arXiv:2302.03095v1 [math.AG] 6 Feb 2023

分类具有环面作用的对数德尔佩佐曲面

¨ ¨DANIEL HATTIG、JURGEN HAUSEN、JUSTUS SPRINGER

摘要。我们研究带有非平凡环面作用的对数德尔佩佐曲面。若某曲面存在一种奇点消解，使得所有亏格差均大于或等于 $1/k-1$，则称其为 $1/k$-对数典范。我们给出固定 k 的具体分类算法，并明确给出 $k=1$、2 和 3 的结果。这尤其涵盖戈伦斯坦指标为 1、2 和 3 的情形。

1. 引言

对数德尔佩佐曲面是至多具有对数终端奇点的德尔佩佐曲面 X；这意味着某种奇点消解$X' \to X$ 的所有亏格差均大于 -1。根据命题 3.6]，对数德尔佩佐曲面都是有理曲面 [28,，并且构成了一类受到广泛研究的有理曲面。若不对奇点施加进一步条件，对数德尔佩佐曲面的类是无界的。Alexeev [1] 于 1994 年指出，对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，ε-对数典范德尔佩佐曲面类是有界的，也就是说，这类曲面所允许的亏格差均至多等于 $\varepsilon - 1$。

本文聚焦于具有非平凡有效环面作用的对数德尔佩佐曲面。与一般情形相比，这一类曲面更易处理，但其范围仍然不受限，且足够丰富，可作为有趣的示例类别和试验对象。我们的目标是为 $\varepsilon = 1/k$ 具有正整数 k的情形提供明确且可行的分类程序。我们区分托里克对数德尔佩佐曲面（其作用环面 $\mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^*$ 为二维）与具有 $\mathbb{K}^*$-作用的非环面对数德尔佩佐曲面。我们为 $k = 1$，2，3的情形给出明确结果，其中 $k = 1$ 这一情形属于 $k = 2$ 等。下面给出一个具体示例。

定理1.1。 共有129 904 个1 3-对数典范德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$曲面，其中48032 个为托里克，81872 个为非托里克。按照皮卡数 ρ，这些曲面的数量分布如下：

ρ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
环面	355	3983	13454	17791	9653	2465	292	37	1	1	—	—
非环面型	318	3632	15174	26654	22648	10024	2731	577	100	11	2	1
总计	673	7615	28628	44445	32301	12489	3023	614	101	12	2	1

每个 Gorenstein 指数为 ι 的对数德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$ 曲面，对于所有 $k \geq \iota$ 均为 $1/k$ 对数典范。因此，我们的分类特别涵盖了 Huggenberger 对 Gorenstein 德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$ 曲面 [23, 的分类，见第 5 节。6]，另见 [24]。注意，根据 [21，定理 2，2]，Gorenstein 德尔佩佐曲面自动是对数终端的。此外，我们在分类中找出了所有 Gorenstein 指数为 $\iota = 2{,}3$ 的对数德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$ 曲面，从而补充了 S¨uß 在此背景下针对皮卡数为 1 的情形所得的结果 [33], 。

2010数学主题分类。 14L30,14J26.

推论 1.2。 *Gorenstein* 指标为 $\iota = 1$、2、3 且皮卡数为 ρ 的非零族数如下所示：

ρ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\iota = 1$	18	19	10	3	—	—	—	—	—	—	—	—				
$\iota = 2$	17	36	30	16	7	4	1	1	—	—	—	—		
$\iota = 3$	54	162	185	105	59	32	16	9	5	2	1	1

分类的更多数据将在后续章节中介绍。更重要的是，我们提供了一个可搜索数据库 [14] ，其中包含所有曲面的定义数据以及重要不变量，例如 Gorenstein 指数、反典范自交数等。例如，存储典范解消的最小差异，使我们能够确定跳跃点，也就是$1 \leq \alpha \leq 3$；在这些点上， α^{-1}对数典范曲面的数量会增加。

推论 1.3。 将 α 映射为具有环面作用的 α^{-1}-对数典范德尔佩佐曲面族数量 $\nu(\alpha)$ 的函数 $\mathbb{Q}_{\geq 1} \to \mathbb{Z}$ ，在区间 $[1, 3]$，内恰有 32 个跳跃点，如下表所列：

α	1	3/2	5/3	7/4	9/5	11/6	13/7	15/8
$\nu(\alpha)$	50	117	223	290	320	333	337	338
α	2	11/5	7/3	17/7	5/2	23/9	13/5	8/3,
$\nu(\alpha)$	1742	1896	3777	3812	10889	10902	13910	14185
α	19/7	11/4	25/9	14/5	31/11	17/6	37/13	43/15
$\nu(\alpha)$	15173	23095	23516	23518	23679	26357	26407	26416
α	23/8	49/17	29/10	35/12	41/14	47/16	53/18	3
$\nu(\alpha)$	27392	27393	27743	27852	27880	27887	27889	129904

我们分类的基本思路，是从一个适当的、更小且更易处理的起始类出发，以算法方式构造出所有 $1/k$-对数典范德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$-曲面的类。现在我们概述环面情形和非环面情形中的过程。

在环面情形下，我们受益于一个广为人知的对应关系：环面德尔佩佐曲面对应于顶点为本原顶点且以原点为内点的二维格多边形。我们的起始类由 $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ 以及加权射影平面 $\mathbb{P}_{1,\ 1,\ \alpha}$组成，其中 $\alpha = 1, \ldots, 2k$。这些曲面的 $1/k$-对数典范性体现在相应的格多边形

$$\operatorname{conv}(\pm e_1, \pm e_2), \qquad \operatorname{conv}(-\alpha e_1 - e_2, e_1, e_2), \quad \alpha = 1, \ldots, 2k$$

几乎 k-空心，也就是说，只有原点是 k 重内部格点。我们证明，经过适当的幺模变换后，任意几乎 k-空心格多边形都包含上述起始类中的一个多边形，而且还可以置于半径为

$$R \ = \ k^2\sqrt{4k^2 + 4k + 2}.$$

这使我们能够从起始类出发，通过依次添加取自半径为 R的圆盘的新顶点，构造几乎 k-空心格多边形。适当缩小新顶点的搜索空间可以加快这一过程；去除冗余条目后，我们得到一份几乎 k-空心格多边形在幺模等价意义下的代表元列表；参见算法 4.10。

非环面型对数德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$-曲面的情形是主要工作所在。在这里， [16, 18] 中发起的通过 Cox 环的方法为我们提供了一个具体的工作环境，尤其允许进行显式实现。与环面型德尔佩佐曲面的格多边形类似，在非环面情形下，我们同样可以以组合方式编码 $1/k$-对数典范性，这次是通过反典范复形 ，该复形在 [5], 中引入，另见 [20, 22]。为了构造一个合适的起始类

在分类过程中，我们采用以下简单、原始的极小性概念：如果一个正规完备曲面 X 不允许对任何曲线进行正规双有理收缩，则称其为组合极小；参见 [15]，以及近期应用 [27]。为了说明组合极小性适合我们的目的，我们首先希望看到，每个 $1/k$-对数典范德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$-曲面 X都可以通过一个序列收缩为一个极小曲面

$$X = X_1 \to \ldots \to X_q = X_{\min}$$

对有理 $1/k$-对数典范德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$ 曲面进行可明确理解的收缩 $X_i \to X_{i+1}$。这在命题 10.14 至 10.16 中完成。结果表明，即使从非环面型 $\mathbb{K}^*$ 曲面出发，我们最终也可能得到环面曲面 $X_{\min}$。在这种情况下，前文进行的托里克分类尤其提供了所有可能的 $X_{\min}$。第 11 节对非环面型、组合极小的 $1/k$-对数典范德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$ 曲面进行了分类。对于任意 k，定理 11.1 给出了非环面型、组合极小的 $1/k$-对数典范德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$ 曲面定义数据的界。此外，在定理 11.3 中，我们对 $k = 1$、2、3 的组合极小情形进行了明确分类。最后，在第 12 节中，我们通过合并环面型与非环面型的组合极小情形，构造出一个合适的起始类，并给出构造过程的界；参见命题 12.6 和定理 12.7。随后，算法 12.8 能够给出所有非环面型 $1/k$-对数典范德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$ 曲面的完整分类。定理 ??给出了 $k = 1$、2、3 的关键数据。

除了建立分类程序外，我们的目标还在于对带有环面作用的有理曲面所需理论作出连贯的阐述，同时兼顾入门内容。基础材料也散见于文献中，例如参见 [3, 第 5 节4]和 [23]。为方便起见，我们以统一的记号展开理论，并为一些核心事实给出完整证明。

目录

1. 引言 1 2. 环面几何简要回顾 3 3. 环面曲面的几何 8 4. 托里克德尔佩佐曲面的分类 12 5. 有理 $\mathbb{K}^*$曲面 16 6. 同构问题 20 7. 有理 $\mathbb{K}^*$曲面的几何 25 8. 奇点 29 9. 对数德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$曲面 36 10. 收缩与组合极小性 42 11. 组合极小情形 47 12. 分类 $1/k$对数典范德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$曲面 50 参考文献 56

2. 环面几何简要回顾

我们简要汇集环面几何的一般背景知识，供后续章节使用。作为详细的入门读物，我们推荐 [10, 11, 13]。环面几何始于 Demazure 关于克雷莫纳群的研究 [12]，它将代数几何与组合学联系起来，并迅速发展成为这两个学科之间内容丰富且备受关注的交叉领域。

代数几何一侧的对象是标准 n-维环面，即n重直积 $\mathbb{T}^n = \mathbb{K}^* \times \ldots \times \mathbb{K}^*$，以及环面簇，即嵌入正规簇 Z 的开嵌入$\mathbb{T}^n \subseteq Z$，使得 $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$上的乘法可扩张为一个态射作用 $\mathbb{T}^n \times Z \to Z$。环面簇$\mathbb{T}^m \subseteq Y$ 与 $\mathbb{T}^n \subseteq Z$ 之间的环面态射 是一个态射 $Y \to Z$，其限制为环面之间的同态$\mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^n$。通常我们只用 Z、Y等表示环面簇，用 $\varphi\colon Y \to Z$等表示环面态射。

在组合方面，我们采用以下术语。 $\mathbb{Z}^n$中的有限集合 Σ 称为格扇，其元素是尖凸多面锥，且 $\mathbb{Q}^n$ 中的任意$\sigma \in \Sigma$ 的每个面 $\tau \preccurlyeq \sigma$ 都属于 Σ，并且任意两个 $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ 都交于一个公共面。设扇 Σ位于 $\mathbb{Z}^n$ 中，扇 Δ位于 $\mathbb{Z}^m$ 中，则格扇映射 是一个同态$F\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^m$，满足对每个 $\sigma \in \Sigma$，都存在一个 $\tau \in \Delta$，使得 $F(\sigma) \subseteq \tau$。我们也用 F 表示将同态 $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^m$延拓得到的线性映射 $\mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}^m$。

我们介绍环面几何的基本构造：将任意格扇与一个环面簇相对应。此构造具有函子性，而环面几何基本定理告诉我们，它甚至建立了格扇范畴与环面簇范畴之间的协变等价。

构造 2.1. 设 Σ 是 $\mathbb{Z}^n$中的一个格扇。对于 Σ 的一个锥 $\sigma \subseteq \mathbb{Q}^n$，用 $\sigma^\vee \subseteq \mathbb{Q}^n$ 表示其对偶锥，并考虑加法幺半群 $M_\sigma := \sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^n$的幺半群代数$\mathbb{K}[M_\sigma]$ 的谱 Z_σ：

$$Z_\sigma \;=\; \operatorname{Spec} \mathbb{K}[M_\sigma], \qquad\qquad \mathbb{K}[M_\sigma] \;=\; \bigoplus_{u \in M_\sigma} \mathbb{K}\chi^u.$$

作用环面 $\mathbb{T}^n = \operatorname{Spec} \mathbb{K}[\mathbb{Z}^n]$ 通过 $\mathbb{K}[M_\sigma] \subseteq \mathbb{K}[\mathbb{Z}^n]$ 典范地嵌入 Z_σ，使其成为一个仿射环面簇。类似地，只要 $\tau \preceq \sigma$，就有开嵌入 $Z_\tau \subseteq Z_\sigma$。这样便可以将所有的 Z_σ 粘合起来，得到一个簇 Z:

$$Z \;=\; \bigcup_{\sigma \in \Sigma} Z_\sigma, \qquad \text{where } Z_\sigma \cap Z_{\sigma'} \;=\; Z_{\sigma \cap \sigma'} \;\subseteq\; Z.$$

粘合保持环面结构 $\mathbb{T}^n \subseteq Z_\sigma$，因此我们得到一个环面簇$\mathbb{T}^n \subseteq Z$，即与 中的扇 Σ 相关联的环面簇。任意 $\chi^u \in \mathbb{K}[\mathbb{Z}^n]$ 都会在 Z 上给出一个有理函数，满足

$$\chi^u(1, \ldots, 1) \;=\; 1, \qquad\qquad \chi^u(t \cdot z) \;=\; t_1^{u_1} \cdots t_n^{u_n} \chi^u(z),$$

在 $z \in Z$ 处有定义时。特别地，限制映射 $\chi^u\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{K}^*$ 恰好是 $\mathbb{T}^n \subseteq Z$ 的特征。给定格扇 Σ 到 $\mathbb{Z}^n$ 以及格扇 Δ 到 $\mathbb{Z}^m$ 的映射 F，我们得到代数同态

$$\mathbb{K}[M_\tau] \;\to\; \mathbb{K}[M_\sigma], \qquad \chi^u \mapsto \chi^{u \circ F},$$

只要 $\sigma \in \Sigma$ 和 $\tau \in \Delta$ 满足 $F(\sigma) \subseteq \tau$。取谱后，这就定义了态射 $Z_\sigma \to Y_\tau$，它们进而粘合成一个态射 $Z \to Y$，连接与 Σ 和 Δ 相关联的环面簇。

环面几何的任务，是将一方面的几何性质与另一方面的组合性质联系起来。我们首先说明如何从环面簇的定义扇中确定其轨道分解和不变除子。

概要 2.2。令 Σ 为 $\mathbb{Z}^n$ 中的一个格扇，Z 为其关联的环面簇。每个格向量 $v \in \mathbb{Z}^n$ 都定义一个 单参数子群

$$\lambda_v\colon \mathbb{K}^* \;\to\; \mathbb{T}^n \;\subseteq Z, \qquad\qquad t \;\mapsto\; (t^{v_1}, \ldots, t^{v_n}).$$

如果 v 位于锥 $\sigma \in \Sigma$的相对内部 σ° 中，则 λ_v 可延拓为一个态射$\bar{\lambda}_v\colon\ \mathbb{K} \to Z$。相应的 极限点 为

$$z_\sigma \;:=\; \lim_{t \to 0} \lambda_v(t) \;:=\; \bar{\lambda}_v(0) \;\in\; Z_\sigma \;\subseteq\; Z.$$

这里， z_σ 不依赖于 $v \in \sigma^\circ$的具体选择。注意，零锥 $\{0\} \in \Sigma$ 给出单位元 $z_0 \in \mathbb{T}^n$。极限点建立了一个双射

$$\Sigma \ \to \ \{\mathbb{T}^n\text{-orbits of } Z\}, \qquad \sigma \ \mapsto \ \mathbb{T}^n \cdot z_\sigma.$$

轨道 $\mathbb{T}^n \cdot z_\sigma$ 的维数为 $n - \dim(\sigma)$。特别地，射线，即一维锥 ϱ_1，.....， ϱ_r，定义了不变素除子

$$D_i \ := \ \overline{\mathbb{T}^n \cdot z_{\varrho_i}} \ \subseteq \ Z.$$

当且仅当 ϱ_i， $\varrho_j \subseteq \sigma$ 对某个锥 $\sigma \in \Sigma$ 成立时，我们有 $Z = \mathbb{T}^n \cup D_1 \cup \ldots \cup D_r$ 和 $D_i \cap D_j \neq \emptyset$。此外，存在一个同构

$$\mathbb{Z}^r \ \to \ \mathrm{WDiv}(Z)^{\mathbb{T}^n}, \qquad a \ \mapsto \ a_1 D_1 + \ldots + a_r D_r.$$

换言之，素除子 D_1，.....， D_r 自由生成群 $\mathrm{WDiv}(Z)^{\mathbb{T}^n}$，即不变魏尔除子群。最后，我们得到一个不变的反典范除子

$$-\mathcal{K}_Z \ = \ D_1 + \cdots + D_r \ \in \ \mathrm{WDiv}(Z)^{\mathbb{T}^n}.$$

下一个主题是除子类群。这是魏尔除子群对主除子子群取商所得的群。我们可以用定义扇对它作出明确描述，这也是研究其他不变量的关键。下面简要回顾相关术语。对于正规簇 Z 上的点 z，局部类群 $\mathrm{Cl}(Z, z)$ 是魏尔除子群对在 z 附近为主的除子子群取商所得的群。卡蒂埃除子 是局部为主的魏尔除子。皮卡群 是卡蒂埃除子群对主除子子群取商所得的群。此外，在有理向量空间中

$$\mathrm{Cl}_{\mathbb{Q}}(Z) \ = \ \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Cl}(Z)$$

与簇 Z的除子类群相关联，有以下重要子集。有效锥 $\mathrm{Eff}(Z)$由有效除子的类生成，即包含这些类的所有非负 $\mathbb{Q}$-线性组合。移动锥 $\mathrm{Mov}(Z)$由可移动除子的类生成，也就是说，这些除子的基 locus 的余维为一。半丰沛锥 $\mathrm{SAmple}(Z)$由半丰沛除子的类生成，而丰沛锥 $\mathrm{Ample}(Z)$由丰沛除子类的所有严格正 $\mathbb{Q}$-线性组合构成。

总结 2.3。 考虑 $\mathbb{Z}^n$ 中的格扇 Σ 及其射线 $\varrho_1, \ldots, \varrho_r$，以及对应的本原格向量 $v_i \in \varrho_i$。Σ 的生成矩阵 为

$$P \ := \ [v_1, \ldots, v_r].$$

假设 P 的秩为 n。我们用 P来描述与 Σ 中的 Z 相关联的环面簇的除子类群。首先回顾这一对应关系

$$\mathbb{Z}^r \ \to \ \mathrm{WDiv}(Z)^{\mathbb{T}^n}, \qquad a \ \mapsto \ D(a) := a_1 D_1 + \ldots + a_r D_r.$$

特征函数 $\chi^u \in \Gamma(\mathbb{T}^n, \mathcal{O}) \ \subseteq \mathbb{K}(Z)$的除子，其中 $u \in \mathbb{Z}^n$，由生成矩阵的转置矩阵 P^t 给出：

$$D(P^t(u)) \ = \ \langle u, v_1 \rangle D_1 + \ldots + \langle u, v_r \rangle D_r \ = \ \mathrm{div}(\chi^u).$$

Z 的除子类群 $\mathrm{Cl}(Z)$ 恰好是由不变魏尔除子构成的群模去不变主除子构成的群，因此我们得到

$$\mathrm{Cl}(Z) \ = \ K \ := \ \mathbb{Z}^r / \mathrm{im}(P^t).$$

利用投影 Q: $\mathbb{Z}^r \to K$，不变素除子 $D_i \subseteq Z$ 的类满足 $[D_i] = Q(e_i)$。 $z_\sigma \in Z$ 的局部类群为

$$\mathrm{Cl}(Z, z_\sigma) \ = \ K / K_\sigma, \qquad\qquad K_\sigma \ := \ \langle Q(e_i);\ P(e_i) \notin \sigma \rangle.$$

由于 Z 是经过点 z_σ 的 $\mathbb{T}^n$-轨道的并，其中 $\sigma \in \Sigma$，这就确定了所有局部类群。Z 的皮卡群为

$$\operatorname{Pic}(Z) \;=\; \bigcap_{\sigma\in\Sigma} K_\sigma \;\subseteq\; \operatorname{Cl}(Z).$$

在有理除子类群 $\mathsf{Cl}_\mathbb{Q}(Z) = K_\mathbb{Q}$ 中，我们将有效与可动除子类锥识别为

$$\operatorname{Eff}(Z) \;=\; Q(\gamma), \qquad\qquad \operatorname{Mov}(Z) \;=\; \bigcap_{\substack{\gamma_0 \preccurlyeq \gamma \\ \text{facet}}} Q(\gamma_0),$$

其中 $\gamma = \mathbb{Q}^r_{\geq 0}$ 表示 $\mathbb{Q}^r$ 中的正正交锥。$\mathsf{Cl}_\mathbb{Q}(Z)$ 中半丰沛与丰沛除子类的锥为

$$\operatorname{SAmple}(Z) \;=\; \bigcap_{\sigma\in\Sigma} \operatorname{cone}(Q(e_i);\; P(e_i) \notin \sigma), \qquad \operatorname{Ample}(Z) \;=\; \operatorname{SAmple}(Z)^\circ.$$

我们来考察奇点与光滑性。回忆一下，正规簇 Z 上的点 $z \in Z$ 称为阶乘的，如果每个魏尔除子在 z 附近都有一个非零倍数是主除子。若正规簇上的每个点都是 $\mathbb{Q}$-阶乘的，则称该正规簇为 $\mathbb{Q}$阶乘的。

总结 2.4。设 Z 是由 $\mathbb{Z}^n$ 中的格扇 Σ 导出的环面簇。考虑极限点 $z_\sigma \in Z$，其中 $\sigma \in \Sigma$。

(i) 点 $z_\sigma \in Z$ 是 $\mathbb{Q}$-阶乘的，当且仅当 σ 是单纯的，即由 $\mathbb{Q}^n$ 的某个向量空间基的一部分生成。(ii) 点 $z_\sigma \in Z$ 是光滑的，当且仅当 σ 是正则的，即由 $\mathbb{Z}^n$ 的某个格基的一部分生成。(iii) 点 $z_\sigma \in Z$ 是 $\mathbb{Q}$-阶乘的（光滑的），当且仅当 $\mathbb{T}^n \cdot z_\sigma$ 中的所有点都是 $\mathbb{Q}$-阶乘的（光滑的）。(iv) 簇 Z 是 $\mathbb{Q}$-阶乘的（光滑的），当且仅当格扇 Σ 的所有锥都是单纯的（正则的）。

格扇 Σ 在 $\mathbb{Z}^n$ 中是完备的，当且仅当其支撑（即所有锥的并集）等于 $\mathbb{Q}^n$。此外，Σ 是多面体的，当且仅当它由一个包含原点于其内部的 n 维凸多胞体$\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Q}^n$ 生成；这里生成是指 Σ恰好由$\mathcal{A}$的真面所生成的锥组成。

总结 2.5。设环面簇 Z 由格扇 Σ 在 $\mathbb{Z}^n$中导出。那么，Z完备当且仅当 Σ 完备；Z 射影当且仅当 Σ 是多面体的。若后一条件成立，则对于任意表示丰沛除子$D = a_1D_1 + \cdots + a_rD_r$ 的 $a \in \mathbb{Z}^r$，格扇 Σ 由该多胞体的对偶生成

$$(P^t)^{-1}(B_a - a) \;\subseteq\; \mathbb{Q}^n, \qquad B_a \;:=\; Q^{-1}(Q(a)) \cap \gamma.$$

这里与前文一样，P是 Σ和 Q的生成矩阵：$\mathbb{Z}^r \to K = \mathbb{Z}^r/\operatorname{im}(P^t)$ 是投影，$\gamma = \mathbb{Q}^r_{\geq 0}$ 是正正交锥。在一维情形下，唯一的完备环面簇是射影直线。每个完备环面曲面都是射影的。最早出现的非射影完备环面簇位于三维。

法诺簇是一种正规完备簇，具有充足反典范除子。注意，根据此定义，Fano 品种是射影的，并且法诺簇的反典范除子的某个正整数倍是 Cartier。

总结 2.6. 设 Σ 是 $\mathbb{Z}^n$ 中的一个完备格扇，且 $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Q}^n$ 是由 Σ的本原生成元 $v_1, \ldots, v_r$ 张成的凸包。那么以下陈述等价。

(i) 与 Σ 相关的环面簇 Z 是法诺簇。(ii) 向量 $Q(e_1) + \cdots + Q(e_r)$ 位于 Z 的丰沛锥中。

(iii) 对于每个 $\sigma \in \Sigma$，存在一个 $u \in \mathbb{Q}^r$，使得在 $v_i \in \sigma$ 时，$\langle u, v_i \rangle = 1$。(iv) 扇 Σ 由多面体 $\mathcal{A}$ 张成。

我们将使用*Cox* 商表示，它推广了将射影空间 $\mathbb{P}_n$ 构造成 $\mathbb{K}^{n+1}\setminus\{0\}$ 的商的做法，其中 $\mathbb{K}^*$ 通过数乘作用。另见 [9]，[10,第 5] 节和第 [3, 2.1 节3]，了解更多详情。

构造 2.7. 设 $\mathbb{Z}^n$ 中的格扇 Σ的生成矩阵为 P，其秩为 n，并令 Z 为相应的环面簇。Z 的*Cox* 环 定义为

$$\mathcal{R}(Z) \;=\; \bigoplus_{D\in \mathrm{Cl}(Z)} \Gamma(Z, \mathcal{O}_D(Z)) \;\cong\; \bigoplus_{w\in K} \mathbb{K}[T_1,\ldots,T_r]_w \;=\; \mathbb{K}[T_1,\ldots,T_r].$$

多项式环 $\mathbb{K}[T_1,\ldots,T_r]$ 的 K-分次由 $\deg(T_i) := [D_i] = Q(e_i)$ 给出。考虑正交象限 $\gamma = \mathbb{Q}^r_{\geq 0}$ 及其面扇 Σ，并且

$$\hat{\Sigma} \;:=\; \{\tau \preccurlyeq \gamma;\; P(\tau) \subseteq \sigma \text{ for some } \sigma \in \Sigma\}.$$

ˆ– ˆ则 Σ 是扇 Σ 的子扇，并且 P 将 Σ 中的锥映射到 Σ中的锥。对于相应的环面簇，这得到如下图示

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{T}^r & \subseteq & \hat{Z} & \subseteq & \bar{Z} & := & \mathbb{K}^r. \\ {\scriptstyle /H}\big\downarrow{\scriptstyle p} & & {\scriptstyle p}\big\downarrow{\scriptstyle /\!/H} & & & & \\ \mathbb{T}^n & \subseteq & Z & & & & \end{array}$$

ˆ ¯在此，$Z \subseteq Z$ 是一个开 $\mathbb{T}^r$不变子簇，而 p 扩张了环面的同态，其指数向量为 $P =(p_{ij})$的各行：

$$\mathbb{T}^r \;\to\; \mathbb{T}^n, \qquad t \;\mapsto\; (t^{P_{1*}},\ldots,t^{P_{n*}}), \qquad t^{P_{i*}} \;:=\; t_1^{p_{i1}}\cdots t_r^{p_{ir}}.$$

ˆ 态射 p: $Z \to Z$ 是拟环面 $H =\ker(p) \subseteq \mathbb{T}^r$ 作用于ˆZ的优商。若 Σ 是单纯的，则 p 的每个纤维都是一个 H-轨道。

ˆ**注 2.8**。设 Z 是一个环面簇，其商表示为 p: $Z \to Z$，如构造 2.7 所示。那么，每个 p-纤维都包含唯一的闭 H-轨道。点 $x \in Z$ 的*Cox* 坐标表示为

$$x \;=\; [z_1,\ldots,z_r], \qquad \text{where } z=(z_1,\ldots,z_r)\in p^{-1}(x) \text{ with } H\cdot z \subseteq \hat{Z} \text{ closed}.$$

因此，当且仅当 z 和 z' 属于 Z中同一个闭 H-轨道时，$[z]$ 和 $[z']$ 才表示同一个点 $x \in Z$。例如，点 $z_\sigma \in Z$（其中 $\sigma \in \Sigma$）的 Cox 坐标为

$$z_\sigma \;=\; [\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_r], \qquad \varepsilon_i \;=\; \begin{cases} 0, & P(e_i)\in\sigma, \\ 1, & P(e_i)\notin\sigma. \end{cases}$$

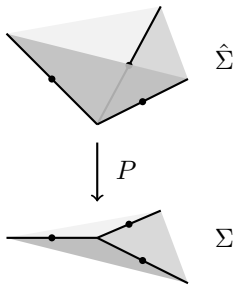
我们以曲面情形中的一个例子结束本节，以展示如何从其定义性的组合数据中得到（众所周知的）几何特征。

