arXiv:2302.03077v1 [math.GR] 6 Feb 2023

仅有光滑斜态射的循环群分类

´ ´KAN HU*、ISTVAN KOVACS 和 YOUNG SOO KWON

Abstract. 有限群 A 上的斜态射是一个置换 φ，它固定单位元，并且存在一个定义在 A 上的整数值函数 π，使得$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi^{\pi(a)}(b)$ 对所有 $a, b \in A$均成立。若斜态射 φ 的定义域为 A，且相应的幂函数 π 在 φ的轨道上为常数，则称其为光滑斜态射；也就是说，对所有 $a \in A$，$\pi(\varphi(a)) \equiv \pi(a) \pmod{|\varphi|}$。本文证明，阶为 n 的循环群上的每个斜态射都是光滑斜态射，当且仅当 $n = 2^e n_1$，其中 $0 \le e \le 4$，且 n_1 是奇平方自由数。本文还给出了关于非循环阿贝尔群的类似问题的部分解答。

1. Introduction

群 A 的斜态射是 A 的一个置换 φ，它固定 A 的单位元，并且存在函数 $\pi: A \to \mathbb{Z}$，使得

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi^{\pi(a)}(b) \text{ for all } a, b \in A.$$

函数 π 称为与 φ 相关联的幂函数。若固定 φ，则 π 的取值模 $|\varphi|$ 唯一确定，其中 $|\varphi|$ 表示 φ 的阶，因此，π 也可定义为从 A 到 $\mathbb{Z}_{|\varphi|}$ 的函数。显然，若对所有 $a \in A$ 都有 $\pi(a) = 1$，则 φ 是 A 的自同构。不是自同构的斜态射称为真斜态射。

斜态射这一概念提出，用于刻画正则凯莱映射。这里不展开细节：˘对于群 A 的凯莱映射 M =CM(A, X, P)，其中 X 是 A 的逆封闭生成子集，P 是 X 的循环置换，研究表明，M 是正则的，当且仅当 P 可扩展为 A [17, 的斜态射（定理 1]）。

Sin ajn [17] 提出，用于刻画正则凯莱映射。这里不展开细节：˘对于群 A 的凯莱映射 M =CM(A, X, P)，其中 X 是 A 的逆封闭生成子集，P 是 X 的循环置换，研究表明，M 是正则的，当且仅当 P 可扩展为 A [17, 的斜态射（定理 1]）。

斜态射与具有一个循环因子的有限群的互补分解密切相关。群的互补分解是指：该群可以写成乘积，其中相应的两个因子是该群的子群。设某个对象是某个对象的斜态射。对于某个对象，令某个对象表示作用于某个对象上的置换，其对所有相应对象的作用方式为相应形式，并令某个对象等于相应形式。不难证明，某个对象的置换群具有互补分解。这个群称为由相应对象诱导的斜积群。

2010年数学学科分类：05C10、05C25、57M15。关键词和短语：斜态射、群分解、可解群。第一作者和第二作者获得了斯洛文尼亚研究局（ARRS）的资助；第一作者获得了研究项目 N1-0208 的资助，第二作者获得了研究计划 P1-0285 以及研究项目 J1-1695、N1-0140、J1-2451、N1-0208 和 J1-3001 的资助。第三作者获得了韩国国家研究基金会（NRF）通过教育部资助的基础科学研究计划（2018R1D1A1B05048450）的资助。

* 通讯作者电子邮箱：kan.hu@famnit.upr.si。

反过来，设 G是任意一个具有互补分解$G = AY$的群，其中 Y是一个循环子群，且它在 G中是无核的。固定一个生成元 y 属于 Y。那么对于每个 $a \in A$，都存在唯一的元素 $b \in A$ 和唯一的数 $j \in \mathbb{Z}_{|y|}$使得 $ya = by^j$。定义映射 $\varphi\colon\ A \to A$ 以及 $\pi\colon\ A \to \mathbb{Z}_{|y|}$ 如下：

$$\varphi(a) = b \text{ and } \pi(a) = j \quad \stackrel{\text{def}}{\iff} \quad ya = by^j \text{ for all } a \in A. \tag{1}$$

于是， φ 和 π 定义良好， φ 是 A的斜态射，而 π 是与 φ [5, 相关联的幂函数（命题 3.1(a)）]。

针对给定的无限群族，正则凯莱映射、斜态射和斜积群已得到深入研究。一般而言，这似乎是一个颇具挑战性的问题，因为即使对于循环群，斜态射的完整分类也尚未完成；已完成的只有著名的正则凯莱映射分类 [7], ，以及斜态射和斜积群的部分分类 [1, 3, 8, 14, 19, 20]。对于初等阿贝尔 p群，文献 [9, 10]给出了斜积群的刻画以及正则凯莱映射的完整分类。对于二面体群，正则凯莱映射已得到分类 [18]，而作者最近给出了斜积群的刻画 [13]。对于非阿贝尔单群（更明确地说，单核群）以及非阿贝尔特征单群，斜态射和斜积群均已得到分类；与此相对，关于正则凯莱映射的已知结果却寥寥无几 [2, 4]。

本文将继续研究循环群的斜态射。群 A的斜态射 φ 称为光滑斜态射，如果相应的幂函数 π满足以下条件：

$$\pi(\varphi(a)) \equiv \pi(a) \pmod{|\varphi|} \text{ for all } a \in A. \tag{2}$$

显然，每个自同构都是光滑的，但反之一般并不成立。光滑斜态射由 Hu [12] 定义，Bachrat´y 和 Jajcay [3] 也独立地将其定义为陪集保持斜态射。循环群和二面体群的光滑斜态射分别由 Bachrat´y 和 Jajcay [3] （另见 [15, 定理 16] ，其中给出了另一种证明）以及 Wang 等人 [22],进行了分类。为了阐明自同构与光滑斜态射之间更微妙的关系，我们需要引入循环群斜态射互反对的概念。设（φ， $\tilde{\varphi}$）是一对循环群 $\mathbb{Z}_m$ 和 $\mathbb{Z}_n$的斜态射 φ 和 $\tilde{\varphi}$ ，且 π 和 $\tilde{\pi}$ 分别是 φ 和 $\tilde{\varphi}$的相应幂函数。那么，如果（φ， $\tilde{\varphi}$）满足以下条件，则称其为互反对：

