arXiv:2302.03071v1 [cs.GT] 6 Feb 2023

在事前公平与福利之间进行最优插值

Mikael Høgsgaard PanagiotisKarras Wenyue Ma Nidhi Rathi Chris Schwiegelshohn

计算机科学系，奥胡斯大学°Abogade34, 8200 Aarhus N, 丹麦

邮箱： {hogsgaard,panos,wenyuema,nidhi,schwiegelshohn}@cs.au.dk

摘要

对于在具有不同偏好的个人之间分配一组资源这一基本问题，分配的质量取决于其实现的公平程度和集体福利。不幸的是，在许多资源分配场景中，在实现公平目标的同时最大化福利在计算上是困难的。

在这项工作中，我们研究事前公平概念；随机轮转算法和抽签机制便是其中的常见例子。我们提出了一个通用框架，用于在多准则设置下系统地研究公平与福利目标之间的插值。我们设计了两种高效算法（ε-MIX 和 SIMPLE-MIX），可在公平与福利方面实现不同的权衡保证。 ε-MIX 在公平与福利方面实现了最优的多准则近似，而 SIMPLE-MIX 则实现了常数因子以内的最优性，且除底层的福利最大化机制和事前公平机制外，不会产生任何计算开销。我们的框架对这两种底层机制均不作任何假设，唯一要求是公平机制能够在所有分配构成的集合上生成一个分布。事实上，如果这些机制本身是近似算法，我们的框架便能保留其近似因子，从而确保结果对底层机制的质量敏感，同时又不依赖于这些机制。我们还针对上述事前公平机制，在真实数据集上进行了全面的实验分析，验证了我们的理论分析。

1 引言

自文明曙光以来，人类一直生活在一种社会结构之中，而这种结构必然要求人们根据可能各不相同的个体偏好作出群体决策。对于有限自然资源的分配、机场交通管理、匹配市场以及学生课程分配等问题，我们希望在实现总体福利保证的同时，确保个体层面的公平。公平分割理论关注的基本问题是：如何根据各个参与者不同的偏好，在他们之间分配一组资源。数十年来，这类资源分配情境推动了经济学、数学和计算机科学领域蓬勃发展的研究；优秀的综述见 [BT96、RW98、PM16] 。

公平与经济效率是各类分配问题的两个关键目标，因此，文献中对若干重要的公平与经济福利概念进行了广泛研究 [BL16、Bud11]。纳什社会福利和平等主义社会福利被认为是衡量经济效率的重要指标[Mou04、CKM+19]。公平分割的发展历程中，既有许多重要的存在性结果，也有不少困难性结果。也就是说，在相当一般的情形下，我们已证明存在具有实际意义的公平资源分配方案 [Str80], , 但另一方面，我们尚无相应的算法结果。许多情况下，确实存在困难性或不可能性结果，证明无法通过多项式时间算法找到这类分配方案 [Str08]。而且，不出所料，在各种分配情境中，同时实现公平并最大化福利的问题也很难[NRR13、SK02、RR10、ABKR19]。

考虑这样一种公平地分配不可分割物品的情形，其中每件物品都必须分配给一位代理人。在一件有价值的物品需要在多位代理人之间分配的情形下，不可能实现经典的公平概念——无嫉妒[1]。这一不可能性促使经济学和计算机科学领域对不可分物品确定性分配中的公平问题开展了大量研究 [BCM16], 绝大多数

[1]如果每位代理人都更偏好自己的份额，而非其他任何代理人的份额，那么这种资源分配就是无嫉妒的。

这些研究关注宽松公平性和福利属性（参见 [AAB+22] 最近的综述）。随机化在实现事前公平方面发挥着重要作用，近期研究对此进行了探讨 [AAGW15, FSV20, Azi20, CKK21]。在上述只有一件物品的例子中，将该物品以均等概率随机分配给一位代理人，即可实现事前无嫉妒[FSV20], ；也就是说，在抽样选出一位代理人之前，没有任何代理人有理由嫉妒其他人，因为每个人获得该物品的机会相同。因此，研究事前公平概念已成为一项重要的研究方向。随机轮转等常用机制[2] 和基于抽签的算法[3] [FSV20, EKM+22, FGG+21] 在不同情境中探讨了各种事前公平概念。受这种多样性的启发，我们假设公平机制可以表示为所有解（即分配）空间上的一个随机变量，并可从中抽取样本。我们将公平机制所定义的分布称为公平先验。我们用随机分配所实现的期望福利来衡量其福利。给定一个公平机制和一个福利最大化机制，一个自然的问题是：如何计算既能保持公平性、又能保有福利保证的分配?

本文探讨在资源分配场景中，是否存在一种自然的方式来表述公平与福利这两个极端之间的权衡。也就是说，给定两种机制的刻画——一种定义公平先验，另一种实现福利最大化——是否存在一种计算高效的方式，在公平与福利这两种解之间进行有意义的插值?

我们的贡献:

我们提出了一个通用框架，用于系统地研究如何在分配问题中实现公平与最大化福利这两个关键目标之间进行插值。我们将公平性到福利的插值（FWI）实例定义为：对于给定的分配问题，由一个分配上的公平先验分布和一个福利最大化机制构成。目标是找到一种新机制，使其（i）相对于某个距离函数而言接近公平先验，同时（ii）最大化福利。

对于任意期望的选 择 $\alpha \in (0, 1)$，如果全变差距离 betwee n 输出分布 算法与公平先验之间的差异可由 α 上界。

我们针对上述公平性与福利之间的插值问题，提出了两种计算高效的算法 ε-MIX 和 SIMPLE-MIX 。第一种算法 ε-MIX 只需从公平先验中抽取少量样本，即可在公平性和福利方面基本实现最优的多准则近似。第二种算法 SIMPLE-MIX 则更为简单，计算开销为零。在满足一项 ε-MIX 附带的 个体公平性 性质（详见第 4.2 节）的同时，其性能与 ε-MIX 相差至多一个常数因子。主要结果总结如下:

- 对于任意 FWI 实例，我们的算法 ε-MIX 从给定的公平先验中抽取 $O(1/\varepsilon^2)$ 个样本，即可实现最优福利，同时满足 α-公平性。
- 对于任意 FWI 实例，我们的算法 SIMPLE-MIX 只需从公平先验中抽取一个样本，即可在满足 α-公平性的同时达到最优福利的一个常数因子范围内。

我们的框架对底层公平机制不作任何假设，唯一的要求是该机制能够生成一个关于分配的分布；对于福利最大化机制，我们也不作任何假设。值得注意的是，我们的两种算法都不依赖于福利最大化机制。事实上，如果该机制本身是一种近似算法，那么无论插值程度如何，我们的框架都会保留其近似因子，从而确保对底层算法质量的敏感性，同时不依赖于这些算法。此外，我们的所有结果均适用于任意福利函数，以及解空间上的任意公平先验。

我们在真实数据集上测试并补充了关于广受关注的事前公平概念的理论结果，例如随机轮转和抽签选举。

[2]在随机轮转机制中，代理人以均匀随机的顺序依次行动，并从剩余物品中挑选自己最偏好的物品。[3]抽签选举是指从人口中随机选出代表，作为民主的替代方式。此处的目标是选出一个能够代表人口的候选面板，使得理想情况下，每个个体都有相同的概率入选并担任候选面板成员。

补充相关工作:

以往研究探讨了多种事后公平概念及其福利保证[CKM+19、AMS20、ABKR19、BBS20]，针对的是不可分割物品场景。由于计算此类分配十分困难，因此必须放宽公平目标或福利目标（有时或许两者都要放宽）。因此，探索事前公平与福利的相关概念便显得很有意义。在经济学文献中，最早提出寻找分数分配，并将其作为纯分配的彩票来实施这一理念的研究出自 Hylland and Zeckhauser [HZ79]。随机性已成为解决分配问题的机制设计中的重要工具。后续研究在多种场景中实现了这一理念。概率序列规则等机制 [BM01] 利用随机性避免对代理人产生偏袒，并为所有与序数偏好一致的基数估值提供事前公平性保证。同一研究方向中其他基于事前公平的机制还包括随机优先级 [AS98],谨慎进食 [AB22], 以及概率序列规则的若干扩展 [BCKM13]。

Freeman 等人的研究 [FSV20] 以及 Aziz [Azi20] 探讨了在经典公平分配问题中，同时实现事前和事后公平性保证与帕累托效率的可能性。其他相关领域也有研究，包括投票 [Azi19] 和双边匹配问题 [BCKM13、CS02], 这些研究也探索了利用随机化规避多种解概念不存在的问题。

