arXiv:2302.03083v2 [math.GR] 4 Nov 2023

稳定子映射的连续性与不可约扩张

ADRIEN LE BOUDEC 和 TODOR TSANKOV

摘要。设G 是一个局部紧群。对于每个G-流X，都可以考虑稳定子映射$x \mapsto G_x$，它将X 映到(G) 的闭子群空间 Sub$G$。一般而言，该映射并不连续。我们证明，若将X 替换为X的泛不可约扩张，则稳定子映射变为连续。特别地，这一结果统一推广了 Frolík 的定理（极端不连通紧空间上同胚的不动点集是开集）和 Veech 的定理（局部紧群在其最大宏观空间上的作用是自由的）。此外，它还使我们能够自然地为每个G-流X 关联一个G-流 $S_G(X)$，其取值于(G)的闭子群空间 Sub；这推广了 Glasner 和 Weiss 针对极小G-流提出的稳定子一致递归子群概念。

1. 引言

设 G 是一个拓扑群。回顾一下，*G-flow*是紧空间 X 上的连续作用 $G \curvearrowright X$（我们所考虑的紧空间均为 Hausdorff 空间）。若每个轨道都稠密，则称 G-流是极小的。G-流之间的连续 G-等变映射 $\pi\colon Y \to X$ 称为 G-映射。若 π 是满射，我们还称Y 是X的扩张，或者称X是Y的因子。

紧空间之间的映射 $\pi\colon Y \to X$ 称为不可约映射，若 Y 中每个非空开集 $U \subseteq Y$ 都包含某个 $x \in X$ 的纤维 $\pi^{-1}(\{x\})$；等价地，若 Y 的任意真闭子集在 X 中的像都是 X 的真子集。Gleason [G$_3$], 研究了不可约映射，并证明对于每个紧空间 X，都可以关联一个极端不连通紧空间 $\hat{X}$，它是正则开子集所构成的布尔代数 RO(X) 的 Stone 空间；存在一个不可约映射 $\hat{X} \to X$，且它对于不可约映射 $Y \to X$ 具有普适性。回顾一下，若每个开子集的闭包都是既开又闭的，则称该空间是极端不连通的。

G-流之间的扩张 $\pi\colon Y \to X$ 若作为拓扑空间之间的映射 π 不可约，则称为不可约扩张。若可通过作用 G 的元素，将 π 的任意一个纤维压缩为一点，则称扩张 π 为高度近端；更准确地说，对每个 $x \in X$，都存在一个由 G 中元素构成的网 (g_i)，使得 $g_i \cdot \pi^{-1}(\{x\})$ 在 Y 的闭子集所构成的 Vietoris拓扑下收敛到一个单点集。Auslander 和 Glasner 在 [AG] 中研究了这些概念，并证明当 X 和 Y 均为极小时，两者等价。然而，当 Y 不是极小时，两者并不相同（参见例 2.1）。本文主要关注不可约扩张这一概念。不可约扩张被视为相当小的扩张，并且保留许多动力学性质，例如极小性、近端性、强近端性和不交性。当空间 Y 和 X 可度量化时，扩张 $\pi\colon Y \to X$ 不可约，当且仅当它几乎一一（即集合 $\{y \in Y\colon \pi^{-1}(\{\pi(y)\}) = \{y\}\}$ 在 Y 中稠密）。几乎一一扩张是拓扑动力系统中的重要工具

2020数学主题分类。主要分类：37B05。次要分类：22D12、06E15、54H15。关键词和短语。局部紧群、稳定子映射、一致递归子群、Gleason 完备流。

（例如，可用于构造连续系统的符号表示）；而不可约扩张这一概念则是恰当的推广，使得普适对象得以存在，并推动一般理论的发展。

对每个 G-流 X，都存在一个 G-流 $\hat{\mathrm{X}}_G$ 以及一个不可约扩张$\pi_X\colon \hat{\mathrm{X}}_G \to \mathrm{X}$，满足如下泛性质：对每个不可约扩张 $\pi\colon \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$，都存在一个 G-映射 $\mathrm{p}\colon \hat{\mathrm{X}}_G \to \mathrm{Y}$，使得 $\pi \circ \mathrm{p} = \pi_X$。此外，$\hat{\mathrm{X}}_G$ 在同构意义下唯一。它称为 X 的泛不可约扩张。对于极小流，$\hat{\mathrm{X}}_G$ 的存在性和唯一性已在[AG]中得到证明，而一般情形则归功于 Zucker [Z2]。在 [Z2], 中，沿用 [AG] 对极小流的术语，这种扩张被称为泛高度近端扩张；然而，鉴于高度近端性与不可约性对于非极小流的扩张并不等价，而且不可约扩张未必是近端的（例如，对于平凡群的作用），我们倾向于对这两个概念使用不同的名称。

泛不可约扩张可以被视为一种完备化（参见第 2 节），因此，如果 $\hat{}G$-流 X *Gleason* 完备，则称其$X_G = X$。等价地，X 是 Gleason 完备的，当且仅当 X 不具有非平凡的不可约扩张。对应关系 $X \mapsto \hat{}X_G$ 是幂等的，其像是 Gleason 完备的G-流类。因此，G-流的类被划分为等价类，其中X 和 Y 等价，当且仅当它们具有一个公共不可约扩张；或者等价地，当且仅当 $\hat{}X_G$ 和 $\hat{}Y_G$ 同构。每个等价类都包含唯一一个 Gleason 完备的代表元。

如果 X 是极小的，那么 Gleason 完备等价于在 *AG* [AG]意义下的 最大高度近端。在 [Z2], 中，即使对于非极小流，也使用术语 最大高度近端或 *MHP*（参见 [Z2，命题 3。5]），其含义与我们的 *Gleason* 完备相同。

对于离散群，$\hat{\mathrm{X}}_G$ 的构造归结为 Gleason 的构造，并且有 $\hat{\mathrm{X}}_G = \hat{}\mathrm{X}$ [G3, 定理 3.2]。在这种情形下，G- 流 X 是 Gleason 完备的，当且仅当它是极端不连通的。这仅取决于 X 的拓扑，而与 G 无关。对于非离散群，情况则不再如此。非离散情形下的 Gleason 完备流，例如 X = G/H，其中 H 是 G 的闭余紧子群，且 G 通过左平移作用于 X。Zucker 以 MHP 流之名对波兰群的 Gleason 完备流进行了广泛研究 [Z2], ，其中还可以找到更多有趣的例子。Basso 和 Zucker 在[BZ]中研究了更一般的拓扑群。

具有相同泛不可约扩张这一等价关系，以及 Gleason 完备流这一概念，有助于表述G-流之间的某些刚性性质。这方面的一个例子是 Rubin 的定理：任意两个忠实且G-流，只要它们是微支撑的，就有一个共同的不可约扩张 [R]。结合 [CLB，命题 2。3], 可知，每个承认忠实微支撑G -流的群G，恰好承认一个忠实微支撑的G-流是 Gleason 完备的。对于某些非离散的全不连通局部紧群，该流就是G的中心化子格的 Stone 空间；中心化子格是由该群的局部结构构造出的一个布尔代数 [CRW，定理 II], [CLB]。关于“微支撑”作用的定义及更多细节，请参见上述参考文献。

主要结果。 在某些情境下，Gleason 完备流比一般的流具有更好的性质。本文的主要结果展示了这样一种情形。在引言余下部分中，我们假设 G 是一个局部紧群，并将闭子群构成的空间记为 $\mathrm{Sub}(G)$ 。

赋予 Chabauty 拓扑后，空间 Sub(G) 是紧致的，并且 G 在 Sub(G) 上通过共轭所作的作用是连续的。对于每个 G-流 X，我们可以关联一个稳定子映射 $X \to \mathrm{Sub}(G)$，$x \mapsto G_x$，该映射是 G-等变的。稳定子映射总是上半连续的（参见例如 [GW]），但一般而言并不连续。这种连续性的缺失并非仅仅是技术问题，而是流的一种内在性质。例如，它体现了自由作用与拓扑自由作用之间的差异（见下文）。我们证明，对于 Gleason 完备流，这一缺陷便不复存在。

定理 1.1. 设 G 是一个局部紧群，X 是一个 *Gleason* 完备 G-流。则稳定子映射 $X \to$ 子群(G)，$x \mapsto G_x$，是连续的。

若X 是任意一个G-流，则该定理适用于 Gleason 完备流 $\hat{}X_G$，并表明，取一个X 的不可约扩张，便足以解决X上稳定子映射的连续性问题。

如上所述，当 G 是离散群时，X 是 Gleason 完备的当且仅当 X 是极端不连通的。在这种情况下，定理 1.1等价于说，X 中每个元素 $g \in G$ 的不动点集都是 X的开子集。这是 Frolík 的一个定理 [F]。

定理 1.1 的另一个特殊情形是 Veech 的一个著名定理：局部紧群在其最大宏观空间 Sa(G) 上的作用是自由的。可以应用定理 1.1，因为最大宏观空间是一个 Gleason 完备流，而自由左平移作用 $G \curvearrowright G$ 稠密地嵌入其中（参见推论 5.8）。Matte Bon 和 Tsankov 在 [MBT]，中考察了 Veech 定理的一个相对化版本，并证明：对于流 Sa(G/H)（G/H 的 Samuel 紧化），其中 H 是 G 的闭子群，其稳定子映射是连续的。这又是定理 1.1 的一个特殊情形，因为流 Sa(G/H) 也是 Gleason 完备的 [Z2]。

由于定理 1.1 是 Frolík 定理和 Veech 定理的一个共同推广，其证明综合了这两种定理证明中的思路，也就不足为奇了。我们还借助了 Zucker [Z2] 引入的 Gleason 完备流上的拓扑度量结构（扩展了 [BMT] 对 Sa(G) 的构造）；尽管这种结构对于局部紧群而言相当简单，但对我们仍然有用。