(a) $|\varphi|$ 整除 n ，且 $|\tilde{\varphi}|$ 整除 m;
(b) 对所有 $x \in \mathbb{Z}_m$ 和 $y \in \mathbb{Z}_n$,

$$\begin{aligned} \pi(x) &\equiv -\tilde{\varphi}^{-x}(-1) \pmod{|\varphi|}, \\ \tilde{\pi}(y) &\equiv -\varphi^{-y}(-1) \pmod{|\tilde{\varphi}|}. \end{aligned}$$

定理 [11, 3.5] 表明，对于固定的 m 和 n，底图为完全二部图$K_{m,\,n}$ 的正则嵌入图的同构类，与分别作用于 $\mathbb{Z}_m$ 和 $\mathbb{Z}_n$的斜态射的互逆对（φ， $\tilde{\varphi}$）之间存在一一对应关系；此外，如果其中一个斜态射是自同构，则另一个必然是光滑的 [15, 引理 12]。

Kov´acs 和 Nedela [19, 定理 6.3] 证明了：循环群 $\mathbb{Z}_n$ 的每个斜态射是自同构，当且仅当 $n = 4$ 或 $\gcd(n, \phi(n)) = 1$，其中ϕ 是欧拉函数。最近，Bachrat´y [1] 证明了，当 $n = pq$、$4p$、$8p$、$16p$ 或 pqr成立时，$\mathbb{Z}_n$的每个斜态射都是光滑的，其中 p、q、r是互不相同的素数。我们的第一个定理如下，这是对上述结果的推广。

定理 1.1. 循环群 $\mathbb{Z}_n$ 的每个斜态射都是光滑的，当且仅当 $n = 2^e n_1$，其中 $0 \le e \le 4$ 和 n_1 是奇平方自由数。

定理 1.1 的证明依赖于群论和斜态射理论中的一些预备结果，这些结果将在下一节中汇总。

Conder 等人 [5] 对具有所有斜态射都是自同构这一性质的非循环阿贝尔群进行了分类。研究表明，这些群恰好是初等阿贝尔 2-群 [5, 定理 7.5]。本文还提出研究具有所有斜态射都是光滑这一性质的非循环阿贝尔群。

问题 1. 对仅承载光滑斜态射的有限非循环阿贝尔群进行分类。

在第 5 节中，我们给出以下部分答案。

定理 1.2. 设 A 是一个阶为 $n = 2^f n_1$ 的非循环阿贝尔群，其中 $f \ge 0$ 和 n_1 为奇数。若 A 仅承载光滑斜态射，则 n_1 无平方因子，且 A 的西罗 2-子群不含任何与 $\mathbb{Z}_{2^e}$ （$e \ge 5$）同构的直因子。

2. Preliminaries

2.1. 群论。本文中的所有群均为有限群。我们用 1_G 表示群 G 的单位元，用 $|G|$ 表示其阶。元素 $g \in G$ 的阶记为 $|g|$。设 H 是群 G 的一个子群。H 在 G 中的核是包含于 H 的最大正规子群；若该核是平凡的，则称 H 在 G 中无核。此外，C_G（H）表示 H 在 G 中的中心化子。若 p 是素数，则 G 的最大正规 p-子群记为 O_p（G）。G 的最大正规幂零子群称为 G 的 Fitting 子群，记为 F（G）。

命题 2.1（[21, 7.4.3，7.4.7]）。设 G 是一个有限群，$\wp = \{p_1, \ldots, p_k\}$ 是 $|G|$的所有素因子的集合。那么
(a) $F(G) = \prod_{i=1}^{k} O_{p_i}(G)$。(b) 若 G 是一个可解群，
则 $C_G(F(G)) \le F(G)$。

如果群 G 存在一个如下序列，则称其为超可解群

$$1 = N_0 < N_1 < \cdots < N_k = G$$

G 的正规子群，使得对每个 i, $1 \le i \le k$，$|N_i/N_{i-1}|$ 都是素数。以下结果众所周知。。

命题 2.2（[21, 13.2.9，13.3.1]）。设群 G 有一个分解 $G = AB$。

(a) 若 A 和 B 都是幂零的，则 G 是可解的。(b) 若 A 和 B 都是循环的，则 G 是超可解的。

以下事实通常被称为超可解群的西洛塔性质。

命题 2.3（[21, 7.2.19]）。设 G 为超可解群，且设 P_i 为 G的西洛 p_i 子群，其中 $\wp = \{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$ 构成 $|G|$的素因子集合。若对所有 i，素因子按 $p_i > p_{i+1}$ 排序，则对于每个 k，乘积 $\prod_{i=1}^{k} P_i$是 G的正规子群。

设 $\wp$为素数集合。若正整数 n 的每个素因子都属于 $\wp$，则称 n 为 $\wp$-数。若 n 没有任何素因子属于 $\wp$，则称 n 为 $\wp'$-数。若正因子 d 满足 $\gcd(d, n/d) = 1$，则称其为 n 的霍尔因子；也就是说，存在某个素数集合$\wp$，使得 d 是一个 $\wp$-数，而 n/d 是一个 $\wp'$-数。若一个群的阶是 $\wp$-数，则称其为 $\wp$-群。若群 G的子群 H 是 $|G|$的霍尔因子，则称其为霍尔子群。因此，当且仅当存在某个素数集合 $\wp$，使得H 是 G 的 $\wp$-子群，且 $|G : H|$ 是一个 $\wp'$-数时， H 才是 G 的霍尔子群；此时， H 也称为 G的霍尔 $\wp$-子群。特别地，若 $\wp = \{p\}$ 仅由一个素数组成，则霍尔$\wp$-子群确实是一个西罗 p-子群。

命题 2.4（[16,Kapitel VI, Satz 1.8]）。设 G 是一个可解群， $\wp$ 是由 $|G|$的若干素因子组成的集合。则有:
(a) G 含有一个 Hall $\wp$-子群。(b) 所有 Hall $\wp$-子群在 G中共轭。
(c) G的每个 $\wp$-子群都包含在 G的某个 Hall $\wp$-子群中。