2 符号与框架

考虑一个解空间 $\mathcal{S}$ 以及定义在 $\mathcal{S}$ 上的非负函数 $V\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}_0^+$。我们称函数 V为一个解 $i \in \mathcal{S}$赋予值或福利 $V(i)$。此外，我们用 OPT 表示 S中福利最大的解，即 OPT $= \arg\max_{i\in\mathcal{S}} V(i)$。

下文中，我们用 $\mathcal{M}_\lambda$ 表示一个福利最大化机制，其相对于 V(OPT) 的近似因子为 λ。我们将 $A \in \mathcal{S}$ 记为由 $\mathcal{M}_\lambda$提供的解，即 $V(A) \geq \lambda V(\text{OPT})$。

此外，我们考虑解空间上的概率分布向量 $p = \{p_i\}_{i\in\mathcal{S}}$。其中，$p_i \in [0,1]$ 指定分配给解 $i \in \mathcal{S}$ 的概率。我们将 $\Delta := \{p = \{p_i\}_{i\in\mathcal{S}}\colon p_i \in [0,1], \sum_i p_i = 1\}$ 记作解空间 $\mathcal{S}$ 上所有分布向量的集合。对于 $p \in \Delta$，我们将价值函数的定义线性扩展，并将 $V(p)$ 写作 $= \sum_{i\in\mathcal{S}} p_i \cdot V(i)$。也就是说，$V(p)$ 是一个随机变量的期望值，该随机变量以分布 p 取解空间 $\mathcal{S}$ 中的值。

我们假设公平机制可以表示为所有解的空间上的一个随机变量，并将相应的分布向量 $p^f \in \Delta$ 称为公平先验。给定一个分布向量 $p \in \Delta$ 和公平机制的一个分布向量 p^f，我们使用标准的全变差距离来刻画 p 与公平先验 p^f 之间的距离。也就是说，对于公平先验 p^f 和一个 $\alpha \in [0,1]$，若 $p \in \Delta$ 满足以下条件，则称其为 α-公平:

$$\mathrm{TV}(p, p^f) := \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathcal{S}} |p_i - p_i^f| \leq \alpha.$$

现在，我们将公平性到福利的插值（FWI）实例定义为以下四元组 $\mathcal{I}(V, p^f, \mathcal{M}_\lambda, \alpha)$，其中 V 是一个价值函数，p^f 是一个可通过抽样访问的公平先验，$\mathcal{M}_\lambda$ 是一种使福利最大化的机制，而 $\alpha \in$ 属于 (0, 1)。给定一个 FWI 实例，目标是设计一种算法，使其输出具有分布 p，满足 p 是 α-公平的，并使价值函数 V 最大化。换言之，我们旨在求解以下约束最大化问题，并将其最优解记为 p^{OPT},

$$\max_{p\in\Delta} V(p)$$
$$\text{such that } \mathrm{TV}(p, p^f) \leq \alpha.$$

3 公平性与福利之间的插值

在本节中，我们将开发一种计算高效的算法，称为 ε-Mix。对于任意 FWI 实例，该算法只需从给定的事前公平机制中抽取少量样本，即可在公平性和福利方面基本实现最优的多准则近似。本节的主要结果陈述于定理 3.1。

定理 3.1。 考虑一个 FWI 实例 $\mathcal{I}(V,\ p^f,\ \mathcal{M}_\lambda,\ \alpha)$ 以及一个近似因子 $\varepsilon > 0$，并令 p^ε 为算法 *1*输出的分布。那么， p^ε 是 α-公平的，并具有以下福利保证

$$V(p^\varepsilon) \geq \lambda \cdot (1-\varepsilon) \cdot V(p^{\text{OPT}}).$$

使用从公平先验中抽取的 $O(1/\varepsilon^2)$ 个样本。

我们的算法 ε-MIX 的核心思想，是将质量从先验公平先验 p^f 的支撑集中福利值较低的解，重新分配到福利最大化机制所提供的解上（近似因子为 λ）。然而，采用这种贪心且显式的方式存在一个问题：它通常在计算上不可行。解空间的规模可能随输入大小呈指数增长；即使不将此视为障碍，准确确定某个机制输出给定解的概率在计算上也不可行。

相反，我们只能通过从公平先验分布 p^f 中独立抽取样本来访问它。对于给定的 FWI 实例， ε-MIX 首先抛一枚硬币，其正面朝上的概率为 α。如果抛硬币结果为正面，则输出福利最大化机制 $\mathcal{M}_\lambda$ 所提供的解。否则，它从抽样机制中收集一个样本集合，并选择一个属于价值最高解中前 $(1-\alpha)$ 分位的解。请注意，上述方案是模拟这一过程的一种自然方式：仅使用抽样机制，将质量从公平先验 p^f 中价值最低的 (α) 分位解转移到 $\mathcal{M}_\lambda$ 的解。然而，当我们应用这种抽样方法时，无法保证样本集合中价值最高的 $(1-\alpha)$ 分位解，同时也是 p^f 支撑集中价值最高解的前 $(1-\alpha)$ 分位解。不过，我们证明，使用 $O(\varepsilon^{-2})$ 个样本时， ε-MIX 所达到的福利值与最优值相差 $(1-\varepsilon)$，也就是说，该福利值接近于在明确知晓 p^f 的情况下所能获得的值。现在，我们在算法 1 中正式介绍 ε-MIX。

算法 1：公平性到福利的插值（ε-MIX）输入：一个 FWI 实例 $\mathcal{I}(V, p^f, \mathcal{M}_\lambda, \alpha)$，以及一个近似因子 $\varepsilon > 0$。输出：按照分布 $p^\varepsilon \in \Delta$ 抽取的解 $i \in \mathcal{S}$，使得 $\text{TV}(p^\varepsilon, p^f) \leq \alpha$ 且$V(p^\varepsilon) \geq \lambda \cdot (1-\varepsilon) \cdot V(p^{\text{OPT}})$。1：抛一枚正面朝上的概率为 α的硬币。2：如果抛硬币 = 正面，则 3：运行 $\mathcal{M}_\lambda$ 并将其输出记为 $A \in \mathcal{S}$。4：返回 A5：否则 6：根据公平先验 p^f采样 $s := \lceil 8((1-\alpha)\varepsilon^2)^{-1} \log(2/\varepsilon) \rceil$ 个解，并令 $Z_s^{()}$为由这些解按值降序排列组成的向量。7：为 $Z_s^{()}$的每个条目 $i \in [s]$ 分配单位质量 $w_i = 1$。8：从 $Z_s^{()}$的最后一个条目开始向上移除总计 αs 的质量。将更新后的权重向量记为 w^α。9：按照与权重向量 w^α成比例的概率，从 $Z_s^{()}$中选取一个解并返回。10：结束 if

---

现在我们分析 ε-MIX，证明它是 α-公平的，并且相较于最优 $V(p^{\text{OPT}})$，达到了所声称的 $\lambda(1-\varepsilon)$ 近似因子。我们将通过以下两个引理证明定理 3.1 。第一个引理证明 ε-MIX 是 α-公平的。

引理 3.2. 对于任意一个 $\mathcal{I}(V, p^f, \mathcal{M}_\lambda, \alpha)$ FWI 实例，令 p^ε 表示算法 *1*的输出分布。于是，我们有

$$\text{TV}(p^\varepsilon, p^f) = \frac{1}{2}\sum_i |p_i^\varepsilon - p_i^f| \leq \alpha.$$

注意到，引理 3.2 并不取决于 ε-MIX 从公平先验中抽取的样本数量，即 ε-MIX 始终是 α-公平的。下一个引理表明，输出分布的福利 $V(p^\varepsilon)$ 至少是最优 $V(p^{\text{OPT}})$ 的 $\lambda(1-\varepsilon)$ 倍。