例 2.9. 考虑加权射影平面 $\mathbb{P}_{1,\,2,\,3}$。作为一个环面簇，它来自于 Σ 中的完备格扇 $\mathbb{Z}^2$，其生成矩阵为

$$P \;=\; [v_1,v_2,v_3] \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

为了看出与 Σ 相关的环面簇 Z 确实等于 $\mathbb{P}_{1,\,2,\,3}$，我们考察 Cox 商构造。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^3 \setminus \{0\} & = & \hat{Z} \\ & /H \big\downarrow p & \\ \mathbb{P}_{1,2,3} & = & Z \end{array}$$



注意，由生成矩阵 P 定义的环面的同态及其核 H 可明确表示为

$$p\colon \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^2, \quad (t_1,t_2,t_3) \mapsto \left(\frac{t_1t_2}{t_3}, \frac{t_1^2}{t_2}\right), \qquad H = \{(t,t^2,t^3);\ t \in \mathbb{K}^*\}.$$

因此， $H = \mathbb{K}^*$ 在 $\mathbb{K}^3$ 中以权重 1、2 和 3 作用，而$Z = \mathbb{P}_{1,\ 2,\ 3}$ 是 $\hat{Z} = \mathbb{K}^3 \setminus \{0\}$ 在此作用下的商。让我们来看看$\mathbb{P}_{1,\ 2,\ 3}$的几何。我们有

$$\mathrm{Cl}(Z) = \mathbb{Z}^3/\mathrm{im}(P^t) = \mathbb{Z}$$

其中投影 $Q\colon\ \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}$ 将（a_1，a_2，a_3）映射到（a_1，$2a_2$，$3a_3$）。由此可以恢复皮卡群:

$$\mathrm{Pic}(Z) = \mathbb{Z} \cap 2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z} = \mathrm{Cl}(Z).$$

由于 Σ 有三条射线， Z上有三个不变素除子 D_1、 D_2 和 D_3 。特别地，反典范类为

$$[-\mathcal{K}_Z] = [D_1] + [D_2] + [D_3] = 1 + 2 + 3 = 6 \in \mathbb{Z} = \mathrm{Cl}(Z).$$

因此， $-\mathcal{K}_Z$ 是生成 Pic(Z) 的一个丰沛Cartier除子。注意， Σ 由$\mathcal{A}$ = conv(v_1， v_2，v_3)张成。两个奇点由 Cox坐标表示为

$$[0,1,0], \qquad [0,0,1].$$

3. 托里克曲面的几何

本节将进一步考察二维环面几何，也就是环面曲面的情形。在二维情形中，格扇的组合框架十分简单，因此环面曲面构成了一类特别值得研究的例子；详细论述见 [10, 第 10]章。让我们看看，前一节中的一般图景在曲面情形下是什么样的。

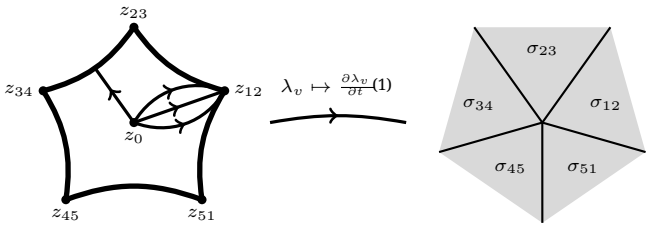
总结 3.1. 考虑由 Σ 中完备格扇 Σ 所对应的射影环面曲面 Z ， 以及 Σ的生成矩阵 $P = [v_1, \ldots, v_r]$、射线 ϱ_i =、锥 cone(v_i) $\in \Sigma$ 及其极限点 $z_i \in Z$。则有

$$Z = \mathbb{T}^2 \cup D_1 \cup \ldots \cup D_r, \qquad D_i := \overline{\mathbb{T}^2 \cdot z_i}.$$

每个轨道闭包 D_i都是一条光滑有理曲线，而 $D_1 \cup \ldots \cup D_r$是一个环，具体来说，$D_i \cap D_j$ 非空当且仅当相应的射线 ϱ_i和 ϱ_j 相邻。若两条射线 ϱ_i 和 ϱ_j 相邻，则有

$$D_i \cap D_j = \{z_{ij}\}, \qquad z_{ij} := z_{\sigma_{ij}}, \qquad \sigma_{ij} := \mathrm{cone}(v_i, v_j) \in \Sigma.$$

单参数子群 $\lambda_v\colon\ \mathbb{K}^* \to \mathbb{T}^2$, $t \mapsto (t^{v_1},\ t^{v_2})$ 当且仅当 $v = (v_1,\ v_2)$ 分别位于 ϱ_i 或 σ_{ij} 的相对内部时，趋近于 z_i 或 z_{ij} （当 $t \to 0$ ）。将具有相同极限的 λ_v 的导数归入锥中，我们便从 Z 恢复出 Σ:



轨道 $\mathbb{T}^2 \cdot z_0$ 和 $\mathbb{T}^2 \cdot z_i$ 仅包含 Z 的光滑点。 z_{ij} 恰好是环面不动点。每个环面不动点 z_{ij} 都是 $\mathbb{Q}$-阶乘性的。此外，当且仅当 $\det(v_i,\ v_j) = \pm 1$ 时， z_{ij} 是光滑的。

由于具有 $\mathbb{Q}$阶乘性，任意完备环面曲面都有定义良好的交积。下面说明如何根据定义扇显式计算交数。

总结 3.2。 考虑由完备格扇 Σ在 $\mathbb{Z}^2$ 中生成矩阵为.....所确定的环面曲面 Z

$$P \ = \ [v_1, \ldots, v_r].$$

对于任意两个按正向排列的不同生成元 $v_i,\ v_j$，相应除子 $D_i,\ D_j$ 的交数为

$$D_i \cdot D_j \ = \ \begin{cases} \det(v_i, v_j)^{-1}, & \text{if } \operatorname{cone}(v_i, v_j) \in \Sigma, \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

此外，我们可以计算除子 D_j的自交数。取按正向排列的相邻生成元 v_i、 v_j、 v_k，有

$$D_j^2 \ = \ -\frac{\det(v_i, v_k)}{\det(v_i, v_j)\det(v_j, v_k)}.$$

注记 3.3. 设 Σ 是 $\mathbb{Z}^2$ 中的一个完备格扇，其生成矩阵为 P，列为 $v_1,\ \ldots,\ v_r$，并按正向排列。假设 $v_i = (l_i,\ d_i)$，其中 $l_i \neq 0$ 对于 $i = 1,\ \ldots,\ r$ 成立，并令 $v_{r+1} := v_1$。那么，与 Σ 相关联的环面曲面 Z 上任意典范除子 $\mathcal{K}_Z$ 的自交数为

$$\mathcal{K}_Z^2 \ = \ \sum_{i=1}^{r} \left(2 - \frac{l_i}{l_{i+1}} - \frac{l_{i+1}}{l_i}\right) \frac{1}{\det(v_i, v_{i+1})}.$$

我们来仔细考察环面曲面的奇点。如前所见，这些奇点必定是环面不动点。因此，在局部研究中，我们需要考虑由二维格锥定义的仿射环面曲面。

总结 3.4. 考虑与 $\mathbb{Z}^2$ 中的二维格锥 σ 相关联的仿射环面曲面 Z_σ 。经过适当的幺模变换后，其生成矩阵具有如下形式

$$P \ = \ \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{bmatrix}, \qquad 0 \leq a < b.$$

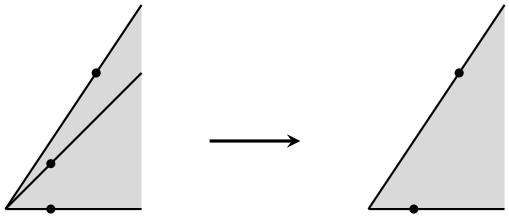
因此，锥 σ 由 P 的各列生成。当且仅当 $b > 1$ 成立时，点 $z_\sigma \in Z_\sigma$ 是奇点。2.7 节中的 Cox 商表示给出了一个态射 $p\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2/H = Z_\sigma$，其中

$$H \ = \ \ker(p) \ = \ \{(t^{-a}, t);\ t \in \Gamma_b\}, \qquad \Gamma_b \ := \ \{t \in \mathbb{K}^*;\ t^b = 1\}.$$

因此， Z_σ 是 $\mathbb{K}^2$ 关于一个阶为 b的循环群的对角作用的商。特别地，对于 $b \geq 2$，我们看到，点 $z_\sigma = p(0,\ 0)$是一个二维循环商奇点。

我们讨论环面曲面奇点的消解。回顾一下，尖凸多面体锥 $\sigma \subseteq \mathbb{Q}^n$ 的希尔伯特基 $\mathcal{H}_\sigma$ 是加法幺半群 $\sigma \cap \mathbb{Z}^n$中不可分解元素组成的（有限）集合。在这里，非零元素 $v \in \sigma \cap \mathbb{Z}^n$若满足 $v = v' + v''$ 且 v'不可分解，则 $v'' \in \sigma \cap \mathbb{Z}^n$ 只有在 $v = v'$ 或 $v = v''$时才可能。

总结 3.5。设仿射环面曲面 Z_σ 由 $\mathbb{Z}^2$中的二维格锥 σ 构成。沿希尔伯特基$\mathcal{H}_\sigma$的元素 v_1、…、v_r 细分 σ，得到一个格扇 Σ，其位于 $\mathbb{Z}^2$ 中，支撑为 σ，生成矩阵为 $P = [v_1, \ldots, v_r]$。



与 Σ 相关联的环面曲面 Z 是光滑的，典范环面态射$\pi\colon Z \to Z_\sigma$ 是奇点的最小解消。π的例外曲线恰好是由希尔伯特基元素 $v_i \in \sigma^\circ$给出的 D_i。

若正规簇 X 的典范除子$\mathcal{K}_X$ 满足某个非零整数倍$\mathcal{K}_X$ 是 Cartier，则称其为 $\mathbb{Q}$-戈伦斯坦。若满足此条件，则 X 的戈伦斯坦指标 是使 $\iota_X \mathcal{K}_X$ 为 Cartier 的最小正整数 ι_X。若一个簇的戈伦斯坦指标为 1，则称其为*Gorenstein*。

总结 3.6。考虑由本原生成元 v_1 和 v_2生成的二维格锥 σ in $\mathbb{Z}^2$。那么存在一个本原 $u_\sigma \in \mathbb{Z}^2$ 和一个 $\iota_\sigma \in \mathbb{Z}_{>0}$，使得

$$\langle u_\sigma, v_1 \rangle = \iota_\sigma, \qquad \langle u_\sigma, v_2 \rangle = \iota_\sigma.$$

此外，u_σ 和 ι_σ 由这一性质唯一确定。对于相应的仿射环面曲面 Z_σ 及其不变典范除子，我们有

$$-\iota_\sigma \mathcal{K}_{Z_\sigma} = \iota_\sigma D_1 + \iota_\sigma D_2 = \langle u_\sigma, v_1 \rangle D_1 + \langle u_\sigma, v_2 \rangle D_2 = \operatorname{div}(\chi^{u_\sigma}).$$

因此，ι_σ 是使 $\iota_\sigma \mathcal{K}_Z$ 为 Cartier 的最小值，故等于 Z_σ的戈伦斯坦指标。对于由 $\mathbb{Z}^2$中的完备格扇 Σ 所确定的环面曲面 Z，我们得到

$$\iota_Z = \operatorname{lcm}(\iota_\sigma;\ \sigma \in \Sigma,\ \dim(\sigma) = 2).$$

注释 3.7。考虑 $\mathbb{Z}^2$中的两个本原向量 $v_1 = (a, c)$ 和 $v_2 = (b, d)$，它们生成二维锥 $\sigma \subseteq \mathbb{Q}^2$。总结 3.6 中的线性形式 u_σ 和数 ι_σ为

$$u_\sigma = \iota_\sigma \left(\frac{c-d}{ad-bc}, \frac{b-a}{ad-bc} \right), \qquad \iota_\sigma = \frac{|ad-bc|}{\gcd(c-d,\, b-a)}.$$

特别地，这使我们能够根据生成矩阵 $P = [v_1, v_2]$计算仿射环面曲面 Z_σ 的戈伦斯坦指标 ι_σ。注意，ι_σ 等于 $\mathcal{K}_{Z_\sigma}$ 在局部类群 $\mathrm{Cl}(Z_\sigma, z_\sigma)$ 中的类的阶。

命题 3.8。在 $\mathbb{Z}^2$ 中，考虑向量 $e := (1,0)$；对于 $a \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，向量$v_a := (1, a)$；对于 ι、$b \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$，向量

$$v_{\iota,b,\kappa} := \left(b,\, \iota \frac{b-1}{\kappa} \right),\ \kappa = 1, \ldots, \iota - 1,\ \kappa \mid b-1,\ \gcd(b, \iota \tfrac{b-1}{\kappa}) = \gcd(\kappa, \iota) = 1.$$

令 $\sigma_a := \text{锥}(e, v_a) \subseteq \mathbb{Q}^2$，以及 $\sigma_{\iota,\, b,\, \kappa} := \text{锥}(e, v_{\iota,\, b,\, \kappa}) \subseteq \mathbb{Q}^2$。则以下陈述成立。

(i) 存在不动点的 *Gorenstein* 仿射环面曲面在同构意义下恰好是 Z_{σ_a}。

(ii) 固定 $\iota \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$。存在不动点且戈伦斯坦指标为 ι 的仿射环面曲面在同构意义下恰好是 $Z_{\sigma_{\iota,\ b,\ \kappa}}$。

证明。根据总结 3.6，若存在一个本原的 $u \in \mathbb{Z}^2$，使其在 σ的本原生成元上的取值为 ι，则环面曲面 Z_σ 的戈伦斯坦指标为 ι。这些线性形式

$$u_a \ := \ (1,0), \qquad\qquad u_{\iota,b,\kappa} \ := \ (\iota, -\kappa)$$

在 Z_{σ_a} 和$Z_{\sigma_{\iota,\ b,\ \kappa}}$上均满足此条件。反过来，给定一个仿射环面曲面 Z_σ，其固定点的戈伦斯坦指标为 ι，我们可以假设

$$\sigma \ = \ \mathrm{cone}(v_1, v_2), \qquad v_1 = (1,0), \qquad v_2 = (a,b), \qquad 0 \leq a < b.$$

于是我们直接看出，存在一个本原的 $u \in \mathbb{Z}^2$，使其在 v_1和 v_2 上的取值为 ι，这就迫使 $v_2 = v_a$ 或$v_2 = v_{\iota,\ b,\ \kappa}$。□

例 3.9。我们考察戈伦斯坦指标较小的仿射环面曲面的最小解消。对于 $\iota = 1$，我们需要考察

$$\sigma_a \ = \ \mathrm{cone}((1,0),\,(1,a)), \quad a = 1,2,3,\ldots \qquad \mathcal{H}_{\sigma_a} \ = \ \{(1,j);\ j = 1,\ldots,a\}.$$

此外，对于 $\iota = 2$，根据命题 3.8，我们需要考虑锥$\sigma_{2,\ b,\ \kappa}$，其中$b \geq 2$ 必须为奇数，且 $\kappa = 1$。因此，最终得到

$$\sigma_{2,b,1} \ = \ \mathrm{cone}((1,0),\,(b,2b-2)), \quad b = 3,5,7,9,\ldots$$

除本原生成元外，$\sigma_{2、\ b、\ 1}$ 的希尔伯特基还包含经过 (1、1) 且斜率为 2 的直线上的所有内部格点，即

$$\mathcal{H}_{\sigma_{2,b,1}} \ = \ \{(1,0),\,(b,2b-2)\} \cup \left\{(1+j, 1+2j);\ j = 0,\ldots,\frac{b-3}{2}\right\}.$$

利用总结 3.5，我们可以计算解消图，其顶点表示例外曲线，并以它们的自交数标记。当且仅当相应的曲线相交时，两个顶点之间才由一条边连接。

Z_{σ_a}: $\overset{(-2)}{\bullet}\!\!-\!\!\overset{(-2)}{\bullet}\cdots\cdots\overset{(-2)}{\bullet}\!\!-\!\!\overset{(-2)}{\bullet}$ $\quad a = 2,3,4,\overset{\circ}{\underset{\circ}{\circ}},$

$Z_{\sigma_{2,b,1}}$: $\overset{(-4)}{\bullet}$ $\quad b = 3,$

$Z_{\sigma_{2,b,1}}$: $\overset{(-3)}{\bullet}\!\!-\!\!\overset{(-3)}{\bullet}$ $\quad b = 5,$

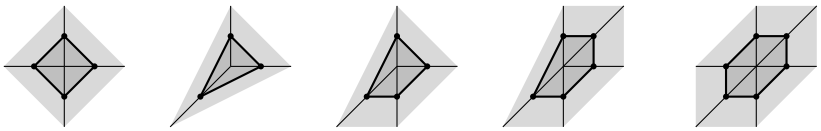
$Z_{\sigma_{2,b,1}}$: $\overset{(-3)}{\bullet}\!\!-\!\!\overset{(-2)}{\bullet}\cdots\cdots\overset{(-2)}{\bullet}\!\!-\!\!\overset{(-3)}{\bullet}$ $\quad b = 7,9,11,\overset{\circ}{\underset{\circ}{\circ}}$

将 Z_{σ_a}的奇点称为类型 A_n（具有 $n = a-1$），将 $Z_{\sigma_{2、\ b、\ 1}}$的奇点称为类型 K_n，具有 $n = (b-1)/2$。注意，n 是例外曲线的数量。

我们讨论环面德尔佩佐曲面。回顾一下，德尔佩佐曲面 是二维法诺簇，即具有充足反典范除子的正规射影曲面。所谓（格）多边形，是指 $\mathbb{Q}^2$中的凸多胞体（其顶点均为整数点）。*LDP* 多边形 是 $\mathbb{Q}^2$ 中的多边形，它将原点作为内点，且其顶点均为 $\mathbb{Z}^2$ 中的本原向量。若两个多边形可以通过幺模矩阵相互变换，即通过一个行列式为 ± 1的整数 2×2 矩阵变换得到，则称它们幺模等价。

总结 3.10. 任意 LDP 多边形$\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Q}^2$ 都会在 $\mathbb{Z}^2$中张成一个完备格扇 $\Sigma_{\mathcal{A}}$。与 $\Sigma_{\mathcal{A}}$ 相关联的环面曲面 $Z_{\mathcal{A}}$ 是德尔佩佐曲面。映射$\mathcal{A} \ \mapsto \ Z_{\mathcal{A}}$ 在 LDP 多边形的幺模等价类与环面德尔佩佐曲面的同构类之间建立了一一对应关系。

例 3.11. 在同构意义下，光滑环面德尔佩佐曲面只有五种。它们由以下对数德尔佩佐多边形给出。



这些曲面是 $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$、射影平面 $\mathbb{P}_2$，以及在一般位置的最多三个点上对 $\mathbb{P}_2$ 进行爆破所得的曲面。

如果我们考察奇异德尔佩佐曲面，情况就会变得生动得多。我们将考虑极小模型纲领所涉及的奇点。下面简要回顾其定义。给定任意一个 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 簇 X，其典范除子为$\mathcal{K}_X$，考虑一个奇点消解 $\pi\colon X' \to X$。那么，在 X 上有典范除子$\mathcal{K}_X$，在 X' 上有典范除子$\mathcal{K}'_X$，使得分歧公式

$$\mathcal{K}'_X \;=\; \pi^*\mathcal{K}_X + \sum a(E)E$$

成立。这里，E 遍历例外素除子，而 $a(E) \in \mathbb{Q}$ 是 $\pi\colon X' \to X$ 的亏格差。对于 $0 \le \varepsilon \le 1$，若对每个 E，都有 $a(E) > \varepsilon - 1$（若对每个 E，都有 $a(E) \ge \varepsilon - 1$），则称 X 的奇点为ε-对数终端（ε-对数典范）。对于 $\varepsilon = 0$，称其具有对数终端（对数典范）奇点；对于 $\varepsilon = 1$，则称其具有终端（典范）奇点。

总结 3.12。考虑由 LDP 多边形 $\mathcal{A}$ 定义的环面德尔佩佐曲面 $Z_{\mathcal{A}}$ 及其奇点的托里克消解

$$\pi\colon Z \;\to\; Z_{\mathcal{A}}$$

由格扇 Σ 和 $\Sigma_{\mathcal{A}}$之间的映射给出。与射线 $\varrho \in \Sigma$ 对应的例外除子$E_\varrho \subseteq Z$ 的不一致数为

$$a(E_\varrho) \;=\; \frac{\|v_\varrho\|}{\|v'_\varrho\|} - 1,$$

其中 $v_\varrho \in \varrho$ 是本原格向量，$v'_\varrho \in \varrho$ 表示 ϱ 与$\mathcal{A}$ 的边界 $\partial\mathcal{A}$的交点。

这尤其表明，环面德尔佩佐曲面总是对数终端的，因此 LDP 多边形中的“L”即由此而来。此外，Gorenstein 指标为 ι_Z 的环面德尔佩佐曲面 Z 对所有 $k \ge \iota_Z$都是 $1/k$-对数典范的。最后，我们通过多边形得到环面德尔佩佐曲面 $1/k$对数典范性的如下刻画。

定义 3.13。给定 $k \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$，若多边形$\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Q}^2$ 满足几乎 k-空心，则称其为$almost\ k\text{-}hollow$，如果$\mathcal{A}^\circ \cap k\mathbb{Z}^2 = \{(0,0)\}$ 成立。

命题 3.14。设 A 是一个 *LDP* 多边形，并考虑与之对应的托里克德尔佩佐曲面 $Z_{\mathcal{A}}$。那么，对于任意 $k \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$，以下陈述等价。

(i) 多边形 A 是几乎 k-空的。(ii) 曲面 $Z_{\mathcal{A}}$ 仅具有 $1/k$-对数典范奇点。

4. 托里克德尔佩佐曲面的分类

本节旨在对 $1/k$-对数典范托里克德尔佩佐曲面进行分类。根据命题 3.14，任务是对几乎 k-空的 LDP 多边形进行分类。借助算法 4.10，我们为给定的 k 提出一种足够高效的分类程序，而定理 4.11 汇总了关于$k = 1$、2、3 的多边形分类的关键显式数据。推论 4.12 给出了相应的德尔佩佐曲面分类陈述。

分类算法 4.10 的总体思路是：从有限个极小的多边形出发，通过逐步添加更多顶点，构造出几乎k-空心的对数德尔佩佐多边形。借助适当的有界性陈述，我们确保这一过程能够

在有限步内完成，并且确实能够得到在幺模等价意义下的所有几乎 k-空心的对数德尔佩佐多边形。

定义 4.1. 给定一个多边形$\mathcal{A}$ 和一个向量 $v \in \mathbb{Q}^2$，我们通过在 v 处扩张$\mathcal{A}$，得到新多边形$\mathcal{A}_v^+$；通过在 v处收缩$\mathcal{A}$，得到$\mathcal{A}_v^-$：

$$\mathcal{A}_v^+ := \operatorname{conv}(\mathcal{A} \cup \{v\}), \qquad \mathcal{A}_v^- := \operatorname{conv}(\mathbb{Z}^2 \cap \mathcal{A} \setminus \{v\}).$$

以原点 (0，0) 为内部点的多边形$\mathcal{A}$，若对$\mathcal{A}$的每个顶点 v，(0，0) $\notin (\mathcal{A}_v^-)^\circ$都成立，则称其为极小的。

例 4.2. 考虑 $\mathbb{Z}^2$中的标准基向量 $e_1 = (1，0)$ 和 $e_2 = (0，1)$。给定 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，我们得到极小的几乎 k-空格多边形

$$\Delta_\alpha := \operatorname{conv}(e_1,\, e_2,\, -\alpha e_1 - e_2),\ \alpha = 1, \ldots, 2k, \qquad \square := \operatorname{conv}(\pm e_1,\, \pm e_2).$$

命题 4.3. 设 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$。那么，在幺模等价意义下，$\Delta_1$、.. .、$\Delta_{2k}$和 $\square$ 是仅有的极小的几乎 k-空格多边形。

引理 4.4. 设 A 是一个极小多边形。那么 A 至多有四个顶点。

证明。 我们将$\mathcal{A}$的顶点按逆时针顺序编号为 $v_1, \ldots, v_r$。假设 $r \geq 5$。于是有

$$\mathcal{A}^\circ = \operatorname{conv}(v_1, v_3, \ldots, v_r)^\circ \cup \operatorname{conv}(v_1, \ldots, v_{r-1})^\circ \subseteq (\mathcal{A}_{v_2}^-)^\circ \cup (\mathcal{A}_{v_r}^-)^\circ.$$

原点位于$\mathcal{A}^\circ$ 中，因此也位于 $(\mathcal{A}_{v_2}^-)^\circ$ 或 $(\mathcal{A}_{v_r}^-)^\circ$中。这与$\mathcal{A}$的极小性矛盾。□

命题 *4.3* 的证明。 设$\mathcal{A}$ 是一个极小的、几乎 k-空的格多边形。由引理 4.4 可知，$\mathcal{A}$ 有四个或三个顶点。

我们先讨论$\mathcal{A}$ 有四个顶点的情形。设这些顶点按逆时针顺序为 v_1, v_2, v_3, v_4。我们断言，四边形$\mathcal{A}$ 的两条对角线交于原点。事实上，由$\mathcal{A}$ 的极小性可得

$$(0,0) \notin \operatorname{conv}(v_1, v_2, v_3)^\circ \subseteq (\mathcal{A}_{v_4}^-)^\circ, \quad (0,0) \notin \operatorname{conv}(v_1, v_3, v_4)^\circ \subseteq (\mathcal{A}_{v_2}^-)^\circ.$$

由于 (0,0) $\in \mathcal{A}^\circ$，我们有 (0,0) $\in$ conv(v_1, v_3)。类似地，(0, 0) $\in$ conv(v_2, v_4)。再次利用 $\mathcal{A}$ 的极小性可知，每个顶点 $v_i \in \mathbb{Z}^2$ 都是本原的。因此，经过对 $\mathbb{Z}^2$施以适当的幺模变换后，我们可以假设

$$v_1 = (1,0), \qquad v_2 = (a,b), \quad a, b \in \mathbb{Z},\ 0 \leq a < b,\ \gcd(a,b) = 1.$$

由本原性，我们还有 $v_3 = -v_1$ 和 $v_4 = -v_2$。最后，我们断言 $v_2 = (0,1)$。否则 (1,1) $\in \mathcal{A}$，这与$\mathcal{A}$的极小性矛盾，即

$$(0,0) \in \operatorname{conv}(e_1,\, e_1 + e_2,\, -e_1, -e_1 - e_2)^\circ \subseteq (\mathcal{A}_{v_4}^-)^\circ.$$

现在假设$\mathcal{A}$ 有三个顶点，记为 v_1, v_2, v_3，按逆时针方向编号。与前一种情形一样，由极小性可知，这些顶点都必须是本原的。我们先假设$\mathcal{A}$ 有一个内部格点 $v \neq (0,0)$。于是我们可以写成

$$\mathcal{A} = \operatorname{conv}(v_1, v_2, v) \cup \operatorname{conv}(v_2, v_3, v) \cup \operatorname{conv}(v_3, v_1, v).$$

由极小性可知，(0,0) 位于一条线段上，设在线段 conv(v, v_1) 上。于是我们可以假设 $v = -v_1$。应用适当的幺模变换可得

$$v_1 = (1,0), \qquad v_2 = (a,b), \quad a, b \in \mathbb{Z},\ 0 \leq a < b,\ \gcd(a,b) = 1.$$

我们证明$\mathcal{A}$ 等于 Δ_α，其中 $1 \leq \alpha \leq 2k$。我们断言 $a = 0$。否则，(1,1) $\in \mathcal{A}$，这与$\mathcal{A}$ 的极小性矛盾，因此得到

$$(0,0) \in \operatorname{conv}(v_1,\, e_1 + e_2,\, -v_1, v_3)^\circ \subseteq (\mathcal{A}_{v_2}^-)^\circ.$$

因此 $a = 0$ 和 $v_2 = e_2$。此外，$v_3 = (c,\ d)$，其中 $c,\ d < 0$为整数。由于 $-v_1$是$\mathcal{A}$的一个内点，顶点 v_3 位于经过 v_2 和 $-v_1$的直线上方。在

特别地， $c \leq -3$。根据$\mathcal{A}$的极小性，不存在满足 $e \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ 的点 $(e,\ -1)$ 属于$\mathcal{A}^\circ$。由此得到 $d = -1$。

现在剩下的情形是，$\mathcal{A}$ 有三个顶点 v_1、v_2、v_3，且原点是其唯一的内部格点。和之前一样，我们通过适当的幺模变换将其调整为

$$v_1 = (1,0), \qquad v_2 = (a,b), \quad a,b \in \mathbb{Z},\ 0 \leq a < b,\ \gcd(a,b) = 1.$$