若 $K \leq \mathrm{Aut}(G)$ 且 $H \leq G$，则称 H 为 K-不变的，若对于每个$\sigma \in K$，都有 $\sigma(H) = H$。我们将用到下面这个简单引理。
引理 2.5。设 $N \cong \mathbb{Z}_p^2$ 是素数 p 的.....，且 $K \leq \mathrm{Aut}(N)$，满足 $|K|$ 与 p 互素，并且 N 含有一个阶为 p的 K-不变子群。则 K 同构于 $\mathbb{Z}_{p-1}^2$的一个子群。

证明。由于 $|K|$ 与 p 互素，根据马施克定理（见 [21, 12.1.2]），我们有 $N = N_1 \times N_2$，其中 N_1 和 N_2 是 N 的 K- 不变子群，且满足 $N_1 \cong N_2 \cong \mathbb{Z}_p$。因此， $K \leq \mathrm{Aut}(N_1) \times \mathrm{Aut}(N_2) \cong \mathbb{Z}_{p-1}^2$。□

假设 G 在有限集 Ω 上作用。对于元素 $x \in \Omega$，我们用 G_x 表示 x 在 G 中的稳定子，用 $\mathrm{Orb}_G(x)$ 表示包含 x 的 G-轨道，并用 $\mathrm{Orb}_G(\Omega)$ 表示所有 G-轨道组成的集合。我们用 $\mathrm{Sym}(\Omega)$ 表示由 Ω 的所有置换组成的对称群，并用 id_Ω 表示恒等置换。以下陈述是已知的。它将在下一节中用到几次，因此我们在此记录。

引理 2.6. 设 $G \leq$Ω 上的对称群是一个包含正则阿贝尔子群 A 的群，并假设 $N \lhd G$。那么，对某个子群 $B \leq A$，有 $\mathrm{Orb}_N(\Omega) = \mathrm{Orb}_B(\Omega)$。
证明. 众所周知，$\mathrm{Orb}_N(\Omega)$ 是 G 的一个区组系。令 K 为 G 在 $\mathrm{Orb}_N(\Omega)$ 上作用的核。容易验证，$\mathrm{Orb}_{K\cap A}(\Omega) = \mathrm{Orb}_N(\Omega)$。□

设 $\alpha_i \in \Omega$ 上的对称群$_i$， $i = 1$， 2。直积 $\alpha_1 \times \alpha_2$ 定义为 $\Omega_1 \times \Omega_2$ 上按如下方式作用的置换

$$(\alpha_1 \times \alpha_2)((x_1, x_2)) = (\alpha_1(x_1), \alpha_2(x_2)) \text{ for all } (x_1, x_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2.$$

对于素数 p，仿射群 $\mathrm{AGL}(1, p)$ 由有限域 $\mathbb{F}_p$ 上形如 $x \mapsto ax + b$ 的置换组成，其中 a、$b \in \mathbb{F}_p$ 和 $a \neq 0$。伽罗瓦早已得知以下结果。

命题 2.7（[16, Kapitel II, 3.6 Satz]）。设 $G \leq \Omega$ 上的对称群是一个传递可解群，且 $|\Omega| = p$ 对应一个素数 p。则 G 同构于 $\mathrm{AGL}(1, p)$ 的一个子群。

2.2. 斜态射。对于群 A 的一个斜态射 φ 及其对应的幂函数 π，众所周知，子集

$$\operatorname{Ker}\varphi := \{x \in A : \pi(x) \equiv 1 \pmod{|\varphi|}\}$$

是 A 的子群，称为 φ [17] 的核。斜态射 φ 是保核的，当且仅当 $\varphi(\operatorname{Ker}\varphi) = \operatorname{Ker}\varphi$。此外，子集

$$\operatorname{Core}\varphi := \bigcap_{i=1}^{|\varphi|} \varphi^i(\operatorname{Ker}\varphi)$$

是 A 在斜积群 $G = A\langle\varphi\rangle$ [15, 中的核。命题 6]。众所周知，φ 是保核的，当且仅当 $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Core}\varphi$。$\operatorname{Ker}\varphi$ 的以下性质是众所周知的。

命题 2.8（[5, 6, 17]）。设 φ 是有限群 A 的斜态射，其关联幂函数为 π。则有以下结论：

(a) 对所有 a、$b \in A$、π，$(a) = \pi(a)$ 当且仅当 $ab^{-1} \in \operatorname{Ker}\varphi$。(b) 若 A 是阿贝尔群，则 φ 是保核的。(c) 若 A 非平凡，则核 $\operatorname{Ker}\varphi$ 也非平凡。

指标 $|A : \operatorname{Ker}\varphi|$ 称为 φ的斜型。注意，$\operatorname{Ker}\varphi = A$ 当且仅当φ 是 A的自同构。利用这一观察和命题 2.8(c)，可得以下推论。

推论 2.9. 若 p 是素数，则 $\mathbb{Z}_p$ 的所有斜态射都是自同构。

群 A 和 B上的斜态射的直积不一定是群 $A \times B$上的斜态射。以下判据将会很有用。

命题 2.10 ([23]). 设 $G = A \times B$，且 φ和 ψ分别是 A和B 的斜态射，其相应的幂函数分别为 π_φ 和 π_ψ。
(a) 直积 $\varphi \times \psi$ 是 G 的斜态射，当且仅当

$$\pi_\varphi(a) \equiv \pi_\psi(b) \equiv 1 \pmod{d} \text{ for all } a \in A \text{ and } b \in B,$$

其中 $d =$ 是$|\varphi|$与 $|\psi|$的最大公约数。
(b) 假设 $\varphi \times \psi$是 G的一个斜态射，其对应的幂函数为 π。那么对所有 $a \in A$ 和 $b \in B$,

$$\pi((a,b)) \equiv \pi_\varphi(a) \pmod{|\varphi|} \quad \text{and} \quad \pi((a,b)) \equiv \pi_\psi(b) \pmod{|\psi|}.$$