引理 3.3。 考虑一个 $\mathcal{I}$（V， p^f， $\mathcal{M}_\lambda$， α）的 FWI 实例。对于任意 $\varepsilon > 0$，令 p^ε 表示通过从公平先验 p^f 中抽取 $O(1/\varepsilon^2)$ 个样本后得到的算法 *1* 的输出分布。则我们有以下福利保证：

$$V(p^\varepsilon) \geq \lambda \cdot (1-\varepsilon) \cdot V(p^{\text{OPT}}).$$

结合引理 3.2 和引理 3.3 可得定理 3.1，因此接下来我们将证明这两个引理。首先介绍一些有用的记号。令 z_s 表示一个由 s 个解组成的集合，即 $z_s \in \mathcal{S}$。我们稍微滥用一下记号，将 z_s 也视为这些解的指示向量，其中 z_s 的各项按福利递减顺序排列，第 j项称为 $z_s^{(j)}$。现在，对于任意 $\beta \in (0,1)$，考虑以下随机机制 T^β。它创建一个初始时均匀的权重向量 $w^\beta \in \mathbb{R}^s$。然后从 $i = s$ 开始，依次向 $i = 1$方向迭代移除总计为 βs 的质量，从而得到一个剩余向量 w^β。给定该向量，T^β 按权重比例从 $z_s^{()}$中选取一个解。根据上述讨论，对于任意 z_s，我们可以写出

$$\mathbb{P}(T^\beta(z_s) = i) = \sum_{j=1}^{s} \mathbb{I}^{z_s^{(j)}=i} w_j^\beta / \left((1-\beta)s\right) \tag{1}$$

现在令 Z_s 表示一个长度为 s的随机向量，其解独立同分布地从 p^f中抽取。此外，令 $Z_s^{(j)}$表示 j在按递减顺序排列的 Z_s 各项中的第 $\beta = \alpha$ 个顺序统计量。注意，对于 s，如步骤 6 所述，机制 T^α 的运行方式与算法 1中的步骤 6-9 完全相同。结合这一点、公式（1）以及 $A \in \mathcal{S}$ 是由 $\mathcal{M}_\lambda$给出的 λ-近似福利最大化解这一事实，我们可以将 p_i^ε写成如下形式

$$p_i^\varepsilon = \alpha \, \mathbb{I}^{i=A} + \sum_{j=1}^{s} \mathbb{E}\left[\mathbb{I}^{Z_s^{(j)}=i}\right] w_j^\alpha / s, \tag{2}$$

及其期望值 $V(p^\varepsilon)$ 为

$$V(p^\varepsilon) = \alpha V(A) + \sum_{j=1}^{s} \mathbb{E}\left[V(Z_s^{(j)})\right] w_j^\alpha / s. \tag{3}$$

值得注意的是，对于 $\alpha = 0$，该机制 $T^0(z_s)$ 对应于从 z_s中均匀随机抽取一个条目。结合方程 1 和 2，我们可以将 p_i^f 写作

$$p_i^f = \sum_{j=1}^{s} \mathbb{E}\left[\mathbb{I}^{Z_s^{(j)}=i}\right] / s \tag{4}$$

使用上述记号，我们现在可以给出引理 3.2 的证明，即 ε-MIX 是 α-公平的。

引理 *3.2* 的证明。 我们需要证明距离 $\text{TV}(p^\varepsilon, p^f) \leq \alpha$，这根据定义等价于证明$\sum_{i \in \mathcal{S}} \left| p_i^\varepsilon - p_i^f \right| \leq 2\alpha$。对于任意 $i \in [s]$，利用方程 (2) 和 (4) 中 p_i^ε和 p_i^f的表达式，再结合 $w_j^\alpha \leq w_j$ 对任意 $j \in [s]$ 成立这一事实，并应用三角不等式，可得 p_i^ε与 p_i^f 之间的绝对差为

$$\left| p_i^\varepsilon - p_i^f \right| \leq \alpha \, \mathbb{I}^{i=A} + \sum_{j=1}^{s} \mathbb{E}\left[\mathbb{I}^{Z_s^{(j)}=i}\right] (w_j - w_j^\alpha)/s.$$

现在，由于 $\sum_{i \in \mathcal{S}} \mathbb{I}^{Z_s^{(j)}=i} = 1$，利用期望的线性性可得：

$$\sum_{i \in \mathcal{S}} \sum_{j=1}^{s} \mathbb{E}\left[\mathbb{I}^{Z_s^{(j)}=i}\right] (w_j - w_j^\alpha)/s = \alpha$$

其中，最后一个等式由 $\sum w_j = s$和 $\sum w_j^\alpha = (1-\alpha)s$ 得出。最后，结合最后两个方程，并利用以下事实：$\mathbb{I}^{i=A} = 1$ 对于 $i = A$ 成立，其他情况下为零，我们得到所需的上界 $\sum_{i \in \mathcal{S}} \left| p_i^\varepsilon - p_i^f \right| \leq 2\alpha$。至此，证明完成。 □

接下来，我们证明引理 3.3： ε-MIX 相较于 $V(p^{\text{OPT}})$，可达到 $\lambda(1-\varepsilon)$ 的近似比。为此，我们引入一些记号。回顾一下， p^{OPT} 是 FWI 的最优解，即 $\text{TV}(p^{\text{OPT}}, p^f) \leq \alpha$，且 $V(p^{\text{OPT}})$ 达到最大值。下面，我们刻画最优解 p^{OPT}。从 p^f 开始，从 $\text{supp}(p^f)$ 中的解里移除 α 质量，先从取值最小的解开始，再逐步移向取值更大的解。我们用 $p^{\alpha,r}$ 表示上述过程后 p^f 剩余的质量。注意，现在可以通过从 $p^{\alpha,r}$ 中向 OPT 项增加 α 质量，得到 p^{OPT}。这样， p^{OPT} 是 α-公平的，并且它向最优解增加了尽可能多的质量；也就是说，它确实是 FWI 约束最大化问题的最优解。注意， $\sum_{i\in\mathcal{S}} p^{\alpha,r}_i = 1-\alpha$，因此 $p^{\alpha,r}/(1-\alpha)$ 是 p^f 中位于顶部 $1-\alpha$ 部分（按福利计算）的解上的概率测度。下面，我们用 p^α 表示 $p^{\alpha,r}/(1-\alpha)$。最后， p^{OPT} 可用 p^α 表示如下

$$p_i^{\text{OPT}} = \alpha \mathbb{I}_{i=\text{OPT}} + (1-\alpha)p_i^\alpha, \tag{5}$$

这意味着

$$V(p^{\text{OPT}}) = \alpha V(\text{OPT}) + (1-\alpha)V(p^\alpha). \tag{6}$$

此外，我们用 $\tilde{p}^\alpha$ 表示 $(p^f - p^{\alpha,r})/\alpha$，即在 p^f 中福利排名最低的 α 比例解上的概率测度。注意，我们可以用 p^α 和 $\tilde{p}^\alpha$ 按如下方式分解 p^f

$$p^f = (1-\alpha)p^\alpha + \alpha\tilde{p}^\alpha. \tag{7}$$

利用上述工具，我们现在可以给出一个引理，它对于证明我们的引理 3.3至关重要；该引理确立了 ε-MIX 的福利保证。下面的引理指出，从公平先验中抽取的 $s = \lceil 8((1-\alpha)\varepsilon^2)^{-1}\log(2/\varepsilon)\rceil$ 个样本构成的集合中，在排名前 $1-\alpha$ 的解之间选出的解，其期望福利接近 p^α 的期望福利。

命题 3.4。考虑 FWI 的一个实例 $\mathcal{I}(V, p^f, \mathcal{M}_\lambda, \alpha)$ 和一个近似因子 $\varepsilon > 0$。那么，我们有

$$\sum_{j=1}^{s} \mathbb{E}\left[V(Z_s^{(j)})\right] w_j^\alpha / s \geq (1-\alpha)(1-\varepsilon)V(p^\alpha)$$

在证明命题 3.4 之前，我们先介绍一些记号。回忆一下， $p^\alpha = p^{\alpha,r}/(1-\alpha)$ 和 $\tilde{p}^\alpha = (p^f - p^{\alpha,r})/\alpha$，其中 $p^{\alpha,r}$ 是从 p^f 中从取值最低的条目开始移除 α 质量后得到的向量。利用这一点，我们注意到，在式（7）中，可以通过以下方式利用 p^α 和 $\tilde{p}^\alpha$ 分解 p^f

$$p^f = (1-\alpha)p^\alpha + \alpha\tilde{p}^\alpha.$$

因此，从 p^f 抽样可以看作先以概率 $1-\alpha$抛硬币 C（硬币正面朝上的概率为 $1-\alpha$）：如果抛硬币结果为正面，则从 p^α抽样；否则从 $\tilde{p}^\alpha$抽样。我们将以这种方式从 p^f 抽样。对于样本向量 Z_s，其中包含来自 p^f 的 s 个独立同分布样本，令 C_i 表示用于确定第 i 个样本是从 p^α 还是从 $\tilde{p}^\alpha$抽取的抛硬币结果。进一步定义 $C^s = \sum_{i=1}^s C_i$。也就是说， C^s 是我们从 p^α 抽样的次数。此外，我们用 Z_{r_1}、 ..... 、 Z_{r_C} 表示在 Z_s 中的分布 p^α 的独立样本，并用 $Z_{\bar{r}_1}$、.....、$Z_{\bar{r}_{s-C}}$表示来自分布 $\tilde{p}^\alpha$的独立样本。令 $Z_r^{(1)}$、.....、$Z_r^{(C)}$表示 Z_{r_1}、.....、Z_{r_C}按福利降序排列的顺序统计量。借助这些记号，我们现在可以证明命题 3.4。