自由性与拓扑自由性。回顾一下，若对每个 $x \in X$，$G \curvearrowright X$ 的稳定子 G_x 都是平凡的，则称 $G \curvearrowright X$ 是自由的；若对于每个满足 $1_G \notin K$ 的紧集 $K \subseteq G$，闭集 $\{x \in X : x \in K \cdot x\}$ 的内部为空，则称 $G \curvearrowright X$ 是拓扑自由的。（当 G 第二可数时，拓扑自由等价于存在一个稠密点集，其中每个点 $x \in X$ 的稳定子 G_x 都是平凡的。）自由性与拓扑自由性的差别可由稳定子映射不连续这一现象检测出来：一个拓扑自由作用是自由的，当且仅当稳定子映射连续。此外，拓扑自由性在不可约扩张下双向保持。因此，以下结论是定理 1.1 的推论。

推论 1.2. 设 G 是一个局部紧群，X 是一个 G-流。那么，以下条件等价：

(i) X 是拓扑自由的；(ii) $\hat{}X_G$ 是自由的。特别地，*Gleason* 完备流拓扑自由当且仅当它是自由的。

这有如下应用。回顾一下，如果对 X 上每个博雷尔概率测度的 G-轨道的闭包都包含一个狄拉克测度，则称 G-流是<strongly proxi- mal 强近端的。若流 X 是极小且强近端的，则称其为<strongly proxi- mal 边界。每个群 G 都有一个边界 $\partial_F G$，且在同构意义下唯一，

使得每个边界都是 $\partial_F G$ [G2, §III] 的因子。它称为 G 的富斯滕伯格边界。根据 [G1，引理 5。2] 以及 [G2，引理 4。1],流 $\partial_F G$ 是 Gleason 完备的。

推论 1.3. 对于每个局部紧群 G，稳定子映射在$\partial_F G$上连续。特别地，以下条件等价：

(i) G 存在拓扑自由边界；(ii) G 在 $\partial_F G$ 上自由作用。

证明。 第一个断言由 $\partial_F G$ 是 Gleason 完备的以及定理 1.1 得出。对于第二个断言，若 G 存在一个拓扑自由边界$G \curvearrowright X$，那么 $G \curvearrowright \partial_F G$ 上的作用也拓扑自由，因为存在一个因子映射 $\partial_F G \to X$。由于 $\partial_F G$ 是 Gleason 完备的，推论 1.2 推出 $G \curvearrowright \partial_F G$ 是自由的。反方向显然成立。 □

当 G 是离散群时，推论 1.3 中的等价关系早已为人所知，因为它可由 [F] 得出。最近的研究表明，对于给定的群 G，这一性质等价于其约化 C*-代数的简单性 G [KK]。对于局部紧群，这种等价关系是否普遍成立尚不清楚。关于这一问题的讨论，参见[CKM，第 6] 节（其中还考察了 $\partial_F G$ 上稳定子映射连续的点）。

稳定子流。定理 1.1 的意义并不限于拓扑自由作用的情形。回顾一下，局部紧群 G 的一致递归子群（URS）是 Sub(G) [GW] 中一个极小的闭 G-不变子集。每个极小 G-流 X 都会产生一个 G 的 URS，称为与 X 相关联的稳定子 URS，其定义为稳定子映射像在 Sub(G) 中的闭包内唯一的极小闭 G-不变子集（Glasner–Weiss [GW]）。（尽管 [GW]作出了 G 是第二可数群这一通常假设，但这一事实对每个局部紧群和每个极小 G-流都成立，详情见第 5 节。）

定理1。1 使我们能够为任意G-流$X$$G$-流$X$关联一个稳定子流$_G$，而无需假设极小性：我们考察 Gleason 完备流 $\hat{}X_G$ ，然后只需通过稳定子映射取 $\hat{}(X)$ 在 Sub(G) 中的像（参见定义 5。1）。根据定义，稳定子流在取不可约扩张时保持不变。在第 5节中，我们证明了它的一些基本性质。特别地，我们证明，当 X 是极小的，稳定子流与稳定子 URS 相等。

推论 1.4. 设 G 是一个局部紧群，X 是一个极小 G-流。那么，X 的稳定子 *URS* 等于 $\{G_z : z \in \hat{}X_G\}$。

在特殊情形下，若 $X = \hat{}X_G = \mathrm{Sa}(G/H)$ 其中 H 是闭子群$H \leq G$ 属于 G 的某个 URS，推论 G，推论 1。4 等价于 [MBT，命题2。8], 该命题曾用于证明 G 的每个 URS G 都可以实现为某个极小流的稳定子 URS。

致谢。 我们感谢 Nicolás Matte Bon 就本文主题进行了有趣的讨论，也感谢 Colin Reid 和 Pierre-Emmanuel Caprace 对本文初稿提出的宝贵意见。我们感谢 Andy Zucker 指出“最大高度近端”这一术语用于非极小流时存在不一致之处，并建议对其作出修改。我们还感谢审稿人认真审阅本文，并提出多条意见和修正建议。本文的部分工作得到 ANR 项目 AGRUME（ANR-17-CE40-0026）的资助。

2. G-流的泛不可约扩张

本节中，我们给出一种新的构造，用以得到任意拓扑群的 G-流 $G \curvearrowright X$ 的普适不可约扩张，其中 G 是一个任意的拓扑群。Auslander 和 Glasner [AG] 通过抽象论证证明了这种扩张在极小流情形下存在；而 Zucker [Z1]针对波兰群，以及 Basso 和 Zucker [BZ] 针对任意拓扑群，则以近超滤子的方式给出了不要求极小性假设的构造。从某种意义上说，我们的构造与他们的构造互为对偶：我们不直接构造 $\hat{X}_G$ 中的点，而是描述连续函数的格 $C(\hat{X}_G)$，并利用适当的对偶定理恢复该空间。

在描述构造之前，我们先给出一个例子，说明不可约扩张与高度近端扩张是两个不同的概念，即使目标流是极小的也是如此。

例 2.1。考虑无理旋转 $R : T \to T$，定义为 $R(x) = x + \alpha$。我们通过将 0 的轨道加倍来构造一个扩张，具体如下。令 $X = T \sqcup \{a_n : n \in Z\}$，并在 X 上定义度量 d：规定 $d(a_n, n\alpha) = 2^{-|n|}$，再通过取最短路径度量将其扩展到整个 X；也就是说，对于 $m \neq n$，有 $d(a_m, a_n) = |n\alpha - m\alpha| + 2^{-|n|} + 2^{-|m|}$；对于 $x \in T$，有 $d(a_n, x) = |n\alpha - x| + 2^{-|n|}$。于是 (X, d) 是一个紧致度量空间。令 $R(a_n) = a_{n+1}$（对所有 $n \in Z$），则映射 R 可扩展为 X 上的一个同胚。扩张映射 $X \to T$ 在 T 上为恒等映射，并将 $a_n \mapsto$ 映至 $n\alpha$。容易验证，这个扩张是高度近端的，但显然不是不可约扩张，因为点 a_n 都是孤立点。

2.1. 非阿基米德情形。 若一个布尔代数存在任意子集的上确界（及下确界），则称其为完备。布尔代数 $\mathcal{B}$ 完备，当且仅当其 Stone 空间 $S(\mathcal{B})$ 是极端不连通的；也就是说，对每个开集 $U \subseteq S(\mathcal{B})$，集合 $\overline{U}$ 也为开集。若 $\{A_i\}_{i\in I}$ 是 $S(\mathcal{B})$ 中开闭集组成的族，则它们在 ~~$\mathcal{B}$~~ 中的上确界是开闭集 $\bigcup_i A_i$。

若拓扑空间 X 的开子集 U 满足 $U = \mathrm{Int}\overline{U}$，则称其为正则的。正则开子集构成的集合 $\mathrm{RO}(X)$ 形成一个完备布尔代数，其交运算 $\wedge$ 由交集给出，补集由 $\neg U = \mathrm{Int}(X \setminus U)$ 给出。若 X 是贝尔空间，$\mathrm{RO}(X)$ 也可视为 X 的贝尔可测子集所成布尔代数模去贫集理想所得的商。参见[K，第 8]节。我们用 $\hat{X}$ 表示代数 $\mathrm{RO}(X)$ 的 Stone 空间。若 X 是紧致的，则存在一个自然的满射连续映射 $\ell_X : \hat{X} \to X$，其定义如下：

$$\{\ell_X(p)\} = \bigcap_{U\in p} \overline{U},$$

其中 p 被视为 $\mathrm{RO}(X)$ 上的超滤子。

构造 $X \mapsto \hat{X}$ 只取决于 X 的拓扑，因此，如果 G 是通过同胚作用于 X 的群，它也作用于 $\hat{X}$。如果 G 是离散群，且 $G \curvearrowright X$ 是一个 G-流，那么 $G \curvearrowright \hat{X}$ 也是一个 G-流，并且它是 $G \curvearrowright X$ 的泛不可约扩张。特别地，如果 G 是离散群，那么 G-流 X 是 Gleason 完备的，当且仅当 X 是零维的，且 X 的既开又闭子集所成的布尔代数是完备的。这由 Gleason [G3] 的结果可得。

当 G 具有非平凡拓扑时，问题在于，即使 G 对 X 的原始作用是连续的，作用 $G \curvearrowright \hat{X}$ 也未必连续。若 G 是非阿基米德的，这个问题很容易解决。回忆一下，若拓扑群 G 存在一个由开子群组成的非阿基米德基 1_G，则称其为非阿基米德群。根据 van Dantzig 的一个著名定理，对于局部紧群，非阿基米德等价于全不连通（简称全不连通局部紧）。