最后，如果 φ 是群 A的一个斜态射，且 θ 是 A的一个自同构，那么$\theta\varphi\theta^{-1}$ 也是 A 的一个斜态射（见 [22, 引理 2.2]），因此自同构群 Aut(A)通过共轭作用于 A的斜态射集合。若斜态射φ 和 ψ 属于此作用的同一轨道，则称它们等价。

3. Constructions

本节中，对于某些 n，我们构造循环群 $\mathbb{Z}_n$的非光滑斜态射。下面的引理非常有用。

引理 3.1. 设 $G = A \times B$，且 φ 和 ψ 分别是 A 和 B 的斜态射。若 $\varphi \times \psi$ 是 $A \times B$ 的斜态射，则 $\varphi \times \psi$ 是光滑的，当且仅当 φ 和 ψ 都是光滑的。

证明. 设 π、π_φ 和 π_ψ 分别是与 $\varphi \times \psi$、φ 和 ψ 相关联的幂函数。假设 $\varphi \times \psi$ 是光滑的。对于任意 $a \in A$，根据命题 2.10(b)，有

$$\pi((\varphi \times \psi)(a, 1_B)) = \pi(a, 1_B) \equiv \pi_\varphi(a) \pmod{|\varphi|}$$

and

$$\pi((\varphi \times \psi)(a, 1_B)) = \pi(\varphi(a), 1_B) \equiv \pi_\varphi(\varphi(a)) \pmod{|\varphi|}.$$

这意味着 $\pi_\varphi(\varphi(a)) \equiv \pi_\varphi(a)$（模 $|\varphi|$），因此 φ 是光滑的。同样，ψ 也是光滑的。

反之，假设 φ 和 ψ 都是光滑的。那么对于任意 $(a, b) \in A \times B$，根据命题 2.10(b)，我们还有

$$\pi((\varphi \times \psi)(a, b)) = \pi(\varphi(a), \psi(b)) \equiv \pi_\varphi(\varphi(a)) \equiv \pi_\varphi(a) \equiv \pi(a, b) \pmod{|\varphi|}$$

and

$$\pi((\varphi \times \psi)(a, b)) = \pi(\varphi(a), \psi(b)) \equiv \pi_\psi(\psi(b)) \equiv \pi_\psi(b) \equiv \pi(a, b) \pmod{|\psi|}.$$

这意味着 $\pi((\varphi\times\psi)(a, b)) \equiv \pi(a, b)$（模 $|\varphi\times\psi|$），因此 $\varphi\times\psi$ 是光滑的。 □

对于正整数 s 和 t，我们定义 $\tau(s, t) := \sum_{i=1}^{t} s^{i-1}$. 对于满足$n \geq 1$的整数 n 和 r，如果最大公约数$(r, n) = 1$，则记作 $r \in \mathbb{Z}_n^*$。在这种情况下，r 在 $\mathbb{Z}_n$中的乘法阶定义为满足 $r^l \equiv 1$（模 n）的最小正整数 l。

命题 3.2（[3, 15]）。对于 $n > 1$，$\mathbb{Z}_n$ 的真光滑斜态射及其相应的幂函数由下式给出

$$\varphi(x) \equiv x + rk\frac{\tau(s, t)^x - 1}{\tau(s, t) - 1} \pmod{n} \text{ and } \pi(x) \equiv t^x \pmod{m}, \tag{3}$$

其中，$k > 1$ 是 n的真因子，$r \in \mathbb{Z}_{n/k}$、$s \in \mathbb{Z}_{n/k}^*$ 和 $t \in \mathbb{Z}_m^*$ 是满足以下条件的正整数:

(a) m 是满足 $r\sum_{i=1}^{m} s^{i-1} \equiv 0$（模 n/k）的最小正整数。(b) t 在 $\mathbb{Z}_m$中的乘法阶为 k。(c) $s - 1 \equiv r\big((\sum_{i=1}^{t} s^{i-1})^k - 1\big)/(\sum_{i=1}^{t} s^{i-1} - 1)$（模 n/k）。(d) $s^{t-1} \equiv 1$（模 n/k）。

此外，k 等于 φ的斜型，而 m 等于 φ的阶。

我们指出，尽管 $\mathbb{Z}_n$ 的所有光滑斜态射都已确定，但从命题 3.2 中并不清楚对于哪些 n，群 $\mathbb{Z}_n$ 存在非光滑斜态射。我们还注意到，在 (3) 中，$\mathbb{Z}_n$ 的真光滑斜态射均由 $\mathbb{Z}_n$ 上的指数函数定义。相比之下，众所周知，$\mathbb{Z}_n$ 的每个自同构都是形如 $x \mapsto rx$ 的线性函数，其中 $r \in \mathbb{Z}_n^*$。令人惊讶的是，文献 [14] 指出，$\mathbb{Z}_n$ 的那些作为自同构平方根的真斜态射，是环 $\mathbb{Z}_n$ 上的二次多项式。

命题 3.3（[14]）。每个满足 φ^2 的 $\mathbb{Z}_n$ 的真斜态射 φ，若其为 $\mathbb{Z}_n$ 的自同构，则等价于如下形式的斜态射

$$\varphi(x) \equiv sx - \frac{x(x-1)n}{2k} \pmod{n},$$

其中 k 和 s 是满足以下条件的正整数:
(a) 若 k 为奇数，则 k^2 整除 n 和 $s \in \mathbb{Z}_n^*$；若 k 为偶数，则 $2k^2$ 整除 n 和 $s \in \mathbb{Z}_{n/2}^*$。