命题 3.4 的证明。首先回顾一下， $Z_s^{(j)}$是 Z_s中按福利递减顺序排列的第 j个顺序统计量。此外，注意到要证明命题 3.4，我们必须论证 $\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^s V(Z_s^{(j)}) w_j^\alpha / s\right]$ 大于$(1-\alpha)(1-\varepsilon)V(p^\alpha)$。这里， w^α 是通过给一个长度为 s 的向量分配 1 单位的质量，然后从索引 s 开始向索引 1 递减，移除 αs 单位的质量而得到的。因此，对于 $j > \lceil(1-\alpha)s\rceil$， w_j^α为 0，即，

$$\sum_{j=1}^{s} V(Z_s^{(j)}) w_j^\alpha / s = \sum_{j=1}^{\lceil(1-\alpha)s\rceil} V(Z_s^{(j)}) w_j^\alpha / s$$

此外，由于 $V(Z_s^{(j)})w_j^\alpha/s \geq 0$，我们也有

$$\sum_{j=1}^{\lceil(1-\alpha)s\rceil} V(Z_s^{(j)})w_j^\alpha/s \geq \sum_{j=1}^{\lceil(1-\alpha)(1-\varepsilon/2)s\rceil} V(Z_s^{(j)})w_j^\alpha/s$$

因此，如果我们能够证明 $\sum_{j=1}^{\lceil(1-\alpha)(1-\varepsilon/2)s\rceil} V\ Z_s^{(j)}\ w_j^\alpha/s$ $1-\alpha$ $1-(\ )$ 的期望值下界为 $\varepsilon\ V\ p^\alpha$ $(\ )(\ )(\ )$，就完成了证明。

为证明这一点，考虑一个结果 c_s of C_S，使得 $c_s \geq \lceil(1-\alpha)(1-\varepsilon/2)s\rceil$，即 Z_s 至少包含来自 $\tilde{p}^\alpha$ 的$\lceil(1-\alpha)(1-\varepsilon/2)s\rceil$ 个样本。由于 $Z_{\bar{r}_j}$for $j=1,\ldots,s-c_s$ 是来自 $\tilde{p}^\alpha$ 的一个结果，而 α 是按福利衡量的 p^f 中倒数第 α 个，我们有：对于任意 $i=1,\ldots,c_s$ 和 $j=1,\ldots,s-c_s$，$V(Z_{\bar{r}_j}) \leq V(Z_{r_i})$。将其与 $c_s \geq \lceil(1-\alpha)(1-\varepsilon/2)s\rceil$ 结合，可将 $\sum_{j=1}^{\lceil(1-\alpha)(1-\varepsilon/2)s\rceil} V(Z_s^{(j)})w_j^\alpha/s$ 写作 $\sum_{j=1}^{\lceil(1-\alpha)(1-\varepsilon/2)s\rceil} V(Z_r^{(j)})w_j^\alpha/s$。进一步注意到

$$\sum_{j=1}^{\lceil(1-\alpha)(1-\varepsilon/2)s\rceil} V(Z_r^{(j)})w_j^\alpha/s \geq \sum_{j=1}^{\lceil(1-\alpha)(1-\varepsilon/2)s\rceil} V(Z_{r_j})w_j^\alpha/s$$

因此，它们的期望也遵循相同的关系。利用 Z_{r_j} 是 p^α 的一个样本这一事实，以及我们有 $\sum_{j=1}^{\lceil(1-\alpha)(1-\varepsilon/2)s\rceil} w_j^\alpha \geq 1-\alpha\ \ 1-\varepsilon/2\ s$ $\alpha\ \ 1-\varepsilon\ V\ p^\alpha$ c_s $\sum_{j=1}^{\lceil(1-\alpha)(1-\varepsilon/2)s\rceil} V\ Z_{r_j}\ w_j^\alpha/s$ $1-(\ )(\ )$，可得在给定条件下，$(\ )$ 的期望至少为 $(\ )(\ )(\ )$。也就是说，我们已经证明，对于满足 $(\ )(\ )$ 的结果，

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{j=1}^{\lceil(1-\alpha)(1-\varepsilon/2)s\rceil} V(Z_s^{(j)})w_j^\alpha/s \;\Big|\; C_s \geq \lceil(1-\alpha)(1-\varepsilon/2)s\rceil\Big] \geq (1-\alpha)(1-\varepsilon/2)V(p^\alpha)$$

因此，如果我们能证明 $\mathbb{P}[C_s \geq \lceil(1-\alpha)(1-\varepsilon/2)s\rceil] \geq (1-\varepsilon/2)$，那么根据全期望定律以及 $(1-\varepsilon/2)^2 \geq (1-\varepsilon)$，即可推出该结论。为证明 $\mathbb{P}[C_s \geq \lceil(1-\alpha)(1-\varepsilon/2)s\rceil] \geq (1-\varepsilon/2)$ 成立，我们使用 Hoeffding 不等式。注意到 $E[C_s] = (1-\alpha)s$，因此由 Hoeffding 不等式可得

$$\mathbb{P}[C_s \leq (1-\alpha)(1-\varepsilon/2)s] \leq \exp(-(1-\alpha)s\varepsilon^2/8).$$

现在，由于我们有 $s = \lceil 8((1-\alpha)\varepsilon^2)^{-1}\log(2/\varepsilon)\rceil$ that $\exp(-(1-\alpha)s\varepsilon^2/8) \leq \varepsilon/2$，因此可以得出结论：以至少 $1-\varepsilon/2$ 的概率，C_s 严格大于 $(1-\alpha)(1-\varepsilon/2)s$。又因为 C_s 是整数，所以 C_s 也大于 $\lceil(1-\alpha)(1-\varepsilon/2)s\rceil$，由此完成证明。 □

现在我们给出引理 3.3 的证明，该引理指出 p^ε 与 $(1-\varepsilon)\lambda$ 相比，能够实现福利保证，且近似因子为 p^{OPT}。

引理 *3.3* 的证明。我们需要证明 $V(p^\varepsilon)$ 的下界为 $(1-\varepsilon)\lambda V(p^{\text{OPT}})$。首先，利用方程（3），我们可以将 $V(p^\varepsilon)$ 表示为

$$V(p^\varepsilon) = \alpha V(A) + \sum_{j=1}^{s} \mathbb{E}\left[V(Z_s^{(j)})\right] w_j^\alpha/s.$$

根据引理 3.4，又因为 A 是由 $\mathcal{M}_\lambda$ 提供的解，即 $V(A) \geq \lambda V$(最优解)，因此可得

$$\begin{aligned} V(p^\varepsilon) &\geq \alpha\lambda V(\text{OPT}) + (1-\alpha)(1-\varepsilon)V(p^\alpha) \\ &\geq (1-\varepsilon)(\alpha\lambda V(\text{OPT}) + (1-\alpha)V(p^\alpha)). \end{aligned} \tag{8}$$

回顾方程（$V(p^{\text{OPT}})$ 中的表达式，以便比较。

$$V(p^{\text{OPT}}) = \alpha \cdot V(\text{OPT}) + (1-\alpha) \cdot V(p^\alpha). \tag{9}$$

现在请注意，对于 $a = \alpha \cdot V(\text{OPT})$， $b = \alpha\lambda \cdot V(\text{OPT})$ 以及 $x = (1-\alpha)V(p^\alpha)$，我们有 $a \geq b$ 和 $x \geq 0$。经过代数运算可得，我们必有 $\frac{b+x}{a+x} \geq \frac{b}{a}$。现在将这一事实与方程（8) 和 (9) 结合，可得 $V_{(p^\varepsilon)}V(p^{\text{OPT}})$ 的下界为

$$\frac{(1-\varepsilon)(\alpha\lambda \cdot V(\text{OPT}) + (1-\alpha)V(p^\alpha))}{\alpha \cdot V(\text{OPT}) + (1-\alpha)V(p^\alpha)} \geq (1-\varepsilon)\lambda,$$