若 $\mathcal{B}$ 是一个布尔代数，且G 作用于其上，并且$V \leq G$，我们用 $\mathcal{B}_V$表示 $\mathcal{B}$ 中被V固定的元素所构成的子代数。注意，如果 $\mathcal{B}$ 是完备的，那么 $\mathcal{B}_V$也是完备的。

若X 是一个G-流，我们令

$$\mathrm{RO}(G, X) := \bigcup \{\mathrm{RO}_V(X) : V \text{ open subgroup of } G\}$$

并注意到，RO(G,X) 作为布尔代数的直接极限，也是一个布尔代数，但不一定完备。还要注意，RO(G,X) 在G 的作用下不变，并且作用$G \curvearrowright$ RO(G,X) 是连续的（其中将 RO(G,X) 视为离散空间）。

引理 2.2. 设 G 是一个非阿基米德群，且 $G \curvearrowright X$ 是一个 G-流。那么，RO(G,X) 中的元素构成 X 的拓扑基。

证明。由 X 的正则性，只需证明，对于每个 $x \in U \in \mathrm{RO}(X)$，都存在 $U' \in \mathrm{RO}(G, X)$，使得 $x \in U' \subseteq U$。由作用的连续性，存在 G 的一个开子群 V 以及一个开子集 $U_1 \subseteq U$，使得 $x \in U_1$ 且 $VU_1 \subseteq U$。于是 $U' = \mathrm{Int}\, VU_1$ 满足要求，因为 ~~U'~~ 在 V 的作用下不变，且 $U' \subseteq \mathrm{Int}\, U = U$，因为 U 是正则的。□

我们将X^*_G 记为 RO(G,X)的 Stone 空间。G 在X^*_G 上的作用是连续的。注意，X^*_G作为布尔代数的 Stone 空间，是零维的。

命题 2.3. 设 G 是一个非阿基米德群，且 $G \curvearrowright X$ 是一个 G-流。那么 $G \curvearrowright X^*G$ 是 X 的泛不可约扩张。

证明。我们将 $\pi: \hat{}X \to X^*G$ 记为包含关系 $\mathrm{RO}(G, X) \subseteq \mathrm{RO}(X)$ 的对偶映射，并注意到 π 是连续的且 G-等变。由引理 2.2，若 $\hat{}X$ 中两个元素在 π下的像相同，则它们在映射 $\ell: \hat{}X \to X$ 下的像也相同。因此，存在一个连续的 G-等变映射 $\ell_G: X^*G \to X$，使得 $\ell_G \circ \pi = \ell$。映射 $\ell_G: X^*G \to X$ 是不可约的，因为 ℓ 也是如此。若 $Y \to X$ 是 X 的不可约扩张，则 $\hat{}Y = \hat{}X$。因此 $\mathrm{RO}(X) = \mathrm{RO}(Y)$，且 $\mathrm{RO}(G, X) = \mathrm{RO}(G, Y)$。特别地，Y 是 $X^*G = Y^*G$ 的一个因子。□

由G对X作用的连续性可知，$\mathrm{Clopen}(X) \subseteq \mathrm{RO}(G,X)$，其中 $\mathrm{Clopen}(X)$ 是 $\mathrm{RO}(X)$ 中由X的开闭子集构成的子代数。该包含关系为等号这一条件，实际上刻画了非阿基米德群的 Gleason 完备流。

推论 2.4. 设 G 是一个非阿基米德群，且 $G \curvearrowright X$ 是一个 G-流。则以下条件等价：

(i) X 是 *Gleason* 完备的；

(ii) $\mathrm{RO}(G,X) = \mathrm{Clopen}(X)$。

证明。 (i) $\Rightarrow$ (ii) 由命题 2.3. 可得。注意，由引理 (ii)可知 X 是零维的，因此，由引理 2.2，推论 (ii) $\Rightarrow$ (i) 也可由命题2.3得出。□

2.2. **一般情形**。 当G 是一般拓扑群时，我们无法指望将泛不可约扩张构造为某个布尔代数的 Stone 空间：例如，如果G 是连通的，那么它的所有极小流都是连通的，并且没有非平凡的开闭集。因此，对于一般情形，我们采用 Riesz 空间而非布尔代数。

回忆一下，*Riesz* 空间 是一种有序实向量空间，对于其序关系而言，它还是一个格 ，也就是说，任意两个元素a、b 都有最小上界$a \vee b$ 和最大下界$a \wedge b$。Riesz 空间 $\mathcal{L}$ 称为阿基米德 的，如果存在一个

单位元 $\mathbf{1} \in \mathcal{L}$，使得对于每个$a \in \mathcal{L}$，都存在$n \in \mathbf{N}$ 满足$a \leq n\mathbf{1}$。单位元还自然地定义了一致范数一致范数：

$$\|a\| := \inf\{r \in \mathbf{R} : |a| \leq r\mathbf{1}\},$$

其中，按惯例，$|a| = a \vee (-a)$。

阿基米德黎斯空间的一个自然例子，是紧空间 $C(X)$ 上的实值连续函数集合，其格运算取通常定义，单位元为常值函数 $\mathbf{1}$。此时一致范数与上确界范数一致。下面回顾的吉田表示定理指出，事实上，每个在一致范数下完备的阿基米德黎斯空间都具有这种形式。

对于每个 $\mathcal{L}$ 带有单位元 $\mathbf{1}$（并配备一致范数）的阿基米德黎斯空间，我们都可以考虑它的谱：

$$\mathrm{S}(\mathcal{L}) = \{x \in \mathcal{L}^* : x(a \vee b) = x(a) \vee x(b) \text{ for all } a, b \in \mathcal{L} \text{ and } x(\mathbf{1}) = 1\}.$$

若赋予弱* 拓扑，$\mathrm{S}(\mathcal{L})$ 便是一个紧空间，并且有一个映射$\Gamma\colon\ \mathcal{L} \to C(\mathrm{S}(\mathcal{L}))$ 定义如下：

$$\Gamma(a)(x) = x(a).$$

Γ 显然是一个压缩同态，而且事实上，它是一个等距同构（见 [dJvR，第 13]节）。

设G 为拓扑群，设E 为巴拿赫空间，并设$G \curvearrowright E$ 为等距同构作用。我们称元素 $\phi \in E$ 是G-连续的，如果映射$G \to E$，$g \mapsto g \cdot \phi$ 是范数连续的。

引理 2.5. 设 G 为拓扑群，设 X 为紧空间，且设 $G \curvearrowright X$ 为同胚作用。则以下命题等价：

(i) $G \curvearrowright X$ 是一个 G-流（即该作用是联合连续的）；(ii) 每个函数 $\phi \in C(X)$ 在诱导作用 $G \curvearrowright C(X)$下都是 G-连续的。

证明。 (i) $\Rightarrow$ (ii)。这是显然的。

(ii) $\Rightarrow$ (i)。设 $\mathrm{U} \subseteq \mathrm{X}$ 为开集，且 $\mathrm{x}_0 \in \mathrm{U}$。我们的目标是找到一个开集 $\mathrm{V} \ni 1_G$ 和一个开集 $\mathrm{W} \ni \mathrm{x}_0$，使得 $\mathrm{V} \cdot \mathrm{W} \subseteq \mathrm{U}$。取包含 x 的开集 $\mathrm{W} \ni \mathrm{x}_0$，使得 $\mathrm{W} \subseteq \mathrm{U}$。由乌雷松引理，存在 $\phi \in \mathrm{C(X)}$，满足 $\phi|_{\overline{W}} = 1$ and$\phi|_{X\setminus U} = 0$。由于 ϕ 是 G-连续的，存在 $\mathrm{V} \ni 1_G$，使得对每个 $\mathrm{v} \in \mathrm{V}$，$\|\mathrm{v}^{-1} \cdot \phi - \phi\| < 1/2$。这意味着 $\mathrm{V} \cdot \mathrm{W} \subseteq \mathrm{U}$。□

接下来我们将描述 G-流 $G \curvearrowright X$ 的泛不可约扩张。令 $\mathcal{B}(X)$ 表示 X 上有界博雷尔函数构成的 Riesz 空间，其单位元为常值函数 $\mathbf{1}$，并令 $\mathcal{M}$ 表示如下理想：

$$\mathcal{M} = \big\{\phi \in \mathcal{B}(X) : \{x \in X : \phi(x) \neq 0\} \text{ is meager}\big\}.$$

理想 $\mathcal{M}$使我们能够在 $\mathcal{B}(X)$ 上定义本质上确界半范数：

$$\|\phi\|_{\mathcal{M}} = \inf\big\{r \in \mathbf{R} : \{x \in X : |\phi(x)| > r\} \text{ is meager}\big\}.$$

记 $\mathrm{B(X)} := \mathcal{B}(\mathrm{X})/\mathcal{M}$，注意到 $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ 在 B(X) 上诱导出一个范数。令 $\hat{}\mathrm{X}$ 为 B(X) 的谱。它可以自然地识别为布尔代数 RO(X) 的 Stone 空间（参见 [dJvR，第 14] 节）。B(X) 也曾由 Keynes 和 Robertson 在动力学背景下研究过，见 [KR]。