(b)（模 k），s 在 $\mathbb{Z}_{n/k}$ 中的乘法阶为 2ℓ，且 w 与 k 的最大公约数为 $=1$，其中

$$w \equiv \frac{k}{n}(s^{2\ell}-1) - \frac{s(s-1)}{2}\ell \pmod{k}.$$

φ 的斜型等于 k，且 φ 的阶等于 $m:=2k\ell$，最后，φ 的幂函数为

$$\pi(x) \equiv 1 + 2xw'\ell \pmod{m},$$

其中，w' 由同余式 $w'w \equiv 1$(模 k)确定。

我们已准备好证明，对于某些 n，$\mathbb{Z}_n$ 承载一个非光滑斜态射。

引理 3.4。(a) 对任意 $e \geq 2$，循环群 $\mathbb{Z}_{p^e}$ 承载一个非光滑斜态射，其中 p 是奇素数。

(b) 对任意 $e \geq 5$，循环群 $\mathbb{Z}_{2^e}$ 存在一个非光滑斜态射 $m.$

证明。（a）在命题 3.3 中，取 $n := p^e$，其中 $e \geq 2$，并设 $k := p$，$s := -1$。于是 $\ell = 1$，$w = w' = -1$ 且 $m = 2p$。容易验证所述条件均成立，因此我们得到 $\mathbb{Z}_{p^e}$ 上的一个斜态射，其对应的幂函数为

$$\varphi(x) \equiv -x - p^{e-1}\frac{x(x-1)}{2} \pmod{p^e} \quad \text{and} \quad \pi(x) \equiv 1 - 2x \pmod{2p}.$$

由于 $\pi(\varphi(1)) \equiv \pi(-1) \equiv 3$(模 $2p$) 且 $\pi(1) \equiv -1$(模 $2p$)，我们有 $\pi(\varphi(1)) \not\equiv \pi(1)$ (模 $2p$)，因此 φ 不是光滑的。

（b）在命题 3.3 中，令 $n := 2^e$，其中 $e \geq 5$，并取 $k := 4$ 和 $s := -1$。与前面一样，我们有 $\ell = 1$，$w = w' = -1$ 且 $m = 8$。容易验证所述条件均成立，因此我们得到 $\mathbb{Z}_{2^e}$ 上的一个斜态射，其对应的幂函数为

$$\varphi(x) = -x - 2^{e-3}x(x-1) \pmod{2^e} \quad \text{and} \quad \pi(x) \equiv 1 - 2x \pmod{8}.$$

由于 $\pi(\varphi(1)) \equiv \pi(-1) \equiv 3$(模 8)，且 $\pi(1) \equiv -1$(模 8)，所以 $\pi(1) \not\equiv \pi(\varphi(1))$(模 8)，因此$\varphi$ 也不是光滑的。□

引理 3.5。设 n 为一个具有分解 $n = 2^e n_1$ 的正整数，其中 n_1 为奇数。若 $e \geq 5$ 或 n_1 不是无平方因子，则 $\mathbb{Z}_n$ 承载一个非光滑斜态射。

证明。注意到 $\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{2^e} \times \mathbb{Z}_{n_1}$。若 $e \geq 5$，则根据引理 3.4(b)，循环群$\mathbb{Z}_{2^e}$ 具有一个非光滑斜态射 α，因此根据引理 3.1，$\varphi := \alpha \times \mathrm{id}_{n_1}$ 是 $\mathbb{Z}_n$ 的一个非光滑斜态射，其中 id_{n_1} 表示 $\mathbb{Z}_{n_1}$ 上的恒等置换。若n_1 不是无平方因子，则存在一个奇素数 p 使得 $p^e \mid n_1$，其中 $e \geq 2$；利用引理 3.4(a)及类似技巧，我们可以构造出$\mathbb{Z}_n$的一个非光滑斜态射，证毕。□

4. Proof of Theorem 1.1

本节的目的是证明定理 1.1。在此之前，我们作如下约定。设 $G = AY$ 是一个互补分解，其中子群 Y 是循环群，且在 G中无核。令 y 为 Y的一个固定生成元，则根据式 (1) 定义 A 的斜态射 φ 及其相应的幂函数 π。由 y诱导的 A 的斜态射 φ 称为斜态射。注意，G 在左陪集集合 $\Omega := \{gY \mid g \in G\}$ 上的作用是忠实的，其中这些左陪集是 G 中 Y 的左陪集；特别地，子群 A 在 Ω 上正则作用，且 Y 是一个点稳定子。因此，我们可以假设 $G \leq$ 是 $\mathrm{Sym}(\Omega)$ 的子群，且 $G = AY$，其中 A 是 G的一个正则子群

并且对于某个 $x \in \Omega$， $Y = G_x$ 是循环群。本节中我们将始终采用这一假设；为方便起见，特在此记录。

假设 4.1. 设 $G \leq \Omega$ 上的对称群 是一个群，使得 $G = AY$，其中 A 在 Ω 上是阿贝尔正则群， $Y = G_x = \langle y \rangle$ 对于一个固定元素 $x \in \Omega$，并设 φ 是由 y诱导的斜态射。

定理 1.1 的证明将在四个预备引理之后给出。

引理 4.2. 使用假设 4.1 中的记号，设对于 $|G|$的每个素因子 p， $O_p(G) \leq A$。那么 $A \lhd G$。

证明. 记 $\wp = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ 为 $|G|$的素因子集合，则由命题 2.1(a) 得 $F(G) = \prod_{i=1}^{k} O_{p_i}(G) \leq A$。另一方面，由命题 2.2(a)， G是可解的；由命题 2.1(b)，我们有 $A \leq C_G(F(G)) \leq F(G)$。因此$A = F(G)$，特别是， $A \lhd G$。□

对于 $|A|$的素因子 p，我们用 A_p 表示阿贝尔群 A 的（唯一）Sylow p 子群，并用 $A_{p'}$ 表示 A 的（唯一）Hall p' 子群。

引理 4.3. 采用假设 4.1 中的记号，设对于 $|A|$ 和 $|A_p| = p$ 的某个素因子 p，有 $O_p(G) \neq 1$。那么 $O_p(G) = A_p$ 或 $A_p \times Y^*$，其中 $Y^* \leq Y$ 和 $|Y^*| = p$。