极小性意味着 $a \leq 1$。若 $a = 0$，唯一的可能性是 $v_2 = e_2$ 和 v_3 分别为 $(-1、\ -1)$、$(-2、\ -1)$ 或 $(-1、\ -2)$ 中的一组。若 $a = 1$，则有 $v_2 = (2,\ 1)$ 和 $v_3 = (-1、\ -1)$。对于这些构型中的每一种，$\mathcal{A}$ 都等价于一个 Δ_α，其中 $\alpha = 1,\ 2$。□

我们现在可以为几乎 k-空的格多边形给出有效界。下文中， $D_r \subseteq \mathbb{R}^2$ 表示以原点 $(0,\ 0)$ 为圆心、半径为 r 的圆盘。

命题 4.5。设 A 是一个几乎 k-空心格多边形。那么存在一个幺模变换 $\varphi\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$，使得下列情况之一成立。

(i) 对于 $r = k^2/\sqrt{2}$，有 $\square \subseteq \varphi(A) \subseteq D_r^-$。(ii)

对于 $1 \leq \alpha \leq 2k$，有 $\Delta_\alpha \subseteq \varphi(A) \subseteq D_r$，并且

$$r = 2k^2\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha + 2}.$$

引理 4.6。设 A 是一个几乎 k-空心多边形，且 $r \in \mathbb{R}$，满足 $D_r \subseteq A$，并设$v \in \mathbb{R}^2$。若扩张 A_v^+是几乎 k-空心的，则 $\|v\| \leq k^2/2r$。

证明。先考虑情形 $k = 1$。此时，原点是 $\mathcal{A}$ 唯一的内部格点。由于集合 $\operatorname{conv}(D_r \cup \{v\})$ 包含于 $\mathcal{A}_v^+$ 中，因此原点也是该集合唯一的内部格点。于是，$\mathcal{B} := \operatorname{conv}(D_r \cup \{\pm v\})$ 也以原点为唯一的内部格点。由于 $\mathcal{B}$ 是中心对称凸集，根据闵可夫斯基定理，$\operatorname{vol}(\mathcal{B}) \leq 4$。此外，直接可见 $2r\|v\| \leq \operatorname{vol}(\mathcal{B})$。这就证明了情形 $k = 1$ 下的断言。对于一般的 k 情形，将前述论证应用于 $k^{-1}\mathcal{A}$ 和 $k^{-1}v$。□

命题 *4.5* 的证明。首先注意到，依次在顶点处收缩$\mathcal{A}$ 后，我们得到一个极小的几乎 k-空格多边形$\mathcal{A}'$。命题 4.3 给出一个幺模变换 $\varphi\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$，使得 $\varphi(\mathcal{A}')$ 是 (i) 和 (ii) 中提到的多边形之一。接下来只需证明 $\varphi(\mathcal{A})$ 位于相应的圆盘内。为此，我们必须相应地给定顶点 $v \in \varphi(\mathcal{A})$ 的长度设定上界。逐步收缩适当的顶点，可将 $\varphi(\mathcal{A})$ 变为 $\varphi(\mathcal{A}')_v^+$。因此，由引理 4.6 以及我们在 □ 中找到半径为 $r = 1/\sqrt{2}$ 的圆盘、在 Δ_α 中找到半径为 $r = 1/\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha + 2}$ 的圆盘这一事实，即可得出结论。□

推论 4.7。在幺模变换意义下，每个几乎 k-空格多边形都可以通过在 D_R 内逐步扩张几乎 k-空格多边形得到，起始于 □ 和 Δ_α，其中 $R := R(k) := k^2\sqrt{4k^2 + 4k + 2}$。

特别是，这使得我们能够在幺模等价意义下构造所有几乎 k-空的格多边形。一种简单的方法是用盒 $\operatorname{conv}(\pm Re_1 + \pm Re_2)$ 中的格点扩展 □ and Δ_α，并在每一步检查是否几乎 k-空。以下原则可用于更有针对性的搜索。

注 4.8。考虑一个盒 $\mathcal{B} := \operatorname{conv}(\pm Re_1, \pm Re_2)$ in $\mathbb{R}^2$ 以及一个几乎 k-空的格多边形 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$。相对于 $\mathcal{A}$，$w \in k\mathbb{Z}^2$ 的影子 为

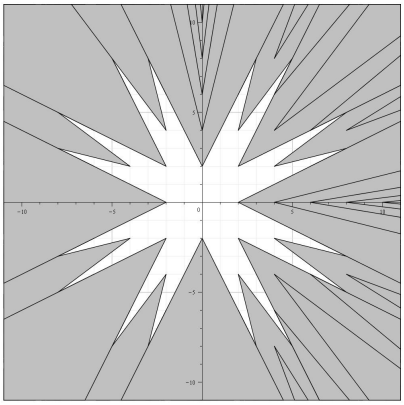
$$S(w,\mathcal{A}) := \operatorname{cone}(w - u;\ u \in \mathcal{A})^\circ + w \subseteq \mathbb{R}^2.$$

这是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个开仿射锥。满足 $\mathcal{A}_v^+$几乎是 k-空洞的格向量 $v \in \mathcal{B} \cap \mathbb{Z}^2$ 全部位于星形集

$$\Xi(\mathcal{A}) := \bigcap_{0 \neq w \in k\mathbb{Z}^2} \mathcal{B} \setminus S(w,\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{B}.$$

每个 $S(w,\ \mathcal{A})$ 都由两个不等式描述。这给出了搜索空间 $\Xi(\mathcal{A})$ 的明确描述，因此可以进行计算成员测试。

例 4.9. 在 $k=2$ 且$\mathcal{A}=\square$的情况下，可能的$\mathcal{A}v\in\mathbb{Z}^2$ 中，满足$\mathcal{A}_v^+$几乎 2-空心条件的对象，其搜索空间 $\Xi(\mathcal{A})$ 是下图中的白色区域。



借助推论 4.7 给出的界以及注记 4.8 中的搜索空间，我们得到以下计算几乎 k-空心多边形的过程。

算法 4.10. 给定 $k\in\mathbb{Z}_{>0}$，令 $R:=k^2\sqrt{4k^2+4k+2}$。以下过程会终止，并给出一列代表元 L，代表在幺模等价意义下的几乎 k-空心多边形：

- 从 $i:=0$ 和由极小几乎k-空心格多边形组成的列表 $L_0=[\square,\Delta_1,\ldots,\Delta_{2k}]$ 开始。
- 只要列表 L_i 非空，就重复以下步骤：将 i 增加到 $i+1$，并计算由所有几乎 k-空心多边形组成的列表 L_i：$\mathcal{A}_v^+$，其中$\mathcal{A}$来自 L_{i-1}，且 $v\in\mathbb{Z}^2\cap(\Xi(\mathcal{A})\setminus\mathcal{A})$。
- 将所有列表 L_i 连接起来，并将其化简为一个列表 L，其中每个来自 L' 的条目在幺模等价意义下恰好出现一次。返回化简后的列表 L。

使用这一流程的专门实现，我们对几乎 k-空心格多边形进行了分类，参数为 $k=1$，2，3。以下定理汇总了该分类的一些关键数据；完整的分类列表可从 [14] 中提取。

定理 4.11。 我们得到以下关于几乎 k-空心 *LDP*-多边形的结论。

$k=1$：在幺模等价意义下，恰有16 个几乎1-空心 *LDP*-多边形。这些就是众所周知的自反多边形。顶点数的最大值为6，最大体积为$9\ 2$。

顶点	3	4	5	6
数量	5	7	3	1
最大体积	$\frac{9}{2}$	4	$\frac{7}{2}$	3

$k=2$：在幺模等价意义下，恰有505 个近乎2空的 *LDP* 多边形。顶点数的最大值为8，且仅有一个多边形达到该值；最大体积为17。

顶点	3	4	5	6	7	8
数量	42	181	202	74	5	1
最大体积	16	16	17	$\frac{33}{2}$	14	14

$k = 3$: 在幺模等价意义下，恰有48032 个近乎3空的对数德尔佩佐多边形。顶点数的最大值为12，且仅有一个多边形达到该值；最大体积为47。

顶点	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
数量	355	3983	13454	17791	9653	2456	292	37	1	1
最大体积	44	$\frac{91}{2}$	47	43	39	35	30	29	$\frac{47}{2}$	24

下面将定理 4.11 转述到托里克对数德尔佩佐曲面的情形。注意，情形 $\varepsilon = 1$ 恰好给出 16 个 Gorenstein 托里克对数德尔佩佐曲面。此外，情形 $\varepsilon = 1/2$ 和 $\varepsilon = 1/3$ 尤其包含了在 [25]中发现的 Gorenstein 指标为 2 和 3 的托里克对数德尔佩佐曲面。

推论 4.12。 我们得到以下关于托里克 ε对数典范德尔佩佐曲面的结论。

$\varepsilon = 1$: 在同构意义下，恰有 16 个托里克典范德尔佩佐曲面。这些就是众所周知的托里克 *Gorenstein* 德尔佩佐曲面。最大的皮卡数为4，且恰由一个曲面实现。$\varepsilon = \frac{1}{2}$: 在同构意义下，恰有 505 个托里克 $\frac{1}{2}$-对数典范德尔佩佐曲面。最大的皮卡数为 6，且恰由一个曲面实现。$\varepsilon = \frac{1}{3}$: 在同构意义下，恰有 48032 个托里克 $\frac{1}{3}$-对数典范德尔佩佐曲面。最大的皮卡数为 10，且恰由一个曲面实现。

5. 有理 $\mathbb{K}^*$-曲面

A $\mathbb{K}^*$-曲面 是一个不可约正规曲面 X ，其上赋有乘法群 $\mathbb{K}^*$的有效态射作用 $\mathbb{K}^* \times X \to X$ 。本节回顾相关基础背景，并介绍我们研究有理$\mathbb{K}^*$-曲面所采用的框架：基于 Cox 环的方法，见 [16, 18, 19]；另见[3, 第 5 节4]。我们先简要回顾射影 $\mathbb{K}^*$-曲面的基本几何图景，其主要内容由 Orlik 和 Wagreich 在文献 [31]中提出。

总结 5.1。 设 X 是一个射影 $\mathbb{K}^*$ 曲面。我们讨论 $\mathbb{K}^*$ 作用的基本几何性质。可能的各向同性群 $\mathbb{K}^*_x$（其中 $x \in X$）是 $\mathbb{K}^*$ 本身以及由 l 次单位根组成的、阶为 $l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 的子群。因此，非平凡轨道是形如以下形式的局部闭曲线

$$\mathbb{K}^* \cdot x \;\cong\; \mathbb{K}^*/\mathbb{K}^*_x \;\cong\; \mathbb{K}^*.$$

不动点有三种类型。如果不动点 $x \in X$ 位于无穷多个（恰好两个、恰好一个）非平凡 $\mathbb{K}^*$ 轨道的闭包中，则称其为椭圆型（双曲型、抛物型）。椭圆型和双曲型不动点是孤立的，而抛物型不动点在 X 中形成一条曲线。轨道的极限点 x_0 和 x_∞ 通过将轨道映射 $t \to t \cdot x$延拓为态射 $\varphi_x \colon \mathbb{P}_1 \to X$并令$\cdot\, x$得到

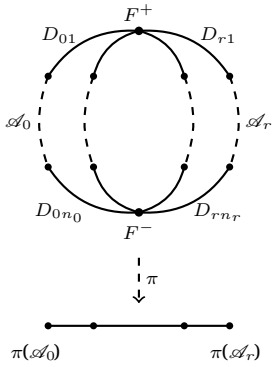
$$x_0 \;:=\; \lim_{t \to 0} t \cdot x \;:=\; \varphi_x(0), \qquad\qquad x_\infty \;:=\; \lim_{t \to \infty} t \cdot x \;:=\; \varphi_x(\infty).$$

这些极限点 x_0, x_∞ 是不动点，与 $\mathbb{K}^* \cdot x$ 一起构成轨道 $\mathbb{K}^* \cdot x$的闭包。每个射影 $\mathbb{K}^*$-曲面 X 都有一个源 和一个汇，即不动点集的不可约分支 $F^+, F^- \subseteq X$，它们具有开的$\mathbb{K}^*$-不变邻域 $U^+, U^- \subseteq X$，使得

$$x_0 \;\in\; F^+ \text{ for all } x \in U^+, \qquad\qquad x_\infty \in\; F^- \text{ for all } x \in U^-.$$

源和汇各自要么由单个椭圆不动点组成，要么是由抛物型不动点构成的光滑不可约曲线。除源和

汇之外，至多还有双曲型不动点。射影 $\mathbb{K}^*$-曲面 X 的基本几何图景如下。



一般轨道 $\mathbb{K}^* \cdot x \subseteq X$ 具有平凡的各向同性群，并连接源与汇；就此而言，其闭包包含来自 F^+ 的一个不动点，以及来自 F^-的一个不动点。除一般轨道外，还有特殊非平凡轨道。它们的闭包是有理曲线 $D_{ij} \subseteq X$，构成了臂

$$\mathscr{A}_i := D_{i1} \cup \cdots \cup D_{in_i} \subseteq X, \qquad i = 0, \ldots, r.$$

交数 $F^+ \cap D_{i1}$和 $D_{in_i} \cap F^-$各由一个不动点组成，任意两个相继的 D_{ij}、D_{ij+1} 相交于一个双曲不动点。最后，不变有理函数域 $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{K}(X)$给出一条射影曲线 C 以及一个满射有理映射

$$\pi \colon X \dashrightarrow C.$$

除可能出现的椭圆不动点外，它处处有定义。$\mathbb{K}^*$-曲面 X是有理曲面，当且仅当 $C = \mathbb{P}_1$ 成立。我们也将 $\pi\colon X \dashrightarrow C$ 称为 X的（有理）商。除椭圆不动点外，π 的临界纤维恰好是包含两个或更多非平凡轨道，或包含一个具有非平凡有限稳定子群的轨道的臂。

对于足够明确的处理，我们采用基于 Cox 环的方法，研究来自 [16, 18, 19]、带有复杂度一环面作用的有理正规簇；关于更高复杂度的环面作用，另见 [17]。以下内容改编自 [19, Constr. 1.1、1.4 和 1.6]，针对曲面情形进行了调整。该过程以一对矩阵 $(A,\ P)$ 作为定义数据，并构造出一个半射影有理 $\mathbb{K}^*$-曲面 $X(A,\ P)$，其不变函数均为常数，且嵌入于环面簇 Z 中。这里，半射影意指在一个仿射簇上射影。这包括例如射影簇和仿射簇。

构造 5.2。固定整数 r，n_0、.....、$n_r \geq 1$ 和 $0 \leq m \leq 2$。我们构造一个有理半射影 $\mathbb{K}^*$-曲面 X，它来自定义在 $\mathbb{K}$ 上的一个 $2 \times (r+1)$ 矩阵 A，以及一个整系数 $(r+1) \times (n+m)$ 矩阵 P；两者均以列的列表形式给出

$$A = [a_0, \ldots, a_r], \qquad P = [v_{01}, \ldots, v_{0n_0}, \ldots, v_{r1}, \ldots, v_{rn_r}, v_1, \ldots, v_m].$$

这里，$r+1 < n+m$当 $n = n_0 + \cdots + n_r$时，A的列两两线性无关，且其列生成向量空间 $\mathbb{Q}^{r+1}$。此外，P的列 v_{ij} 两两不同，且具有以下形式

$$v_{0j} = (-l_{0j}, \ldots, -l_{0j}, d_{0j}), \quad v_{ij} = (0, \ldots, 0, l_{ij}, 0 \ldots, 0, d_{ij}), \quad i = 1, \ldots, r,$$

其中 l_{ij}位于 $i = 1, \ldots, r$中的第 i个位置，并且我们总有 $\gcd(l_{ij}, d_{ij}) = 1$。列 v_k 也两两不同，且具有如下形式

$$v^+ := (0, \ldots, 0, 1), \qquad v^- := (0, \ldots, 0, -1).$$

其思路是将 X 嵌入环面簇 Z中。只要 P 按斜率排序，就可以方便地写出 Z的定义扇 Σ，即

$$m_{i1} > \cdots > m_{in_i}, \quad m_{ij} := \frac{d_{ij}}{l_{ij}}, \quad i = 0, \ldots, r,\ j = 1, \ldots, n_i.$$

通过适当编号总能实现这一点。在此设定下， Σ 以 P 的列作为其射线，并且存在这些极大锥

$$\tau_{ij} := \operatorname{cone}(v_{ij}, v_{ij+1}) \in \Sigma, \qquad i = 0, \ldots, r,\ j = 1, \ldots, n_i - 1.$$

根据 v^+和 v^-是否存在以及 m^+的取值：$= m_{01} + \cdots + m_{r1}$和 m^-：$= m_{0n_0} + \cdots + m_{rn_r}$，我们通过以下对象补充极大锥的集合：

$\tau_i^+ := \operatorname{cone}(v^+, v_{i1})$ for $i = 0, \ldots, r$ if P has a column v^+,
$\tau_i^- := \operatorname{cone}(v^-, v_{in_i})$ for $i = 0, \ldots, r$ if P has a column v^-,
$\sigma^+ := \operatorname{cone}(v_{01}, \ldots, v_{r1})$ if $m^+ > 0$ and there is no v^+,
$\sigma^- := \operatorname{cone}(v_{0n_0}, \ldots, v_{rn_r})$ if $m^- < 0$ and there is no v^-.

与 Σ相关的环面簇 Z 将作为 X的环境簇。考虑带有坐标函数 T_{ij}、 S_k的$\mathbb{K}^{n+m}$，以及 $\iota = 0, \ldots, r-2$的三项式

$$g_\iota := \det \begin{bmatrix} T_\iota^{l_\iota} & T_{\iota+1}^{l_{\iota+1}} & T_{\iota+2}^{l_{\iota+2}} \\ a_\iota & a_{\iota+1} & a_{\iota+2} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}[T_{ij}, S_k],$$

其中 $T_i^{l_i} := T_{i1}^{l_{i1}} \cdots T_{in_i}^{l_{in_i}}$。于是，令 $\bar{X} := V(g_0, \ldots, g_{r-2}) \subseteq \mathbb{K}^{n+m} =: \bar{Z}$，我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \bar{X} & \subseteq & \bar{Z} \\ \cup & & \cup \\ \hat{X} & \longrightarrow & \hat{Z} \\ {\scriptstyle /H}\downarrow{\scriptstyle p} & & {\scriptstyle p}\downarrow{\scriptstyle /H} \\ X & \longrightarrow & Z. \end{array}$$

这里 $p\colon\ Z \to Z$ 是 2.7 中的 Cox 商表示，我们令 $X := X \cap Z$，并得到一个正规闭曲面

$$X := X(A, P) := p(\hat{X}) \subseteq Z.$$

曲面 X 上的 $\mathbb{K}^*$-作用可表示为 $t \cdot x = \lambda(t) \cdot x$，其中 λ 是作用环面 $\mathbb{T}^{r+1}$ 的单参数子群， $\mathbb{T}^{r+1}$ 属于 Z，由下式给出

$$\lambda\colon \mathbb{K}^* \to \mathbb{T}^{r+1}, \qquad t \mapsto (1, \ldots, 1, t).$$

总之，我们得到一个有理半射影 $\mathbb{K}^*$-曲面 $X = X(A, P)$，它带有嵌入到环面簇 Z 中的 $\Gamma(X, \mathcal{O})^{\mathbb{K}^*} = \mathbb{K}$。此外，

- X 是射影的，当且仅当 P 的列生成锥 $\mathbb{Q}^{r+1}$，
- X 是仿射的，当且仅当 $n_0 = \cdots = n_r = 1$，且 P 既没有 v^+，也没有 v^-。

定理 5.3。见 [18, 19]。每个仅具有常数可逆整体函数的有理半射影 $\mathbb{K}^*$-曲面，都等变同构于一个由构造 *5.2* 得到的 $\mathbb{K}^*$-曲面。

注 5.4. 对于 $r = 1$，构造 5.2 精确地给出了具有 $\mathbb{K}^*$-作用的半射影环面曲面。更具体地说，给定 $r = 1$，对于$X = X(A, P)$，以下结论成立。

(i) 扇 Σ in $\mathbb{Z}^2$ 具有凸支撑，其一维锥是由 P的列给出的射线。(ii) 曲面 X 与环面曲面 Z 重合，而 $\mathbb{K}^*$ 通过单参数子群 $\mathbb{K}^* \to \mathbb{T}^2, t \mapsto (1, t)$ 作用。

下面我们以有理射影 $\mathbb{K}^*$-曲面 $X = X(A, P)$ 为例，根据其定义矩阵 A 和 P，看看如何从总结 5.1 中提取一般的原始几何图景。

总结 5.5。设 $\mathbb{K}^*$-曲面 $X = X(A, P)$ 是射影的。令 $D_Z^{ij} \subseteq Z$ 表示与由矩阵 P 的列 v_{ij} 生成的射线对应的环面素除子。那么， X 中有 $r+1$ 个臂：

$$\mathscr{A}_i = D_X^{i1} \cup \cdots \cup D_X^{in_i}, \qquad D_X^{ij} = D_Z^{ij} \cap X.$$

与锥 τ_{ij} 对应的 Z 的环面轨道截出 $D_X^{ij} \cap D_X^{ij+1}$ 中的双曲不动点。根据 v^+， v^-， σ^+ 和 σ^- 可能的构型，源和汇如下所示。

（e-e）扇 Σ 具有锥 σ^+ 和 σ^-。那么，相应的环面轨道是不动点 x^+, $x^- \in X$，构成源和汇。（e-p）扇 Σ 具有锥 σ^+，而 P 具有列 v^-。由 σ^+ 给出的环面轨道是不动点 $x^+ \in X$，构成源。由穿过 v^- 的射线给出的环面除子 D_Z^- 截出一条由抛物型不动点组成的曲线 D_X^-，构成汇。（p-e）矩阵 P 具有列 v^+，而 Σ具有锥 σ^-。由穿过 v^+ 的射线给出的环面除子 D_Z^+ 截出一条由抛物型不动点组成的曲线 D_X^+，构成源。由 σ^- 给出的环面轨道是不动点 $x^- \in X$，构成汇。（p-p）矩阵 P 具有列 v^+ 和 v^-。由穿过 v^+、 v^- 的射线给出的环面除子 D_Z^+、 D_Z^- 截出曲线 D_X^+、 D_X^-，它们由抛物型不动点组成，分别构成源和汇。

l_{ij} 在 P中的条目等于一般 $x \in D_X^{ij}$ 的各向同性群 $\mathbb{K}_x^*$ 的阶，而相关的 d_{ij} 给出 $\mathbb{K}_x^*$ 的切表示的权。此外，我们从交换图中恢复商映射 $\pi\colon\ X \dashrightarrow \mathbb{P}_1$

$$\begin{array}{ccc} X & \subseteq & Z \\ \big| & & \big| \\ /\mathbb{K}^* \,\big|\, \pi & & \pi \,\big|\, /\mathbb{K}^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}_1 & \subseteq & \mathbb{P}_r, \end{array}$$

其中，右侧的映射来自投影 $\mathbb{Z}^{r+1} \to \mathbb{Z}^r$ 到前 r 个坐标上。 $[a_{i1}, a_{i2}]$ 的齐次坐标由矩阵 A的第i列给出。此外， $\mathbb{P}_1 \subseteq \mathbb{P}_r$ 由以下线性形式定义

$$h_\iota := \det \begin{bmatrix} U_\iota & U_{\iota+1} & U_{\iota+2} \\ a_\iota & a_{\iota+1} & a_{\iota+2} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}[U_0, \ldots, U_r], \qquad \iota = 0, \ldots, r-2.$$

请注意，有理商映射 $\pi\colon\ X \dashrightarrow \mathbb{P}_1$ 除可能存在的椭圆不动点 $x^\pm$外处处有定义。此外， π 具有范畴性，即每个$\mathbb{K}^*$-不变态射 $X \setminus \{x^\pm\} \to Y$ 都唯一地经由 π分解。

注 5.6（Cox 坐标）。每个点 $x \in X$ 都可表示为 $x = p(z)$，其中 z 是一个点

$$z = (z_{ij}, z^\pm) \in \hat{X} = \bar{X} \cap \hat{Z} \subseteq \bar{Z} = \mathbb{K}^{n+m}.$$

此处， $z = (z_{ij},\ z^{\pm})$ 在拟环面 H 的乘法作用下唯一。我们称$x = [z_{ij}, z^{\pm}]$ 为 *Cox* 坐标表示。对于任意 $x = [z_{ij}, z^{\pm}] \in X$，我们有

$$\begin{aligned} x \text{ general} &\iff \text{all } z_{ij}, z^{\pm} \neq 0, \\ x \in D^{+} &\iff \text{only } z^{+} = 0, \\ x \in D^{-} &\iff \text{only } z^{-} = 0, \\ x \in D_{ij} &\iff \text{only } z_{ij} = 0, \\ x \in D_{ij} \cap D_{ij+1} &\iff \text{only } z_{ij} = z_{ij+1} = 0, \\ x = x^{+} &\iff \text{only } z_{01} = \cdots = z_{r1} = 0, \\ x = x^{-} &\iff \text{only } z_{0n_0} = \cdots = z_{rn_r} = 0. \end{aligned}$$

“一般”是指它不包含在 X 的任何一条臂中。这涵盖了 X 中各点的 Cox 坐标取零或非零的所有可能情况。

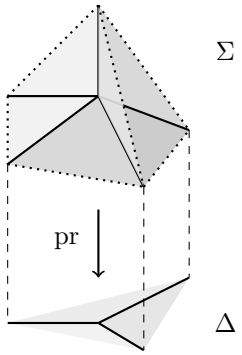
例5.7。给定格式数据 $r = 2$、$n_0 = n_1 = 2$，$n_2 = 1$ 和 $m = 1$，考虑以下定义矩阵 A 和 P:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad P = [v_{01}, v_{02}, v_{11}, v_{21}, v^{+}] = \begin{bmatrix} -3 & -5 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & -8 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

对于 $i = 0$，1，2，投影 pr：将 $\mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}^2$ 投影到前两个坐标，并将矩阵 P 的列 v_{ij} 映射为由向量张成的射线 $\varrho_i \subseteq \mathbb{Q}^2$

$$(-1,-1), \qquad (1,0), \qquad (0,1).$$

这些是射影平面 $\mathbb{P}_2$ 的扇 Δ 的本原生成元。对于扇 Σ，我们得到图示



用 Cox 坐标表示，环面簇 Z 中由 Σ 定义的曲面 $X = X(A,\ P)$ 表示为

$$\bar{X} \ = \ V(T_{01}^3 T_{02}^5 + T_{11}^2 + T_{21}^2) \ \subseteq \ \bar{Z} \ = \ \mathbb{K}^5.$$

有理环面态射 $\pi\colon\ Z \dashrightarrow \mathbb{P}_2$ 由 pr：$\mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}^2$ 给出，除点 $x^{-} \in X \subseteq Z$外处处有定义。将其限制到 X 上，得到映射

$$\pi\colon X \ \dashrightarrow \ \mathbb{P}_1 \ = \ V(S_0 + S_1 + S_2) \ \subseteq \ \mathbb{P}_2,$$

这就是有理商。源 $D^{+} \subseteq X$ 映射到 $\mathbb{P}_1$，而 π 的临界值由 $S_i = 0$ 刻画，其中 $i = 0$，1，2。

6. 同构问题

我们研究两对定义矩阵（$A,\ P$）和（$A',\ P'$）是否会产生同构的 $\mathbb{K}^*$曲面这一问题。在命题6.7中，我们根据我们所称的对定义矩阵进行的容许操作给出了一个判别。在命题 6.15 中，我们提出了一种可高效计算的定义矩阵标准形，用于

系统化数据存储于 [14]。此外，该标准形直接表明，对于固定的 P，非环面型 X（A, P）构成（$r-2$）维族；参见注 6.17。

构造 5.2 的一个关键特点是，对于任意 $\mathbb{K}^*$-曲面$X = X(A,P)$，它都会自动给出除子类群 $\mathrm{Cl}(X)$ 和 Cox 环

$$\mathcal{R}(X) \;=\; \bigoplus_{\mathrm{Cl}(X)} \Gamma(X, \mathcal{O}(D)).$$

关于 Cox 环的精确定义，请参阅 [3, 第 1.1 节。4] ；关于以下内容的详细信息，请参阅 [3,第 3.4 节。3]

总结 6.1。考虑由构造 5.2 给出的 $\mathbb{K}^*$-曲面 $X = X(A,P) \subseteq Z$。回想一下， P 的列 v_{ij} 和 $v^{\pm}$ 给出了素除子

$$D_X^{ij} \;=\; X \cap D_Z^{ij} \;\subseteq\; X, \qquad\qquad D_X^{\pm} \;=\; X \cap D_Z^{\pm} \;\subseteq\; X.$$