我们用 $\mathrm{B}_G\mathrm{(X)}$ 表示 B(X) 中 G-连续元素的集合。注意，$\mathrm{B}_G\mathrm{(X)}$ 是 B(X) 的一个闭子空间，并且在格运算下也封闭，因此我们可以定义 $\hat{}\mathrm{X}_G := \mathrm{S}(\mathrm{B}_G\mathrm{(X)})$。由于 $\mathrm{C}(\hat{}\mathrm{X}_G) \cong \mathrm{B}_G\mathrm{(X)}$，由引理 2.5 可知，$\mathrm{G} \curvearrowright \hat{}\mathrm{X}_G$ 是一个 G-流。存在一个自然的单射映射 $\mathrm{C(X)} \to \mathrm{B(X)}$，根据引理 2.5，其像包含于 $\mathrm{B}_G\mathrm{(X)}$。稍微滥用一下记号，我们将 C(X) 与其在 $\mathrm{B}_G\mathrm{(X)}$ 中的像等同。

包含关系 $C(X) \subseteq B_G(X) \subseteq B(X)$ 转化为因子映射 $\hat{X} \to \hat{X}_G \to X$。我们有如下结论。

命题 2.6. 设 G 是一个拓扑群，且 $G \curvearrowright X$ 是一个 G-流。那么，流 $G \curvearrowright \hat{X}_G$ 是 $G \curvearrowright X$ 的泛不可约扩张。特别地，X 是 *Gleason* 完备的，当且仅当自然单射 $C(X) \to B_G(X)$ 是双射。

证明。首先，由于 $\hat{X}_G$ 是 $\hat{X}$ 的一个因子，显然扩张 $\hat{X}_G \to X$ 是不可约的。若 $G \curvearrowright Y$ 是 $G \curvearrowright X$ 的一个不可约扩张，则由 $\hat{X}$ 的泛性质，存在一个嵌入 $\iota: C(Y) \to C(\hat{X}) = B(X)$（见上文）。由引理 2.5 可知，每个 $\phi \in C(Y)$ 都是 G-连续的，因此 $\iota(\phi)$ 也都是 G-连续的。因此 $\iota(C(Y)) \subseteq B_G(X)$，这就给出了一个因子映射 $\hat{X}_G \to Y$。□

推论 2.7. 设 G 是一个拓扑群，L 是 G 的一个开子群。若 $G \curvearrowright X$ 是一个 G-流，则 X 作为 G-流是 *Gleason* 完备的，当且仅当它作为 L-流是 *Gleason* 完备的。

证明。我们有 $B_G(X) = B_L(X)$，因为 L 是开集，因此结论由命题2.6得出。□

文献 [AG] 证明了，对于极小流 X，对应关系 $X \mapsto \hat{X}_G$具有函子性。我们对 $\hat{X}_G$ 的描述表明，该结果对一般流的正确表述方式。回想一下，连续映射 $\phi: X \to Y$ 称为保范畴映射，如果对于任意无处稠密集$A \subseteq Y$，$\phi^{-1}(A)$ 都是无处稠密的。极小流之间的每个同态都是保范畴的。事实上，若$\phi: X \to Y$ 是极小流之间的因子映射，且$U \subseteq X$ 是非空开集，则有限多个 (U) 的平移覆盖Y，因此 (U) 必定在某处稠密。此外，紧空间之间的每个不可约映射都是保范畴的。

命题 2.8. 对应关系 $X \mapsto \hat{X}_G$ 是一个函子，它将以保范畴 G-映射为态射的 G-流范畴映到 *Gleason* 完备流范畴。

证明。设 $\phi: X \to Y$ 是 G-流之间的保范畴同态。那么，对于每个贫集 $A \subseteq Y$，$\phi^{-1}(A)$ 都是贫集，因此我们得到 Riesz 空间的一个对偶同态 $\phi^*: B(Y) \to B(X)$，定义为 $\phi^*([f]) = [f \circ \phi]$，其中 $f \in \mathcal{B}(Y)$，而 $[f]$ 表示其在 $B(Y)$ 中的等价类。$B_G(Y)$ 的像包含于 $B_G(X)$ 中，因此根据对偶定理，我们得到一个映射 $\hat{X}_G \to \hat{Y}_G$。□

3. Gleason 完备流的刻画

从本节开始，G 表示一个局部紧群。伪范数 是定义在G 上的连续函数 $\|\cdot\|: G \to \mathbf{R}_+$，满足：

- $\|1_G\| = 0$;
- $\|g^{-1}\| = \|g\|$ 对所有$g \in G$;
- $\|gh\| \le \|g\| + \|h\|$ 对所有g、$h \in G$。

我们将 B_r 记作满足 $\|g\| < r$ 的元素 $g \in G$ 的集合，同时令$\bar{B}_r$ 为满足 $\|g\| \le r$ 的元素 $g \in G$ 的集合。若对所有 r，$\bar{B}_r$ 都是紧致的，则称 $\|\cdot\|$ 为真。若伪范数 $\|\cdot\|$ 满足唯一使 $\|g\| = 0$ 成立的元素是 1_G，则称其为范数。如果范数诱导 G 的拓扑，则称其为相容的。注意，任何具有适当伪范数的群 G 都必须是 σ-紧致的（因为 $G = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} B_n$）。

每个伪范数都会诱导出一个右不变伪度量d_r，定义在G 上，定义如下：

$$d_r(g,h) = \|gh^{-1}\|. \tag{3.1}$$

如果伪范数 $\|\cdot\|$ 对每个$g \in G$都使得由g 共轭所诱导的映射作为伪度量空间(G,d_r)上的映射一致连续，我们就称它是正规的。特别地，正规伪范数的核 $\{g \in G : \|g\| = 0\}$ 是G的正规子群。

命题 3.1. 设 G 是一个 σ-紧致局部紧群，且 V 是 1_G 的一个开邻域。则存在 G 上一个真、正规的伪范数以及 $r > 0$，使得 $B_r \subseteq V$。

证明。取 1_G 的一个开邻域 W，使得 $W^2 \subseteq V$。由于 G 是σ-紧致的，根据 Kakutani–Kodaira 定理（[HR, 定理 8.7]）和 Struble [S]，存在 G 的一个紧正规子群 K，使得 $K \subseteq W$，且 G/K 具有一个相容的真范数 $\|\cdot\|_{G/K}$。令 $\|g\| = \|gK\|_{G/K}$，则 $\|\cdot\|$ 是 G 上一个真伪范数。此外，由于 W 在 G/K 中的像是 G/K 中单位元的一个开邻域，且 $\|\cdot\|_{G/K}$ 相容，因此存在 $r > 0$，使得 $\|gK\|_{G/K} < r$ 蕴含 $gK \in WK$。于是 $\|g\| < r$ 蕴含 $g \in V$。由于 $\|\cdot\|_{G/K}$ 诱导 G/K 上的拓扑，正规性显然。□

设 $\|\cdot\|$ 是 G 上某个固定的适当伪范数。若 $G \curvearrowright X$ 是一个 G-流，我们可以在 X 上定义伪度量 ∂：

$$\partial(x,y) = \inf\{\|g\| : g \in G, g \cdot x = y\}. \tag{3.2}$$

若 x 和 y 不在同一轨道上，则 $\partial(x,y) = \infty$。

注意，由于 $\|\cdot\|$ 是适当的，因此 ∂ 关于 X 上的紧致拓扑 τ 总是下半连续的。回顾一下，实值函数 f 称为下半连续（*lsc*），如果对每个实数 r，集合 $\{f > r\}$ 是开集。若 $\{f < r\}$ 是开集，则称其上半连续（*usc*）。

当 G 可度量化时，我们可以始终使用 G 上一个固定的相容适当范数，此时 ∂ 是 X 上的一个度量，并且比拓扑 τ 更精细，即(X,τ,∂) 是 [B] 意义下的紧拓扑度量空间。一般而言，可以采用 [BZ]，中所用的拓扑一致空间，但本文不需要这样做。若 G 是波兰局部紧群，则上述拓扑度量空间与 Zucker [Z2] 所讨论的相同。度量 ∂ 还提供了一种方便的方式来表述 G-连续性：函数 $f: X \to \mathbf{R}$ 是G-连续的，当且仅当它作为度量空间 (X,∂) 上的函数一致连续。

以下关于 Gleason 完备流的刻画是本节的主要定理。注意，由于每个局部紧群都含有一个开且 σ紧致的子群（例如，由单位元的任意紧邻域生成的子群），因此定理中的条件并不苛刻。若G 本身已经是 σ紧致的，则下文只需取$L = G$ 即可。

定理 3.2. 设 G 是一个局部紧群，L 是 G 的一个 σ紧致开子群。若 $G \curvearrowright X$ 是一个 G-流，则下列条件等价：

(i) X 是 *Gleason* 完备的；(ii) 对于每个开邻域 V 和 X 的每个开子集 U，$\overline{VU}$ 都是开集；(iii) 对于 L 上的每个适当伪范数（以及与 $L \curvearrowright X$ 作用相关联的伪度量 ∂），并且对于 X 的每个开子集 U，函数 $X \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$，$x \mapsto \partial(x, U)$ 是连续的。当 G 是一个全不连通局部紧群时，这些条件还等价于：$\mathrm{RO}(G,X) =$ 既开又闭(X)；(v) X 是零维的，并且对于 G 的每个紧开子群 V，布尔代数既开又闭$V(X)$ 是完备的。

继续之前，我们先作几点说明。首先要注意，由此特别可知，命题 (iii) 对某个 L 成立，当且仅当它对每个 L都成立。

（i）与 (i) 和 (ii) 之间的等价性已包含在 [Z2] 中（只需注意，当 G 是局部紧致的，定义 3.1 中的 [Z2] 可改述为 (ii)）。这里我们给出该等价性的另一种证明。由 (ii)⇒ (i) 的证明采用了与 [G3], 相近的论证，而反向证明（经由 (iii)）则使用命题 2.6中给出的 Gleason 完备流刻画。