证明。记 $N := O_p(G)$。由引理 2.6 可知，对于某个 $B \leq A$， $\mathrm{Orb}_N(\Omega) = \mathrm{Orb}_B(\Omega)$。由于每个 N-轨道的大小都是 P 的幂，因此有 $B = A_p$。于是， $\mathrm{Orb}_N(\Omega)$ 是 G 的一个区组系，其中每个区组的大小为 p。令 K 为 G 在 $\mathrm{Orb}_N(\Omega)$ 上作用的核。由命题 2.2(a)， G 可解，因此 K 也可解。由命题 2.7 可知， K 同构于直积 $\mathrm{AGL}(1,p) \times \cdots \times \mathrm{AGL}(1,p)$ 的一个子群，该直积有 $|A|/p$ 个因子。显然， K 的 Sylow p 子群 P 在 K 中正规，且为初等阿贝尔群。因此， P char $K \lhd G$，进而 $P \lhd G$，我们得到 $P \leq O_p(G)$。另一方面，由于 $O_p(G) = N \leq K$，我们也有 $O_p(G) \leq P$。因此， $O_p(G) = P$，从而得到 $O_p(G) = A_p$ 或 $A_p \times Y^*$，证毕。□

引理 4.4. 采用假设 4.1 中的记号，设 N 是 G 的正规子群。对于 $g \in G$，记 $\bar{g}$ 为 g 在其对 $\mathrm{Orb}_N(\Omega)$ 的作用下的像；对于 $H \leq G$、 $\bar{H}$， 令 $\bar{H} = \{\bar{h} \colon h \in H\}$。

(a) $\bar{G} = \bar{A}\bar{Y}$、 $\bar{A} \cap \bar{Y} = 1$ 和 $\bar{Y}$ 在 $\bar{G}$ 中是无核的。

(b) 令 $\bar{\varphi}$ 为由 $\bar{y}$ 诱导的 $\bar{A}$ 的斜态射。则

$$\bar{\varphi}(\bar{a}) = \overline{(\varphi(a))} \text{ for all } a \in A.$$

(c) 令 $\bar{\pi}$ 为与 $\bar{\varphi}$ 相关联的幂函数。则

$$\bar{\pi}(\bar{a}) \equiv \pi(a) \pmod{|\bar{\varphi}|} \text{ for all } a \in A.$$

证明。映射 $g \mapsto \bar{g}$ 是从 G 到 $\bar{G}$ 的满同态，因此 $\bar{G} = \bar{A}\bar{Y}$。由于 $\bar{A}$ 是阿贝尔群，且在 $\mathrm{Orb}_N(\Omega)$ 上传递，所以它是正则的。显然， Y 包含于经过单位元 1_A 的 N-轨道的稳定子中。将该稳定子记为 Z，我们有 $AY = G = AZ$。由于 A 是正则的，因此 $A \cap Y = 1 = A \cap Z$，所以 $\bar{Z} = \bar{Y}$。这就证明了 (a)。

任取 $a \in A$，我们有 $ya = \varphi(a)y^{\pi(a)}$，因此 $\bar{y}\bar{a} = \overline{\varphi(a)}(\bar{y})^{\bar{\pi}(a)}$。于是可将 (1) 应用于分解 $\bar{A}\bar{Y}$ 和生成元 $\bar{y} \in \bar{Y}$，得到等式 $\bar{\varphi}(\bar{a}) = \overline{\varphi(a)}$ 以及同余式 $\bar{\pi}(\bar{a}) \equiv \pi(a)$（模 $|\bar{\varphi}|$），这就证明了 (b) 和 (c)。□

下文中，将上述引理中定义的斜态射 $\bar{\varphi}$称为由 N确定的 φ的商，并记作 φ_N。

引理 4.5. 采用假设 4.1 中的记号，假设 G 有两个不同的正规子群 M 和 N，满足以下条件:

(a) 存在子群 B、 $C \leq A$，使得 $B \cap C = 1$，并且

$$\mathrm{Orb}_M(\Omega) = \mathrm{Orb}_B(\Omega) \ and \ \mathrm{Orb}_N(\Omega) = \mathrm{Orb}_C(\Omega).$$

(b) 斜态射 φ_M 和 φ_N 都是光滑的。
那么 φ 是光滑的。

证明. 对任意 $a \in A$，由于 φ_M 是光滑的，由引理 4.4(a)–(b)，可得

$$\pi(\varphi(a)) \equiv \bar{\pi}(\overline{\varphi(a)}) = \bar{\pi}(\varphi_M(\bar{a})) \equiv \bar{\pi}(\bar{a}) \equiv \pi(a) \pmod{|\varphi_M|}.$$

同理， $\pi(\varphi(a)) \equiv \pi(a)$（模 $|\varphi_N|$）。

接下来我们证明 $|\varphi| = \mathrm{lcm}(|\varphi_M|, |\varphi_N|)$，结合上述同余式即可推出对所有 $a \in A$, $\pi(\varphi(a)) \equiv \pi(a)$（模 $|\varphi|$），从而 φ 是光滑的。事实上，设 K和 L分别为 G在 $\mathrm{Orb}_M(\Omega)$ 和 $\mathrm{Orb}_N(\Omega)$ 上的作用的核。那么

$$|Y| = |\varphi_M||Y \cap K| = |\varphi_N||Y \cap L|. \tag{4}$$

设 $d = \gcd(|\varphi_M|, |\varphi_N|)$。现在由 (4) 得

$$\frac{|\varphi_M|}{d} \cdot |Y \cap K| = \frac{|\varphi_N|}{d} \cdot |Y \cap L|. \tag{5}$$

若 $\psi \in (Y \cap K) \cap (Y \cap L)$，则对任意 $x \in \Omega$， ψ固定轨道 $\mathrm{Orb}_M(x)$ 和 $\mathrm{Orb}_N(x)$，因此由 (a) 可得 $\psi(x) \in \mathrm{Orb}_B(x) \cap \mathrm{Orb}_C(x)$。由于 $B \cap C = 1$ 且 A 是正则的，我们有 $\mathrm{Orb}_B(x) \cap \mathrm{Orb}_C(x) = \{x\}$，因此 $\psi = \mathrm{id}_\Omega$。但 Y是一个循环群，于是 $\gcd(|Y \cap K|, |Y \cap L|) = 1$，再由 (5) 得出 $|Y \cap K|$ 整除 $|\varphi_N|/d$。另一方面， $|\varphi_N|/d$整除 $|Y \cap K|$，因为它与 $|\varphi_M|/d$互素，因此我们得到 $|Y \cap K| = |\varphi_N|/d$。于是，由 (4) 可得 $|\varphi| = |Y| = \mathrm{lcm}(|\varphi_M|, |\varphi_N|)$. □