此外，每个特征函数 $\chi^u \in \mathbb{K}(Z)$ 限制在 X 上都是非零有理函数，其除子由下式给出

$$\mathrm{div}(\chi^u) \;=\; \sum_{i,j} \langle u, v_{ij}\rangle D_X^{ij} + \sum_{+,-} \langle u, v^{\pm}\rangle D_X^{\pm}.$$

若不存在 v^+ 或 v^-，则第二个求和式中的各项视为零。子簇 $X \subseteq Z$ 从其环境簇继承除子类群:

$$\mathrm{Cl}(X) \;=\; \mathrm{Cl}(Z) \;=\; K \;:=\; \mathbb{Z}^{n+m}/\,\mathrm{im}(P^t).$$

令 Q: $\mathbb{Z}^{n+m} \to K$ 为投影，并令 e_{ij}、 $e^{\pm}$ 为 $\mathbb{Z}^{n+m}$的标准基向量，其指标分别与变量 T_{ij} 和 $S^{\pm}$相对应。则

$$\deg(T_{ij}) := w_{ij} := Q(e_{ij}) = [D_X^{ij}], \qquad \deg(S^{\pm}) := w^{\pm} := Q(e^{\pm}) = [D_X^{\pm}]$$

定义了多项式环 $\mathbb{K}[T_{ij}, S^{\pm}]$ 上的一个 K-分次，使得三项式$g_0, \ldots, g_{r-2}$都是齐次的。我们有同构

$$\mathcal{R}(X) \;\cong\; R(A,P) \;:=\; \mathbb{K}[T_{ij}, S_k]/\langle g_0, \ldots, g_{r-2}\rangle \;\cong\; \mathcal{R}(Z)/\langle g_0, \ldots, g_{r-2}\rangle$$

的 K-分次 $\mathbb{K}$-代数。特别地， X 的 Cox 环是其环境环面簇 Z的 Cox 环的一个因子代数。

我们进入同构问题。下面的两个定义为我们提供了必要的概念，以便根据定义矩阵刻画两个给定的 $\mathbb{K}^*$-曲面之间的同构性。

定义 6.2。考虑一个如构造 5.2 中的定义矩阵 P。

(i) 如果对于 $i = 0, \ldots, r$有 $l_{i1}n_i > 1$，则称 P不可约冗余，否则称为冗余。(ii) 如果 $i > 0$、 $n_i = 1$、 $l_{i1} = 1$ 和 $d_{i1} = 0$，则称 P 的列 v_{i1} 可消去 。

定义矩阵 P 的列元组 $v_{i1}, \ldots, v_{in_i}$ 描述任意 $X = X(A,P)$ 的第 i 个臂。因此，我们也将 $v_{i1}, \ldots, v_{in_i}$ 称为定义矩阵 P 的第 i 个臂。

定义 6.3. 考虑构造 5.2 中的定义矩阵对 (A,P)。(A,P) 上的容许操作如下:

(i) 擦除一个可擦除列 v_{i1} : 从 P 中删除第 i 行和第 $i1$ 列，并删除 A 的第 i 列; (ii) 将 P 的最后一行乘以 -1; (iii) 交换列 v_+ 和 v_-; (iv) 交换 P 第 i 个臂内的两列 v_{ij_1} 和 v_{ij_2} ; (v) 交换 A 的第 i 列和第 j 列，以及 P 的第 i 个臂和第 j 个臂，并通过对前 r 行进行初等操作来重新排列 P 的形状,

(vi) 将上方 r 行中的一行的倍数加到 P 的最后一行,

(vii) 使用 $B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ 和对角 $D \in \mathrm{GL}_{r+1}(\mathbb{K})$ 将 A 变换为 BAD ,

如果可以通过容许操作将其中一个变换为另一个，我们就称这两对定义矩阵 $(A,\ P)$ 和 $(A',\ P')$ 等价。

注记 6.4。 每个定义矩阵 P 都可以通过类型为 (i)、(v) 和 (vi) 的容许操作转化为不可约冗余的矩阵。

注6.5。 考虑一个带有不可约冗余 P 的 $\mathbb{K}^*$-曲面 $X = X(A,\ P)$。那么有以下结论。

(i) 曲面 X 是环面曲面的充要条件是 $r = 1$ 成立。(ii) X 的臂与映射 π: $X \dashrightarrow \mathbb{P}_1$ 的临界纤维重合。

回顾一下， $\mathbb{K}^*$-曲面的一个态射 X 和 X' 是一个对 (φ, ψ)，其中有一个簇的态射φ: $X \to X'$ 以及一个代数群的同态 ψ: $\mathbb{K}^* \to \mathbb{K}^*$，并且满足 $\varphi(t \cdot x) = \psi(t) \cdot \varphi(x)$恒成立。因此，在这种情形下，等变态射是一个满足 ψ 为恒等映射的态射 (φ, ψ)。

例 6.6. 给定一个有理射影 $\mathbb{K}^*$-曲面 X，考虑 $\mathbb{K}^*$的自同构 $\jmath(t) = t^{-1}$。那么，$(\mathrm{id}_X, \jmath)$是 $X \to X$ 的$\mathbb{K}^*$-曲面之间的一个非等变同构，它交换了源和汇。对于 $X = X(A, P)$，同构 $(\mathrm{id}_X, \jmath)$由将 P的最后一行乘以 -1给出。

命题6.7。 设非环面型射影 $\mathbb{K}^*$-曲面 X 和 X' 的定义对分别为 (A, P) 和 (A', P')。则以下陈述等价。

(i) (A, P) 和 (A', P') 等价。(ii) $R(A, P)$ 和 $R(A', P')$ 作为分次代数同构。(iii) X 和 X' 作为 $\mathbb{K}^*$-曲面同构。(iv) X 和 X' 作为曲面同构。

证明。 根据总结 6.1，环 $R(A, P)$ 和 $R(A', P')$ 分别是 X 和 X' 的 Cox 环。因此，(iv) 推出 (ii)。若 (ii) 成立，则 X 和 X' 的 Cox 环同构。由于我们处于曲面情形， X 和 X' 彼此同构；例如可参见 [3, 注 3.3.4.2 和定理 4.3.3.5]。因此，(ii) 推出 (iv)。

显然，(iii) 推出 (iv)。反过来，只需证明 $\mathbb{K}^*$在 X 上的任意两个作用都可由 X的一个自同构共轭。根据 [4, 推论 2.4], ，自同构群 $\mathrm{Aut}(X)$ 是线性代数群，并且作用是态射。特别地， X 上的任意 $\mathbb{K}^*$作用都会在 $\mathrm{Aut}(X)$ 中定义一个一维环面。由于 X 是非环面型的，$\mathrm{Aut}(X)$ 中任意两个一维环面都是极大的，因而彼此共轭。由此我们证明了 (iv) 推出 (iii)。

为了证明 (i) 推出 (ii)，我们必须检验：将一对定义矩阵 (A, P) 变为一对 (A', P') 的任意可容许操作，都会诱导出一个从 $R(A, P)$ 到 $R(A', P')$ 的同构。首先注意，对于类型 (ii) 和 (vi) 的操作，甚至有 $R(A, P) = R(A', P')$。此外，对于类型 (iii)、(iv) 或 (v) 的操作，环 $R(A', P')$ 可由 $R(A, P)$ 通过相应地重新编号变量及其次数得到。对于类型 (i) 的操作，只需考虑 $i = r$ 这种情形。此时，三项式 g_{r-2} 的形式为

$$g_{r-2} = \alpha T_{r-2}^{l_{r-2}} + \beta T_{r-1}^{l_{r-1}} + \gamma T_{r1}, \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}^*.$$

因此，将 T_{r1}映射到 $-\gamma^{-1}(\alpha T_{r-2}^{l_{r-2}} + \beta T_{r-1}^{l_{r-1}})$ 并保持其他变量不变，定义了一个分次代数同构 $R(A,\ P) \to R(A',\ P')$。最后，考虑类型 (vii) 的一种操作。从左侧用 $B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ 乘以 A ，意味着将三项式 g_ι 乘以因子 $\det(B)$，因此不会改变$R(A,\ P)$。此外，从右侧用对角矩阵乘以 A，相当于

将三项式 g_ι 中的系数乘以非零因子。适当地重新缩放 T_{ij}，即可得到一个从 $R(A,\ P)$ 到 $R(A',\ P')$ 的同构。

我们只需验证“(iii)⇒(i)”。不妨假设 P 和 P' 是不可约的。设 $\varphi\colon\ X \to X'$ 是 $\mathbb{K}^*$-曲面之间的一个同构。于是 φ 保持各向同性群不变；例如利用注6.5可知，φ 也保持 $\mathbb{K}^*$-曲面的臂不变。由此得出 $r = r'$、$n = n'$ 和 $m = m'$。总结 5.5 告诉我们，经过适当应用类型为 (iv) 和 (v) 的操作后，P 和 P'在前 r行中重合，并且 $\varphi(D_X^{ij}) = D_{X'}^{ij}$以及 $\varphi(D_X^{\pm}) = D_{X'}^{\pm}$成立。由此得到一个交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^{r+1} & \xrightarrow{P^t} & \mathbb{Z}^{n+m} & \longrightarrow & \mathrm{Cl}(X) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle S} & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_*} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^{r+1} & \xrightarrow[(P')^t]{} & \mathbb{Z}^{n+m} & \longrightarrow & \mathrm{Cl}(X') & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

其行是正合的，其中 φ_* 表示除子类群上的诱导推前同构。左侧向下的映射必为同构，因而由一个幺模矩阵 S给出，满足$(P')^tS = P^t$，或等价地，$S^tP' = P$。根据 P 和 P'的结构，后者迫使 S^t 具有如下形式

$$S^t \ = \ \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ * & \pm 1 \end{bmatrix}.$$

这意味着 P和 P' 仅相差类型 (ii) 和 (vi) 的容许操作。还需证明 A 和 A' 仅相差一次类型 (vii) 的容许操作。再次强调总结 5.5，我们得到一个涉及有理商的交换图

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & X' \\ {\scriptstyle /\mathbb{K}^*}\downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi'}{\scriptstyle /\mathbb{K}^*} \\ \mathbb{P}_1 & \xrightarrow[B]{} & \mathbb{P}_1, \end{array}$$

其中，诱导映射 B 是一个同构，因此由作用于齐次坐标的矩阵 $B \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{K})$ 给出。商映射 π 将 X 的第 i 条臂映到点 $a_i \in \mathbb{P}_1$，其齐次坐标由 A的第 i 列给出。对 π'、X'、a_i' 和 A' 也同样成立。因此，$B(a_i)$ 和 a_i' 的齐次坐标仅相差一个非零标量。这意味着 $A' = BAD$ 具有对角矩阵 $D \in \mathbf{GL}_{r+1}(\mathbb{K})$。□

注记 6.8. 在命题6.7中，假设 X 和 X' 是非环面型这一点至关重要。例如，在射影平面 $\mathbb{P}_2$ 上，$\mathbb{K}^*$-作用 $[z_0, tz_1, t^2z_2]$ 和$[z_0, z_1, tz_2]$ 会产生非同构的 $\mathbb{K}^*$-曲面。

现在讨论标准形。回顾构造 5.2，对于每个定义矩阵 P，我们都有斜率

$$m_{ij} := \frac{d_{ij}}{l_{ij}}, \quad i = 0, \ldots, r,\ j = 1, \ldots, n_i.$$

定义 6.9。对于构造 5.2 中的任意定义矩阵 P，我们关联以下整数

$$\begin{aligned} \mathscr{b}_i^+ &:= \max(\lfloor m_{i1} \rfloor, \ldots, \lfloor m_{in_i} \rfloor), & \mathscr{b}^+ &:= \mathscr{b}_0^+ + \ldots + \mathscr{b}_r^+, \\ \mathscr{b}_i^- &:= \min(\lceil m_{i1} \rceil, \ldots, \lceil m_{in_i} \rceil), & \mathscr{b}^- &:= -(\mathscr{b}_0^- + \ldots + \mathscr{b}_r^-). \end{aligned}$$

回忆一下，若定义矩阵 P按斜率排序，则 $m_{i1} > \ldots > m_{in_i}$ 对 $i = 0, \ldots, r$ 成立。若 P 按斜率排序，则刚引入的数满足 $\mathscr{b}_i^+ = \lfloor m_{i1} \rfloor$ 且 $\mathscr{b}_i^- = \lceil m_{in_i} \rceil$。

定义 6.10。 考虑构造 5.2 中的定义矩阵 P。对于任意$i = 0, \ldots, r$ 和 $j = 1, \ldots, n_i$, 有如下有理数

$$\beta_{ij}^{+} := m_{ij} - \mathscr{o}_i^{+}, \qquad \beta_{ij}^{-} := \mathscr{o}_i^{-} - m_{ij}.$$

设 $\beta_i^{\pm} \in \mathbb{Q}^{n_i}$ 的条目 $\beta_{i1}^{\pm}, \ldots, \beta_{in_i}^{\pm}$ 按降序排列，且 $\beta^{\pm}$ 是 $(\beta_0^{\pm}, \ldots, \beta_r^{\pm})$ 的字典序。那么，如果 P 满足以下条件之一，则称其为定向的

(O1) P 为 (p-e) 型；(O2) P 为 (e-e) 型或 (p-p) 型，且 $\mathscr{o}^{+} > \mathscr{o}^{-}$;
(O3) P 为 (e-e) 型或 (p-p) 型，且 $\mathscr{o}^{+} = \mathscr{o}^{-}$ 和 $\beta^{+} >_{\mathrm{lex}} \beta^{-}$；(
O4) P 为 (e-e) 型或 (p-p) 型，且 $\mathscr{o}^{+} = \mathscr{o}^{-}$ 和 $\beta^{+} = \beta^{-}$。

注意，性质 (O1) 至 (O4) 彼此互斥。如果定义矩阵 P 按斜率排序，则 $\beta_{i1}^{+} > \ldots > \beta_{in_i}^{+}$ 和 $\beta_{i1}^{-} < \ldots < \beta_{in_i}^{-}$ 成立。特别是，此时 $\beta_i^{\pm}$ 按降序排列，也就是说，$\beta_i^{+} = (\beta_{i1}^{+}, \ldots, \beta_{in_i}^{+})$ 和 $\beta_i^{-} = (\beta_{in_i}^{-}, \ldots, \beta_{i1}^{-})$。

注记 6.11。 设 P 是构造 5.2 中的定义矩阵。那么对于容许操作，$\mathscr{o}^{\pm}$ 和 $\beta^{\pm}$ 的行为如下:

(i) 类型 (iii)、(iv)、(v)、(vi) 或 (vii) 的操作不会影响 $\mathscr{o}^{\pm}$ 和 $\beta^{\pm}$;
(ii) 类型 (ii) 的操作会交换 $\mathscr{o}^{+}$、$\mathscr{o}^{-}$，同时交换 β^{+}、β^{-}。

注记 6.12。 应用类型 (ii) 的容许操作，我们可以将任意非定向矩阵 P 转化为定向矩阵。

注记 6.13。 设 (A, P) 和 $(\tilde{A}, \tilde{P})$ 等价，并假设 P 以及 $\tilde{P}$ 和 P 都是不可约冗余的。则我们可以通过类型 (ii) 至 (vii) 的容许操作，将 (A, P) 转化为 $(\tilde{A}, \tilde{P})$。根据这一过程中使用偶数次还是奇数次类型 (ii) 的操作，我们有

$$(\mathscr{o}^{+}, \beta^{+}) = (\tilde{\mathscr{o}}^{+}, \tilde{\beta}^{+}), \qquad (\mathscr{o}^{+}, \beta^{+}) = (\tilde{\mathscr{o}}^{-}, \tilde{\beta}^{-}).$$

定义 6.14。 如果一个定义矩阵对（A, P）满足以下条件，则称其为标准形:

(i) P 是不可约冗余的；(ii) P 是定向的；(iii) 如果 $m \geq 1$，则 $d_1 = 1$；(iv) P 按斜率排序；(v)（β_0^{+}、.....、β_r^{+}）按字典序排列；(vi) P适配源，即对于 $i = 1$、.....、r, $0 \leq d_{i1} < l_{i1}$；(vii) 取适当的两两不同的 $\lambda_1 = 1$、λ_2、$\ldots \lambda_{r-1} \in \mathbb{K}*$，有

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 & \ldots & -\lambda_{r-1} \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \ldots & -1 \end{bmatrix}.$$

关于定义矩阵对的标准形的主要结论保证了其存在性和唯一性。

命题 6.15。 每个定义矩阵对都等价于一个标准形的定义矩阵对。此外，如果两个标准形的定义矩阵对彼此等价，则它们相同。

证明。 我们通过给出一个具体步骤，将给定的定义矩阵对 (A, P) 经由容许操作化为标准形，从而证明第一个陈述。首先，注记 6.4 使 P不可约冗余，而注记 6.11 (ii) 为 P定向。这就证明了 6.14. (i) 和 (ii)。注记 6.11 (i) 告诉我们，(iii)、(iv) 和 (v) 类操作可以确保 6.14. (iii)、(iv) 和 (v)，同时不影响 P 的定向。对 $i = 1, \ldots, r$，从最后一行减去 $\mathscr{o}_i^{+}$ 倍的第 i 行，我们得到

$0 \leq d_{i1} < l_{i1}$。换言之，使用 (vi) 类操作可得到 6.14. (vi)。同样，之前取得的结果不会改变，因为 $\mathscr{b}^+$ 和 β_{ij}^+ 保持不变。最后，一个适当的 (vii) 类操作可将 A 化为所需形式。 A 各列的线性无关性保证 $0, -1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ 两两不同。

我们证明第一个陈述。设 (A, P) 和 $(\tilde{A}, \tilde{P})$ 是不可约冗余的，我们有 $r = \tilde{r}$、$n = \tilde{n}$ 和 $m = \tilde{m}$。下一步，我们利用 P 和 P 是定向的这一事实来证明

$$(\mathscr{b}^+, \beta^+) \ = \ (\tilde{\mathscr{b}}^+, \tilde{\beta}^+).$$

如果 P 满足定义 6.10 中的 (O4)，那么注记 6.13 直接给出该结论。设 P 满足 (O1)、(O2) 或 (O3) 中的一个。然后注记 6.13 表明，通过容许操作将 (A, P) 变换为 (A, P) 时，只可能涉及偶数次 (ii) 型操作，因此在这些情况下同样可以得到该结论。现在，$\beta^+ = \tilde{\beta}^+$ 与 6.14 (iv) 和 (v) 一起得到

$$m_{ij} - \mathscr{b}_i^+ \ = \ \beta_{ij}^+ \ = \ \tilde{\beta}_{ij}^+ \ = \ \tilde{m}_{ij} - \tilde{\mathscr{b}}_i^+, \qquad i = 0, \ldots, r, \ j = 1, \ldots, n_i.$$

条件 6.14 (vi) 推出 $\mathscr{b}_i^+ = \tilde{\mathscr{b}}_i^+ = 0$，其中 $i = 1$、.....、r。由于 $\mathscr{b}^+ = \tilde{\mathscr{b}}^+$，我们还有 $\mathscr{b}_0^+ = \tilde{\mathscr{b}}_0^+$。因此，对于 $i = 0$、.....、r 和 $j = 1$、.....、n_i，有 $m_{ij} = \tilde{m}_{ij}$。由于 P 和 $\tilde{P}$ 具有本原列，我们得到 $l_{ij} = l_{ij}$ 和 $d_{ij} = d_{ij}$。条件 6.14 (iii) 确保在 (p-p) 情形下， P 和 P 的最后两列也相同。因此我们得到 $P = P$。由 6.14 (vii) 和 $A = BAD$，取 $B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ 以及一个对角 $D \in \mathrm{GL}_{r+1}(\mathbb{K})$，可得 $A = A$。
□

注记 6.16。 命题 6.15 第一条陈述的证明中所述的标准形计算过程可以直接实现，并能有效地确定实践中的标准形。

注 6.17. 设 (A, P) 是一对处于标准形的定义矩阵。那么，环 $R(A, P)$ 的关系理想也由以下元素生成：

$$\tilde{g}_\iota \ := \ \lambda_\iota T_0^{l_0} + T_1^{l_1} + T_{\iota+1}^{l_{\iota+1}}, \qquad \iota = 1, \ldots, r-1.$$

这又给出了 $R(A, P)$ 的一种三项式表示，说明对于固定的 P，曲面 $X(A, P)$ 构成一个 $(r-2)$ 维族。

构造 6.18. 考虑构造 5.2 中所述的射影 $\mathbb{K}^*$-曲面的定义数据 (A, P)。

(i) (A, P) 的一个冗余扩张 是一个数对 (A', P')，其中 $A' = [A, a_{r+1}]$和 P' 由 P 通过在 $r+1$处插入一行零、在 $n+1$ 处插入一列零，再将 $(r+1, n+1)$ 处的元素改为 1 得到。我们也将任何与 (A', P') 等价的定义数据称为 (A, P) 的冗余扩张。(ii) (A, P) 的一个适当扩张 是一个定义矩阵对 (A', P')，其中$A = A'$ 和 P' 由 P通过在第i臂中插入一列 v_{in_i+1}，或在 P末尾插入一列类型为 $v^\pm$ 的列得到。

注记 6.19。 考虑由定义数据 $(A, \ P)$ 给出的射影 $\mathbb{K}^*$-曲面 X。

(i) $(A, \ P)$ 的每个冗余扩张 $(A', \ P')$ 都定义一个与 X 同构的 $\mathbb{K}^*$-曲面 X'。(ii) 对于 $(A, \ P)$ 的每个适当扩张 $(A, \ P')$，相应的 $\mathbb{K}^*$-曲面 X' 都伴有一个收缩一条曲线的双有理态射 $X' \to X$。

7. 有理 $\mathbb{K}^*$-曲面的几何

我们展示了如何根据定义数据读出有理 $\mathbb{K}^*$曲面的基本几何性质。对于给定的 $X = X$（$A, \ P$），我们明确确定其除子类

群、Cox 环、皮卡群、有效除子类锥、可动除子类锥、半丰沛除子类锥和丰沛除子类锥、典范除子及其交理论。

本节讨论的所有事实都依赖于总结 6.1 中给出的 Cox 环的明确知识。这使我们能够运用 [3] 中关于 Cox 环的整套理论工具。我们首先仔细考察除子类群中的数据；有关环面情形的相应论述，请参见总结 2.3；证明见 [3, 命题 3.3.2.3 和命题 3.4.4。1]

总结 7.1。设 $X = X(A, P)$ 是一个 $\mathbb{K}^*$-曲面，且 $X \subseteq Z$ 是相应的环面嵌入。我们来考察除子类群中的各种数据

$$\mathrm{Cl}(X) \;=\; K \;=\; \mathrm{Cl}(Z).$$

对于 $\sigma \in \Sigma$，定义 K 的一个子群如下：$K_\sigma := \langle w_{ij}, w^{\pm};\ \ v_{ij}, v^{\pm} \notin \sigma\rangle$。那么 $x \in X \cap \mathbb{T}^n \cdot z_\sigma$ 的局部类群 为

$$\mathrm{Cl}(X, x) \;=\; K/K_\sigma \;=\; \mathrm{Cl}(Z, z_\sigma).$$

因此，X 也与环境环面簇 Z 具有相同的皮卡群 。更确切地说，在 Cl(X) =Cl(Z) 中，我们得到

$$\mathrm{Pic}(X) \;=\; \bigcap_{\sigma\in\Sigma} K_\sigma \;=\; \mathrm{Pic}(Z).$$

有效因子类幺半群 由 D_X^{ij} 的类 w_{ij} 和 $D_X^{\pm}$ 的类 $w^{\pm}$ 生成。因此，在 $K_\mathbb{Q} = \mathbb{Q} \otimes_\mathbb{Z} K$ 中，X 的有效锥为

$$\mathrm{Eff}(X) \;=\; \mathrm{cone}(w_{ij}, w^{\pm}) \;=\; \mathrm{Eff}(Z).$$

对于 $\sigma \in \Sigma$，令 σ^*：=锥（$w_{ij}, w^{\pm};\ \ v_{ij}, v^{\pm} \notin \sigma$）。那么，对于 X 的可动除子类锥和半丰沛除子类锥，有

$$\mathrm{Mov}(Z) = \bigcap_{\substack{\gamma_0 \preccurlyeq \gamma \\ \text{facet}}} Q(\gamma_0) = \mathrm{Mov}(X) = \mathrm{SAmple}(X) = \bigcap_{\sigma\in\Sigma} \sigma^* = \mathrm{SAmple}(Z).$$

此外，丰沛锥 为

$$\mathrm{Ample}(X) \;=\; \mathrm{SAmple}(X)^\circ \;=\; \mathrm{SAmple}(Z)^\circ \;=\; \mathrm{Ample}(Z).$$

对于 $X \subseteq Z$ 的定义多项式 $g_0, \ldots, g_{r-2}$ 的公共次数 $\mu \in$ Cl(X)，有

$$\mu \;=\; \sum_{j=0}^{n_i} l_{ij} w_{ij} \;\in\; \bigcap_{i=0}^{r} \mathrm{cone}(w_{i1}, \ldots, w_{in_i}) \;\subseteq\; \mathrm{SAmple}(X).$$

最后，对于每个 $i = 0, \ldots, r$，根据以下伴随公式，我们得到 X 的一个反典范除子。

$$-\mathcal{K}_X^i \;=\; \sum D_X^{ij} + \sum D_X^k - (r-1)\sum_{j=1}^{n_i} l_{ij} D_X^{ij}.$$

特别地，当且仅当对应的除子类$-w_X = -w_Z - (r-1)\mu$ 位于丰沛锥中时，X 是德尔佩佐曲面；这一点可以明确验证。

命题 7.2。每个 $\mathbb{K}^*$-曲面 $X = X(A, P)$ 都是 $\mathbb{Q}$-阶乘性的，且其皮卡数为 $\rho(X)$ $= n + m - r - 1$。

证明。我们要证明每个魏尔除子都有一个非零的 Cartier 倍数。为此，考虑相应的环面嵌入 $X \subseteq Z$。Z的定义扇是单纯的，因此根据总结 2.4，Z 是 $\mathbb{Q}$-阶乘性的。于是，Pic(Z)在 Cl(Z)中具有有限指数。总结 7.1表明，Pic(X)在 Cl(X)中具有有限指数。因此，X 是 $\mathbb{Q}$-阶乘性的。皮卡数的公式随即由$\rho(X)$ = rk(Cl(X)) $= n + m - (r + 1)$得出。□

需要强调的是，皮卡群以及（半）丰沛除子类锥的描述，在很大程度上取决于我们使用构造 5.2 所给出的环面嵌入 $X \subseteq Z$ 这一事实。相比之下，可动除子类锥和反典范除子的描述则更为稳健，并且允许我们转而考虑下文所述的 Z 的某些完备化。

总结 7.3。考虑一个射影 $\mathbb{K}^*$-曲面 $X = X(A,\ P)$，以及由构造 5.2 给出的托里克嵌入 $X \subseteq Z$。一般而言，Z 并不完备，因此我们有多种可能的托里克完备化 $Z \subseteq Z'$。例如，每个除子类 $w \in \mathrm{Mov}(Z)^\circ$ 都会给出一个扇

$$\Sigma(w) \ := \ \{P(\gamma_0^*);\ \gamma_0 \preccurlyeq \gamma,\ w \in Q(\gamma_0)^\circ\}.$$

任何这样的扇 $\Sigma(w)$ 都是多面体的，具有与 Σ 相同的生成矩阵，并包含 Σ 的所有锥。相应的开嵌入 $Z \subseteq Z(w)$ 正是满足 $Z(w)$ 与 Z 具有相同 Cox 环的射影托里克完备化。为得到精确的图像，将多面锥 $= Q(\gamma)$ 与 $w \in \mathrm{Eff}(Z)$ 联系起来

$$\lambda(w) \ := \ \bigcap_{\substack{\gamma_0 \preccurlyeq \gamma,\\ w \in Q(\gamma_0)}} Q(\gamma_0).$$

这些 $\lambda(w)$ 构成一个支撑于 $Q(\gamma) = \mathrm{Eff}(Z)$ 上的扇，即所谓的次级扇。对于 $w,\ w' \in \mathrm{Mov}(Z)^\circ$，当且仅当 $\Sigma(w')$ 细分 $\Sigma(w)$ 时，我们有 $\lambda(w) \preccurlyeq \lambda(w')$。特别地，所有 $w' \in \lambda(w)^\circ$ 共享相同的 $\Sigma(w)$。扇 $\Sigma(w)$ 是单纯的，当且仅当 $\lambda(w)$ 是满维的。