我们需要一些预备知识。

引理 3.3. 设 G 是一个局部紧致、 σ-紧致群，且带有一个适当伪范数$|\cdot|$。设 $G \curvearrowright X$ 是一个 G-流，并令 ∂ 如上所定义。那么有以下结论：

(i) 若 $F \subseteq X$ 是闭集，则函数 $x \mapsto \partial(x,F)$ 是下半连续的。

(ii) 若 $U \subseteq X$ 是开集，则函数 $x \mapsto \partial(x,U)$ 是上半连续的。

证明。(i) 令 $A = \{x : \partial(x, F) \leq r\}$。设 x 是 A 的一个极限点，并设 $(x_i, \epsilon_i)_i$ 是 $A \times \mathbb{R}^+$ 中收敛到 $(x, 0)$ 的一个网。取 $y_i \in F$，使得 $\partial(x_i, y_i) < r + \epsilon_i$。取一个子网后，不妨设 $y_i \to y \in F$。然后取极限，并利用 ∂ 是下半连续的这一事实，可得 $\partial(x, y) \leq r$。

(ii) 设 $r > 0$，并设 V 为以 1_G 为中心、半径为 r的开球

$$\partial(x, U) < r \iff V \cdot x \cap U \neq \emptyset,$$

这是一个开条件。 □

注记 3.4。 事实上，引理 3.3并不要求 G 是局部紧致的（一般情形下需采用 ∂ 的适当定义，见 [Z2]）。(i) 的证明(i) 与上述相同，而 (ii) 则是 [Z2，定理 4.8]，且更为困难。

引理 3.5。 设 X 是一个 G-流。那么，当且仅当对每个开邻域 $V \ni 1_G$ 以及开子集 $U \subseteq X$, 都存在一个开邻域 $V' \ni 1_G$，使得 $V' \subseteq V$ 满足 $V'U$ 是开集时，X 满足定理 *3.2* 的条件 *(ii)*。

证明。 我们只需证明从右向左的蕴含。假设陈述中的性质成立，并设 U 是X 的一个开子集，V 是 1_G 的一个开邻域。对于每个属于V 的g，都可以找到V'_g 的一个开邻域1_G，使得gV'_g 包含于V，且V'_gU 是开集。令$V = \bigcup_{g\in V} V'_g$，则有$VU = \bigcup_{g\in V} V'_gU$，因此它是开集。□

引理 3.6. 设 X 是满足定理 *(ii)* 的 G-流3.2。那么对于所有开子集 U_1,$U_2 \subseteq X$，我们有 $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ 当且仅当 $VU_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ 对每个开邻域 $V \ni 1_G$。

证明。 设 $U_1 \cap \overline{U_2} \neq \overline{\emptyset}$，并令 V 为 1_G 的一个开邻域。显然，$VU_1 \cap U_2 \neq \emptyset$。由于 VU_1 是开集，这意味着 $VU_1 \cap U_2 \neq \emptyset$。该条件等价于 $U_1 \cap \overline{V^{-1}U_2} \neq \emptyset$，因此推出 $U_1 \cap V^{-1}U_2 \neq \emptyset$。所以 $VU_1 \cap U_2 \neq \emptyset$，如 desired。反向蕴含是一个由 G-作用的连续性得到的一般事实。 □

回想一下，布尔代数B 的子代数 B 称为稠密的，如果对于 B 中的每个非零元素，都存在一个A 中的非零元素小于它。我们回顾如下结论（参见 [K1，定理4。19]）。

引理 3。7。 设 A 是布尔代数 B 的稠密子代数。若 A 是完备的，则 $A = B$。

在开始证明定理 3.2之前，我们还引入一些记号。若$\pi\colon Y \to X$ 是拓扑空间之间的连续映射，且$U \subseteq Y$ 是开集，则我们用 $\pi_*(U)$ 表示U的纤维像：

$$\pi_*(U) := \{x \in X : \pi^{-1}(x) \subseteq U\}.$$

如果空间Y 是紧致的，则集合 $\pi_*(U)$ 总是开集；如果 π 是不可约的，那么对于任意非空U，$\pi_*(U)$都非空。

定理 3.2 的证明。(ii) $\Rightarrow$ (i)。设 $\pi\colon Y \to X$ 是一个不可约扩张。我们将证明 π 是单射。反设 Y 中存在不同的点 y_1, y_2，它们在 X 中的像相同，记为 x。于是可以找到一个开集 $V \ni 1_G$以及 Y 中的开子集 $O_1, O_2 \subseteq$，使得 $y_1 \in O_1, y_2 \in O_2$ 且 $VO_1 \cap O_2 = \emptyset$。$\pi$ 的不可约性意味着，对于~~任意开~~集 $O \subseteq Y$，都有 $\pi(O) \subseteq \pi_*(O)$。事实上，若不然，则存在 $y \in O$，以及一个与 $\pi_*(O)$ 不相交的开集 $W \ni \pi(y)$。由不可约性，$\pi^{-1}(W) \cap O$ 包含一个纤维，而该纤维的像必在 $\pi_*(O)$ 中，矛盾。因此，集合 $\pi_*(O_1)$ 和 $\pi_*(O_2)$ 都包含 x。于是，根据假设 (ii) 和引理 3.6，有 $V\pi_*(O_1) \cap \pi_*(O_2) \neq \emptyset$。由于 $V\pi_*(O_1) = \pi_*(VO_1)$，我们推得 VO_1 与 O_2 相交，矛盾。

(iii) $\Rightarrow$ (ii)。设 V 是 1_G 的一个开邻域，U 是 X 的一个开子集。由引理 3.5，将 V 替换为 $V \cap L$ 后，不妨设 V 包含于 L 中。应用命题 3.1，可在 L 上找到一个连续适当伪范数以及 $r > 0$，使得 B_r 包含于 V。若 ∂ 是 X 上与此伪范数相关联的伪度量，则根据假设，函数 $f(x) := \partial(x, U)$ 连续。因此，$B_rU = \{f < r\}$ 是开集。由于 $B_r \subseteq V$，且 V 任意，由引理 3.5 可知 (ii) 成立。

(i) $\Rightarrow$ (iii)。在 L 上固定一个连续适当伪范数，并取 X 的一个开子集 U。令 $\phi_0(x) = \partial(x, U)$，且 $\phi_1(x) = \partial(x, U)$。由引理 3.3 可知，$\phi_0$ 下半连续，ϕ_1 上半连续。此外，$\phi_0 \leq \phi_1$，且 ϕ_0 和 ϕ_1 都是 ∂-压缩的（即对所有 x、y，均有 $|\phi_i(x) - \phi_i(y)| \leq \partial(x, y)$）。首先我们证明集合$\{\phi_0 < \phi_1\}$ 是稀疏的。注意

$$\{\phi_0 < \phi_1\} = \bigcup_{q_1 < q_2 \in \mathbf{Q}} \{\phi_0 \leq q_1 < q_2 \leq \phi_1\}$$

并且并集中的每个集合都是闭集。因此，如果 $\{\phi_0 < \phi_1\}$ 不是瘦集，就存在$q_1 < q_2$，使得 $\{\phi_0 \leq q_1 < q_2 \leq \phi_1\}$ 具有非空内部W。集合$\{x : \partial(x,W) < q_2\}$ 是开集，且与U相交，因此它必与U相交。于是存在$x \in U$和$y \in W$，使得 $\partial(x,y) < q_2$，，这与W的定义矛盾。

现在，对 $r > 0$，令 $\phi_{0,r} = \min(\phi_0, r)$ 和 $\phi_{1,r} = \min(\phi_1, r)$。函数$\phi_{0,r}$,$\phi_{1,r}$ 有界且仍然是 ∂-压缩的（因而是 L-连续的）。根据假设，X 作为 G-流是 Gleason 完备的，因此根据推论 2.7，它作为 L-流也 Gleason 完备。于是由命题 2.6，存在 X 上的连续函数θ，使得 $\phi_{0,r} = \phi_{1,r} = \theta$ 在一个余瘦集上成立。由于集合 $\{\theta < \phi_{0,r}\}$ 和 $\{\theta > \phi_{1,r}\}$ 是开集，它们必为空集，因此必有 $\phi_{0,r} \leq \theta \leq \phi_{1,r}$。我们声称 θ 是 ∂-压缩的。否则，存在 $x \in X$ 和 $g \in L$，使得$|\theta(x) - \theta(g \cdot x)| > \|g\|$。然而，集合 $\{x : |\theta(x) - \theta(g \cdot x)| > \|g\|\}$ 是开集，因此，由于$\theta = \phi_{0,r}$ 在一个余瘦集上成立，存在 x 使得$|\phi_{0,r}(x) - \phi_{0,r}(g \cdot x)| > \|g\|$，矛盾。注意，$\theta^{-1}(0) \supseteq U$，因此由连续性，$\theta^{-1}(0) \supseteq U$。由于 θ 是∂-压缩的，且 $\theta = 0$ 在~~L~~U 上成立，对每个 $x \in X$，我们有

$$\theta(x) \leq \inf_{y \in \overline{U}} \partial(x, y) = \partial(x, \overline{U}) = \phi_0(x).$$

由于 $\theta \leq r$，这表明$\theta \leq \phi_{0,r}$，从而$\theta = \phi_{0,r}$。因此 $\phi_{0,r}$ 是连续的。由于 r 是任意的，可知 ϕ_0 是连续的。

现在我们假设G 是一个全不连通局部紧群。根据推论2.4，(i) 与(iv) 的等价性立刻可得。特别地，回顾可知这些条件蕴含X 是零维的。因此，<style id='iv'>（iv）蕴含 (v) 是显然的，因为 $\mathrm{RO}_V(X)$ 总是完备的。剩下需要证明(v) 蕴含(iv)。为此，设V 是G的一个紧开子群。我们希望证明 $\mathrm{RO}_V(X) = \mathrm{Clopen}^V(X)$。我们断言