定理 1.1 的证明。我们沿用假设 4.1 中的记号，并进一步假设，对于某个 $n \geq 1$，有 $A \cong \mathbb{Z}_n$。我们需要证明：当且仅当 $n = 2^e n_1$时， φ 是光滑的，其中 $0 \leq e \leq 4$，且 n_1 是奇平方自由数。必要性已在引理 3.5 中证明。对于充分性，我们对 n 使用归纳法。若 $n = 2^e$（$0 \leq e \leq 4$），则根据 [1] 中的普查可知， φ 是光滑的；若 n 是奇素数，则由推论 2.9， φ 是 A 的自同构，特别地，它是光滑的。

从现在起，我们假设 n 是奇合数，或是含有奇素因子的偶数，并且定理对阶为 n 的真因子的任意循环群均成立。由命题 2.2(b)， G 是超可解的，因此可以将命题 2.3 应用于 G。特别地，若 p 是 $|G|$的最大素因子，则 G 的 Sylow p-子群 P 在 G中正规。若对于 $|G|$的另一个素因子 q，有 $O_q(G) \neq 1$，则可将引理 4.5 应用于 G，其中取 $M = P$ 和 $N = O_q(G)$。结合归纳假设，可得 φ 是光滑的。

因此，我们可以假设 $F(G) = O_p(G) = P$。注意到 $p > 2$，所以 $|A_p| = p$。由引理 4.3 可得 $P = A_p$或 $P = A_p \times Y^* \cong \mathbb{Z}_p^2$，其中 $Y^* \leq Y$且 $|Y^*| = p$。若$P = A_p$，则由引理 4.2 可推出 $A \lhd G$，因此 φ是一个自同构；特别地， φ是光滑的。下文中我们假设 $P = A_p \times Y^*$。

根据命题 2.4，我们可以假设 Q是包含 $A_{p'}$的 G 的一个 Hall p'-子群。于是 $G = P \rtimes Q$，并且根据命题 2.1 $C_G(P)$， $= C_G(F(G)) = F(G) = P$。由此可得

Q 同构于 Aut(P) 的一个子群。根据命题 2.8(b)–(c)，$1 \neq \mathrm{Ker}\ \varphi \lhd G$，因此 $1 \neq \mathrm{Ker}\ \varphi \leq F(G) \cap A = A_p$。但是，$|A_p| = p$，我们得到 $A_p = \mathrm{Ker}\ \varphi$，且 A_p 是 G 的一个正规子群。因此，A_p 是 Q- 不变的。由于 $p \nmid |Q|$，根据引理 2.5，子群 Q 同构于 $\mathbb{Z}_{p-1}^2$ 的一个子群，因而它是阿贝尔的。现在 $Q \cong G/P \cong \bar{G}$，其中 $\bar{G}$ 是由其在 $\mathrm{Orb}_P(\Omega)$ 上的作用诱导的 G 的$\bar{}$像。根据引理 4.4 $Q \cong AY$，后一个$\bar{}$群是由 A 和商斜态射 $\bar{\varphi}$ 诱导的斜积群。由于$\bar{}$它是阿贝尔的，$Y = 1$，所以 $Y \leq P$。因此，$|\varphi| = |Y| = p$，从而 φ 是光滑的。□

5. NON-CYCLIC ABELIAN GROUPS

本节将基于前几节得到的结果，对问题 1 给出部分解答。以下关于初等阿贝尔群 $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ 上真斜态射的分类将会很有用。

命题 5.1（[5, 定理 5.10]）。设 (a, x) 是初等阿贝尔群 $A \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ 的一组基，其中 p 是奇素数。那么，A 的每个真斜态射都可以表示为以下形式

$$\varphi(a^i x^j) = a^{ri + \frac{1}{2}dj(j-1)rn}(bx^r)^j,$$

其中，b 是核 $\mathrm{Ker}\,\varphi = \langle a \rangle$ 中由三元组 (d, n, r) 唯一确定的元素，对所有 d、$n \in \mathbb{Z}_p^*$ 和 $r \in \{2, \ldots, p-1\}$ 均成立。斜态射 φ 的阶为 pk，其中 k 是 r 模 p 的乘法阶，其幂函数为

$$\pi(a^i x^j) \equiv 1 + jnk \pmod{pk}.$$

引理 5.2. 设 p 是奇素数，则初等阿贝尔群 $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ 的每个真扭自同态都是非光滑的。

证明. 使用命题 5.1 中的记号，我们有 $\pi(x) \equiv 1 + nk$(模 pk)，且$\pi(\varphi(x)) \equiv \pi(bx^r) \equiv \pi(x^r) \equiv 1 + rnk$(模 pk)，因此 $\pi(x) \not\equiv \pi(\varphi(x))$ (模 pk)。因此，φ 不是光滑的。□

引理 5.3. 设 $G = A \times B$ 是一个阿贝尔群，满足 $A \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$，其中 p 是奇素数。那么 G 承载一个非光滑斜态射。

证明. 根据引理 5.1，初等阿贝尔群 $A \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ 有一个非光滑斜态射 α，因此根据引理 3.1 $\varphi := \alpha \times \mathrm{id}_B$ 是 G 的一个非光滑斜态射。□

定理 1.2 的证明。如果西罗 2-子群 P 的 A 包含一个与$\mathbb{Z}_{2^e}$ 同构的直因子，其中某个 $e \geq 5$满足条件，那么根据引理 3.1 和引理 3.4，我们可以构造 A的一个非光滑斜态射。

如果 n_1 不是无平方因子的，那么存在一个奇素数 p，使得 $p^2 \mid n$，因此要么 $A \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times B$，要么对于某个 $i \geq 2$ 和某个子群 $B \leq A$，有 $A \cong \mathbb{Z}_{p^i} \times B$。根据引理 3.4(a) 和 5.3，$\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ 和$\mathbb{Z}_{p^i}$ 都导出一个非光滑斜态射α。因此，根据引理 3.1，斜态射 $\varphi = \alpha \times \mathrm{id}_B$ 是 A的一个非光滑斜态射。□