至此，证明完成。 □

4 通过简单混合实现公平与福利保证

本节将介绍一种针对公平性到福利的插值（FWI）问题的更快、更简单的算法 SIMPLE-MIX。我们将证明，SIMPLE-MIX 满足 α-公平性，且其福利保证在常数因子范围内是最优的。SIMPLE-MIX 的一个重要特点是完全没有计算开销。此外，我们还将在本节末介绍其在底层福利最大化分配和事前公平机制之外所具备的辅助个体公平性性质。

对于给定的 FWI 实例，SIMPLE-MIX 通过抛掷一枚硬币来运行，该硬币正面朝上的概率为 α。如果硬币正面朝上，算法就输出福利最大化机制$\mathcal{M}_\lambda$ 提供的解；否则，输出从公平抽样机制中抽取的解。请注意，这可以解释为在具有 α 质量的 λ-近似解与按因子 $1-\alpha$ 缩放的公平先验分布之间进行插值，见下文算法 2 。. 我们将证明，SIMPLE-MIX 满足 α-公平性，且达到的近似因子为 $\min\{\lambda, \alpha\lambda + (1-\alpha)^2\}$。不同于 $emix$ 算法，SIMPLE-MIX 没有计算开销；尤其是，它无需评估任何解的价值。

算法 2：公平性到福利的插值（SIMPLE-MIX）

输入：FWI 的一个实例 $\mathcal{I}$（V、p^f、$\mathcal{M}_\lambda$、α）。

输出：根据分布 $p^s \in \Delta$ 抽取的一个解 $i \in \mathcal{S}$，使得 TV（p^s、p^f）$\leq \alpha$ 且 $V(p^s) \geq \min\{\lambda, \alpha\lambda + (1-\alpha)^2\}V(p^{\text{OPT}})$。

1: 以概率 α 抛一枚正面朝上的硬币。
2: 如果抛硬币 = 正面朝上，则
3: 运行 $\mathcal{M}_\lambda$，并将其输出记为 $A \in \mathcal{S}$。
4: 返回 A
5: 如果结束
6: 返回一个按照公平先验 p^f 抽样得到的解。

现在，我们给出本节的主要定理，指出 SIMPLE-MIX 是 α-公平的，并证明其近似因子为 $\min\{\lambda, \alpha\lambda + (1-\alpha)^2\}$，相较于 p^{OPT} 的福利

定理 4.1. 考虑一个 FWI 实例 $\mathcal{I}(V, p^f, \mathcal{M}_\lambda, \alpha)$，并令 p^s 为算法 2的输出分布。则， p^s 是 α-公平的，并满足以下福利保证

$$V(p^s) \geq \min\{\lambda, \alpha\lambda + (1-\alpha)^2\} \cdot V(p^{\text{OPT}}).$$

备注 4.2。考虑 $\min\{\lambda, \alpha\lambda + (1-\alpha)^2\}/\lambda$ 的比值，并注意到该比值在 $\lambda = 1$ 和 $\alpha = 1/2$ 处达到最小值，即该比值下界为 $\min\{1, 3/4\} = 3/4$。因此，利用定理 4.1，我们得到 SIMPLE-MIX 始终能够实现以下性能保证

$$V(p^s) \geq \frac{3}{4}\lambda \cdot V(p^{\text{OPT}})$$

在常数因子范围内达到最优解。

在证明定理4.1之前，我们先对算法 2做几点观察。回想一下，它以概率A 返回解（由机制 $\mathcal{M}_\lambda$给出）， α 而在剩余概率下，它返回一个由.....提供的解

抽样机制，适用于 p^f。因此，对于任意 $i \in \mathcal{S}$，我们可以将 SIMPLE-MIX 的分布 p^s 表示如下

$$p_i^s = \alpha_{\mathbb{I}^{i=A}} + (1-\alpha)p_i^f \tag{10}$$

并且，这意味着 SIMPLE-MIX 实现的期望福利 $V(p^s)$ 可表示为

$$V(p^s) = \alpha V(A) + (1-\alpha)V(p^f). \tag{11}$$

结合这一点以及 $V(A) \geq \lambda V(\text{OPT})$ 这一事实，我们得到 $V(p$ 的以下下界 $^s)$

$$V(p^s) \geq \alpha\lambda V(\textsc{Opt}) + (1-\alpha)V(p^f). \tag{12}$$

有了上述观察，我们现在可以证明定理 4.1。

定理 *4.1*的证明。我们首先证明 p^s 是 α-公平的，即 $\text{TV}(p^s, p^f) \leq \alpha$。根据全变差距离的定义，只需证明 $\sum_{i\in\mathcal{S}} \left|p_i^s - p_i^f\right| \leq 2\alpha$。我们首先注意到，方程（10）意味着 $p_A^s \geq p_A^f$ 且$p_i^s \leq p_i^f$ 对于 $i \neq A$，即我们有 $|p_A^s - p_A^f| = p_A^s - p_A^f$ 且对于 $i \neq A$ $|p_A^s - p_A^f| = p_A^f - p_A^s$。因此可以写成

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\mathcal{S}} \left|p_i^s - p_i^f\right| &= \alpha + (1-\alpha)\cdot p_A^f - p_A^f \\ &+ \sum_{i\in\mathcal{S}\setminus\{A\}} p_i^f - (1-\alpha)\, p_i^f \leq \alpha + \sum_{i\in\mathcal{S}\setminus\{A\}} \alpha p_i^f \leq 2\alpha\end{aligned}$$

证明 p^s 是 α-公平的。

为证明 SIMPLE-MIX 的福利保证，我们将证明比值 $V(p^s)/V(p^{\textsc{Opt}})$ 至少与 $\min\{\lambda, \alpha\lambda + (1-\alpha)^2\}$ 一样大。我们将分两种情况分析该比值。第一种情况是考虑 $V(p^f) \geq (1-\alpha)V(\text{OPT})$ 的情形。利用公式（12）中 $V(p^s)$ 的下界以及 $V(\text{OPT}) \geq V(p^{\textsc{Opt}})$ 这一事实，我们得到 $V(p^s)/V\left(p^{\textsc{Opt}}\right)$ 的下界为

$$\frac{\alpha\lambda V(\textsc{Opt}) + (1-\alpha)^2 V(\textsc{Opt})}{V\left(p^{\textsc{Opt}}\right)} \geq \alpha\lambda + (1-\alpha)^2.$$

正如所需。因此，我们转向第二种情况，即 $V(p^f) \leq (1-\alpha)V(\text{OPT})$。回想一下，利用公式（6），我们可以写出 $V(p^{\textsc{Opt}}) = \alpha V(\text{OPT}) + (1-\alpha)p^\alpha$。还要回想一下，公式（7）表明我们可以将 $p^f = (1-\alpha)p^\alpha + \alpha\tilde{p}^\alpha$ 表示为……，这意味着我们有 $p^\alpha = (p^f - \alpha\tilde{p}^\alpha)/(1-\alpha)$。现在结合以上结果，我们得到

$$\begin{aligned}V(p^{\textsc{Opt}}) &= \alpha V(\textsc{Opt}) + V(p^f) - \alpha V(\tilde{p}^\alpha) \\ &\leq \alpha V(\textsc{Opt}) + V(p^f)\end{aligned}$$

由于 $V(p^s) \leq \alpha\lambda V(\text{最优解}) + (1-\alpha)V(p^f)$，我们得到 $V(p^s)/V(p^{\textsc{Opt}})$ 的比率下界为 by

$$\frac{\alpha\lambda\cdot V(\textsc{Opt}) + (1-\alpha)\cdot V(p^f)}{\alpha\cdot V(\textsc{Opt}) + V(p^f)}. \tag{13}$$

现在，我们将分析上述表达式作为 $V(p^f)$ 的函数，并证明其下界为 $\min\{\lambda, \alpha\lambda + (1-\alpha)^2\}$。请注意，这足以完成我们的证明。因此，我们接下来证明，当 $V(p^f) \leq (1-\alpha)V(\text{最优解})$ 时，方程（13）中的表达式具有所需的下界。

为此，考虑函数 $h(x) = \alpha\lambda\cdot V(\textsc{Opt}) + (1-\alpha)\alpha\cancel{V \quad + x \quad (\textsc{Opt})}^{x}$，以及其导数 $h'(x)$，如下所示

$$\frac{\alpha(1-\alpha)\cdot V(\textsc{Opt}) - \alpha\lambda\cdot V(\textsc{Opt})}{\left(\alpha\cdot V(\textsc{Opt}) + x\right)^2}$$