Clopen$_V$(X) 是 RO$_V$(X) 的稠密子代数。事实上，若 U 是 RO$_V$(X) 中的非空元素，由于 X 是零维的，我们可以在 U 内找到一个非空的既开又闭子集 U_1 。由于 V 是紧的且是开集，U_1的稳定子在 V 中具有有限指数，因此 VU_1 是有限个既开又闭子集的并，从而是既开又闭的。此外，由于 U 是 V-不变的，$VU_1 \subseteq U$。因此，Clopen$_V$(X) 在 RO$_V$(G, X) 中稠密。由于我们假设 Clopen$_V$(X) 是完备的，引理 3.7 蕴含 RO$_V$(X) $=$Clopen$_V$(X)，正如所需。□

将下一个推论与 [BMT，引理 2 相比较。4]。

推论 3.8. 设 G 是一个局部紧的、 σ紧致的群，配备适当伪范数 $\|\cdot\|$，且 $G \curvearrowright X$ 是一个 *Gleason* 完备流。那么对于开集 U_1,$U_2 \subseteq X$,

$$\partial(\overline{U_1}, \overline{U_2}) = \partial(U_1, U_2).$$

证明。假设 $\partial(U_1, U_2) < r$。考虑集合 $\{x : \partial(x, U_2) < r\}$。根据定理 3.2，它是开集，且与 U_1, 相交，因此也与 U_1相交。取非空开集 $W \subseteq \{x : \partial(x, U_2) < r\}$，使得 $W \subseteq U_1$。于是，由函数 $\partial(\cdot, W)$ 的连续性，存在 $x \in U_2$，使得 $\partial(x, W) < r$。因此 $\partial(U_1, U_2) < r$。□

4. 稳定子映射的连续性

设Y 是一个局部紧空间，并令 2^Y 表示Y的闭子集所成的空间。 2^Y 上的 *Chabauty* 拓扑由以下形式的集合构成的子基给出

$$O_K = \{F \in 2^Y : F \cap K = \emptyset\} \quad \text{and} \quad O^U = \{F \in 2^Y : F \cap U \neq \emptyset\}$$

其中$K \subseteq Y$ 是紧致的，且$U \subseteq Y$ 是开集。赋予此拓扑的空间 2^Y 是紧致的。映射 $\phi\colon X \to 2^Y$ 若对Y 的每个紧子集K， $\phi^{-1}(O_K)$ 都是开集，则称其为上半连续；若对Y的每个开子集U， $\phi^{-1}(O^U)$ 都是开集，则称其为下半连续。

若G 是一个局部紧群，则G 的闭子群所成的集合 Sub(G) 是 2^G中的闭集，因此是一个紧空间。此外，G在 Sub(G)上的共轭作用是连续的。

定义4.1. 设X 是一个G-流。对于$x \in X$，令G_x 表示x的稳定子。映射 Stab$\colon X \to$ Sub(G) 定义为 Stab$(x) = G_x$，称为与流X相对应的稳定子映射。

容易看出，对于任意 G-流，稳定子映射是 G-等变且上半连续的（例如，参见 [GW]）。众所周知，一般来说它并不连续。本文的主要定理如下。

定理 4.2. 设 G 是一个局部紧致群，X 是一个 *Gleason* 完备 G-流。那么稳定子映射 $X \to$ Sub(G), $x \mapsto G_x$ 是连续的。

本节余下部分将用于证明该定理。设$\|\cdot\|\colon G \to R_+$ 是 G 上的一个伪范数。回忆一下，B_r 表示满足 $\|g\| < r$ 的元素 $g \in G$ 的集合；我们还令 $\bar{B}_r$ 表示满足 $\|g\| \leq r$ 的元素 $g \in G$ 的集合。回忆一下，若 X 是一个 G-流，则我们通过方程 (3.2) 在 X 上定义了一个伪度量 ∂。下面是主要引理。

引理 4.3. 设 G 是局部紧致、 σ-紧致群，且 $\|\cdot\|$ 是 G 上连续、真、正规伪范数。设 X 是 *Gleason* 完备 G-流，$g \in G$ 且 $r > 0$。那么存在 $n \geq 1$ 以及连续函数 $\phi\colon X \to \mathbf{R}^n$，使得对所有 $x \in X$

$$\partial(g \cdot x, x) > r \implies \|\phi(g \cdot x) - \phi(x)\|_\infty \geq r/3. \tag{4.1}$$

证明。由于 $\|\cdot\|$ 是正规函数，g 和 g^{-1} 作为(X,∂)上的自映射是一致连续的。因此取 $\delta < r/3$ 和 δ'，使得

$$\forall x,y \in X \quad \partial(x,y) < \delta \implies \partial(g\cdot x, g\cdot y) < r/3$$
$$\forall x,y \in X \quad \partial(g\cdot x, g\cdot y) < \delta' \implies \partial(x,y) < \delta.$$

由于 $\|\cdot\|$ 连续且为真，可以找到 $g_1,\ldots,g_\ell$，使得 $\bar{B}_{2r}$ 包含于 $\bigcup_{i=1}^{\ell} g_i B_{\delta/2}$中。由鸽巢原理可知，在 (X,∂) 中，半径为 $2r$ 的球至多包含 ℓ 个两两距离至少为δ 的点。也就是说，对于任意 $x, x_1, \ldots, x_{\ell+1} \in X$，若对所有 i 都有 $\partial(x, x_i) \le 2r$，则存在 $i \ne j$，使得 $\partial(x_i, x_j) < \delta$。类似地，存在 $k \in N$，使得对于任意 $x, x_1, \ldots, x_{k+1} \in X$，若对所有 i 都有 $\partial(x, x_i) \le 2r$，则存在 $i \ne j$，使得 $\partial(x_i, x_j) < \delta'$。令 $n = k + \ell + 1$。

令 $M_r = \{x : \partial(g\cdot x, x) > r\}$。我们将构造开集 $U_1,\ldots,U_n \subseteq X$，使其满足以下性质：

(i) $\bigcup_i B_\delta U_i$ 的闭包包含 M_r；(ii) 对于 $i \ne j$，有 $\partial(U_i, U_j) \ge \delta$；(iii) 对所有 i，有 $\partial(g\cdot U_i, U_i) \ge r$。

构造完成后，我们按如下方式完成证明。令

$$\phi_i(x) = \min(\partial(x, \overline{U_i}), r)$$

并且 $\phi = (\phi_i)_i$。根据定理 3.2，ϕ 是连续的。为了证明 ϕ 满足结论，鉴于 (i)，只需证明对每个 $x \in \bigcup_i B_\delta U_i$，$\|\phi(g\cdot x) - \phi(x)\|_\infty \ge r/3$。因此，取 $x \in B_\delta U_i$，并取 $y \in U_i$，使得 $\partial(x, y) < \delta$。于是 $\partial(g\cdot x, g\cdot y) < r/3$；再利用推论 3.8，我们得到

$$\begin{aligned}\partial(g\cdot x, \overline{U_i}) &\ge \partial(g\cdot y, \overline{U_i}) - \partial(g\cdot y, g\cdot x)\\ &\ge \partial(g\cdot \overline{U_i}, \overline{U_i}) - r/3\\ &= \partial(g\cdot U_i, U_i) - r/3 \ge 2r/3.\end{aligned}$$

So

$$\|\phi(g\cdot x) - \phi(x)\|_\infty \ge \phi_i(g\cdot x) - \phi_i(x) \ge 2r/3 - \delta \ge r/3$$

这样就完成了。

现在我们继续进行构造。利用佐恩引理，我们找到一个满足上述 (ii) 和 (iii) 的开集元组 (U_i)，且该元组在包含关系下极大。我们将证明它也必须满足 (i)。否则，存在 $x_0 \in M_r$，以及 x_0 的一个开邻域 W_0，使得对所有 i 都有 $\partial(W_0, U_i) \ge \delta$。由 ∂ 的下半连续性，存在 x_0 的一个开邻域 W_1，使得 $\partial(W_1, g\cdot W_1) \ge r$。假设存在 $j \le n$，使得

- $\partial(g\cdot x_0, U_j) > r$;
- $\partial(x_0, g\cdot U_j) > r$.