设 A 是一个阶为 $n = 2^f n_1$ 的非循环阿贝尔群，其中 n_1 为奇数。若 A 的每个斜态射都是光滑的，那么根据定理 1.2，n_1 无平方因子，且 A 的西罗 2-子群 P 不含任何同构于 $\mathbb{Z}_{2^e}$ 的直因子，其中 $e \geq 5$ 可以取任意值。因此，对于某个正整数 r，有 $P \cong \mathbb{Z}_{2^{e_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{2^{e_r}}$，其中对所有 $1 \leq i \leq r$ 都有 $1 \leq e_i \leq 4$。特别地，若 $e_1 = e_2 = \cdots = e_r = 1$，已知 P 的每个斜态射都是自同构（见 [5, 定理 5.8]），因而是光滑的。但对于其他情况，我们知之甚少

已知。对于阿贝尔 2-群 $\mathbb{Z}_{2^{e_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{2^{e_r}}$，若该 r 元组 $(e_1, \ldots, e_r)$ 满足阿贝尔群 $\mathbb{Z}_{2^{e_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{2^{e_r}}$ 的每个斜态射都是光滑的，则称其为可容许的。

问题 2. 确定所有 $r \geq 1$ 的可容许 r-元组。

问题 3. 假设 $(e_1, \ldots, e_r)$ 是一个可容许的 r-元组，并且 A 是一个阿贝尔群，其西罗 2-子群 $P \cong \mathbb{Z}_{2^{e_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{e^r}$ 以及其 Hall $2'$-子群的阶均无平方因子，那么 A 的每个斜态射都是光滑的吗?

References

[1] M. Bachrat´y, 《循环群斜态射的商》, arXiv 预印本, 2022。[2] M. Bachrat´y、M. Conder 和 G. Verret, 《单核群的斜积群》, Algebraic Combinatorics 5(5) (2022), 785—802。[3] M. Bachrat´y 和 R. Jajcay, 《有限循环群的陪集保持斜态射分类》, Australas. J. Combin. 67 (2017), 259–280。[4] J.Y. Chen、S.F. Du 和 C.H. Li, 《非阿贝尔特征单群的斜态射》, J. Combin. Theory Ser. A 185 (2022), 105539。[5] M. Conder、R. Jajcay 和 T. Tucker, 《群的循环补群与斜态射》, J. Algebra 453 (2016), 68–100。[6] M. Conder、R. Jajcay 和 T.Tucker, 《正则 t-平衡凯莱映射》, J. Combin. Theory Ser. B 97(3) (2007), 453–473。[7] M. Conder 和 T. Tucker, 《循环群的正则凯莱映射》, Trans. Amer. Math. Soc. 366 (2014), 3585–3609。[8] S.F. Du 和 K. Hu, 《循环 2-群的斜态射》, J. Group Theory 22(4) (2019), 617–635。[9] S.F. Du、W. Luo 和 H. Yu, 《初等阿贝尔 p 群的斜态射》, arXiv 预印本, 2022。[10] S.F. Du 、 H. Yu 和 W. Luo, 《初等阿贝尔 p 群的正则凯莱映射：分类与枚举》, arXiv 预印本, 2022。[11] Y. Feng、K. Hu、R. Nedela、M. ˇSkoviera 和 N.-E Wang, 《完备正则 dessin 与循环群的斜态射》, Ars Math. Contemp. 16 (2019), 527–547。[12] K. Hu, 《斜态射理论》, 预印本（2012）。[13] K. Hu、I. Kov´acs 和 Y.S. Kwon, 《二面体群斜态射的分类》, J. Group Theory (2022), DOI: 10.1515/jgth-2022-0085。[14] K. Hu、Y.S. Kwon 和 J.Y. Zhang, 《作为自同构平方根的循环群斜态射分类》, Ars Math. Contemp. 21 (2021), # P2.01。[15] K. Hu、R. Nedela、N.-E. Wang 和 K. Yuan, 《循环群的互反斜态射》, Acta Math. Univ. Commenianae, 88(2) (2019), 305–318。[16] B. Huppert, 《有限群 I》, 施普林格出版社, 柏林—海德堡—纽约, 1967。[17] R. Jajcay 和 J. ˇSir´aˇn, 《正则凯莱映射的斜态射》, Discrete Math. 224 (2002), 167–179。[18] I. Kov´acs 和 Y.S. Kwon, 《二面体群的正则凯莱映射》, J. Combin. Theory Ser. B 148 (2021), 84–124。[19] I. Kov´acs 和 R. Nedela, 《循环群斜态射的分解》, Ars Math. Contemp. 4 (2011), 329–249。[20] I. Kov´acs 和 R. Nedela, 《循环 p群的斜态射》, J. Group Theory 20(6) (2017), 1135–1154。[21] W. R. Scott, 《群论》, Prentice-Hall, 新泽西州, 1964。[22] N. E. Wang、K. Hu、K. Yuan 和 J.-Y. Zhang, 《二面体群的光滑斜态射》, Ars Math. Contemp. 16 (2019), 527–547。[23] J.-Y. Zhang, 《关于斜态射的直积》, Art of Discrete and Applied Math. 5(2022) # P3.07。

K. Hu,Department of Mathematics, Zhejiang Ocean University, Zhoushan, Zhejiang 316022,P.R. ChinaUP FAMNIT, University of Primorska, Glagoljaška 8, 6000 Koper, SloveniaUP IAM, University of Primorska, Muzejski trg 2, 6000 Koper, Slovenia电子邮箱：kan.hu@famnit.upr.siI. Kovács,UP IAM, University of Primorska, Muzejski trg 2, 6000 Koper, SloveniaUP FAMNIT, University of Primorska, Glagoljaška 8, 6000 Koper, Slovenia电子邮箱：istvan.kovacs@upr.siY. S. Kwon, Department of Mathematics, Yeungnam University, Kyongsan 712-749, Republic of Korea电子邮箱：ysookwon@ynu.ac.kr