJournal ofRobotics Research*，第 02783649211037715 页，2021。[8] Baxi Chong、Yasemin O Aydin、Jennifer M Rieser、Guillaume Sartoretti、Tianyu Wang、Julian Whitman、Abdul Kaba、Enes Aydin、Ciera McFarland、Kelimar Diaz Cruz 等。面向多足运动体的通用运动控制框架。生物启发 & 仿生学，17(4): 046015，2022。[9]Baxi Chong、Juntao He、Shengkai Li、Eva Erickson、Kelimar Diaz、Tianyu Wang、Daniel Soto 和 Daniel I Goldman。通过滑移实现自推进：摩擦

多足运动体中的游动。*arXiv* 预印本 *arXiv:2207.10604*，2022。[10]Baxi Chong、Tianyu Wang、Eva Erickson、Philip J Bergmann 和 Daniel I Goldman。协调微小肢体与修长身体：蜥蜴陆地游动的几何力学。美国国家科学院院刊，119(27):e2118456119，2022。[11]Baxi Chong、Juntao He、Daniel Soto、Tianyu Wang、Daniel Irvine 和 Daniel Goldman。受香农启发的多足物质运输框架。美国物理学会通报，2023。[12] 亚伯拉罕·棣莫弗。《分析杂集》。*Tonson and Watts*，伦敦，1730，1730。[13] Claire T Farley 和 C Richard Taylor。马从小跑到疾驰转换的机械触发机制。《科学》，253(5017):306–308，1991。[14] Zipeng Fu、Ashish Kumar、Jitendra Malik 和 Deepak Pathak。最小化能量消耗促使足式机器人涌现出步态。*arXiv* 预印本 *arXiv:2111.01674*，2021。[15] Robert J Full 和 Daniel E Koditschek。模板与锚点：陆地足式运动的神经力学假说。《实验生物学杂志》，202(23): 3325–3332，1999。[16] Qinghong Guo、Mrinal K Mandal 和 Micheal Y Li。运动场的高效霍奇–亥姆霍兹分解。《模式识别快报》，26(4):493–501，2005。[17] Ross L Hatton 和 Howie Choset。运动中的非保守性与非交换性。《欧洲物理杂志专题》，224(17-18):3141–3174，2015。[18] Milton Hildebrand。马的对称步态。《科学》，150(3697):701–708，1965。[19] Milton Hildebrand。灵长类动物的对称步态。《美国体质人类学杂志》，26(2):119–130，1967。[20] P Holmes、R J Full、D Koditschek 和 J Guckenheimer。《足式运动的动力学：模型、分析与挑战》。《*SIAM*评论》，48(2):207–304，2006年1月。[21] Jemin Hwangbo、Joonho Lee、Alexey Dosovitskiy、Dario Bellicoso、Vassilios Tsounis、Vladlen Koltun 和 Marco Hutter。学习足式机器人的敏捷动态运动技能。《科学·机器人学》，4(26)，2019。[22] Auke Jan Ijspeert、Alessandro Crespi、Dimitri Ryczko 和 Jean-Marie Cabelguen。由脊髓模型驱动的蝾螈机器人：从游泳到行走。《科学》，315(5817):1416–1420，2007。[23] Neri Kafkafi 和 Ilan Golani。侧向运动的行波协调雪貂的转向和向前行走。《生物控制论》，78(6):441–453，1998年7月。ISSN 1432-0770。doi: 10.1007/s004220050448。[24] Donghyun Kim、Jared Di Carlo、Benjamin Katz、Gerardo Bledt 和 Sangbae Kim。通过全身冲量控制和模型预测控制实现高度动态的四足运动。*arXiv* 预印本 *arXiv:1909.06586*，2019

.