我们来讨论有理 $\mathbb{K}^*$-曲面 $X = X(A,\ P)$ 的交理论。正如刚才所指出的，X 是 $\mathbb{Q}$-阶乘性的，因此确实有定义良好的交乘积。我们的目标是用定义矩阵 P 来表示交数。作为准备，我们为 P赋予以下数值；事实上，这些数值在后续所有讨论中都普遍出现。

定义 7.4. 对于构造 5.2 意义下的任意斜率排序的定义矩阵 P，我们关联以下数值

$$l^+ := l_{01}\cdots l_{r1}, \quad m^+ := m_{01}+\cdots+m_{r1}, \quad \ell^+ := \frac{1}{l_{01}}+\cdots+\frac{1}{l_{r1}}-r+1,$$
$$l^- := l_{0n_0}\cdots l_{rn_r}, \quad m^- := m_{0n_0}+\cdots+m_{rn_r}, \quad \ell^- := \frac{1}{l_{0n_0}}+\cdots+\frac{1}{l_{rn_r}}-r+1.$$

注 7.5. 设 P 是构造 5.2 中的定义矩阵。那么总有 $\ell^+ \le 2$ 和 $\ell^- \le 2$。此外，

$$m^+ \ = \ \frac{1}{l^+}\det(\sigma^+), \qquad \det(\sigma^+) \ := \ (-1)^r \det(v_{01},\ldots,v_{r1}),$$
$$m^- \ = \ \frac{1}{l^-}\det(\sigma^-), \qquad \det(\sigma^-) \ := \ (-1)^r \det(v_{0n_0},\ldots,v_{rn_r}).$$

如果 $X = X(A,\ P)$ 有一个椭圆不动点 $x^+ \in X$，那么 $m^+ > 0$；如果存在$x^- \in X$，那么 $m^- < 0$。

我们先说明在 $X = X(A,\ P)$ 上对相关不变曲线进行交的基本原理。

总结 7.6。考虑一个带有按斜率排序的 P 的 $\mathbb{K}^*$-曲面 $X = X(A,\ P)$。由于 X 是环境环面簇 Z 中的完全交，且该簇具有 $\mathbb{Q}$-阶乘性，因此可以通过与适当的环境环面除子相交来计算曲线之间的交数。对于 $i = 1,\ldots,r$，考虑除子

$$D_Z^i \ := \ \sum_{j=1}^{n_i} l_{ij} D_Z^{ij} \ \in \ \mathrm{WDiv}(Z).$$

D_Z^i 的除子类等于 $X \subseteq Z$的定义关系的共同次数。因此，根据一般交理论，任意两个 D_X^{ij} 和 $D_X^{\pm}$ 的交数，等于相应环面素除子与 D_Z^i的 $r-1$ 的交数。例如，对于 D_X^{01} 和 D_X^{11}，可以写作

$$D_X^{01} \cdot D_X^{11} \;=\; D_Z^{01} \cdot D_Z^{11} \cdot D_Z^2 \cdots D_Z^r.$$

环面交数可展开为两两不同的环面素除子的交数。对于非零的交数，根据环面交理论，它们等于所涉及本原生成元的行列式的倒数。如果 D_X^{01} 与 D_X^{11} 恰好交于 $x^+ \in X$，则得到

$$D_X^{01} \cdot D_X^{11} \;=\; D_Z^{01} \cdot D_Z^{11} \cdot D_Z^{21} \cdots D_Z^{r1} \;=\; \frac{l_{21} \cdots l_{r1}}{\det(\sigma^+)} \;=\; \frac{1}{l_{01} l_{11}} \frac{1}{m^+}.$$

注意， D_Z^i 中的任意两个彼此线性等价，并且 $D_Z^{\pm}$ 与 $\mp \sum E_Z^i$ 线性等价，其中 E_Z^i : $= \sum d_{ij} D_Z^{ij}$。这使我们能够将 D_X^{ij} 与 $D_X^{\pm}$ 之间的任意交表示为两两不同的环面素除子的交数的线性组合，从而按上述方式继续。

现在我们列出给定射影$\mathbb{K}^*$-曲面 $X = X(A, P)$的不变曲线的交数；关于环面曲面的情形，请参见总结 3.2，另请参见 [3, 第 5.4 节2]。

总结 7.7. 设 $X = X(A,\ P)$ 是具有 P按斜率排序的射影 $\mathbb{K}^*$-曲面。对于 $i = 0,$ ....., $r,$ 令

$$\begin{aligned}
m_{i0} &:= \begin{cases} 0, & \text{if there is } D_X^+ \subseteq X, \\ -\frac{1}{m^+}, & \text{if there is } x^+ \in X, \end{cases} \\
m_{ij} &:= \frac{1}{m_{ij} - m_{ij+1}}, \quad j = 1, \ldots, n_i - 1, \\
m_{in_i} &:= \begin{cases} 0, & \text{if there is } D_X^- \subseteq X, \\ \frac{1}{m^-}, & \text{if there is } x^- \in X. \end{cases}
\end{aligned}$$

那么， X 中（可能存在的）曲线 $D_X^{\pm}$ 与曲线 D_X^{ij} 的非零交数为

$$D_X^+ \cdot D_X^{i1} \;=\; \frac{1}{l_{i1}}, \qquad D_X^{ij} \cdot D_X^{ij+1} \;=\; \frac{1}{l_{ij} l_{ij+1}} m_{ij}, \qquad D_X^{in_i} \cdot D_X^- \;=\; \frac{1}{l_{in_i}}.$$

此外，若存在椭圆不动点 $x^+ \in X$ 或 $x^- \in X$，则对于 $i \neq k$ ，交数如下

$$\begin{aligned}
D_X^{i1} \cdot D_X^{k1} &= -\frac{1}{l_{i1} l_{k1}} \big(m_{i0} + m_{in_i}\big), && n_i n_k = 1, \\
D_X^{i1} \cdot D_X^{k1} &= -\frac{1}{l_{i1} l_{k1}} m_{i0}, && n_i n_k > 1, \\
D_X^{in_i} \cdot D_X^{kn_k} &= -\frac{1}{l_{in_i} l_{kn_k}} m_{in_i}, && n_i n_k > 1.
\end{aligned}$$

最后， X 中（可能存在的）曲线 $D_X^{\pm}$ 与曲线 D_X^{ij} 的自交数为

$$D_X^+ \cdot D_X^+ \;=\; -m^+, \qquad D_X^- \cdot D_X^- \;=\; m^-, \qquad D_X^{ij} \cdot D_X^{ij} \;=\; -\frac{1}{l_{ij}^2} \big(m_{ij-1} + m_{ij}\big).$$

由于 D_X^{ij}和 $D_X^{\pm}$生成了 $X = X(A,\ P)$ 的除子类群，上述计算确定了 X 的全部交理论。特别是，我们可以

直接计算反典范除子与相关曲线的交数，进而求得反典范自交数。

命题 7.8。设 $\mathbb{K}^*$-曲面 $X = X(A,P)$ 为射影曲面，并具有按斜率排序的 P。对于 $i = 0,\dots,r$，令

$$\begin{aligned}
\ell_{i0} &:= \begin{cases} \infty, & \text{if there is } D_X^+ \subseteq X, \\ -\ell^+, & \text{if there is } x^+ \in X, \end{cases} \\
\ell_{ij} &:= \tfrac{1}{l_{ij}} - \tfrac{1}{l_{ij+1}}, \quad j = 1,\dots,n_i - 1, \\
\ell_{in_i} &:= \begin{cases} -\infty, & \text{if there is } D_X^- \subseteq X, \\ \ell^-, & \text{if there is } x^- \in X. \end{cases}
\end{aligned}$$

令 $\infty\cdot 0 = 1$和 $-\infty\cdot 0 = -1$，我们可以将反典范除子 $-K_X$ 与 D_X^{ij} 和 $D_X^{\pm}$ 的交数写为

$$\begin{aligned}
-\mathcal{K}_X \cdot D_X^+ &= \ell^+ - m^+, \\
-\mathcal{K}_X \cdot D_X^{ij} &= \tfrac{1}{l_{ij}}\left(\ell_{ij-1} m_{ij-1} - \ell_{ij} m_{ij}\right), \\
-\mathcal{K}_X \cdot D_X^- &= \ell^- + m^-.
\end{aligned}$$

证明。这是一个直接计算。取总结 7.1 中的反典范除子$\mathcal{K}_X^0$，然后应用总结 7.7。□

命题 7.9。设 $\mathbb{K}^*$-曲面 $X = X(A,P)$ 为射影曲面，并具有按斜率排序的 P。对于任意臂 $\mathscr{A}_i$，其中 $i = 0,\dots,r$，我们附加数值

$$\alpha_i := \sum_{j=1}^{n_i-1} \frac{\lambda_{ij}}{\Delta_{ij}}, \qquad \Delta_{ij} := l_{ij+1}d_{ij} - l_{ij}d_{ij+1}, \qquad \lambda_{ij} := 2 - \frac{l_{ij+1}}{l_{ij}} - \frac{l_{ij}}{l_{ij+1}},$$

其中，当 $n_i = 1$时 $\alpha_i = 0$。于是，根据源与汇的可能构型，X 的反典范自交数为

$$\begin{aligned}
\text{(e-e)} \qquad \mathcal{K}_X^2 &= \frac{(\ell^+)^2}{m^+} + \alpha_0 + \cdots + \alpha_r - \frac{(\ell^-)^2}{m^-}, \\
\text{(e-p)} \qquad \mathcal{K}_X^2 &= \frac{(\ell^+)^2}{m^+} + \alpha_0 + \cdots + \alpha_r + 2\ell^- + m^-, \\
\text{(p-e)} \qquad \mathcal{K}_X^2 &= 2\ell^+ - m^+ + \alpha_0 + \cdots + \alpha_r - \frac{(\ell^-)^2}{m^-}, \\
\text{(p-p)} \qquad \mathcal{K}_X^2 &= 2\ell^+ - m^+ + \alpha_0 + \cdots + \alpha_r + 2\ell^- + m^-.
\end{aligned}$$

证明。再次取总结 7.1 中的反典范除子$\mathcal{K}_X^0$，并使用命题 7.8。□

注记 7.10。对于具有两个椭圆不动点的情形 $r = 1$，命题 7.9 恰好重述了注记 3.3。注意，在每个完备环面曲面上，我们都能找到一个具有两个椭圆不动点的 $\mathbb{K}^*$-作用。

8. 奇点

我们仔细考察环面曲面 $\mathbb{K}^* X = X（A,\ P）$的奇点。回顾基础知识和典范消解之后，我们将在命题 8.8 和 8.9 中描述局部戈伦斯坦指标。此外，在命题 8.11 和推论 8.12 中，我们刻画对数终端性。由此，命题 3.8 和 8.14 给出了所有有理对数终端曲面奇点的明确描述。

我们首先定位 $X = X(A、\ P)$ 的光滑点和（温和的）奇点。若 $x = p(\hat{}x)$ 与某个光滑点 $\hat{}x \in \hat{}X$ 一同成立，则称点 $x \in X$ 为拟光滑。

此外，若一个点 $x \in X$ 的局部除子类群是平凡的，则称其为阶乘性。当且仅当局部环 $\mathcal{O}_X$、x 具有唯一分解时，后一个条件成立。

总结 8.1. 考虑由构造 5.2 给出的 $\mathbb{K}^*$ 曲面 $X = X(A,\ P) \subseteq Z$，其中 P 按斜率排序。首先注意以下几点。

- 由于 X 是正规曲面，其奇点必然是不动点。
- 曲面 X 从 Z 继承了 $\mathbb{Q}$-阶乘性；参见命题 7.2。

抛物型不动点总是拟光滑的；若它不包含在 X 的某个臂中，则甚至是光滑的。此外，如同 [3, 命题 3.4.4.6], 所示，我们看到每个

$$x_i^+ \in D_X^+ \cap \mathscr{A}_i, \qquad x_i^- \in D_X^- \cap \mathscr{A}_i$$

都存在一个邻域 $x_i^\pm \in U_i^\pm \subseteq X$，它与环面曲面上该不动点的一个邻域同构，其生成矩阵为

$$P_i^+ = \begin{bmatrix} 0 & l_{i1} \\ 1 & d_{i1} \end{bmatrix}, \qquad P_i^- = \begin{bmatrix} l_{in_i} & 0 \\ d_{in_i} & -1 \end{bmatrix}.$$

特别地，x_i^+ (x_i^-) 光滑，当且仅当 $l_{i1} = 1$ ($l_{in_i} = 1$)。接下来讨论双曲不动点。这些恰好是交点

$$x_{ij} \in D_X^{ij} \cap D_X^{ij+1}.$$

每个 x_{ij} 都是拟光滑的，并且存在一个邻域 $x_{ij} \in U_{ij} \subseteq X$，它与具有生成矩阵的环面曲面不动点的邻域同构

$$P_{ij} = \begin{bmatrix} l_{ij} & l_{ij+1} \\ d_{ij} & d_{ij+1} \end{bmatrix}.$$

特别地，x_{ij} 光滑，当且仅当 $\det(P_{ij}) = -1$。对于可能的椭圆不动点，我们有仿射 $\mathbb{K}^*$-不变开邻域

$$x^+ \in U^+ = \{x \in X;\ x_0 = x^+\} \subseteq X, \quad x^- \in U^- = \{x \in X;\ x_\infty = x^-\} \subseteq X.$$

作为 $\mathbb{K}^*$-曲面，它们由 $U^+ = X(A, P^+)$ 和 $U^- = X(A, P^-)$ 给出，其定义矩阵为

$$P^+ = [v_{01}, \ldots, v_{r1}], \qquad P^- = [v_{0n_0}, \ldots, v_{rn_r}].$$

椭圆不动点 $x^\pm$ 的局部类群等于 $U^\pm$ 的除子类群。此外，x^+ (x^-) 是

- 拟光滑，当且仅当对于至少 $r-1$ 个 $i = 0, \ldots, r$，有 $l_{i1} = 1$ ($l_{in_i} = 1$),
- 具有阶乘性，当且仅当 $\det(P^+) = l^+ m^+ = 1$ ($\det(P^-) = l^- m^- = -1$),
- 光滑，当且仅当它具有阶乘性且拟光滑。

注意，$x^\pm \in X$ 具有阶乘性，当且仅当仿射 $\mathbb{K}^*$-曲面的 Cox 环 $U^\pm$与其全坐标环一致。

我们根据定义矩阵 P给出 $\mathbb{K}^*$-曲面 $X = X(A,\ P)$的奇点消解。注意，该过程尤其能得到 [29, 30, 32]中观察到的星形解消图。

总结 8.2。 参见 [3, 构造 5.4.3.2]。 $X = X(A,\ P)$的典范消解奇点$X'' \to X$通过以下两步过程得到。

(i) 通过添加列 v^+ 和 v^- 将 P 扩充为矩阵 P' （如果这些列尚未存在）。于是我们得到曲面 $X' := X(A,\ P')$ 以及一个典范态射 $X' \to X$。

(ii) 令 P'' 为定义矩阵，其列由 Σ' 的正则细分 Σ'' 的本原生成元构成。则 $X'' := X(A,\ P'')$ 是光滑的，并且存在一个典范态射 $X'' \to X'$。

两个扇 Σ' 和 Σ'' 都以 $X \subseteq Z$ 的热带簇作为其支撑。利用标准基向量 e_1、……、$e_{r+1} \in \mathbb{Z}^{r+1}$ 和 $e_0 := -e_1 - \cdots - e_r$，它可表示为

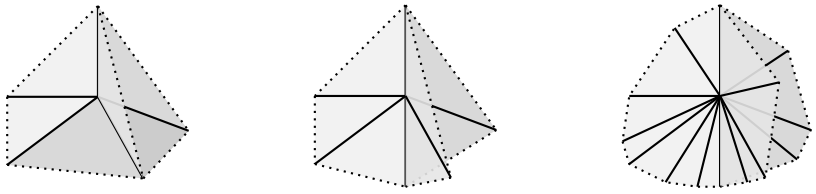
$$\mathrm{trop}(X) \;=\; \lambda_0 \cup \cdots \cup \lambda_r \;\subseteq\; \mathbb{Q}^{r+1}, \qquad \lambda_i \;:=\; \mathrm{cone}(e_i, \pm e_{r+1}).$$

将位于光滑部分内且映射到 X 奇点上的所有（-1）曲线收缩后，得到 $X'' \to X \to X$，其中 $X(A,\ P) = X \to X$ 是 X 的最小解消。

例 8.3。 再次考虑例5.7中的 $\mathbb{K}^*$-曲面 $X = X(A,\ P)$，其定义数据为

$$A \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad P \;=\; \begin{bmatrix} -3 & -5 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & -8 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

四个双曲型不动点和椭圆不动点都是奇点。总结 8.2 中的两个解消步骤示意如下。



Σ $\qquad$ Σ' $\qquad$ Σ''

~ ~ ~明确地，$X = X(A,\ P)$ 的最小解消的定义矩阵 P 为

$$\tilde{P} \;=\; \begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 & -5 & -3 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & -5 & -3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & -3 & -8 & -5 & -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

注 8.4。 考虑总结 8.2 的步骤 (i) 中的 $X = X(A,\ P)$ 及其相关曲面 X'。则有

$$\begin{aligned} m^+ \;&=\; -D^+_{X'} \cdot D^+_{X'}, & \ell^+ \;&=\; D^+_{X'} \cdot D^+_{X'} - \mathcal{K}^0_{X'} \cdot D^+_{X'}, \\ m^- \;&=\; D^-_{X'} \cdot D^-_{X'}, & \ell^- \;&=\; D^-_{X'} \cdot D^-_{X'} - \mathcal{K}^0_{X'} \cdot D^-_{X'}. \end{aligned}$$

构造 8.5。 考虑一个有理射影 $\mathbb{K}^*$-曲面 X、商$\pi\colon\ X \dashrightarrow \mathbb{P}_1$、其定义域 $U \subseteq X$ 以及图像的闭包

$$X' \;:=\; \overline{\Gamma}_\pi \;\subseteq\; X \times \mathbb{P}_1, \qquad \Gamma_\pi \;=\; \{(x, \pi(x));\ x \in U\} \;\subseteq\; X \times \mathbb{P}_1.$$

于是，X' 带有由 $t * (x,\ z) = (t \cdot x,\ z)$ 给出的 $\mathbb{K}^*$-作用，而投影给出一个等变双有理态射

$$X' \;\to\; X, \qquad (x, \pi(x)) \;\mapsto\; x.$$

此外，对于任意具有有理商 $\pi_i\colon\ X_i \dashrightarrow \mathbb{P}_1$ 的 $\mathbb{K}^*$-曲面之间的等变态射 $\varphi\colon\ X_1 \to X_2$，我们都有一个诱导的等变态射

$$\varphi'\colon X'_1 \;\to\; X'_2, \qquad (x, \pi_1(x)) \;\mapsto\; (\varphi(x), \pi_2(x)).$$

命题 8.6。 对于任意 $X = X(A,\ P)$，来自构造 *8.5* 的态射 $X' \to X$ 等于总结 *8.2 (i)* 中给出的态射。

推论 8.7. 设 $\mathbb{K}^*$曲面 X_1 和 X_2 分别由定义数据 (A_1, P_1)和 (A_2, P_2)导出。若存在等变同构 $X_1 \cong X_2$，则有

$$m_1^+ = m_2^+, \qquad \ell_1^+ = \ell_2^+, \qquad m_1^- = m_2^-, \qquad \ell_1^- = \ell_2^-.$$

特别地，对于每个有理射影 $\mathbb{K}^*$曲面 X，我们可以任选一个同构 $X \cong X(A,P)$，并得到定义良好的数

$$m_X^+ := m^+, \qquad \ell_X^+ := \ell^+, \qquad m_X^- := m^-, \qquad \ell_X^- := \ell^-.$$

我们讨论 Gorenstein 指数。回顾一下，正规簇 X 是 $\mathbb{Q}$-*Gorenstein*，如果典范除子$\mathcal{K}_X$ 的某个非零倍数是 Cartier。在这种情况下，点 $x \in X$ 的局部 ***Gorenstein*** 指数 是满足以下条件的最小非零整数 ι_x ： $\iota_x\mathcal{K}_X$ 在 x的某个邻域上是主除子。

命题 8.8。 考虑一个带有按斜率排序的 P的 $\mathbb{K}^*$-曲面 $X = X(A,P)$ 以及其（可能存在的）抛物型和双曲不动点 X。

(i) 抛物型不动点 $x_i^+ \in D_X^+ \cap \mathcal{A}_i$ 的局部 ***Gorenstein*** 指数为

$$\iota_i^+ \ := \ \iota(x_i^+) \ = \ \frac{l_{i1}}{\gcd(d_{i1}-1, l_{i1})}.$$

(ii) 抛物型不动点 $x_i^- \in D_X^- \cap \mathcal{A}_i$ 的局部 ***Gorenstein*** 指数为

$$\iota_i^- \ := \ \iota(x_i^-) \ = \ \frac{l_{in_i}}{\gcd(d_{in_i}+1, l_{in_i})}.$$

(iii) 双曲不动点 $x_{ij} \in D_X^{ij} \cap D_X^{ij+1}$ 的局部 ***Gorenstein*** 指数为

$$\iota_{ij} \ := \ \iota(x_{ij}) \ = \ \frac{l_{ij+1}d_{ij} - l_{ij}d_{ij+1}}{\gcd(l_{ij}-l_{ij+1}, d_{ij}-d_{ij+1})}.$$

证明。 根据总结 8.1， x_i^+ 、 x_i^- 、 x_{ij} 的一个邻域同构于具有如下生成矩阵的仿射环面曲面的环面不动点的一个邻域

$$P_i^+ \ = \ \begin{bmatrix} 0 & l_{i1} \\ 1 & d_{i1} \end{bmatrix}, \qquad P_i^- \ = \ \begin{bmatrix} l_{in_i} & 0 \\ d_{in_i} & -1 \end{bmatrix}, \qquad P_{ij} \ = \ \begin{bmatrix} l_{ij} & l_{ij+1} \\ d_{ij} & d_{ij+1} \end{bmatrix},$$

分别。因此，注释 3.7给出了局部戈伦斯坦指标所需的公式。□

命题 8.9。 考虑一个具有按斜率排序的 P的 $\mathbb{K}^*$-曲面 $X = X(A、 P)$。我们将线性形式 $u^\pm \in \mathbb{Q}^{r+1}$ 定义为

$$u^+ \ := \ \frac{1}{l^+m^+}\left(u_1^+, \ldots, u_r^+, l^+\ell^+\right), \qquad u^- \ := \ \frac{1}{l^-m^-}\left(u_1^-, \ldots, u_r^-, l^-\ell^-\right),$$

其中， $u_i^\pm \in \mathbb{Z}$ 由下式给出

$$u_i^+ \ = \ (r-1)d_{i1}\frac{l^+}{l_{i1}} + \sum_{j\neq i}(d_{j1}-d_{i1})\frac{l^+}{l_{j1}l_{i1}}, \qquad i = 1, \ldots, r,$$

$$u_i^- \ = \ (r-1)d_{in_i}\frac{l^-}{l_{in_i}} + \sum_{j\neq i}(d_{jn_j}-d_{in_i})\frac{l^-}{l_{jn_j}l_{in_i}}, \qquad i = 1, \ldots, r.$$

那么，线性形式 $u^\pm \in \mathbb{Q}^{r+1}$ 由满足以下性质的条件唯一确定

$$\langle u^+, v_{01}\rangle = 1-(r-1)l_{01}, \qquad \langle u^+, v_{i1}\rangle = 1, \ i = 1, \ldots, r,$$
$$\langle u^-, v_{0n_0}\rangle = 1-(r-1)l_{0n_0}, \qquad \langle u^-, v_{in_i}\rangle = 1, \ i = 1, \ldots, r.$$

如果存在椭圆不动点 $x^\pm \in X$，则局部 ***Gorenstein*** 指数满足以下性质。

(i) $\iota(x^+)$ 是使 $\iota(x^+)u^+ \in \mathbb{Z}^{r+1}$ 为本原的唯一正整数，并且其显式表达式为

$$\iota^+ := \iota(x^+) = \frac{l^+m^+}{\gcd(u_1^+,\dots,u_r^+,l^+\ell^+)}.$$

(ii) $\iota(x^-)$ 是使 $\iota(x^-)u^- \in \mathbb{Z}^{r+1}$ 为本原的唯一正整数，其显式表达式为

$$\iota^- := \iota(x^-) = -\frac{l^-m^-}{\gcd(u_1^-,\dots,u_r^-,l^-\ell^-)}.$$

证明。线性形式 $u^\pm$ 的刻画性质可由直接计算得出。在 $x^\pm$附近， $u^\pm$ 的刻画性质给出

$$l^+m^+\mathcal{K}_X^0 = \operatorname{div}(\chi^{l^+m^+u^+}), \qquad l^-m^-\mathcal{K}_X^0 = \operatorname{div}(\chi^{l^-m^-u^-}).$$

注意， $l^\pm m^\pm u^\pm$ 是一个整向量，因此 $l^\pm m^\pm$ 是局部 Gorenstein 指标 $\iota(x^\pm)$ 的倍数。其余断言随之得出。□

推论 8.10。对于任意 $\mathbb{K}^*$-曲面 $X = X(A,P)$，*Gorenstein* 指标 ι_X 等于与其（可能存在的）抛物型、双曲型和椭圆不动点相关联的数 $\iota_i^\pm$ 、ι_{ij}、$\iota^\pm$ 的最小公倍数。

我们刻画有理 $\mathbb{K}^*$-曲面的对数终端性。回顾一下，对于任意具有 Cartier 典范除子 $\mathcal{K}_X$ 的簇 X ，可考虑奇点消解 $\pi\colon X \to X'$ 以及相应的 分歧公式

$$\mathcal{K}'_X = \pi^*\mathcal{K}_X + \sum a(E)E.$$

此处， E 遍历例外素除子，且 $a(E) \in \mathbb{Q}$ 是 π的亏格差： $X' \to X$。如果对于每个 E， X 的奇点都满足 $a(E) > -1$ ，则称其为对数终端。

命题 8.11。考虑一个 $\mathbb{K}^*$-曲面 $X = X(A,P)$ 及其典范消解 $\pi\colon X'' \to X$。

(i) 如果存在椭圆不动点 $x^+ \in X$，则 $D^+_{X''}$ 的亏格差为

$$a(D^+_{X''}) = \frac{\ell^+}{m^+} - 1.$$

(ii) 如果存在椭圆不动点 $x^- \in X$，则 $D^-_{X''}$ 的亏格差为

$$a(D^-_{X''}) = -\frac{\ell^-}{m^-} - 1.$$

(iii) 如果 $\ell^\pm > 0$ 对 $x^\pm \in X$成立，则每个例外除子 $D \subseteq \pi^{-1}(x^\pm)$的亏格差都严格大于 -1。(iv) 每个例外除子 $D \subseteq X'' \setminus \pi^{-1}(x^\pm)$ 的亏格差都严格大于 -1。

特别地，所有不同于 $x^\pm$ 的点 $x \in X$ 都是对数终端的，并且 $x^\pm \in X$ 是对数终端的，当且仅当 $\ell^\pm > 0$。

证明。对于（i），我们在仿射开子集 $U^+ \subseteq X$ 上计算不一致数，该开子集包含所有在其闭包中具有 $x^+ \in X$ 的轨道。这意味着我们处于 $P = [v_{01},\dots,v_{r1}]$的情形。令 $u \in \mathbb{Q}^{r+1}$ 表示 $\mathcal{K}_X^0$。则

$$\langle u, v_{01}\rangle = -1 + (r-1)l_{01}, \qquad \langle u, v_{i1}\rangle = -1, \quad i = 1,\dots,r.$$

此外，对于 Gorenstein 指标 $\iota = \iota_X$，我们有 $\pi^*(\iota\mathcal{K}_X^0) = \operatorname{div}(\chi^{\iota u})$。将其代入分歧公式可得

$$-D_{X''}^+ = \langle u, v^+\rangle D_{X''}^+ + a(D_{X''}^+)D_{X''}^+ = -\frac{\ell^+}{m^+}D_{X''}^+ + a(D_{X''}^+)D_{X''}^+.$$

对 u 在 v^+ 处的计算是直接的。由此可知，不一致数$a(D_{X''}^+)$正如断言中所述。椭圆不动点 $x^- \in X$的情形也可类似处理。

我们证明 (iii) 和 (iv)。首先考虑 D 来自 P''的列 v，且 $v \in$锥(v^+, v_{i1})，其中 $i = 1, \ldots\ldots, r$。此时 $v = bv^+ + cv_{i1}$且b为正，$c \in \mathbb{Q}$。利用上文的线性形式 u，我们计算得

$$-D = \langle u, v\rangle D + a(D) = \langle u, bv^+ + cv_{i1}\rangle D + a(D) = -\left(b\frac{\ell^+}{m^+} + c\right)D + a(D)D.$$