由于这两个条件都是开条件，存在 x_0 的一个开邻域 W_2，使得 $\partial(W_2, g\cdot U_j) \ge r$，且 $\partial(g\cdot W_2, U_j) \ge r$。这意味着，若令 $W = W_0 \cap W_1 \cap W_2$，我们便可将 W 加入 U_j，而不违反 (ii) 或 (iii)，从而与 (U_i) 的极大性矛盾。因此，为了得到矛盾，我们最后要做的是找到满足上述两个条件的 j。首先，注意到

$$|\{i : \partial(g\cdot x_0, U_i) \le r\}| \le \ell.$$

事实上，反设存在 $y_{i_0} \in U_{i_0}, \ldots, y_{i_\ell} \in U_{i_\ell}$ 满足$\partial(y_{i_s}, g\cdot x_0) < 2r$ 对所有 $s \le \ell$都成立。那么，这些 y_{i_s} 是 $\ell+1$ 半径为 $2r$的球中的点，且由 δ (ii) 两两相隔至少，这与 ℓ的定义矛盾。

同理，

$$|\{i : \partial(x_0, g \cdot U_i) \leq r\}| \leq k,$$

因为若存在 $y_{i_0} \in U_{i_0}, \dots, y_{i_k} \in U_{i_k}$，使得对所有 s 都有 $\partial(x_0, g \cdot y_{i_s}) < 2r$，那么根据 k 的选取，存在 $s \neq t$，使得 $\partial(g \cdot y_{i_s}, g \cdot y_{i_t}) < \delta'$。现在根据 δ' 的选取可知 $\partial(y_{i_s}, y_{i_t}) < \delta$，这与 (ii) 矛盾。现在根据 n 的选取，存在所需的 j。□

定理 4.2. 稳定子映射上半连续是一个一般事实，因此我们只需证明其下半连续性。于是对于每个开子集O，属于G，我们都需要证明

$$X_{G,O} := \{x \in X : G_x \cap O \neq \emptyset\}$$

是X的一个开子集。显然，只需对每个相对紧的开子集O证明这一点即可。

令L 为G 中由O生成的子群。子群L 是开子群，因此L-流X 也是 Gleason 完备的（由推论2.7可知）。此外，L 是紧生成的，因此尤其是 σ-紧致的。由于X_G，$O = X_{L,O}$，可知只需在群是σ-紧致的假设下证明所需结论。从现在起，我们作此假设。

取定 $x_0 \in X_{G,O}$。令 $g \in O$ 满足 $g \cdot x_0 = x_0$，并令 $V \ni 1_G$ 为开集，满足 $Vg \subseteq O$。现在我们找一个 x_0 的邻域 U_0，使其包含于 $X_{G,Vg} \subseteq X_{G,O}$中。由于 G 是 σ-紧致的，根据命题 3.1，存在 $r > 0$ 以及 G 上一个连续、真、正规伪范数 $||\cdot||$，使得 $B_{2r} \subseteq V$。若ϕ: $X \to \mathbb{R}^n$ 是引理 4.3 给出的连续函数，则有

$$\begin{aligned} U_0 := \{x \in X : ||\phi(g \cdot x) - \phi(x)||_\infty < r/3\} &\subseteq \{x \in X : \partial(g \cdot x, x) \leq r\} \\ &\subseteq \{x \in X : x \in B_{2r} g \cdot x\} \\ &\subseteq X_{G,Vg}. \end{aligned}$$

因此，U_0 是x_0 的一个开邻域，具有所需的性质。 □

注 4.4. 若 G 是第二可数的，且流 $G \curvearrowright X$ 可度量化，则也可以得到 X 的一个可度量化不可约扩张 X'，使得稳定子映射连续。为此，只需对 G 上某个固定的适当范数 $\|\cdot\|$、$g \in G$ 的一个可数稠密子集以及所有有理数 r 应用引理 4.3，从而得到 $C(\hat{X}_G)$ 的一个可数集 $\phi \in$，以此见证稳定子映射的连续性。然后，可以令 X' 为由 C(X) 和这个可数集生成的 $C(\hat{X}_G)$ 的（可分）闭 G-不变子格的谱，定理的证明便可照常进行。（这是因为我们构造的函数 ϕ 关于 ∂是 1-Lipschitz 的，所以若 ϕ 是某个 $g \in G$ 的见证，那么对于所有充分接近 g 的 g'，它也同样是见证，只是 (4.1) 中的常数可能略大于 r 和 r/3。）

5. 稳定子流

在本节中，令G 为一个局部紧群。稳定子映射的连续性使我们能够为任意 Gleason 完备流X 关联一个 Sub(G)的子流，即稳定子映射的像。由于每个流都有唯一的泛不可约扩张，这便引出了以下定义。

定义5.1. 设G 为局部紧群，且$G \curvearrowright X$ 是一个G-流。X 的稳定子流$S_G(X)$ 是由下式给出的 Sub(G) 的子流

$$S_G(X) := \mathrm{Stab}(\hat{X}_G) = \{G_z : z \in \hat{X}_G\}.$$

关于稳定子流，我们有以下一般性事实。

命题 5。2。 设 $G \curvearrowright X$ 是一个 G-流，$\pi\colon \hat{X}_G \to X$ 是 X 的通用不可约扩张。则有以下结论：

(i) 对于任意紧集 $K \subseteq G$，集合

$$D_K := \{z \in \hat{X}_G : z \notin K \cdot z \text{ and } \pi(z) \in K \cdot \pi(z)\}$$

在$\hat{X}_G$中无处稠密。

(ii) 对于任意稠密子集 $X' \subseteq X$，我们有$S_G(X) \subseteq$ 稳定子(X')。(iii) 若 $x \in X$ 是稳定子的连续点，则 $G_x \in S_G(X)$。(iv) 若稳定子 的连续点集 $X_0 \subseteq X$ 在 X 中~~稠密，则~~$S_G(X)$ =稳定子(X_0)。

证明。 (i) 设 $U \subseteq \hat{X}_G$ 是非空开集。我们将找到 U 的一个非空开子集，它与 D_K 不相交。取 $z_0 \in U \cap D_K$（若不存在这样的 z_0，，则结论成立）。集合 $\{(z, z') \in \hat{X}_G^2 : z \not\in K \cdot z'\}$ 是开集，且 (z_0, z_0) 属于其中，因此存在 z_0，$U' \subseteq U$ 的一个邻域 U'，使得 $K \cdot U' \cap U' = \emptyset$。由 π 的不可约性，集合 $\pi_*(U')$ 非空；并且对任意 $x \in \pi_*(U')$，都有 $x \not\in K \cdot x$。因此，开集 $\pi^{-1}(\pi_*(U')) \subseteq U'$ 与 D_K 不相交。

(ii) 令 $z_0 \in \hat{X}_G$ 并令

$$\mathcal{U} = \{H \in \mathrm{Sub}(G) : H \cap O_1 \neq \emptyset, \ldots, H \cap O_n \neq \emptyset, H \cap K = \emptyset\},$$

其中 $O_1, \ldots, O_n \subseteq G$ 为开集，$K \subseteq G$ 为紧致的，且是 G_{z_0}在 Sub(G) 中的一个邻域。我们的目标是找到 $x \in X'$，使得 $G_x \in \mathcal{U}$。令 $U = \{z \in \hat{X}_G : G_z \in \mathcal{U}\}$，并注意到由稳定子映射的连续性可知，U 是开集。由 (i)，开集 $U \setminus D_K$ 非空。我们声称任意 $x \in \pi_*(U \setminus D_K) \cap X'$ 都满足要求。事实上，固定这样一个 x，并令 $z \in \hat{X}_G$ 满足 $\pi(z) = x$。由于 $z \not\in D_K$，我们有 $G_x \cap K = \emptyset$；又由于 $G_z \leq G_x$，对所有 i 也有 $G_x \cap O_i \neq \emptyset$，因此 $G_x \in \mathcal{U}$。

(iii) 设 x 是稳定子映射的连续点，并设

$$\mathcal{U} := \{H \in \mathrm{Sub}(G) : H \cap O_1 \neq \emptyset, \ldots, H \cap O_n \neq \emptyset, H \cap K = \emptyset\}$$

是G_x的一个邻域，其中每个$O_i \subseteq G$ 都是开集，且$K \subseteq G$ 是紧致的。设$O'_i \subseteq G$ 是开且相对紧的，并且$O'_i \subseteq O_i$ 满足$G_x \in \mathcal{U}'$，其中

$$\mathcal{U}' := \{H \in \mathrm{Sub}(G) : H \cap O'_1 \neq \emptyset, \ldots, H \cap O'_n \neq \emptyset, H \cap K = \emptyset\}.$$

由稳定子映射在 x 处的连续性，存在一个开集 $W \ni x$，使得 $\mathrm{Stab}(W) \subseteq \mathcal{U}'$。根据 (i)，集合 $\bigcup_i D^{\overline{O'_i}}$ 是无处稠密的，因此存在 $z \in \pi^{-1}(W) \setminus \bigcup_i D^{\overline{O'_i}}$。于是，对每个 i 都有$\overline{z} \in O'_i \cdot z \subseteq O_i \cdot z$，且 $G_z \cap K = \emptyset$ (因为 $\pi(z) \in W$ 且 $G_z \leq G_{\pi(z)}$)。因此 $G_z \in \mathcal{U}$。由于 $\mathcal{U}$ 任意且 $S_G(X)$ 是闭集，这意味着 $G_x \in S_G(X)$。

(iv) 由 (ii)和 (iii)得出。 □

以下结论众所周知，且可由 [K2，定理 VII]得出。为求完整，我们给出一个简短证明。

引理 5.3. 设 X 是一个紧空间，Y 是一个局部紧空间，并设 $\varphi\colon X \to 2^Y$ 是上半连续的。设 $(U_i)_{i \in I}$ 是 Y 上拓扑的一个基，且每个 U_i 都相对紧。对 $i \in I$，令

$$X_i = \left\{x \in X : \phi(x) \cap \overline{U_i} \neq \emptyset\right\}.$$

则 ϕ 在集合$\bigcap_i (X \setminus \partial X_i)$的每个点处连续。

特别地，若 Y 是第二可数的，则 ϕ 的连续点集是余瘦的。

证明。设 $x \in \bigcap_i (X \setminus \partial X_i)$，并设 (x_a) 是 X 中收敛于 x 的一个网，且 $(\phi(x_a))$ 收敛于 F。根据上半连续性，我们知道 $F \subseteq \phi(x)$，并且要证明等号成立。取 i 使得 $\phi(x) \cap U_i \neq \emptyset$，即 $x \in X_i$。由于 x

根据假设，属于 $X \setminus \partial X_i$，因此 x 必属于 X_i 的内部。由于 (x_a) 收敛于 x，最终有 $x_a \in X_i$，也就是说，$\phi(x_a) \cap U_i \neq \emptyset$。由于 U_i 是紧致的，这意味着 $F \cap \overline{U}_i \neq \emptyset$。因此，只要 $\phi(x)$ 与 $\overline{U_i}$ 相交，F 也与 U 相交。由于 $(U_i)_{i\in I}$ 是 Y 上拓扑的一个基，这就表明 $\phi(x) \subseteq F$，证毕。