[25]Joonho Lee、Jemin Hwangbo、Lorenz Wellhausen、Vladlen Koltun 和 Marco Hutter。《在复杂地形上学习四足运动》。《科学·机器人学》，5（47）：eabc5986，2020。[26]Chen Li、Tingnan Zhang 和 Daniel I Goldman。《颗粒介质上足式运动的地形动力学》。《科学》，339（6126）：1408–1412，2013。[27] Junmin Li、Jinge Wang、Simon X Yang、Kedong Zhou 和 Huijuan Tang。《四足机器人的步态规划与稳定性控制》。《计算智能与神经科学》，2016，2016。[28] Bo Lin、Baxi Chong、Yasemin Ozkan-Aydin、Enes Aydin、Howie Choset、Daniel I Goldman 和 Greg Blekherman。《针对环面形状空间运动系统优化坐标选择》。载于*2020 IEEE*/机器人与智能系统国际会议（*IROS*），第7501–7506页，2020。doi：10.1109/IROS45743.2020.9341476。[29] Andrew Lucas。《许多NP问题的伊辛模型表述》。《物理学前沿》，2：5，2014。[30]Gabriel B Margolis 和 Pulkit Agrawal。《以多样化行为调节机器人控制，提升泛化能力》。*arXiv*预印本 *arXiv:2212.03238*，2022。[31] Jerrold E Marsden 和 Tudor S Ratiu。《力学与对称性导论：经典力学系统基础论述》，第17卷。Springer Science & Business Media，2013。[32] Hamidreza Marvi、Chaohui Gong、Nick Gravish、Henry Astley、Matthew Travers、Ross L Hatton、Joseph R Mendelson、Howie Choset、David L Hu 和 Daniel I Goldman。《最小滑移侧向蜿蜒运动：蛇与机器人攀爬沙质斜坡》。《科学》，346（6206）：224–229，2014。[33] LW McKeehan。《对铁磁理论的贡献》。《物理评论》，26（2）：274，1925。[34]Richard M Murray。《机器人操作的数学导论》。CRC出版社，2017。[35]Jong Hyeon Park 和 Ohung Kwon。《湿滑表面上双足机器人运动的反射控制》。载于*2001*年机器人与自动化国际会议论文集（*ICRA*），*IEEE*机器人与自动化国际会议（目录号*01CH37164*），第4卷，第4134–4139页。IEEE，2001。[36] Renfrey Burnard Potts。《一些广义有序-无序转变》。载于《剑桥哲学学会数学会刊》，第48卷，第106–109页。剑桥大学出版社，1952。[37]Jennifer M Rieser、Chaohui Gong、Henry C Astley、Perrin E Schiebel、Ross L Hatton、Howie Choset 和 Daniel I Goldman。《运动中的生物系统的几何相位与降维》。*arXiv*预印本 *arXiv:1906.11374*，2019。[38] Uluc Saranli、Martin Buehler 和 Daniel E Koditschek。《Rhex：一种简单且高度灵活的六足机器人》。*TheInternational Journal ofRobotics Research*，20（7）：616–631

, 2001.

[39] Sangok Seok、Albert Wang、Meng Yee Chuah、Dong Jin Hyun、Jongwoo Lee、David M Otten、Jeffrey H Lang 和 Sangbae Kim。《节能足式运动的设计原则及其在MIT Cheetah机器人上的实现》。*IEEE/ASME*机电一体化学报，20（3）：1117–1129，2014。[40] Sarah S Sharpe、Stephan A Koehler、Robyn M Kuckuk、Miguel Serrano、Patricio A Vela、Joseph Mendelson 和 Daniel I Goldman。《身形纤细、表面光滑对沙中游动者的运动优势》。《实验生物学杂志》，218（3）：440–450，2015。[41] Julian Whitman、Nico Zevallos、Matt Travers 和 Howie Choset。《2017年墨西哥城地震后的蛇形机器人城市搜救》。载于*2018*年*IEEE*安全、防护与救援机器人国际研讨会（*SSRR*），第1–6页。IEEE，2018。[42] Yuxiang Yang、Tingnan Zhang、Erwin Coumans、Jie Tan 和 Byron Boots。《通过学习步态转换实现快速高效运动》。载于机器人学习会议，第773–783页。PMLR，2022。[43] Tingnan Zhang 和 Daniel I Goldman。《阻力理论在颗粒介质运动中的有效性》。《流体物理学》，26（10）：101308，2014。