由于 $\ell^+ > 0$，我们可以得出 $a(D) > -1$。若 $v \in$锥(v^+, v_{01})，则用典范除子$\mathcal{K}_X^1$进行同样的推理即可。此外，这些论证也适用于$v \in \sigma^-$ 和 $v \in \tau_{ij}$的情形。□

一个正整数元组 $(q_0, \ldots, q_r)$ 若满足 $q_0^{-1} + \cdots + q_r^{-1} > r - 1$，则称为柏拉图型 。如果 $q_0 \geq \cdots \geq q_r$ 成立，那么柏拉图性等价于 $q_3 = \cdots = q_r = 1$，且 (q_0, q_1, q_2) 是以下之一

$$(q_0, q_1, 1), \quad (q_0, 2, 2), \quad (5, 3, 2), \quad (4, 3, 2), \quad (3, 3, 2).$$

对于一个 $\mathbb{K}^*$-曲面 $X = X(A, P)$，若其按 P-斜率排序，则与（可能存在的）椭圆不动点相关联的椭圆元组 为： x^+ 对应 $(l_{01}, \ldots, l_{r1})$， x^-对应 $(l_{0n_0}, \ldots, l_{rn_r})$。

推论 8.12. 设 $X = X(A, P)$ 按 P斜率排序。那么，当且仅当其每个椭圆元组都是柏拉图型时， X 才是对数终端的。

对数终端曲面奇点已得到深入研究；经典参考文献见 [8] 。众所周知，它们恰好是商奇点 $\mathbb{K}^2/G$，其中 $G \subseteq \mathrm{GL}(2, \mathbb{K})$ 是一个有限子群，且任意这样的 $\mathbb{K}^2/G$ 都带有由数乘诱导的 $\mathbb{K}^*$-作用。因此，可以用定义矩阵来进行处理。

总结 8.13。 设 $\mathbb{K}^*$ 是一个有理仿射曲面 X ，且具有一个椭圆不动点 $x^\pm \in X$。那么存在一个有理函数 $f \in \mathbb{K}(X)$，满足

$$\operatorname{div}(f) = \iota_X\mathcal{K}_X,$$

其中 $\iota_X = \iota(x^\pm)$ 是 X 的戈伦斯坦指标。 X 的典范重数 ζ_X 是 f 关于 $\mathbb{K}^*$-作用的权，因此

$$f(t \cdot x) = t^\zeta f(x),$$

只要 f 在 x 处有定义；参见 [2, 定义 4.2]。对于 $X = X(A, P)$，利用命题 8.9 中的线性形式 $u^\pm$ ，可以写成

$$\iota_X\mathcal{K}_X = \operatorname{div}(\chi^{\iota_X u^\pm}).$$

注意到 $\mathbb{K}^*$ 在 $X \subseteq Z$ 上的作用是作用环面 $\mathbb{T}^{r+1}$ 的子群，其形式为 $t \mapsto (1, \ldots, 1, t)$，由此可见

$$\zeta_X = \iota_X\langle u^\pm, e_{r+1}\rangle = \iota_X\frac{\ell^\pm}{m^\pm}.$$

回顾一下，命题 3.8 处理的是环面奇点 $\mathbb{K}^2/G$的情形。在非环面情形下，我们有如下结论；另见 [2, 例 4.8]。

命题 8.14。 设 X 是一个带有椭圆不动点 $x \in X$的非环面对数终端仿射 $\mathbb{K}^*$-曲面。那么 $X \cong X(A,\ P)$，其中 P是以下情形之一。

Type $D_n^{\zeta,\iota}$*:*

$$\begin{bmatrix} -l_0 & 2 & 0 \\ -l_0 & 0 & 2 \\ \frac{\pm\iota-\zeta l_0}{\zeta} & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix}\zeta{=}1,2,\\ \gcd(\iota,\zeta l_0){=}\zeta.\end{matrix}$$

Type $E_6^{\zeta,\iota}$*:*

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ \frac{\pm\iota-5\zeta}{2\zeta} & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix}\zeta{=}1,3,\\ \gcd(\zeta\pm\iota,6\zeta){=}2\zeta.\end{matrix}$$

类型 E_7^{ι}:

$$\begin{bmatrix} -4 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \\ \frac{\pm\iota-10}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix}\zeta{=}1,\\ \gcd(2\pm\iota,12){=}3.\end{matrix}$$

类型 E_8^{ι}:

$$\begin{bmatrix} -5 & 3 & 0 \\ -5 & 0 & 2 \\ \frac{\pm\iota-25}{6} & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix}\zeta{=}1,\\ \gcd(5\pm\iota,30){=}6.\end{matrix}$$

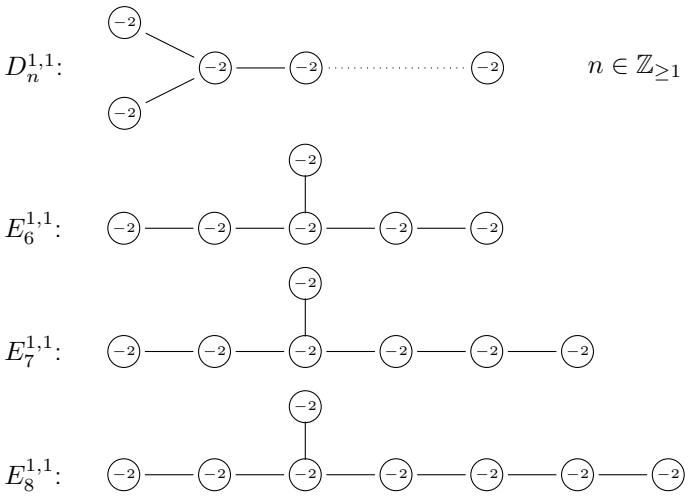
在所有情形下，ι 表示戈伦斯坦指标，ζ 表示 X的典范重数。此外，定义矩阵中的“$+\iota$”对应 $x = x^+$，“$-\iota$”对应 $x = x^-$。

证明。 不妨设 $X = X(A,\ P)$。由于 X是仿射的，$n_0 = \cdots = n_r = 1$成立。由于 X 是非环面型且对数终端的，$l_{i1} > 1$ 恰好出现三次。因此，我们得到如下形状的定义 3×3 矩阵 P

$$\begin{bmatrix} -l_0 & 2 & 0 \\ -l_0 & 0 & 2 \\ d_0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad l_0 \geq 2, \qquad \begin{bmatrix} -l_0 & 3 & 0 \\ -l_0 & 0 & 2 \\ d_0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad l_0 = 3, 4, 5$$

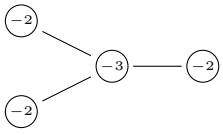
通过应用适当的容许操作并移除可消去的列。现在根据命题 8.9，计算这些矩阵对应的线性形式 $u^{\pm}$。由于 $\iota_X u^{\pm}$是本原的，ι_X整除 $\det(P)$，而 $\zeta_X m^{\pm} = \iota_X \ell^{\pm}$，故得出所述结论。□

例 8.15。 再次考察命题 8.14 中给出的 Gorenstein 指数为 ι 的对数终端椭圆不动点。根据总结 8.2 解消奇点，并借助总结 7.7 计算自交数，我们得到 $\iota = 1$ 类型为 D_n、E_6、E_7 和 E_8的经典解消图：

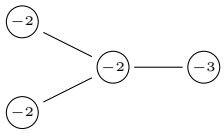


对于戈伦斯坦指标 $\iota = 2$，类型 D 和 E 均不可能出现。在 Gorenstein 指数 $\iota = 3$，4 的情况下，最简单的例子是

$$D_4^{1,3}: \qquad P = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



$D_4^{2,4}$: $P = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$



9. 对数德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$曲面

本节第一部分讨论德尔佩佐性质带来的几何后果。我们证明，每个德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$ 曲面都自然嵌入某个托里克 Fano 品种中；每个非环面型德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$ 曲面至多有一条抛物型不动点曲线，且至多有一个非对数终端奇点。作为应用，我们根据对数德尔佩佐曲面的皮卡数给出其奇点数量的上界；参见命题 9.8。第二部分则介绍并讨论后续分类所需的核心组合工具——反典范复形。

我们进入第一部分。回顾一下，Fano 簇是指具有充足反典范除子的正规射影品种。因此，德尔佩佐曲面恰好是二维 Fano 品种。下面的观察揭示了德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$曲面与环面 Fano 品种之间的密切联系。

命题 9.1。 考虑 $X = X(A, P)$ 以及构造 *5.2* 中的环面嵌入 $X \subseteq Z$。若 X 是德尔佩佐曲面，则有以下结论。

(i) Z 的反典范类 $w = -w_Z \in K$ 给出一个法诺环面完备化$X \subseteq Z \subseteq Z(w)$。

(ii) 来自 ***(i)*** 的 $Z(w)$ 的定义扇 $\Sigma(w)$ 由凸包 $A := \operatorname{conv}(v_1, \ldots, v_r)$ 在 P的各列上张成。

证明。 根据总结 7.1，关系次数 μ 属于 $\mathrm{Mov}(Z) = \mathrm{SAmple}(X)$。 X 的反典范除子类 $-w_X$ 与 Z 的反典范除子类 $-w_Z$ 之间满足关系

$$-w_X = -w_Z - (r-1)\mu.$$

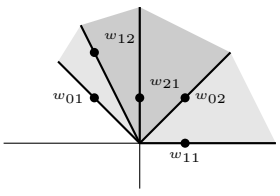
由于 $-w_X$ 是充足的，我们得出 $-w_Z$ 位于移动锥 $\mathrm{Mov}(Z)$的内部。因此，总结 7.3 给出了所需的完备化。□

给定 $X = X(A, P)$，命题 9.1 中的法诺环面完备化 $Z \subseteq Z(w)$由 Z 的 Cox 环唯一确定，因而也由 P唯一确定。尽管总存在 $\mathbb{Q}$-阶乘性环面完备化 $Z \subseteq Z'$，但一般而言，法诺环面完备化 $Z \subseteq Z(w)$未必是 $\mathbb{Q}$-阶乘性的。下面给出一个具体例子。

例 9.2。 考虑射影 $\mathbb{K}^*$-曲面 $X = X(A, P)$及其对应于定义矩阵的环面嵌入 $X \subseteq Z$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

那么 X 是一个 Gorenstein 德尔佩佐曲面，在 $\mathrm{Cl}(X) = \mathbb{Z}^2 = \mathrm{Cl}(Z)$ 中，次数 $w_{ij} = \deg(T_{ij})$的位置如下。



X和 Z的反典范除子类分别为 $-w_X = (0,\ 3)$ 和 $-w_Z = (0,\ 5)$。其中 $w := -w_z$ 扇 $\Sigma(w)$ 的极大锥如下:

$$\begin{gathered}\operatorname{cone}(v_{01}, v_{02}, v_{21}),\\ \operatorname{cone}(v_{01}, v_{11}, v_{21}),\ \operatorname{cone}(v_{01}, v_{02}, v_{11}, v_{12}),\ \operatorname{cone}(v_{02}, v_{12}, v_{21}),\\ \operatorname{cone}(v_{11}, v_{12}, v_{21}).\end{gathered}$$

特别地，法诺环面完备化 $Z \subseteq Z(w)$ 不是 $\mathbb{Q}$-阶乘性的。通过在锥 $\operatorname{cone}(v_{01},\ v_{02},\ v_{11},\ v_{12})$ 中插入一条对角线来细化扇 $\Sigma(w)$

$$\operatorname{cone}(v_{01}, v_{12}), \qquad \operatorname{cone}(v_{11}, v_{02})$$

得到两个 $\mathbb{Q}$-阶乘性的托里克完备化 $Z \subseteq Z'$ 和 $Z \subseteq Z''$，它们分别由次级扇中的成员 $\operatorname{cone}(w_{02},\ w_{21})$ 和 $\operatorname{cone}(w_{21},\ w_{12})$ 给出。

在继续之前，我们给出有理 $\mathbb{K}^*$-曲面 $X = X(A,\ P)$ 的定义矩阵 P的条目所满足的重要不等式。第一组不等式源于斜率有序性和不可冗余性；请注意，在那里我们并未使用德尔佩佐性质。

命题 9.3。设 P 是构造 *5.2* 中的定义矩阵。假设 P 具有斜率有序性、不可冗余性，并且满足 $r \geq 2$。则以下结论成立。

(i) $\lceil m_{ij} \rceil - \frac{l_{ij}-1}{l_{ij}} \leq m_{ij} \leq \lfloor m_{ij} \rfloor + \frac{l_{ij}-1}{l_{ij}}$.
(ii) $\lceil m_{i1} \rceil - \lfloor m_{in_i} \rfloor \geq 1$.
(iii) $r + 1 \leq (m^+ - \ell^+) - (m^- + \ell^-) + 4$.
(iv) $m^+ \geq \ell^+$ *or* $m^- \leq -\ell^-$.

证明。第一个断言显然。对于第二个断言，注意到由于斜率有序性，$m_{i1} \geq m_{in_i}$成立。此外

$$\lceil m_{i1} \rceil = \lfloor m_{in_i} \rfloor \implies m_{i1} = m_{in_i} \in \mathbb{Z} \implies n_i = 1,\ l_{i1} = 1.$$

因此，$\lceil m_{i1} \rceil = \lfloor m_{in_i} \rfloor$ 不可能成立，因为 P与 $r \geq 2$不可约冗余。现在由前两个断言可推出第三个断言:

$$\begin{aligned} r+1 &\leq \sum_{i=0}^{r} \lceil m_{i1} \rceil - \lfloor m_{in_i} \rfloor \\ &\leq \sum_{i=0}^{r} m_{i1} + \frac{l_{i1}-1}{l_{i1}} - \sum_{i=0}^{r} m_{in_i} - \frac{l_{in_i}-1}{l_{in_i}} \\ &= (m^+ - \ell^+) - (m^- + \ell^-) + 4. \end{aligned}$$

对于第四个断言，假设 $m^+ < \ell^+$ 和 $m^- > -\ell^-$。那么（iii）给出估计

$$r + 1 \leq (m^+ - \ell^+) - (m^- + \ell^-) + 4 < 4.$$

因此 $r + 1 = 3$。于是，利用（ii），我们得到

$$3 \leq \sum_{i=0}^{2} \lceil m_{i1} \rceil - \lfloor m_{in_i} \rfloor = \sum_{i=0}^{2} \lceil m_{i1} \rceil - \sum_{i=0}^{2} \lfloor m_{in_i} \rfloor.$$

这与随后的两个估计相矛盾，表明右侧至多等于二。

$$\begin{aligned} 2 &> 2 + m^+ - \ell^+ = \sum_{i=0}^{2} m_{i1} + \frac{l_{i1}-1}{l_{i1}} \geq \sum_{i=0}^{2} \lceil m_{i1} \rceil, \\ 2 &> 2 - m^- - \ell^- = -\sum_{i=0}^{2} m_{in_i} - \frac{l_{in_i}-1}{l_{in_i}} \geq -\sum_{i=0}^{2} \lfloor m_{in_i} \rfloor. \end{aligned}$$

□

第二组不等式源于通过 Kleiman 丰沛性判据刻画德尔佩佐性质，该判据告诉我们，一个除子是丰沛的，当且仅当它与任意有效曲线的交数均为正。

命题 9.4. 射影 $\mathbb{K}^*$曲面 $X = X(A, P)$ 是德尔佩佐曲面，当且仅当满足以下不等式。

- $\ell^+ > m^+$ 如果存在 $D_X^+ \subseteq X$,
- $\ell_{ij-1}m_{ij-1} > \ell_{ij}m_{ij}$, $i = 0, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, n_i$,
- $\ell^- > -m^-$ 如果存在 $D_X^- \subseteq X$。

证明。根据 Kleiman 判据，X 是德尔佩佐曲面，当且仅当对于 X 上的所有有效曲线 D，$-\mathcal{K}_X \cdot D > 0$。后者成立，当且仅当 $-\mathcal{K}_X$ 与所有 D_X^{ij} 和 $D_X^{\pm}$ 的交数均为正。根据命题 7.8，后者等价于断言中的不等式。□

现在我们准备证明此前关于德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$-曲面上可能出现的抛物型不动点和椭圆不动点的陈述。

命题 9.5。设 X 是一个非环面型有理德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$-曲面。那么 X至多拥有一条抛物型不动点曲线。

证明。不妨设 $X = X(A, P)$ 具有按斜率排序且不可约冗余的 P 和 $r \geq 2$。假设存在 D_X^+ 和 D_X^-。那么由命题 9.4 得到 $\ell^+ > m^+$ 和$\ell^- > -m^-$。这与命题 9.3 (iv) 矛盾。□

让我们探讨德尔佩佐性质对有理射影 $\mathbb{K}^*$-曲面可能出现的奇点所产生的影响。回顾一下，至多椭圆不动点可能是非对数终端的，因此任何有理 $\mathbb{K}^*$-曲面的非对数终端奇点数至多为两个。

命题 9.6。设 X 是一个有理德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$-曲面。则 X 至多有一个非对数终端奇点。

证明。只需处理 X 为非环面型且带有 $x^+ \in X$ 和 $x^- \in X$ 的情形。此外，不妨设 $X = X(A, P)$，其中 P 按斜率排序且不可约冗余，并且有 $r \geq 2$。对于任意 i，命题 9.4 给出

$$\frac{\ell^+}{m^+} = \ell_{i0}m_{i_0} > \ldots > \ell_{in_i}m_{in_i} = \frac{\ell^-}{m^-}.$$

现在，如果 $\ell^+ > 0$，则至多 x^- 个可以是非对数终端的，我们便得到结论。如果 $\ell^+ \leq 0$，那么 $m^- < 0$，且上述严格不等式意味着 $\ell^- > 0$。因此，至多 x^+ 个可以是非对数终端。□

下面的例子给出了一系列无穷多个有理德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$-曲面，它们的 Gorenstein 指标均为二，并且每个都带有一个非对数终端奇点。它还表明，固定 Gorenstein 指标的德尔佩佐曲面的类并非有限。

例 9.7. 考虑由以下定义数据给出的射影 $\mathbb{K}^*$-曲面 $X_l = X(A, P_l)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} -l & 2 & 0 & 0 \\ -l & 0 & 6 & 1 \\ -\frac{l+1}{2} & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad 5 \leq l \in 2\mathbb{Z} + 1.$$

那么，X_l 是一个 Gorenstein 指数为 2 的德尔佩佐曲面，x^+ 是其唯一的奇点；根据推论 8.12，它不是对数终端的。

作为命题 9.5 和 9.6 的应用，我们得到了关于奇点数量的界。回顾一下，对于任何皮卡数为 1 的对数德尔佩佐曲面，Keel/McKernan [26]和 Belousov [6]的结果告诉我们，奇点的数量严格不超过 4 个。在存在 $\mathbb{K}^*$-作用的情况下，我们可以将这一结论扩展到更高的皮卡数。

命题 9.8。设 X 是一个皮卡数为 $\rho(X)$的德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$-曲面。那么， X 的奇点数 $s(X)$ 满足

$$s(X) \leq \begin{cases} \rho(X)+2, & \text{如果 } X \text{ 没有抛物型不动点} \\ 2\rho(X)+2 & \text{如果 } X \text{ 有抛物型不动点} \end{cases}$$

（）；如果存在抛物型不动点且其为对数终端。

引理 9.9。考虑一个非环面型 $X = X(A, P)$，其中 P不可约冗余，且有一个对数终端椭圆不动点。那么， X 的臂数 $r+1$ 有上界

$$r+1 \leq \rho(X)+3-m.$$

此外，根据 X中源与汇的可能构型， X 的奇点数 $s(X)$ 有如下界：

$$\text{(e-e): } s(X) \leq \rho(X)+2, \qquad \text{(e-p), (p-e): } s(X) \leq r+1+\rho(X) \leq 2\rho(X)+2.$$

证明。由于 X 是 $\mathbb{Q}$-阶乘性的， $\rho(X)$与 $\mathrm{Cl}(X)$ 的秩一致，因此等于$n+m-r-1$；参见总结 6.1。由于 P不可约冗余，且 X 有一个对数终端椭圆不动点，根据推论 8.12，我们可以推知至少有 $r-2$条臂的长度大于或等于 2。因此

$$\rho(X) = m + \sum_{i=0}^{r}(n_i - 1) \geq m + r + 1 - 3.$$

这就证明了第一个结论。为了估计奇点的数量，我们利用每个奇点都是一个不动点这一事实。注意，无论如何， $X = X(A, P)$ 的双曲型不动点数量由下式给出

$$(n_0 - 1) + \cdots + (n_r - 1).$$

因此，在 (e-e) 的情况下，总共有 $\rho(X)+2$ 个不动点。对于 (e-p) 和 (p-e) 的情况，回顾总结 8.1 可知，奇异抛物型不动点至多有 $r+1$ 个。此外，我们有 $\rho(X)-1$ 个双曲型不动点。□

命题 *9.8* 的证明。首先注意，对于射影环面曲面 X，其奇点数量至多等于其不动点数量，因此不超过 $\rho(X)+2$。如果 X 是非环面型，那么命题 9.5 和 9.6 保证，在所讨论的两种情况中，无论哪一种都存在一个对数终端椭圆不动点。因此，引理 9.9 给出了所述结论。□

注 9.10. 对于具有两条抛物型不动点曲线，或具有一个非对数终端椭圆不动点和一条抛物型不动点曲线的有理 $\mathbb{K}^*$-曲面，我们不能指望根据皮卡数来限定奇点的数量。举例来说，取 $n_0 = \cdots = n_r = 1$ 并考虑

$$l_{01} = \cdots = l_{r1} = 2, \qquad d_{01} = -1, \qquad d_{11} = \cdots = d_{r1} = 1.$$

这给出了矩阵 $P = [v_{01}, \ldots, v_{r+1}, v^+, v^-]$ 和 $P = [v_{01}, \ldots, v_{r+1}, v^-]$ 以及相应的 $X = X(A, P)$。在第一种情况下，我们有 $\rho(X) = 2$ 和 $2r+2$ 个奇点，$r+1$ 位于每条不动点曲线上。在第二种情况下，我们有 $\rho(X) = 1$ 和 $r+2$个奇点， $r+1$ 位于不动点曲线和椭圆不动点上。

我们介绍分类的主要工具——反典范复形。该复形最初由 [5]引入，用于研究带有二维环面作用的终端法诺三维簇；有关进一步进展，另请参阅 [20, 22] 。与 [5], 不同，我们给出了该复形的一种显式构造，并使其适用于曲面情形。

定义 9.11. 我们称 $X = X(A, P)$的定义矩阵 P为*LDP* 矩阵，如果 X 是一个至多具有对数终端奇点的德尔佩佐曲面。

构造 9.12。 设 P 为一个 LDP 矩阵。定义向量 $\tilde{v}^+ := \mathscr{d}^+ v^+$ 和$\tilde{v}^- := \mathscr{d}^- v^-$ ，它们属于 $\mathbb{R}^{r+1}$ ，并满足

$$\mathscr{d}^+ := \frac{m^+}{\ell^+}, \qquad \mathscr{d}^- := \frac{m^-}{\ell^-}.$$

我们将二维单纯复形$\mathcal{A}_P$与 P联系起来，它位于 $\mathbb{R}^{r+1}$ 中，单元为

$$\kappa_{ij} \ := \ \operatorname{conv}(0, v_{ij}, v_{ij+1}), \qquad i = 0, \ldots, r, \ j = 1, \ldots, n_i - 1$$

根据可能的情形 (p-e)、(e-p) 和 (e-e)，对于 $i = 0, \ldots, r$，相应的单纯形为

$$\text{(p-e)} \quad \kappa_i^+ := \operatorname{conv}(0, v^+, v_{i1}), \quad \kappa_i^- := \operatorname{conv}(0, \tilde{v}^-, v_{in_i}),$$

$$\text{(e-p)} \quad \kappa_i^+ := \operatorname{conv}(0, \tilde{v}^+, v_{i1}), \quad \kappa_i^- := \operatorname{conv}(0, v^-, v_{in_i}),$$

$$\text{(e-e)} \quad \kappa_i^+ := \operatorname{conv}(0, \tilde{v}^+, v_{i1}), \quad \kappa_i^- := \operatorname{conv}(0, \tilde{v}^-, v_{in_i}).$$

注意，单纯复形$\mathcal{A}_P$ 的支撑是热带簇 $\operatorname{trop}(X) \subseteq \mathbb{Q}^{r+1}$ 的子集。

注 9.13。 推论 8.7 确保，对于任意对数德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$-曲面 $X = X(A, P)$，我们都可以依照构造 9.12 设定:

$$\mathscr{d}_X^+ \ := \ \frac{m_X^+}{\ell_X^+}, \qquad \mathscr{d}_X^- \ := \ \frac{m_X^-}{\ell_X^-}.$$

此外，利用注记 8.5 中曲面 X' 的性质，我们得到以下以交数表示的描述。

$$\mathscr{d}_X^+ \ = \ -\frac{D_{X'}^+ \cdot D_{X'}^+}{D_{X'}^+ \cdot (D_{X'}^+ - \mathcal{K}_{X'}^0)}, \qquad \mathscr{d}_X^- \ = \ -\frac{D_{X'}^- \cdot D_{X'}^-}{D_{X'}^- \cdot (D_{X'}^- + \mathcal{K}_{X'}^0)}.$$

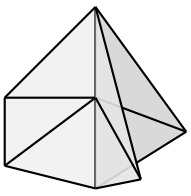
注记 9.14。 考虑一个德尔佩佐曲面 $X = X(A, \ P)$，其中 $r = 1$。那么 X 是环面的，因此是对数终端的，并且$\mathcal{A}_P$ 的支撑等于 X 的 LDP 多边形。

定义 9.15。 设 P 为一个 LDP 矩阵， $X = X(A, \ P)$ 为相应的$\mathbb{K}^*$-曲面。考虑与 P 关联的单纯复形$\mathcal{A}_P$。

(i) 内部 $\mathcal{A}_P$ 是相对于 $\operatorname{trop}(X)$ 而言其支撑的相对内部$\mathcal{A}_P^\circ$。 (ii) 外部顶点 $\mathcal{A}_P$ 是复形 $\mathcal{A}_P$ 中除原点以外的顶点。 (iii) 给定 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，如果 $\mathcal{A}_P^\circ \cap k\mathbb{Z}^{r+1} = \{0\}$，则称复形$\mathcal{A}_P$ 为几乎 k-空心的 。

例 9.16. 再来看例 8.3 中的 $\mathbb{K}^*$-曲面 $X = X(A, P)$。定义矩阵 P 和复形 $\mathcal{A}_P$ 如下:

$$P = \begin{bmatrix} -3 & -5 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & -8 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



$\mathcal{A}_P$

$\mathcal{A}_P$ 的外部顶点是 P 的列 $v_{01}, v_{02}, v_{11}, v_{21}, v^+$ 以及向量 $\tilde{v}^- = (0,0,3)$。

我们汇总了$\mathcal{A}_P$ 的性质，尤其证明它与 [5] 中的反典范复形一致。此外，我们将看到，$\mathbb{K}^*$ 曲面 $X(A,P)$ 的复形 $\mathcal{A}_P$ 自然推广了由扇所确定的托里克德尔佩佐曲面的 LDP 多边形。

定理 9.17. 考虑一个 *LDP* 矩阵 P、其关联的单纯复形 $\mathcal{A}_P$，以及射影 $\mathbb{K}^*$ 曲面 $X = X(A,P)$。

(i) 根据源与汇可能的构型，复形 $\mathcal{A}_P$ 的外部顶点为

$$\begin{aligned} &\text{(e-e)} \quad v_{ij} \text{ for } i = 0,\dots,r, j = 1,\dots,n_i \text{ and } \tilde{v}^+, \tilde{v}^-, \\ &\text{(e-p)} \quad v_{ij} \text{ for } i = 0,\dots,r, j = 1,\dots,n_i \text{ and } \tilde{v}^+, v^-, \\ &\text{(p-e)} \quad v_{ij} \text{ for } i = 0,\dots r, \ j = 1,\dots,n_i \text{ and } v^+, \tilde{v}^-. \end{aligned}$$

(ii) 单纯复形 $\mathcal{A}_P$ 等于对数德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$ 曲面 $X = X(A,P)$ 的反典范复形。

(iii) 对于所有 $i = 0,\dots,r$，$\mathcal{A}_P \cap \lambda_i$ 与第 i 个臂 $\lambda_i \subseteq \mathrm{trop}(X)$ 的交集都是凸多边形。关于可能的外部顶点 $\tilde{v}^{\pm}$，我们有

$$\tilde{v}^+ \notin \mathrm{conv}(0, v_{01}, \dots, v_{r1}), \qquad \tilde{v}^- \notin \mathrm{conv}(0, v_{0n_0}, \dots, v_{rn_r}).$$