我们注意到，函数 $h(\cdot)$ 在 $\lambda \leq (1-\alpha)$ 时递增，否则递减。如果 $h(\cdot)$ 递增，则$h(x) \geq h(0) = \lambda$ 成立；否则，如果 $h(\cdot)$ 递减，则有 $h(x) \geq h((1-\alpha)V(\text{最优解})) = \alpha\lambda + (1-\alpha)^2$ 对于 $x \leq (1-\alpha)V(\text{最优解})$。由此完成证明，所述结论成立。 □

4.1 SIMPLE-MIX 的福利保证是紧的

在本节中，我们证明，对于 $\alpha \in [0,1]$ 和 $\lambda \leq 1$，若满足以下任一条件：(i) $\alpha \leq 1-\lambda$ 或 (ii) $\lambda = 1$，则存在一个 $\mathcal{I}(V,\ p^f,\ \mathcal{M}_\lambda,\ \alpha)$ FWI 实例，使得如定理 SIMPLE-MIX所示，SIMPLE-MIX 的福利保证近似因子4.1 是紧的。

先来看 $\alpha \leq 1-\lambda$ 的第一种情况。首先注意，对于这种情况，我们有 $\min\{\lambda, \lambda\alpha+(1-\alpha)^2\} = \lambda$，因此需要证明 $V(p^s) = \lambda V(p^{\text{OPT}})$。现在考虑以下 FWI 实例，其中公平先验$p^f$ 使得其支撑集中的每个解的福利值均为 0，且机制 $\mathcal{M}_\lambda$ 的输出解A 满足 $V(A) = \lambda \cdot V(\text{最优解})$。注意，对于这样的实例，我们有 $V(p^f) = 0$，且 $V(p^\alpha) = 0$。因此，根据等式（6），可得 $V(p^{\text{OPT}}) = \alpha V(\text{最优解})$。此外，根据等式（11）以及 $V(A) = \lambda \cdot V(\text{最优解})$，还可得 $V(p^s) = \alpha\lambda V(\text{最优解}) = \lambda V(p^{\text{OPT}})$，证毕。

现在考虑第二种情况，即 $\lambda = 1$ 和 $0 \leq \alpha \leq 1$。首先注意，在这种情况下，我们有 $\min\{\lambda, \lambda\alpha+(1-\alpha)^2\} = \alpha + (1-\alpha)^2$；也就是说，要证明所需的紧性，只需构造一个满足以下条件的 FWI 实例：$V(p^s) = (\alpha+(1-\alpha)^2)V(p^{\text{OPT}})$。为此，考虑一个包含两个解 S_1 和 S_2 的实例，其中 $V(S_1) = 1$ 且$V(S_2) = 0$。此外，假设公平先验 p^f 在 S_1 上分配了 β 质量，在 S_2 上分配了 $1-\beta$ 质量，其中 $\beta \in [0,1]$。因此，我们有 $V(p^f) = \beta$。由于 $\lambda = 1$，我们知道机制 $\mathcal{M}_\lambda$ 必须输出解 S_1。这意味着我们可以写出 $V(p^s) = \alpha + (1-\alpha)\beta$，且 $V(p^{\text{OPT}}) = \min\{\alpha+\beta, 1\}$。现在，对于 $\beta = 1-\alpha$，我们得到 $V(p^{\text{OPT}}) = 1$，且 $V(p^s) = \alpha + (1-\alpha)^2 = (\alpha+(1-\alpha)^2)V(p^{\text{OPT}})$，如所需。由于以上结论对任意$\beta \in [0,1]$都成立，因此对任意 $\alpha \in [0,1]$ 也成立，从而证明了所述结论。

4.2 SIMPLE-MIX 的其他公平性性质

对于 FWI 的任意实例 $\mathcal{I}(V, p^f, \mathcal{M}_\lambda, \alpha)$，我们的算法 SIMPLE-MIX 输出的分布 p^s 具有以下附加性质：对于公平先验 p^f 支撑集中的任意解 $i \in \mathcal{S}$，也就是说，$p_i^f > 0, i$ 也属于 p^s 的支撑集。ε-MIX 也具有这一性质。然而，SIMPLE-MIX 实际上还具有以下更强的性质：

$$p_i^s \geq (1-\alpha) \cdot p_i^f \tag{14}$$

对于每个解 $i \in \mathcal{S}$，等号在 $i \neq A$ 时成立。这是因为 SIMPLE-MIX 以 $1-\alpha$ 的概率输出一个从公平先验中抽取的样本。因此，除了满足 α-公平性之外，SIMPLE-MIX 还保留了给定公平先验的支撑集，从而提供个体公平性保证。

现在考虑这样一种情形：我们的 FWI 框架对经典问题进行建模，即将一组 $[m]$ 个不可分割物品分配给一组 $[n]$ 个代理人。我们称一种分配为将物品划分为 n 个物品束、每位代理人各得一束的 n- 划分。因此，解空间 $\mathcal{S}$ 由所有可能的分配构成。代理人 $a \in [n]$ 具有估值函数 $u_a : \mathcal{S} \to \mathbb{R}_0^+$，该函数定义了她从分配 $i \in \mathcal{S}$中获得的效用 $u_a(i)$。注意，此时分布向量 $p \in \Delta$是一个随机分配，其中分配 i 以概率 p_i被选中。稍微滥用一下符号，对于任意 $p \in \Delta$，我们称她的效用 $u_a(p) = \sum_{i\in\mathcal{S}} p_i u_a(i)$ 为她从与分布 p相关联的随机分配中获得的期望效用。最后，价值函数 V可以对随机分配的社会福利 $V(p) = \sum_{a\in[n]} u_a(p)$ 或纳什社会福利 $V(i) = (\prod_{a\in[n]} u_a(p))^{1/n}$ 进行建模，其中该随机分配与 $p \in \Delta$相关联。

根据公式（14），我们得出，对于任意代理人 $a \in [n]$，她在 SIMPLE-MIX 的分布 p^s 中的效用至少为

$$\begin{aligned} u_a(p^s) &= \sum_{i\in\mathcal{S}} p_i^s \cdot u_a(i) \\ &\geq (1-\alpha) \sum_{i\in\mathcal{S}} p_i^f \cdot u_a(i) = (1-\alpha) \cdot u_a(p^f) \end{aligned}$$

她在公平先验中的效用的 $(1-\alpha)$ 倍，因此，除了具备 α公平性之外，还提供个体公平性保证。

5 实验

我们通过大规模实践评估补充理论分析。从理论上讲，ε-MIX 应能比 SIMPLE-MIX 带来更高的福利。然而，SIMPLE-MIX 的简洁性，以及它所具有的附带个体

公平性这一特性，不禁让人思考：两种算法在理论上的性能差距在实践中是否同样存在，还是 SIMPLE-MIX 才是更优的算法。我们针对两种主要场景开展了实验研究：分配和抽签选举。这两种场景都有自然的事前公平先验，也代表了我们框架的实际应用案例。我们考察了既反映事前公平机制随机轮转（RRR）也反映抽签选举的 FWI 实例。

对于 RRR，我们考虑了使用 AAMAS 数据集将论文与审稿人进行匹配的问题 [BETS22]。福利通过审稿人对所分配论文的平均偏好来衡量。具体而言，我们将这些问题建模为二分图中的加权 B-匹配，其中二分图的一侧对应审稿人，另一侧对应论文。RRR 首先生成一个随机排列。随后，审稿人按照该排列的顺序，从可用偏好列表的顶部以 GREEDY 方式选择论文。选择过程以循环方式重复，直到每篇论文都拥有足够多的审稿人。

对于抽签选举，我们使用了 Adults 数据集 [DG17], , 并沿用 [EKM+22] 的研究思路，将福利建模为规模为 k 的委员会中的选民代表性。每个个体都被视为欧几里得空间中的一个点。代表性被建模为个体与距离其最近的代表之间的（平方欧几里得）距离。规模为 k 的委员会的价值，是以所选委员会成员对应的点为中心、各自具有单位协方差矩阵的 k 个高斯分布构成的混合模型的似然。抽签机制首先选择一个使似然最大化的初始委员会，然后用随机选定的个体替换部分委员会成员。