注意，由于上半连续性，X_i 总是闭集，因此$X \setminus \partial X_i$ 是一个稠密开子集。若 Y 是第二可数的，则$(U_i)_{i\in I}$ 可以取为可数的，因此 ϕ 的连续点集是余瘦的。□

推论 5.4. 设 G 是第二可数的，且 $G \curvearrowright X$ 是一个 G-流。那么，稳定子 的连续点集 $X_0 \subseteq X$ 在 X 中是稠密 G_δ 的，并且有

$$S_G(X) = \overline{\mathrm{Stab}(X_0)}.$$

证明。 第一个断言由稳定子映射的上半连续性和引理5.3得出，第二个断言则由命题 (iv) 的 5.2得出。□

注 5.5. 当 G 不是第二可数时，不再一定存在 $x \in X$ 使得 $G_x \in S_G(X)$。事实上，考虑群 $G = SO(3, R)$，赋予离散拓扑，并令其作用于二维球面 $X = S^2$。于是，对所有 $x \in X$ 都有 $G_x \neq \{1_G\}$。另一方面，每个非单位元在 X 中只有两个不动点，因此该作用是拓扑自由的，这意味着 $S_G(X) = \{\{1_G\}\}$（见推论 5.7）。这里，稳定子映射的连续点集为空。

在 X 为极小的情形下，文献中已以“稳定子 URS”之名研究过稳定子流。回顾一下，G 的一致递归子群（URS）是 Sub(G) 的一个极小子流。Glasner 和 Weiss [GW]为每个极小 G-流关联了如下稳定子 URS。稳定子映射的上半连续性意味着 Stab(X) 有唯一的极小子流（见 [AG，引理 1.1]或 [GW，命题 1.2]）。于是，X 的稳定子 URS 就定义为这个极小子流。命题 5.2 表明，对于极小流，我们的定义与他们的定义一致。

推论 5.6. 设 X 是一个极小 G-流。则其稳定子 *URS* 等于 $S_G(X)$。

证明。 命题 5.2 (ii) 告诉我们，$S_G(X) \subseteq \mathrm{Stab}(X)$。由于 X 是极小的，$\hat{}X_G$ 也极小，因此它的因子 $S_G(X)$也极小。现在，由于 $\mathrm{Stab}(X)$ 有唯一的极小子流，结论即得。□

推论 5.4对极小 X也已为人所知：参见 [GW，命题 1.2]。

回顾一下，若一个流 $G \curvearrowright X$ 满足以下条件，则称其为拓扑自由的：对于每个不包含 1_G 的紧致$K \subseteq G$，闭集 $\{x \in X : x \in K \cdot x\}$ 都具有空内部。若点$x \in X$ 的轨道映射$G \to G \cdot x$，$g \mapsto g \cdot x$ 是单射，则称该点为自由的。若一个流中的所有点都是自由的，则称该流为自由的。显然，自由点稠密的流是拓扑自由的；而一个简单的贝尔纲论证表明，当G 是第二可数时，反过来也成立。

推论 5.7. 设 $G \curvearrowright X$ 是一个 G-流。则以下条件等价：

(i) X 是拓扑自由的；

(ii) $\hat{}X_G$ 是自由的；(iii) $S_G(X) = \{\{1_G\}\}$。

特别地，拓扑自由的 *Gleason* 完备流是自由的。

证明。 (ii) 与(iii)的等价性由 $S_G(X)$ 的定义得出。

(i) $\Rightarrow$ (ii) 由于 $\hat{}X_G \to X$ 是不可约的，假设 X 是拓扑自由的，这意味着 $\hat{}X_G$ 也拓扑自由。令$g \in G$，$g \neq 1_G$。令 $V \subseteq G$

是一个开且相对紧的子集，满足 $g \in V$ 且 $1_G \notin V$。那么集合$\{z \in \hat{X}_G : z \overline{\in} V \cdot z\}$ 根据定理 4.2是开集；由拓扑自由性可知其空内部，因此它必为空集。由此我们得出，对于所有 $g \cdot z \neq z$ 均成立 z。

(ii) $\Rightarrow$ (i) 反设存在一个紧致的 $K \subseteq G$，满足$1_G \notin K$，使得集合 $\{x \in X : x \in K \cdot x\}$ 具有非空内部W。由命题 5.2 (i)，集合 $\pi^{-1}(W) \setminus D_K$ 非空，且对该集合中的任意z，都有$z \in K \cdot z$，这与 $\hat{X}_G$的自由性矛盾。□

由此不难推导出 Veech 的一个著名定理。

推论 5.8 (Veech)**.** 每个局部紧群都存在自由流。

证明。设 G 是一个局部紧群，令 Sa(G) 表示它的 Samuel 紧化，即 G 上右一致连续有界函数所成 Riesz 空间的谱。于是 $G \curvearrowright \mathrm{Sa}(G)$ 是一个 G-流，且 G 作为点求值稠密嵌入 Sa(G)。此外，由 [Z2, 3.2.1] 可知，流 Sa(G) 是 Gleason 完备的（或者，也不难验证定理 3.2 的条件 (iii)）。由于左平移作用 $G \curvearrowright G$ 是自由的，推论 5.7 告诉我们，流 Sa(G) 也是自由的。□

参考文献

[AG] J. Auslander 和 S. Glasner，《极小流的远离性与高度近端扩张》，Indiana Univ. Math. J. 26 (1977)，第 4 期，731–749。[B] I. Ben Yaacov，《拓扑度量空间上的 Lipschitz 函数》，J. Log. Anal. 5 (2013)，论文 8，21。[BMT] I. Ben Yaacov、J. Melleray 和 T. Tsankov，《波兰群的可度量化普适极小流具有余瘦轨道》，Geom. Funct. Anal. 27 (2017)，第 1 期，67–77。[BZ] G. Basso 和 A. Zucker，《波兰群之外的拓扑动力系统》，Comment. Math. Helv. 96 (2021)，第 3 期，589–630。[CKM] P.-E. Caprace、M. Kalantar 和 N. Monod，《双曲群的 I 型猜想与边界表示》，Proc. Lond. Math. Soc. (3) 127 (2023)，第 2 期，447–486。[CLB] P.-E. Caprace 和 A. Le Boudec，《可交换化子群与微支撑作用》，J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 25 (2023)，第 6 期，2251–2294。附录由 Dominik Francoeur 撰写。[CRW] P.-E. Caprace、C. D. Reid 和 G. A. Willis，《全不连通群的局部正规子群。第一部分：一般理论》，Forum Math. Sigma 5 (2017)，e11，76。[dJvR] E. de Jonge 和 A. C. M. van Rooij，《Riesz 空间导论》，Mathematical Centre Tracts，第 78 号，Mathematisch Centrum，阿姆斯特丹，1977。[F] Z. Frolík，《极端不连通空间和完备布尔代数上的映射不动点》，Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 16 (1968)，269–275。[G1] S. Glasner，《拓扑动力系统中的可压缩性》，Amer. J. Math. 97 (1975)，148–171。[G2] ———，《近端流》，Lecture Notes in Mathematics，第 517 卷，Springer-Verlag，柏林，1976。[G3] A. M. Gleason，《投影拓扑空间》，Illinois J. Math. 2 (1958)，482–489。[GW] E. Glasner 和 B. Weiss，《一致复现子群》，《遍历理论与动力系统新趋势》，2015 年，第 63–75 页。[HR] E. Hewitt 和 K. A. Ross，《抽象调和分析》第一卷，第二版，Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]，第 115 卷，Springer-Verlag，柏林—纽约，1979 年。拓扑群结构、积分理论、群表示。[K] A. S. Kechris，《经典描述集合论》，Graduate Texts in Mathematics，第 156 卷，Springer-Verlag，纽约，1995。[KK] M. Kalantar 和 M. Kennedy，《离散群约化 C*-代数的边界》，J. Reine Angew. Math. 727 (2017)，247–267。[K1] S. Koppelberg，《布尔代数手册》第一卷，North-Holland Publishing Co.，阿姆斯特丹，1989 [2] 991565。J. Donald Monk 和 Robert Bonnet 编。MR K C. Kuratowski，《紧度量空间的半连续分解》，Fundamenta Mathematicae 11 (1928)，第 1 期，169–185（法语）。[KR] H. B. Keynes 和 J. B. Robertson, Jr.，《拓扑变换群中的遍历性与混合性》，Duke Math. J. [35] 23444 (1968)，809–819。MR MBT N. Matte Bon 和 T. Tsankov，《实现一致复现子群》，Ergodic Theory Dynam. Systems 40 (2020)，478–489。

[R] M. Rubin，《局部移动群与重构问题》，《有序群与无限置换群》，1996 年，第 121–157 页。[S] R. A. Struble，《局部紧群中的度量》，Compositio Math. **28** (1974)，217–222。[Z1] A. Zucker，《一般点问题的直接解法》，Proc. Amer. Math. Soc. **146** (2018)，第 5 期，2143 2148– 。[Z2] ———，极大高度近端流，Ergodic Theory Dynam. Systems **41** 7，2220 2021( )，第 –2240 期。MR4266370

法国国家科学研究中心，UMPA–ENSLyon，意大利大道46号，
69364里昂，法国电子邮件地址：adrien.le-boudec@ens-lyon.fr

卡米耶·若尔当研究所，克洛德·贝尔纳里昂第一大学，1918年11月11日大道43号，69622维勒班 cedex，法国 – 和 – 法国大学研究院电子邮件地址：tsankov@math.univ-lyon1.fr