(iv) 沿例外除子 $E_\varrho \subseteq X''$ 的典范消解 $X'' \to X$ 的不一致数为

$$a(E_\varrho) \ = \ \frac{\|v_\varrho\|}{\|\tilde{v}_\varrho\|} - 1,$$

其中 $v_\varrho \in \varrho$ 是本原向量，$\tilde{v}_\varrho \in \varrho$ 是 ϱ 与边界 $\partial\mathcal{A}_P$的交点。

(v) 曲面 X 至多具有 $1/k$-对数典范奇点，当且仅当反典范复形 $\mathcal{A}_X$ 近乎 k-空洞。

证明。断言 (i)、(ii) 以及 (iv)、(v) 由 [5, 定理 1.4、命题 2.3、命题 3.7 和推论 4.10] 得出。我们证明 (iii)。边界 $\mathcal{A}_P$与面 $\mathrm{conv}(v_{01},\dots,v_{r1})$ 的交点中，位于经过 v^+ 的射线上的点为

$$\tilde{v}^+ \ = \ \frac{m^+}{\ell^+} v^+, \qquad \frac{m^+}{\ell^+ + r - 1} v^+.$$

由于 X 是对数终端的，我们有 $\ell^+ > 0$。结合 $m^+ > 0$，这便得到了存在椭圆不动点 x^+时的断言。椭圆不动点 x^- 的情形类似。□

作为一项应用，我们可以给出 $r+1$ 个 $1/k$-对数典范 $\mathbb{K}^*$曲面 X 的定义矩阵 P 的行数上界 A，P。正如我们稍后将在例 12.11 中看到的，这个上界甚至是尖锐的。从更几何的角度来说，该结论如下。

命题 9.18。对于任意非环面型有理 $1/k$-对数典范德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$ 曲面 X，$\pi : X \dashrightarrow \mathbb{P}_1$ 的临界值个数 $r+1$ 有如下界。

(i) 若 X 有两个椭圆不动点，则 $r+1 \le 4k$ 成立。(ii) 若 X 有一条抛物型不动点曲线，则 $r+1 \le 2k+1$ 成立。

证明。我们不妨设 $X = X(A,P)$，其中斜率按顺序排列，且 P和$r \ge 2$ 不可冗余。根据定理 9.17，我们有 $d^+ \le k$ 和 $d^- \ge -k$。由此得到

$$m^+ \ \le \ k\ell^+, \qquad m^- \ \ge \ -k\ell^-.$$

假设 X 有两个椭圆不动点。结合上述估计、引理 9.3 (iii)，并使用 $\ell^+ + \ell^- \leq 4$ 以及 $k \geq 1$，可得

$$r+1 \;\leq\; (m^+ - \ell^+) - (m^- + \ell^-) + 4 \;\leq\; (k-1)(\ell^+ + \ell^-) + 4 \;\leq\; 4k.$$

假设 X 有一条抛物型不动点曲线，记为 D_X^+。那么 $-\mathcal{K}_X \cdot D_X^+ > 0$蕴含 $m^+ < \ell^+$。与之前类似，我们得出

$$r+1 \;\leq\; (m^+ - \ell^+) - (m^- + \ell^-) + 4 \;<\; (k-1)\ell^- + 4 \;\leq\; 2k+2.$$

□

10. 收缩与组合极小性

我们讨论 $\mathbb{K}^*$-曲面的收缩与组合极小性。特别地，命题 10.14 根据定义矩阵对收缩作出了明确描述，命题 10.16 阐述了收缩对反典范复形的影响，而命题 10.21 则介绍了组合极小的 $\mathbb{K}^*$-曲面的几何性质。

定义 10.1. 我们称适当态射 $\psi\colon X \to Y$ 为一种收缩，其中 $X \to Y$ 是正规簇，并且对于某个补集在 Y中余维至少为二的开子集 $V \subseteq Y$， $\psi\colon \psi^{-1}(V) \to V$是同构。

请注意，我们的收缩通常称为“双有理收缩”。下面汇总收缩的一些基本性质。回忆一下，对于任意正规簇之间的适当态射$\psi\colon\ X \to Y$，我们有如下推前同态

$$\psi_*\colon \mathrm{WDiv}(X) \;\to\; \mathrm{WDiv}(Y), \qquad\qquad \psi_*\colon \mathrm{Cl}(X) \;\to\; \mathrm{Cl}(Y),$$

定义为：将素除子 $D \subseteq X$ 映为 $\psi(D) \subseteq Y$，若 $\psi(D)$是 Y 中的素除子；否则映为零。

命题 10.2。 设 $\psi\colon X \to Y$ 是一个收缩，并考虑相应的魏尔除子及除子类上的推前同态。

(i) 若 K_X 是 X上的典范除子，则其推前 $\psi_*(K_X)$ 是 Y上的典范除子。

(ii) 同态 $\psi_*\colon \mathrm{WDiv}(X) \to \mathrm{WDiv}(Y)$ 和 $\psi_*\colon \mathrm{Cl}(X) \to \mathrm{Cl}(Y)$都是满射。(iii)对于 $\mathrm{Cl}_{\mathbb{Q}}(X)$ 和$\mathrm{Cl}_{\mathbb{Q}}(Y)$ 中的有效与可动除子类锥，我们有

$$\psi_*(\mathrm{Eff}(X)) = \mathrm{Eff}(Y), \qquad \psi_*(\mathrm{Mov}(X)) = \mathrm{Mov}(Y).$$

证明。 取任意开子集 $V \subseteq Y$，其在 Y中的补集余维至少为二，并且 $\psi\colon \psi^{-1}(V) \to V$是一个同构。于是， X 上的典范（主、有效、可动）除子 D 限制到 $\psi^{-1}(V) \cong V$ 上后，仍为典范（主、有效、可动）除子，从而在 Y上给出典范（主、有效、可动）除子 $\psi_*(D)$。□

若收缩 $\psi\colon X \to Y$ 将素除子 $E \subseteq X$ 映到 Y中一个余维至少为二的子集上，则称 ψ 收缩 E，并称 E 为 ψ的一个例外除子 。此外，正规簇 X 上的素除子若被某个收缩 $X \to Y$收缩，则称其为可收缩的。

注 10.3。 对于任意收缩 $\psi\colon X \to Y$，存在一个有限（可能为空）的例外除子集合 E_1、……、 $E_q \subseteq X$。

注 10.4. 设 X、 Y 为正规完备簇，并设 $\psi\colon X \to Y$ 是一个收缩，其例外除子为 E_1、……、 E_q。

(i) 若 X 带有连通代数群 G 的态射作用，则 E_1、.....、 $E_q \subseteq X$ 都是不变的，并且 Y 具有一个态射 G 作用，使得 ψ: $X \to Y$ 等变，参见 [7, 命题 I.1]。

(ii) 假设 X 的 Cox 环$\mathcal{R}(X)$ 是有限生成的，并令 $f_i \in \mathcal{R}(X)$ 表示 E_i的典范截面。那么我们有一个同构

$$\mathcal{R}(X)/\langle 1 - f_i;\ i = 1, \ldots, q\rangle \ \cong\ \mathcal{R}(Y)$$

它由将次数为 $[D]$的齐次元素 $f \in \mathcal{R}(X)$ 映至次数为 $[\psi_* D]$ 的齐次元素 $\psi_* f \in \mathcal{R}(Y)$ 所诱导，见 [3, 命题 4.1.3.1]。

我们着重讨论曲面情形。先给出一些一般性观察，然后专门讨论有理射影 $\mathbb{K}^*$-曲面。

注 10.5。 设 ψ: $X \to Y$ 是曲面之间的一个收缩。那么例外除子 $E_1, \ldots, E_q \subseteq X$ 映至点 $y_1, \ldots, y_q \in Y$，而 $X \setminus (E_1 \cup \ldots \cup E_q)$ 同构地映至 $Y \setminus \{y_1, .., y_q\}$。

命题 10.6. 设 ψ: $X \to Y$ 是曲面之间的一个收缩，其中 X 的 *Cox* 环有限生成。则 Y 的 *Cox* 环也有限生成，并且有

$$\psi_*(\mathrm{SAmple}(X)) = \mathrm{SAmple}(Y), \qquad \psi_*(\mathrm{Ample}(X)) = \mathrm{Ample}(Y)$$

半丰沛除子类锥和丰沛除子类锥之间的关系。此外，若 X 是德尔佩佐曲面，则 Y 也是德尔佩佐曲面。

证明。 根据注 10.4 (ii)， Y 的 Cox 环也有限生成。由 [3, 定理 4.3.3.5], 可知，$\mathbb{Q}(X)$ 中以及 $\mathbb{Q}(Y)$ 中的可动锥与半丰沛锥重合。因此，第一个显示的等式由命题 10.2 (iii) 得出。此外，相应的丰沛锥是半丰沛锥的相对内部，见 [3, 命题 3.3.2.9]。因此，第二个显示的等式由第一个等式以及任意线性映射都将一个锥的内部映到其像锥的内部这一事实得出。对于补充结论，我们利用命题 10.2 (i) 得出 Y 有一个充足反典范除子。□

推论 10.7。 托里克德尔佩佐曲面的任何收缩仍是托里克德尔佩佐曲面，而德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$-曲面的任何收缩都是德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$-曲面。

证明。 注 10.4 表明，收缩后的曲面继承了所需的环面作用，而命题 10.6 确保该曲面是德尔佩佐曲面。□

命题 10.8。 对于 $\mathbb{K}^*$-曲面的收缩 $X \to Y$，每个例外除子 $E \subseteq X$ 要么是不动点曲线，要么是包含双曲不动点的轨道闭包。

证明。 否则，由于 E 是不变的，它就是一个包含源中的点和汇中的点的轨道闭包。因此， Y 的源和汇会在 E的像点处相交，这是不可能的。□

现在我们根据定义数据研究 $\mathbb{K}^*$-曲面的收缩。注意，定义矩阵 P 取 $r = 1$ 这一特殊情形，对环面曲面的收缩作了完整讨论，另见注 5.4。

定义 10.9。 设 P 是构造 5.2 中的定义矩阵。如果 P 的某一列位于由其余列生成的锥中，我们就称该列可收缩 。

注 10.10。 考虑一个按斜率排序的定义矩阵 P。列 v 可收缩，当且仅当满足以下条件之一:

(i) $n_i \geq 2, v = v_{i1}$ 和 $m^+ - m_{i1} + m_{i2} > 0$, (ii) $v = v_{ij}$ 和 $1 < j < n_i$, (iii) $n_i \geq 2, v = v_{in_i}$ 和 $m^- - m_{in_i} + m_{in_i - 1} < 0$,

(iv) $v = v^+$ 和 $m^+ > 0$,

(v) $v = v^-$ 和 $m^- > 0$。

构造 10.11。设有一个射影 $\mathbb{K}^*$-曲面 $X_1 = X(A, P_1)$，并假设 P_1 具有一个可收缩列 v。那么，从 P_1 中删除 v，即可得到射影 $\mathbb{K}^*$-曲面 $X_2 = X(A, P_2)$ 的定义矩阵 P_2。此外，我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \longrightarrow & Z_1 \\ {\scriptstyle \psi_v}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi_v} \\ X_2 & \longrightarrow & Z_2 \end{array}$$

其中涉及 $\mathbb{K}^*$-曲面 X_i 及其环境托里克簇 Z_i。向下的映射收缩与 P_1中被收缩列 v 相对应的素除子 $D_{X_1} \subseteq X_1$ 和 $D_{Z_1} \subseteq Z_1$。特别地，向下的映射是非平凡收缩。

注记 10.12。考虑一个 $\mathbb{K}^*$-曲面 $X = X(A, P)$，其中矩阵 P按斜率排序。

(i) 假设存在一条曲线 $D_X^+ \subseteq X$。那么，对于每个满足$n_i \geq 2$的 $i = 0, \ldots, r$，每个满足 $j = 1, \ldots, n_{i-1}$的列 v_{ij}都是可收缩的。(ii) 假设存在一条曲线 $D_X^- \subseteq X$。那么，对于每个满足$n_i \geq 2$的 $i = 0, \ldots, r$，每个满足 $j = 2, \ldots, n_i$的列 v_{ij}都是可收缩的。(iii) 假设 X有两个椭圆不动点。那么，对于每个满足 $n_i \geq 3$的 $i = 0, \ldots, r$，每个满足 $j = 2, \ldots, n_{i-1}$的列 v_{ij}都是可收缩的。特别地，我们得到一个收缩 $X \to X'$ 到一个由定义数据 $(A,\ P')$ 给出的 $\mathbb{K}^*$-曲面 X'，使得

(iv) 若 X 有两个椭圆不动点，则对于 $i = 0,\ \ldots\ldots,\ r$，我们有 $n_i' \leq 2$；

(v) 若 X 有一条抛物型不动点曲线，则对于 $i = 0,\ \ldots\ldots,\ r$，我们有 $n_i' = 1$。

命题 10.13。设 $X = X(A, P)$ 是射影的，v 是 P的一列，$D \subseteq X$是相应的素除子。则以下陈述等价。

(i) 列 v 是可收缩的。(ii) 曲线 $D \subseteq X$ 是可收缩的。(iii) 我们有 $D^2 < 0$。(iv) 除子 D 不可动。

证明。若 (i) 成立，则我们通过构造 10.11 收缩 D。(ii) 推出 (iii) 以及 (iii) 推出 (iv) 都是曲面几何中的标准结果。若 D不可动，则在 $\mathrm{Cl}_{\mathbb{Q}}(X)$ 中，经过 $[D]$ 的射线与由其余 w_{ij} 和 $w^{\pm}$ 生成的锥相交于原点。根据 [3, 引理 2.2.3，2], 列 v位于由 P 的其余各列生成的锥的内部，因此是可收缩的。□

命题 10.14。任意有理射影 $\mathbb{K}^*$ 曲面的收缩 $X \to Y$ 都可分解为 $X \cong X_0 \to \ldots \to X_q \cong Y$，其中 $X_i \to X_{i+1}$ 如构造 *10.11* 所述。

证明。不妨设 $X = X_0$ 与 X_0 由定义数据（A，P_0）产生。正如命题 10.8 中所述，例外除子 $E_1, \ldots, E_q \subseteq X$取自包含双曲不动点的 $D_X^{\pm}$ 和 D_X^{ij}。特别地，E_1 对应于 P_0 的一列，而命题 10.13 给出 $\psi\colon\ X_0 \to X_1$，正如构造 10.11 中那样，将 E_1压缩。现在注意到，$\psi_*(E_2) \ldots, \psi_*(E_q)$ 中没有一个是可移动的，因此根据命题 10.13，它们都是可收缩的。迭代这一过程

这一考察过程，我们得到一个序列 $X_0 \to \ldots \to X_q$，逐步压缩 $E_1, \ldots, E_q$。剩下的任务是证明 $X \to Y$ 通过 $X \to X_q$经由一个同构进行分解。根据构造，除去 $E_1, \ldots, E_q$ 在 X_q 和 Y 中的相应像点外，我们得到了这样的分解。由于在余维二意义下是同构的，$X_q \dashrightarrow Y$ 提升到全坐标空间，并再次下降为曲面 X_q 与 Y之间的同构。□

我们证明，通过收缩不会离开对数德尔佩佐$\mathbb{K}^*$-曲面的类。此外，我们研究这些收缩对构造 9.12 和注 9.13 中定义的不变量 $\mathscr{d}^{\pm}$ 的影响。

命题 10.15. 设 X 为对数德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$-曲面，$X \to Y$ 为曲面的一种收缩。那么 Y 是对数德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$- 曲面，并且根据源与汇的构型，我们有：

(i) 对于 $x^+ \in X$ 和 $y^+ \in Y$，我们有 $\mathscr{d}_X^+ \geq \mathscr{d}_Y^+$。(ii) 对于 $D_X^+ \subseteq X$ 和 $y^+ \in Y$，我们有 $1 > \mathscr{d}_X^+ \geq \mathscr{d}_Y^+$。(iii) 对于 $x^- \in X$ 和 $y^- \in Y$，我们有 $\mathscr{d}_Y^- \geq \mathscr{d}_X^-$。(iv) 对于 $D_X^- \subseteq X$ 和 $y^- \in Y$，我们有 $\mathscr{d}_Y^- \geq \mathscr{d}_X^- > -1$。

证明。注 10.4 和命题 10.6 告诉我们，Y 是一个 $\mathbb{K}^*$德尔佩佐曲面，且 $X \to Y$ 是等变的。根据命题 10.14，只需证明由定义数据（A, P_X）和（A, P_Y）得到的 X 和 Y满足该断言，其中 P_X、P_Y按斜率排序，而 P_Y 是从 P_X中删去一列 v 得到的。任务是证明 Y 的椭圆不动点至多是对数终端奇点。

考虑有椭圆不动点 $x^+ \in X$ 和 $y^+ \in Y$的情形。这时只有对 $v = v_{i1}$ 需要证明一些内容。由于 v 可消去，我们有 $n_i \geq 2$。与 x^+ 和 y^+ 相关联的指数元组仅在第 i个位置不同，具体如下：

$$(l_{01}, \ldots, l_{i1}, \ldots, l_{r1}), \qquad (l_{01}, \ldots, l_{i2}, \ldots, l_{r1}).$$

对于第一个，由对数终端性可得 $\ell_X > 0$。对于第二个，我们必须证明这一性质。对于 $l_{i2} \leq l_{i1}$，这是显然的。因此设 $l_{i2} > l_{i1}$。首先注意到

$$m_Y^+ \;=\; m_X^+ + m_{i2} - m_{i1}, \qquad \ell_Y^+ \;=\; \ell_X^+ + \frac{1}{l_{i2}} - \frac{1}{l_{i1}}.$$

由于 P_X 和 $m_Y^+ > 0$的斜率有序性，我们得到 $0 < m_{i1} - m_{i2} < m_X^+$。由于 X 是德尔佩佐曲面，我们有正的交数

$$0 \;<\; -\mathcal{K}_X^0 \cdot D_X^{i1} \;=\; \frac{(m_{i1} - m_{i2})\ell_X^+ - \left(\frac{1}{l_{i1}} - \frac{1}{l_{i2}}\right) m_X^+}{l_{i1}(m_{i1} - m_{i2})},$$

其中计算使用了总结 7.7。现在，$\ell_Y^+ > 0$ 直接由这些估计得到

$$\frac{1}{l_{i1}} - \frac{1}{l_{i2}} \;<\; \left(\frac{1}{l_{i1}} - \frac{1}{l_{i2}}\right) \frac{m_X^+}{m_{i1} - m_{i2}} \;<\; \ell_X^+ \;=\; \ell_Y^+ + \frac{1}{l_{i1}} - \frac{1}{l_{i2}}.$$

由于已知 Y是对数德尔佩佐曲面，数值 d_Y^+ 有定义，我们将其与 d_X^+ 进行比较。考虑差值

$$d_X^+ - d_Y^+ \;=\; \frac{m_X^+}{\ell_X^+} - \frac{m_Y^+}{\ell_Y^+} \;=\; \frac{\ell_Y^+ m_X^+ - \ell_X^+ m_Y^+}{\ell_X^+ \ell_Y^+}.$$

对于 $d_X^+ \geq d_Y^+$，这个分数必须是非负的。分母显然为正，而对于分子，我们计算得

$$\ell_Y^+ m_X^+ - \ell_X^+ m_Y^+ \;=\; (m_{i1} - m_{i2})\ell_X^+ - \left(\frac{1}{l_{i1}} - \frac{1}{l_{i2}}\right) m_X^+$$

如上面对 $-\mathcal{K}_X^0 \cdot D_X^{v1}$ 的计算所示，分子也为正。因此，我们验证了 $d_X^+ \geq d_Y^+$ 。椭圆不动点 $x^- \in X$ 和 $y^- \in Y$ 的情形可通过交换作用转化为当前情形，无需额外处理。

现在假设我们有一条抛物型不动点曲线 $D_X^+ \subseteq X$ 和一个椭圆不动点 $y^+ \in Y$。那么 $v = v^+$ 成立，并且我们得到

$$0 < -(D_X^+)^2 = m_X^+, \qquad 0 < -\mathcal{K}_X^0 \cdot D_X^+ = -m_X^+ + \ell_X^+,$$

因为 D_X^+ 被收缩且 X 是德尔佩佐。因此， $\ell_Y^+ = \ell_X^+ > m_X^+ > 0$ 和 $d_Y^+ = d_X^+ < 1$。同样，对于 $D_X^- \subseteq X$ 和 $y^- \in Y$的情形，我们只需交换作用。□

命题 10.16。 考虑对数德尔佩佐$\mathbb{K}^*$-曲面 X_1 和 X_2的定义矩阵 P_1 和 P_2 ，其中 P_2 由 P_1 删除一列得到。

(i) 对于相应的反典范复形，我们有 $A_{P_2} \subseteq A_{P_1}$ 。(ii) 若 X_1 是 $1/k$-对数典范的，则 X_2 是 $1/k$-对数典范的。

证明。 第一个断言是命题 10.15 以及命题 9.17 (i) 和 (ii) 所给出的反典范复形描述的推论。第二个断言由第一个断言和命题 9.17 (v) 得出。□

组合极小性的概念在 [15] 中引入。以下版本适用于有理射影 $\mathbb{K}^*$-环面曲面的情形。

定义 10.17。 若每个收缩 $X \to Y$ 都是同构，则称正规完备曲面 X 组合极小。

例 10.18。 在同构意义下，组合极小环面曲面来自生成矩阵具有 $[v_1, v_2, v_3]$ 或 $[v_1, v_2, -v_1, -v_2]$ 形式的扇。

注 10.19。 考虑一个射影 $\mathbb{K}^*$-曲面 $X = X(A,\ P)$。那么，根据命题 10.13，以下陈述等价。

(i) 曲面 X 是组合极小的。(ii) 矩阵 P 没有可收缩列。(iii) 我们有 Eff(X) =Mov(X)。(iv) 每个 D_X^{ij}、 D_X^+、 D_X^-的自交数都非负。

注 10.20。 对于每个有理射影 $\mathbb{K}^*$-曲面 X，都存在一个序列 $X \cong X_0 \to \ldots \to X_q$，其收缩如构造 10.11 所述，使得 X_q是组合极小的。此类序列的长度受皮卡数限制，即我们有 $q < \rho(X)$。

命题 10.21。 设 $X = X(A, P)$ 是非环面型、射影且组合极小的。则以下陈述成立。

(i) 对于皮卡数 $\rho(X)$，我们有 $1 \leq \rho(X) \leq 2$ 。(ii) 如果 X 有两个椭圆不动点，那么对于 $i = 0$、...、 r， $1 \leq n_i \leq 2$ 和$n_i = 2$ 至多发生两次。(iii) 如果 X 有一条抛物型不动点曲线，那么对于 $i = 0$、...、 r， $n_i = 1$ 。

证明。根据注记 10.12，在有两个椭圆不动点的情况下，组合极小性意味着 $n_i \leq 2$ for $i = 0, \ldots, r$ ；若 X ad- mits 一条抛物型不动点曲线，则意味着 $n_i = 1$ for $i = 0, \ldots, r$ 。特别地，第三个断言成立。

我们证明 (i)。注 10.19 给出 $Q(\gamma)$ =Eff(X) =Mov(X)。因此，在有效锥的每条极端射线上，我们都能找到至少两个生成元次数

$$w_{ij} = \deg(T_{ij}), \qquad w_k = \deg(S_k).$$

假设 $\rho(X) \geq 3$。那么 dim(Eff(X)) ≥ 3 ，并且我们发现一条极端射线 $\varrho \preccurlyeq$Eff(X)，其上有两个生成元次数 $w_{i_1 j_1}$ 和 $w_{i_2 j_2}$。我们声称 $i_1 \neq i_2$。否则 $n_i \leq 2$

对于 $i\coloneqq i_1 = i_2$ 意味着 T_{ij_1} 和 T_{ij_2} 是定义关系 g_ι 中单项式 h 的变量。因此，

$$\mu \;=\; \deg(g_\iota) \;=\; \deg(h) \;=\; \deg\left(T_{ij_1}^{l_{ij_1}} T_{ij_2}^{l_{ij_2}}\right) \;=\; l_{ij_1} w_{ij_1} + l_{ij_2} w_{ij_2} \;\in\; \varrho$$

具有 h 的指数 l_{ij_1} 和 l_{ij_2}。但随后，除了 w_k 之外的所有生成元次数都位于 ϱ 上。这与 $m \leq 2$ 以及 $\mathsf{Eff}(X)$ 的维数至少为三相矛盾。因此， $i_1 \neq i_2$ ，我们得到单项式

$$T_{i_1 j_1}^{l_{i_1 j_1}} T_{i_3 j_3}^{l_{i_3 j_3}}, \qquad T_{i_2 j_2}^{l_{i_2 j_2}} T_{i_4 j_4}^{l_{i_4 j_4}}$$

出现在定义关系中。注意， $w_{i_1 j_1}$、 $w_{i_3 j_3}$ 以及 $w_{i_2 j_2}$、 $w_{i_4 j_4}$ 生成两个二维锥，二者都包含相对内部中的 $\mu \in \mathsf{Mov}(X)^\circ$ 。因此，对于 $\eta = \mathsf{cone}(w_{i_1 j_1}, w_{i_4 j_4})$，同样的结论也成立。此外，点 $z \in X$ 具有

$$z_{i_1 j_1} \;=\; z_{i_4 j_4} \;=\; 1$$

且所有其他坐标均为零，属于 $\hat{}X$，见 [3, Constr. 3.3.1.3]。这与注 2.8 矛盾。因此，我们验证了第一个断言。

对于第二个断言，注意到我们有 $\dim(X) + \rho(X) \leq 4$ 以及 $m = 0$。因此，该结论由

$$n \;=\; n_0 + \ldots + n_r \;=\; \dim(X) + \rho(X) + r - 1 \;\leq\; r + 3.$$

□

11. 组合极小情形

本节中，我们对非环面型、组合极小的 $1/k$-对数典范德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$-曲面进行分类。分类过程完全通过构造 5.2 中的定义矩阵 P 进行。定理 11.1 给出了任意 k 对应的定义矩阵条目的界，而定理 11.3 则给出了 $k = 1$，2，3 的具体分类。

我们用 $c(k)$ 表示几乎 k-空格点单形的最大体积。由推论 4.7 可知，我们总有

$$c(k) \;\leq\; \pi R(k)^2 \;=\; 2\pi k^4 (2k^2 + 2k + 1).$$

定理 11.1. 每个非环面型、组合极小的 $1/k$-对数典范德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$-曲面都同构于一个 $X(A, P)$，其中 P属于以下列表。

(i) $\begin{bmatrix} -l_{01} & l_{11} & 0 & 0 \\ -l_{01} & 0 & l_{21} & 0 \\ d_{01} & d_{11} & d_{21} & 1 \end{bmatrix}$, $2 \le l_{01} \le$ 最大值$(2k^2,$ 5 $-k-2l_{01}+1 \le d_{01} \le -1)$

$\begin{bmatrix} -l_{01} & -l_{02} & l_{11} & 0 \\ -l_{01} & -l_{02} & 0 & l_{21} \\ d_{01} & d_{02} & d_{11} & d_{21} \end{bmatrix}$, $2 \le l_{11} \le$ 最大值$(4k^2, 2 \le l_{21} \le 5$ $, 1 \le d_{11} \le l_{11}-1$ $, 1 \le d_{21} \le l_{21}-1.$ (ii)
$1 \le l_{01} \le 2k^2, 1 \le l_{02} \le 2k^2$ $, 2 \le l_{11} \le$ 6最大值$(, 4k^2, c(k))$

$2 \le l_{21} \le$ 6 $\le$ $1 \le d_{21} \le l_{21}.$ (iii) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & l_{11} & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & l_{21} & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ d_{01} & d_{02} & d_{11} & d_{21} & 1 \end{bmatrix}$, $2 \le l_{11} \le$ 最大值$(4k^2, 0 \le l_{21} - 2l_{01} + 1 \le d_{01} \le k-1, 2 \le l_{02} \le$ 最大值$(2k^2, -k+1 \le d_{02} \le -1, 1 \le d_{11} \le l_{11}-1$ $, 2 \le l_{21} \le 3$ $,$