总的来说，可以生成一个（合成）实例，使得 ε-MIX 与 SIMPLE-MIX 之间存在可检测的差距。对于现实世界实例，这种差距通常会消失，见图 1。因此，我们得出结论：SIMPLE-MIX 算法凭借其简单性、速度和附加公平性属性，至少从实证角度来看，是值得采用的算法。

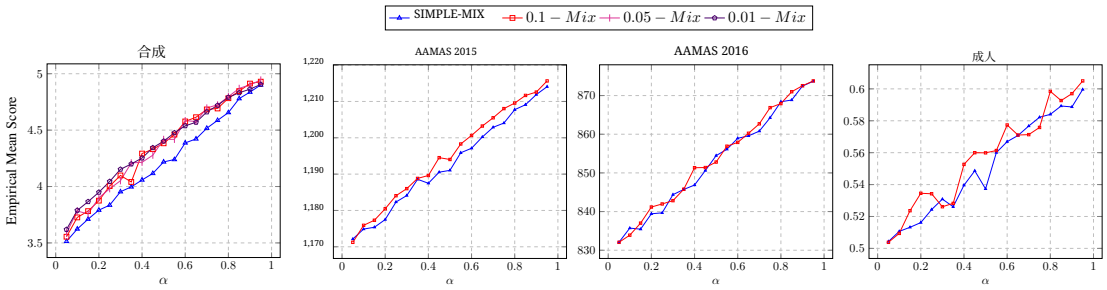

图 1：FWI 在不同场景下的平均得分，其中 $\alpha \in (0, 1]$

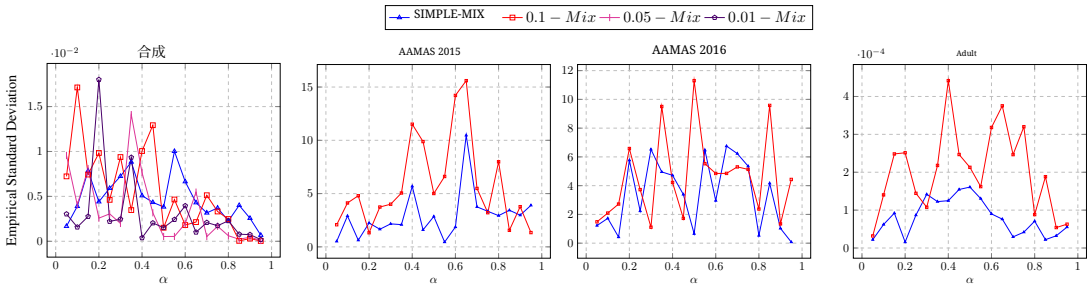

图 2：经　　与图中相应曲线对应的经验标准差　　见图1

5.1 数据集

对于竞价场景，我们使用一个合成数据集和一个现实世界竞价数据集 [BETS22]。对于抽签场景，我们使用来自 UCI Adults 的人口统计数据[DG17]。

合成：我们使用了一个概念验证合成数据集，模拟了这样一种设置： N_R件商品需要分配给 N_L名代理人。该数据是定义在

区间 $[0,1]$上的个均匀随机变量的结果。这些结果随后被用作一个完全连接的加权二分图的权重，该图的左侧有N_L 个节点，右侧有 N_R 个节点。当 N_R 和 N_L 取不同值时，结果见表1。

AAMAS：这两个竞价数据集部分包含了 2015 年和 2016 年审稿人对论文的偏好。数据由每位审稿人的偏好列表构成，标签为“是”“可能”“未回复”或“否”。基于这些数据，我们构建了一个完整的加权二分图，其中审稿人 N_L 作为左侧节点， N_R 论文作为右侧节点（参见表1 中 N_R 和 N_L的取值）。边的权重根据相应的标签确定，分别赋值为 $\{1, 1/2, 0, 0\}$。

UCI-Adult：这是抽签场景中使用的一个典型数据集。该数据集包含一系列与个人相关的人口统计特征。我们选择了以下特征：年龄、受教育年限、婚姻状况、关系、每周工作时长、种族和性别。去除重复项后，我们保留了 $N_P = 17749$个不同的个体。现在，我们定义点之间的度量。我们将分类特征进行1热编码，并将数值特征视为欧几里得空间中的坐标，这与 [EKM+22]类似。

场景	数据集		
		N_L	N_R
分配	AAMAS 2015	201	613
	AAMAS 2016	161	442
	合成	100	5
抽签选举		# 点	
	UCI-Adult	17749	

表 1：数据集

5.2 评估详情

我们对 $\alpha \in \{1/20, 2/20, \ldots, 19/20\}$（以及 $\varepsilon = 0.1$、0.05、0.01）运行了 SIMPLE-MIX 和 ε-MIX。对于 SIMPLE-MIX 和 ε-MIX 的每个 α （以及 ε）取值，我们将实验重复了 N_{rounds} 次，并报告经验均值。此外，我们报告了 N_{batch} 次运行中经验均值估计量的标准差（标准差见图 2）。此外，对于 Goods Bidding 数据集， ε-MIX 使用的公平先验样本数量 N_ε 仅取决于 ε。对于其他情况，我们选择了一个固定的样本数量 N_ε。表 2 详细列出了数字 N_{rounds}、 N_{batch} 和 N_ε。

数据集		N_ε	N_{rounds}		$N_{batches}$	
			SIMPLE-MIX	ε-MIX	SIMPLE-MIX	ε-MIX
AAMAS 2015		50	100	50	10	5
AAMAS 2016		50	100	50	10	5
合成	$\epsilon = 0.1$	$\lceil \frac{2397}{1-\alpha} \rceil$	100	50	10	5
	$\epsilon = 0.05$	$\lceil \frac{11805}{1-\alpha} \rceil$	100	50	10	5
	$\epsilon = 0.01$	$\lceil \frac{423865}{1-\alpha} \rceil$	100	50	10	5
UCI-Adult		50	20	10	5	5

表 2：实验规格。

5.2.1 FWI 实例：资源分配

在此数据集中，目标是将一组有限物品分配给一组代理人。也就是说，每件物品都必须有一条入边，这定义了我们的解空间 $\mathcal{S}$。价值函数 V通过对一组这样的边（共 5 条）求和计算得出。MAX-MATCHING [Gal86] 作为福利最大化机制 $\mathcal{M}_\lambda$，其近似因子为 1。公平

机制 p^f 的构建方式是先从 N_L 中无放回地选出 N_R 个代理人。然后，每位入选代理人按照偏好列表的顺序配对商品。

结果： 我们将图 1 中标题为“合成”的第一幅图称为 Synthetic。正如分析所预期的那样，我们看到 ε-MIX 的经验均值高于 SIMPLE-MIX。我们还注意到，随着 ε 减小，SIMPLE-MIX 与 ε-MIX 之间的差距会增大，这也符合预期，即 ε-MIX 会趋近于最优解。

5.2.2 FWI 实例：ReviewersMatching

为了为论文匹配数据集定义解空间 $\mathcal{S}$，我们对解设置如下约束：1）每篇论文应分配三名审稿人；2）两名审稿人所获得的论文数量之差不得超过一篇。当审稿人获得的论文数不超过 $\lceil 3 \cdot N_R/N_L \rceil$ 时，当且仅当满足该条件，后一项约束才成立。因此，在 AAMAS 2015 中，每名审稿人获得的论文数不超过九篇；在 AAMAS 2016 中不超过十篇。价值函数 V 被定义为此类解中所有选定边的总和。

福利最大化机制 $\mathcal{M}_\lambda$ 使用 GREEDY。GREEDY 算法的步骤如下：按权重对所有边排序。选取权重最高的边，前提是它仍满足上述两个约束。

公平先验通过重复以下流程生成，直到每篇论文都分配到三位审稿人为止：不放回地抽取所有审稿人。按照抽取顺序，让审稿人从尚未分配到三位审稿人的论文中，选择自己最喜欢的一篇。

结果：我们将图1中标题为 AAMAS15 的第二幅图称为 AAMAS15。这里可以看到， ε-MIX 和 SIMPLE-MIX 的经验均值图表明， ε-MIX 略胜于 SIMPLE-MIX。对于 AMMAS16 图， ε-MIX 略微领先的这一趋势则不太明显，甚至可能并不存在。

5.2.3 FWIInstance：抽签选举

在此任务中，我们旨在找出一组由 N_K 人组成、能够代表公众的群体。因此，我们将解空间$\mathcal{S}$ 定义为由整个集合中的 N_K 个体组成的子集族。价值函数定义如下。我们通过 N_K-均值目标来衡量代表性；给定由 N_K 位代表组成的集合 K，我们考虑代价函数 $\log(\mathcal{L}(K|P)) = \sum_{p\in P} \min_{k\in K} \|p-k\|^2$，它是由 N_K 个单变量高斯分布构成的混合分布的负对数似然，并以价值函数

$$\mathcal{L}(K|P)) := \prod_{p\in P} \exp(-\min_{k\in K} \|p-k\|^2) \cdot C,$$

其中， C 是一个绝对常数。

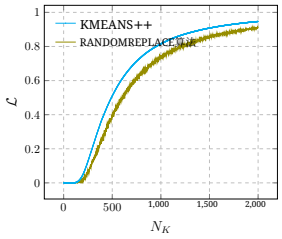

图3：中心点 K 的数量会影响似然 $\mathcal{L}$

我们使用 RANDOMREPLACE [EKM+22] 作为公平先验 p^f （这是一种抽签机制），并使用 KMEANS++ [AV07] 作为福利最大化机制 $\mathcal{M}_\lambda$。我们通过 KMEANS++ 初始化 RANDOMREPLACE 的候选面板，并设置 $q = \lfloor 3/4 \cdot N_K \rfloor$。随后，我们选出 q 个中心点，并将选定的中心点 c 替换为从 q 个最近邻点中均匀随机选取的一个点 c。我们考虑了 N_K 从 1 到 2000 的所有取值范围。随着 N_K 增大，评估得分逐渐接近 1，如图 3 所示。为测试公平机制，在图 1 的 α 区间测试中，我们固定了 $N_K = 600$。

结果：就代表性而言，纯粹优化似然始终能获得更好的数值。尽管如此，抽签机制将一些输入点加入候选中心点集合，而优化算法始终会避开这些点，因此在代表性与某些个体有机会入选之间取得了平衡。与其他算法一样，我们的机制也能在这两种解之间无缝插值。

参考文献

[AAB+22] Georgios Amanatidis、Haris Aziz、Georgios Birmpas、Aris Filos-Ratsikas、Bo Li、Herv´e Moulin、Alexandros A Voudouris 和 Xiaowei Wu。不可分物品的公平分配：综述。arXiv预印本，arXiv:2208.08782，2022。[AAGW15] Martin Damyanov Aleksandrov、Haris Aziz、Serge Gaspers 和 Toby Walsh。在线公平分配：分析食物银行问题。载于第24届国际人工智能联合会议（IJCAI）论文集，2015。[AB22] Haris Aziz 和 Florian Brandl。警觉进食规则：一种面向有约束概率经济设计的通用方法。《博弈与经济行为》，135：168–187，2022。[ABKR19] Eshwar Ram Arunachaleswaran、Siddharth Barman、Rachitesh Kumar 和 Nidhi Rathi。以连通份额实现公平且高效的蛋糕分割。载于第15届国际网络与互联网经济学会议（WINE）论文集，第57–70页。施普林格，2019。[AMS20] Haris Aziz、Herv´e Moulin 和 Fedor Sandomirskiy。一种计算帕累托最优且近似比例分配的多项式时间算法。《运筹学快报》，48(5)：573–578，2020。[AS98] Atila Abdulkadiro˘glu 和 Tayfun S¨onmez。房屋分配问题中的随机序列独裁与随机禀赋所形成的核心。《计量经济学》，66(3)：689–701，1998。[AV07] David Arthur 和 Sergei Vassilvitskii。K-means++：精心选择种子的优势。载于第十八届ACM-SIAM离散算法年度研讨会论文集，SODA ’07，第1027–1035页，美国，2007。工业与应用数学学会。[Azi19] Haris Aziz。投票、分配、匹配与联盟形成的概率方法。载于《经济设计的未来》，第45–50页。施普林格，2019。[Azi20] Haris Aziz。同时实现事前公平与事后公平。载于第18届国际网络与互联网经济学会议（WINE）论文集，第341–355页。施普林格，2020。[BBS20] Siddharth Barman、Umang Bhaskar 和 Nisarg Shah。不可分物品公平代价的最优界。载于国际网络与互联网经济学会议论文集，第356–369页。施普林格，2020。[BCKM13] Eric Budish、Yeon-Koo Che、Fuhito Kojima 和 Paul Milgrom。随机分配机制的设计：理论与应用。《美国经济评论》，103(2)：585–623，2013。[BCM16] Sylvain Bouveret、Yann Chevaleyre 和 Nicolas Maudet。不可分物品的公平分配。载于《社会选择手册》。剑桥大学出版社，2016。[BETS22] Rafael Bordini、Edith Elkind Elkind、John Thangarajah 和 David Shield。Preflib：AAMAS竞标数据（00037）。https://www.preflib.org/dataset/00037，2022。[BL16] Sylvain Bouveret 和 Michel Lemaˆıtre。运用标准尺度刻画不可分物品公平分配中的冲突。载于第15届自主智能体与多智能体系统会议（AAMAS）论文集，第259–290页。施普林格，2016。[BM01] Anna Bogomolnaia 和 Herv´e Moulin。随机指派问题的一种新解。《经济理论杂志》，100(2)：295–328，2001。[BT96] Steven J Brams 和 Alan D Taylor。公平分割：从蛋糕切分到争端解决。剑桥大学出版社，1996。[Bud11] Eric Budish。组合指派问题：来自平等收入的近似竞争均衡。《政治经济学杂志》，119(6)：1061–1103，2011。

[CKK21] Ioannis Caragiannis、Panagiotis Kanellopoulos 和 Maria Kyropoulou。《关于临时无嫉妒分配彩票》。载于第22届ACM经济学与计算会议（EC）论文集，第264–284页，2021年。[CKM+19] Ioannis Caragiannis、David Kurokawa、Herv´e Moulin、Ariel D Procaccia、Nisarg Shah 和 Junxing Wang。《最大纳什福利的荒谬公平性》。ACM经济学与计算汇刊，7(3):1–32，2019年。[CS02] Yan Chen 和 Tayfun S¨onmez。《改善校内住房分配效率：一项实验研究》。《美国经济评论》，92(5):1669–1686，2002年。[DG17] Dheeru Dua 和 Casey Graff。UCI机器学习库，2017年。[EKM+22] Soroush Ebadian、Gregory Kehne、Evi Micha、Ariel D. Procaccia 和 Nisarg Shah。《抽签选举是否兼具代表性与公平性？》载于Alice H. Oh、Alekh Agarwal、Danielle Belgrave 和 Kyunghyun Cho（编），《神经信息处理系统进展》，2022年。[FGG+21] Bailey Flanigan、Paul G¨olz、Anupam Gupta、Brett Hennig 和 Ariel D Procaccia。《用于选拔公民议会的公平算法》。《自然》，596(7873):548–552，2021年。[FSV20] Rupert Freeman、Nisarg Shah 和 Rohit Vaish。《两全其美：资源分配中的事前与事后公平》。载于第21届ACM经济学与计算会议（EC）论文集，第21–22页，2020年。[Gal86] Zvi Galil。《在图中寻找最大匹配的高效算法》。ACM计算机调查，18(1):23–38，1986年3月。[HZ79] Aanund Hylland 和 Richard Zeckhauser。《将个人高效分配至职位》。《政治经济学杂志》，87(2):293–314，1979年。[Mou04] Herv´e Moulin。《公平分割与集体福利》。麻省理工学院出版社，2004年。[NRR13] Trung Thanh Nguyen、Magnus Roos 和 J¨org Rothe。《多智能体资源分配中社会福利优化的可近似性与不可近似性结果综述》。《数学与人工智能年刊》，68(1):65–90，2013年。[PM16] Ariel D. Procaccia 和 Herv´e Moulin。《切蛋糕算法》，第311–330页。剑桥大学出版社，2016年。[RR10] Magnus Roos 和 J¨org Rothe。《多智能体资源分配中社会福利优化的复杂性》。载于第9届自主智能体与多智能体系统国际会议（AAMAS）论文集，第641–648页，2010年。[RW98] Jack Robertson 和 William Webb。《切蛋糕算法：能公平就公平》。AK Peters/CRC出版社，1998年。[SK02] Steven Shavell 和 Louis Kaplow。《公平与福利》。哈佛大学出版社，2002年。[Str80] Walter Stromquist。《如何公平地切蛋糕》。《美国数学月刊》，87(8):640–644，1980年。[Str08] Walter Stromquist。《有限协议无法实现无嫉妒切蛋糕分配》。《组合学电子期刊》，15(1):R11，2008年。