$-2 \le d_{01} < \frac{k}{2}, -\frac{k}{2} < d_{02} \le -1, 0 \le d_{11} \le l_{11}-1, 0 \le d_{21} \le l_{21}-1.$ $1 \le l_{01} \le k^3+3k^2,$
$-2(k+3)k^2 \le d_{01} \le k^4,$ (iv) $\begin{bmatrix} -l_{01} & -l_{02} & 0 & 0 & l_{21} \\ -l_{01} & -l_{02} & 0 & 0 & l_{21} \\ d_{01} & d_{02} & d_{11} & d_{12} & d_{21} \end{bmatrix}$, $1 \le l_{02} \le 6k^2, 1 \le l_{11} \le 6k^2$ $,$

$1 \le l_{12} \le 6k^2$ $, 2 \le l_{21} \le 6k^2$ $,$ $-25k^5-15k^2 \le d_{02} \le 5k^6+15k^3, 0 \le d_{11} \le l_{11}$ $,$
$-5k^6-3k \le d_{12} \le 125k^7+75k^4, 1 \le d_{21} \le l_{21}-1.$ (v) $\begin{bmatrix} -1 & -l_{02} & l_{11} & l_{12} & 0 & 0 \\ -1 & -l_{02} & 0 & 0 & l_{21} & 0 \\ -1 & -l_{02} & 0 & 0 & 0 & l_{31} \\ d_{01} & d_{02} & d_{11} & d_{12} & d_{21} & d_{31} \end{bmatrix}$, $1 \le l_{02} \le 5,$

$1 \le l_{11} \le 2k^2, 1 \le l_{12} \le$ 最大值$(2k^2, 5) 2 \le l_{21} \le$ 5 最大值$(2k^2,) 2 \le l_{31} \le l_{21}$ $,$
$-2 \le d_{01} < k, -k-3 \le d_{02} \le k-2, 0 \le d_{11} \le l_{11}-1$ $, -20k^3 \le d_{12} \le l_{12}-1, 1 \le d_{21} \le l_{21}-1$ $,$
$1 \le d_{31} \le l_{31}-1.$

在证明中，下面的引理帮助我们给定义矩阵 P 的条目 l_{ij} 设定界。这里考察的多边形 $\mathcal{B}$ 将构成相应反典范复形 $\mathcal{A}_P$ 的一条臂，且给出 $\min(\mathscr{d}^+, -\mathscr{d}^-)$ 的下界。

引理 11.2。 固定 $k \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$。给定 $a, b, l, d \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$，考察顶点为 $(0, \pm\frac{a}{b})$ 和 (l, d) 且位于 $\mathbb{R}^2$ 中的多边形 B。若 B 几乎是 k-空心的，则 $l \le \frac{2b}{a}k^2$。 —

证明。 集合 $\mathcal{C} := k^{-1}(-\mathcal{B} \cup \mathcal{B})$ 是中心对称且凸的，其唯一内部格点为原点。$\mathcal{C}$ 的体积等于 $2alb^{-1}k^{-2}$，根据闵可夫斯基定理，该体积不超过 4。□

定理 *11.1* 的证明。 设 X 是一个非环面型组合极小的 $1/k$-对数典范德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$-曲面。我们可以假设 $X = X(A, P)$，其中 P 已作调整，见定义 6.2。由命题 10.21，组合极小性迫使格式 $(n_0, \ldots, n_r; m)$ 属于以下情形之一：

$$(1, \ldots, 1; 1), \qquad (2, 1, \ldots, 1; 0), \qquad (2, 2, 1, \ldots, 1; 0).$$

此外， X 是对数终端的，因此总结 8.12 给出了 $(n_0, \ldots, n_r; m)$ 的以下六种可能性：

$$(1,1,1;1),\ (2,1,1;0),\ (2,1,1,1;0),\ (2,2,1;0),\ (2,2,1,1;0),\ (2,2,1,1,1;0).$$

我们以格式 (2,1,1; 0) 为例进行讨论。在这种情况下，定义矩阵 P 具有如下形式：

$$P \ = \ \begin{bmatrix} -l_{01} & -l_{02} & l_{11} & 0 \\ -l_{01} & -l_{02} & 0 & l_{21} \\ d_{01} & d_{02} & d_{11} & d_{21} \end{bmatrix}.$$

由于 P 已作调整，对于 $i = 1,2$，有 $1 \le d_{i1} < l_{i1}$。考虑反典范复形 $\mathcal{A}_P$ 的顶点 $\tilde{v}^+ = \mathscr{d}^+ v^+$ 和 $\tilde{v}^- = \mathscr{d}^- v^-$，其中

$$\mathscr{d}^+ \ = \ \frac{m_{01}+m_{11}+m_{21}}{l_{01}^{-1}+l_{11}^{-1}+l_{21}^{-1}-1}, \qquad \mathscr{d}^- \ = \ \frac{m_{02}+m_{11}+m_{21}}{l_{02}^{-1}+l_{11}^{-1}+l_{21}^{-1}-1}.$$

再次根据注记 8.12， X 的对数终端性确保分母均为正。利用 l_{11}， $l_{21} \ge 2$，我们得到

$$0 \ < \ l_{01}^{-1}+l_{11}^{-1}+l_{21}^{-1}-1 \ \le \ l_{01}^{-1}, \qquad 0 \ < \ l_{02}^{-1}+l_{11}^{-1}+l_{21}^{-1}-1 \ \le \ l_{02}^{-1}.$$

注意，表达式 $\mathscr{d}^+, m_{01}$ 和 $\mathscr{d}^-, m_{02}$ 分别关于 d_{01} 和 d_{02} 严格递增。此外，对于任意 $\alpha \in \mathbb{Q}$，我们有

$$\mathscr{d}^+ = \alpha \iff m_{01} = \left(l_{01}^{-1} + l_{11}^{-1} + l_{21}^{-1} - 1\right)\alpha - m_{11} - m_{21},$$

$$\mathscr{d}^- = \alpha \iff m_{02} = \left(l_{02}^{-1} + l_{11}^{-1} + l_{21}^{-1} - 1\right)\alpha - m_{11} - m_{21}.$$

由于 $0 \in \mathcal{A}_P^\circ$ 且 X 是 $1/k$-对数典范的，我们有 $0 < \mathscr{d}^+ \leq k$ 和 $-k \leq \mathscr{d}^- < 0$，见命题 9.17。对于 $\alpha = 0,\ k,\ \pm 1$，上述讨论得到

$$-2l_{01} < d_{01} < k, \qquad \mathscr{d}^+ < 1 \ \Rightarrow\ d_{01} < 1,$$

$$-k - 2l_{02} < d_{02} < 0, \qquad \mathscr{d}^- > -1 \ \Rightarrow\ d_{02} > -1 - 2l_{02}.$$

我们用 $\alpha = \min(\mathscr{d}^+,\ -\mathscr{d}^-)$ 来界定 l_{11} 和 l_{21}。对于 $i = 1,\ 2$，考虑多边形

$$\mathcal{B}_i \ :=\ \operatorname{conv}\left(\left(0, \mathscr{d}^+\right), (l_{i1}, d_{i1}), \left(0, \mathscr{d}^-\right)\right) \ \subseteq\ \mathbb{R}^2.$$

由于 $\mathcal{A}_P$ 几乎是 k-空心的，$\mathcal{B}_i$ 二者都是 k-空心的。因此，引理 11.2 适用，我们得到

$$l_{i1} \ \leq\ \frac{2}{\alpha}k^2.$$

接下来逐一考察柏拉图三元组 $(l_{01},\ l_{11},\ l_{21})$ 和 $(l_{02},\ l_{11},\ l_{21})$ 的所有可能构型。我们将讨论范围限定在 $l_{01} = l_{02} = 1$ 这一最有意思的情形。在这种情况下，l_{11}、l_{21} 不受先验约束，我们的任务是找到合适的界。首先，我们说明

$$\mathscr{d}^+ = \frac{d_{01} + m_{11} + m_{21}}{l_{11}^{-1} + l_{21}^{-1}}, \quad \mathscr{d}^- = \frac{d_{02} + m_{11} + m_{21}}{l_{11}^{-1} + l_{21}^{-1}}, \quad \mathscr{d}^+ - \mathscr{d}^- = \frac{d_{01} - d_{02}}{l_{11}^{-1} + l_{21}^{-1}}.$$

在 $\mathscr{d}^+ \geq 1/2$ 和 $\mathscr{d}^- \leq -1/2$的情形下，正如刚才所见，对于 $i = 1,\ 2$ 有 $l_{i1} \leq 4k^2$。此外，由 $\beta := \mathscr{d}^+ - \mathscr{d}^-$，我们得到

$$1 \ \leq\ d_{01} - d_{02} \ =\ \beta\left(\frac{1}{l_{11}} + \frac{1}{l_{21}}\right).$$

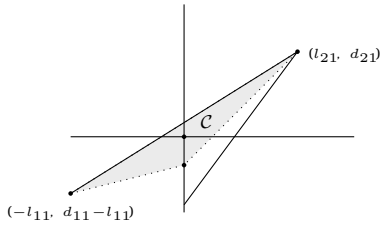
于是 $\beta \leq 3/2$，推出 $l_{11},\ l_{21} \leq 6$，因此剩下 $\beta > 3/2$。设$\mathscr{d}^+ < 1/2$。那么 $d_{01} = -1$ 和 $\mathscr{d}^+ > 0$ 迫使 $m_{11} + m_{21} > 1$。此外，

$$\left(\frac{1}{l_{11}} + \frac{1}{l_{21}}\right) \ \geq\ \frac{1}{\beta} \ >\ \frac{1}{k + \frac{1}{2}}$$

由于 $\beta = \mathscr{d}^+ - \mathscr{d}^- < k + \frac{1}{2}$。我们得到 $\min(l_{11},\ l_{21}) \leq 2k$。不妨设$l_{11} \leq 2k$。那么我们可以估计

$$\frac{1}{2k} \ \leq\ m_{11} \ \leq\ \frac{2k-1}{2k}, \qquad \frac{1}{2k} \ <\ m_{21} \ \leq\ 1.$$

其思路是通过一个合适的近乎 k-空心格单形的体积来界定 l_{21}。考虑反典范复形的延长第二臂：



直接可验证，$(-l_{11},\ d_{11}-l_{11})$ 位于经过 $(0,\ \mathscr{d}^+)$ 和 $(l_{21},\ d_{21})$ 的边界直线 L 上。因此，我们确实可以如上所示定义多边形 $\mathcal{C}$：

$$\mathcal{C} \ :=\ \operatorname{conv}\left((0,-1), (l_{21}, d_{21}), (-l_{11}, d_{11} - l_{11})\right).$$

我们验证 $\mathcal{C}$ 几乎是 k-空心的。作为 $\mathcal{A}_P$ 的子集，$\mathcal{C}^\circ$ 的右侧部分不含任何 k 重格点，除了 $(0,\,0)$。关于左侧部分，我们需要

$$(-k,0)\ \notin\ \mathcal{C}, \qquad\qquad (-k,-k)\ \notin\ \mathcal{C}.$$

事实上，由于 $\mathscr{d}^+ < 1$ 和 $l_{11} \le 2k$，这给出 $\mathcal{C}^\circ \cap k\mathbb{Z}^2 = \{(0,0)\}$。$L$ 的斜率以及经过 $(-l_{11}, d_{11}-l_{11})$ 和 $(0,-1)$ 的边界直线 G 满足

$$m_L\ >\ m_{11}\ \ge\ \frac{1}{2k}, \qquad\qquad m_G\ =\ \frac{l_{11}-d_{11}-1}{l_{11}}\ \le\ 1-\frac{2}{k}.$$

因此，$(-k,0)$ 位于 L 之上，而 $(-k,-k)$ 位于 G之下。总之，$\mathcal{C}$ 几乎是 k-空心的，并且有 $l_{21} \le 2\mathrm{vol}(\mathcal{C})$。因此，情形 $\mathscr{d}^+ < 1/2$ 已得到解决。如果 $\mathscr{d}^- > -1/2$，则将最后一行乘以 -1，从而交换源和汇。重新调整后，我们再次处于情形 $\mathscr{d}^+ < 1/2$。□

对于任意给定的 k，定理 11.1 提供了一个有限的矩阵列表，其中尤其包含所有非环面型组合极小 $1/k$-对数典范德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$-曲面的定义矩阵 P。为了获得分类，我们通过计算执行以下步骤：

- 从列表中移除所有不能得到 $1/k$-对数典范德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$-曲面的定义矩阵 P，
- 消除所有冗余，使每个组合极小的 $1/k$-对数典范德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$-曲面在同构意义下恰好出现一次。

第一步利用命题 9.4 中的德尔佩佐判据，以及定理 9.17 中通过反典范复形刻画 $1/k$-对数典范性的结果，从而实现高效计算；第二步则使用定义 6.14 中的标准形。综上，我们得到以下结果。

定理 11.3. 我们得到以下关于非环面型组合极小 ε-对数典范德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$-曲面的结论。

$\varepsilon = 1$: 非环面型组合极小典范德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$-曲面恰有13 个孤立例和2 个单参数族。$\varepsilon = \frac{1}{2}$: 非环面型组合极小 $1/2$-对数典范德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$-曲面恰有62 个孤立例和$\bar{5}$ 个单参数族。$\varepsilon = \frac{1}{3}$: 非环面型组合极小 $1/3$-对数典范德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$-曲面恰有$3$18 个孤立例和14 个单参数族。

12. 对数典范德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$-曲面的分类

我们现在可以对非环面型对数典范德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$-曲面进行分类。定理 ?? 展示了 $k = 1,2,3$ 的分类基本数据。完整的定义数据列表将在 [14]中提供。一方面，我们从定理 4.11 中分类的近乎 k-空心多边形构造定义 P-矩阵；另一方面，则利用定理 11.3 中分类的非环面型、组合极小的对数典范德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$-曲面的定义数据。

构造 12.1. 固定 $k \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$。对于任意近乎 k-空心的 LDP 多边形 $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^2$，我们关联一个定义矩阵 $P_{\mathcal{A}}$，其 $r = 1$以$\mathcal{A}$ 的顶点为列：

$$P_{\mathcal{A}}\ :=\ [v_{01},\ldots,v_{0n_0},v_{11},\ldots,v_{1n_1},v^{\pm}],$$

其中 $v_{0j} = (-l_{0j},\ d_{0j})$ 和 $v_{1j} = (l_{1j},\ d_{1j})$，并且在存在时，$v^{\pm} = (0,\ \pm 1)$。适当排列各列的编号可确保 $P_{\mathcal{A}}$ 按斜率排序。反之，令

$$\mathcal{A}_{\mathcal{P}}\ :=\ \mathrm{conv}(v;\ v \text{ column of } P)$$

对于每个具有 $r = 1$ 的斜率排序的定义矩阵 P，一个环面 $1/k$-对数典范德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$-曲面对应一个几乎 k-空的 LDP 多边形。

定义 12.2。 固定 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ，并考虑格向量 $v^+ = (0,\ 1)$ 和$v^- = (0,\ -1)$。

(i) 我们用 $\mathfrak{A}_k$ 表示所有几乎 k-空心 LDP 多边形的集合 $\mathcal{A}$ ，其中 conv($\mathcal{A} \cup \{v^+\}$) 或 conv($\mathcal{A} \cup \{v^-\}$) 几乎是 k-空心的。(ii) 对于来自 $\mathfrak{A}_k$ 的多边形所对应的定义矩阵集合，我们记作 $\mathfrak{P}_k = \{P_{\mathcal{A}};\, \mathcal{A} \in \mathfrak{A}_k\}$ 。

注 12.3. 集合 $\mathfrak{P}_k$ 在类型 (i)、(ii)、(iii)、(iv) 和 (v) 的容许操作下保持不变。

命题 12.4. 设 $X_1 \to X_2$ 是构造 *10.11* 中所述非环面型 $1/k$-对数典范德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$-曲面的一个收缩，其中 X_1 是非环面型的，而 X_2 是环面型且组合极小的。则定义矩阵 P_2 源自 $\mathfrak{P}_k$。

证明。 设 (A_i, P_i) 是 X_i 的定义数据。则 P_1 有三条臂，至多六列。我们可以假设 P_1 第三条臂的一列被收缩。于是， P_2 的臂就是 P_1 的前两条臂，而命题 9.3 (iv) 保证 P_2 属于 $\mathfrak{P}_k$。 □

构造 12.5. 设$\mathcal{B}$ 是一个几乎 k-空的 LDP 多边形，具有 $q \leq 5$ 个顶点。通过以下步骤，我们得到一个有限集 $\mathfrak{A}(\mathcal{B}) \subseteq \mathfrak{A}_k$ ，其中包含至多有 4 个顶点的几乎 k-空 LDP 多边形。

- 对于每个本原格点 $v \in \mathcal{B}$ ，固定幺模矩阵 M_v^+、 M_v^-，使得

$$M_v^+ \cdot v \ = \ v^+, \qquad \det(M_v^+) \ = \ 1,$$
$$M_v^- \cdot v \ = \ v^-, \qquad \det(M_v^-) \ = \ -1.$$

- 从 $\mathfrak{A}(\mathrm{B}) := \emptyset$ 开始。对每个本原向量 $v \in \mathrm{B}$，执行以下步骤。– 如果 $4 \leq q \leq 5$ 是 B 的一个顶点，但 $-v$ 不是，则考虑由 B 的除 v 以外所有顶点构成的凸包 B_v。如果 B_v 是 LDP 多边形，则将 $M_v^+ \cdot \mathrm{B}_v$ 和 $M_v^- \cdot \mathrm{B}_v$ 加入 $\mathfrak{A}(\mathrm{B})$。– 如果 $3 \leq q \leq 4$ 成立，且 v 和 $-v$ 都不是 B 的顶点，则令 $\mathrm{B}_v := \mathrm{B}$，并将 $M_v^+ \cdot \mathrm{B}_v$ 和 $M_v^- \cdot \mathrm{B}_v$ 加入 $\mathfrak{A}(\mathrm{B})$。

此外，给定任意一个由至多 5 个顶点组成的几乎 k-空心 LDP 多边形的（有限）集合 $\mathfrak{B}$ ，通过令

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{B}) \ := \ \bigcup_{\mathcal{B} \in \mathfrak{B}} \mathfrak{A}(\mathcal{B}).$$

命题 12.6. 设集合 $\mathfrak{B}$ 代表所有至多有5 个顶点的几乎 k-空心 *LDP* 多边形，且均视为幺模等价类。那么，每个至多有四列的矩阵 $P \in \mathfrak{P}_k$ ，都可由某个满足 $\mathcal{C} \in \mathfrak{A}(\mathfrak{B})$ 的矩阵 $P_{\mathcal{C}}$ ，经由类型 *(i)*、*(ii)* 和 *(iv)* 的容许操作得到。

证明。 给定 $P \in \mathfrak{P}_k$，考虑其对应的 LDP 多边形$\mathcal{A}_P \in \mathfrak{A}_k$。根据 $\mathfrak{A}_k$ 的定义，以下情况之一成立。

$$v^+ \ \in \ \mathcal{B}^+ \ := \ \mathrm{conv}(\mathcal{A}_P \cup \{v^+\}), \qquad v^- \ \in \ \mathcal{B}^- \ := \ \mathrm{conv}(\mathcal{A}_P \cup \{v^-\}).$$

无论哪种情况，根据 $\mathfrak{B}$ 的选取，我们都能找到一个幺模矩阵 U，使得 $U \cdot \mathcal{B}^{\pm} \in \mathfrak{B}$。令 $v := U \cdot v^{\pm}$。那么，利用构造 12.5 中的 $M_v^{\pm}$ 和$\mathcal{B}_v^{\pm}$，我们有

$$\mathcal{C}^+ \ := \ M_v^+ \cdot \mathcal{B}_v^+ \ \in \ \mathfrak{A}(\mathfrak{B}), \qquad \mathcal{C}^- \ := \ M_v^- \cdot \mathcal{B}_v^- \ \in \ \mathfrak{A}(\mathfrak{B}).$$

与$\mathcal{C}^{\pm}$相关的矩阵 $P_{\mathcal{C}^{\pm}}$等于 $M_v^{\pm} \cdot U \cdot P$。由于 $M_v^{\pm} \cdot U$在相差一个符号的意义下保持不变， P 可由 $P_{\mathcal{C}^{\pm}}$ 经由类型为 (i)、(ii) 和 (iv) 的容许操作得到。□

[1] 的主要结果表明，对于给定的 $\varepsilon > 0$，在变形意义下，只有有限多个 ε-对数典范曲面。下文针对非环面型 $1/k$-对数典范德尔佩佐曲面，给出了这一结论的有效版本。

定理 12.7。设 $1/k$为一个非环面型 $1/k$-对数典范德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$-曲面$X(A,\ P)$，其中 P不可约冗余、按斜率排序并适配源。固定$\alpha > 0$，使得对于任意组合极小的 $1/k$-对数典范德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$-曲面 Y 以及由命题 *12.6* 得到的任意环面曲面 Y，都有 $d_Y^+ > \alpha$ 和 $d_Y^- < -\alpha$。令 $\ell\colon = 2\alpha^{-1}k^2$。

(i) P的臂数 $r+1$ 在有两个椭圆不动点的情况下受 $4k$ 限制，而在只有一个椭圆不动点的情况下受 $2k+2$ 限制。(ii) 对于 $i = 0, \ldots\ldots, r$，有 $n_i \leq 2\ell + 1$。此外，P的条目受 $l_{ij} \leq \ell$ 限制，并且 $-l_{ij}(4k + r - 1) < d_{ij} < l_{ij}$。

证明。由命题 9.18 可知断言 (i) 显然成立。我们证明 (ii)。命题 10.16 给出：对于任意一个 $1/k$-对数典范德尔佩佐 $\mathbb{K}$-曲面的定义矩阵 P，都有 $\mathscr{d}^+ > \alpha$ 和 $\mathscr{d}^- < -\alpha$。因此，引理 11.2 为所有 l_{ij} 提供了所需的统一上界。现在，由于$\mathcal{A}_P$ 的第 i 臂具有凸性，P的第 i 臂至多有 $2\ell + 1$ 列。这意味着我们有 $n_i \leq 2\ell + 1$。

最后，我们还需给数值 d_{ij} 找到上界。由定理 9.17，我们推得 $\mathscr{d}^+ \leq k$和 $\mathscr{d}^- \geq -k$。由于 P 适配源，对于 $i = 1, \ldots, r$，有 $0 \leq m_{i1} < 1$。注 7.5 表明 $\ell^+ \leq 2$ 和 $\ell^- \leq 2$。综上可得

$$m_{01} \ \leq k\ \ell^+ - \sum_{i=1}^{r} m_{i1} \ \leq\ 2k, \qquad m_{0n_0} \ \geq\ -k\ell^- - \sum_{i=1}^{r} m_{in_i} \ \geq\ -2k - r.$$

因此，除了 $d_{i1}, \ldots, d_{ir}$之外，d_{01}和 d_{0n_0}也如所述有界。由于斜率有序性，一旦我们对 $i = 1, \ldots, r$中的 m_{in_i} 给出下界，其余的 d_{ij} 便有界。证明如下。

$$m_{in_i} \ \leq\ -\ell^- - m_{0n_0} - \sum_{q \neq i,0} m_{qn_q} \ \leq\ -2k - 2k - r + 1 \ =\ -4k - r + 1.$$

□

算法 12.8。设 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$。输入为有限集 $\mathfrak{B}$，它在幺模等价意义下代表所有几乎 k- 空心格多边形；以及有限集 $\mathfrak{M}$，它在同构意义下包含所有非环面型组合极小 $1/k$-对数典范德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$-曲面的定义矩阵 P。

- 根据构造 12.5，计算具有 $r = 1$ 的定义矩阵 P 的集合 $\mathfrak{A}(\mathfrak{B})$。
- 计算所有不可约定义矩阵 P 的集合 $\mathfrak{S}_0$，其中 P 具有 $r = 2$，且其条目按照定理 12.7 有界；这些矩阵由 $\mathfrak{A}(\mathfrak{B})$ 经冗余扩张后再进行适当扩张而得。
- 计算并集 $\mathfrak{S}_1 := \mathfrak{S}_0 \cup \mathfrak{M}$，将 $\mathfrak{S}_1$ 的矩阵化为标准形，从而移除所有重复条目 $\mathfrak{S}_1$。
- 根据定理 12.7 对数据的界限，计算所有不可约定义矩阵 P 的集合 $\mathfrak{S}$；这些矩阵可由 $\mathfrak{S}_1$ 经一系列冗余扩张和适当扩张得到。
- 将 $\mathfrak{S}$ 的矩阵化为标准形，从而移除 $\mathfrak{S}$ 中所有重复出现的条目。

输出集合 $\mathfrak{S}$ 恰好为非环面型 $1/k$-对数典范德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$ 曲面的定义矩阵 P 的每个等价类包含一个元素。

对于 $k = 1$,2 和 3 这些情形，分类算法在个人计算机上是可行的。因此，我们得到以下结果。

定理 12.9。 对于 $k=1$，2，3， d 维的非环面型 $1/k$-对数典范德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$-曲面族的非零数量如下：

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$k=1$	30	4	—	—	—	—	—	—	—	—
$k=2$	998	184	40	12	2	1	—	—	—	—
$k=3$	65022	12402	3190	917	254	64	14	6	2	1

任何戈伦斯坦指标为 ι 的对数德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$-曲面都是 $1/\iota$-对数典范的。因此，定理 12.9 尤其涵盖了戈伦斯坦指标为 $\iota=1$,2,3 的对数德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$-曲面。挑出这些曲面后，我们得到以下结果。

推论 12.10。 戈伦斯坦指标为 $\iota=1$，2，3 的 d 维对数德尔佩佐$\mathbb{K}^*$-曲面族的非零数量如下：

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\iota=1$	30	4	—	—	—	—	—			
$\iota=2$	53	17	7	3	1	1	—	—	—	—
$\iota=3$	268	123	67	18	36	18	10	5	3	1

例 12.11。 定理 12.9 中列出的维数最大的族，是以下级数中 $k=1$，2，3 对应的情形，其定义矩阵为

$$P_k = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & & 1 & 1 \\ 2k & 2k-1 & 0 & -1 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}(4k, 8k; \mathbb{Z}).$$

根据命题 9.4，每个相关的 $\mathbb{K}^*$-曲面 $X_k = X(A,\ P_k)$ 都是德尔佩佐曲面。此外，我们可以直接计算

$$\mathscr{d}^+ = \frac{m^+}{\ell^+} = \frac{2k}{4k-(4k-2)} = k, \qquad \mathscr{d}^- = \frac{m^-}{\ell^-} = \frac{2k-1-(4k-1)}{4k-(4k-2)} = -k.$$

因此，定理 9.17 (v) 告诉我们， X_k 是 $1/k$-对数典范的。此外， X_k 的戈伦斯坦指标为 k；使用命题 8.9 和推论 8.10。最后，我们得到

$$r = 4k-1, \qquad d_k = r-2 = 4k-3, \qquad \rho(X_k) = m+n-r-1 = 4k,$$

其中， d_k 表示由 P_k给出的族的维数；参见注 6.17 和命题 7.2。特别地，命题 9.18 中的界是紧的。

利用数据库 [14], ，我们可以细化推论 1.3 中的表格，给出在跳跃点处具有给定皮卡数 ϱ 的 ε-对数典范德尔佩佐曲面族的数量。我们首先分别考察环面情形和非环面情形，然后再考察两者的总体情况。

推论 12.12。 我们得到以下表格，其中列出了皮卡数为 ρ 的 α^{-1}-对数典范环面德尔佩佐曲面族的数量 $\nu_{\mathrm{toric}}(\alpha、\ \rho)$ ，其中 ρ沿水平方向变化， α 沿垂直方向变化：

α 对比 ρ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	5	7	3	1	—	—	—	—	—	
3/2	9	20	12	3	—	—	—	—	—	
5/3	13	40	23	3	—	—	—	—	—	
7/4	18	51	24	3	—	—	—	—	—	
9/5	20	53	24	3	—	—	—	—	—	
11/6	21	53	24	3	—	—	—	—	—	

α对 ρ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	42	181	202	74	5	1	—	—	—	—
11/5	48	200	209	74	5	1	—	—	—	—
7/3	68	357	479	205	16	1	—	—	—	—
17/7	70	360	479	205	16	1	—	—	—	—
5/2	94	630	1228	1039	449	158	37	11	1	1
23/9	95	632	1229	1039	449	158	37	11	1	1
13/5	115	804	1590	1334	549	175	38	11	1	1
8/3	120	834	1627	1350	552	175	38	11	1	1
19/7	134	913	1751	1418	568	176	38	11	1	1
11/4	154	1159	2532	2382	1129	352	68	14	1	1
25/9	160	1195	2583	2408	1134	352	68	14	1	1
31/11	163	1211	2601	2415	1135	352	68	14	1	1
17/6	174	1316	2886	2717	1269	377	69	14	1	1
37/13	176	1322	2890	2718	1269	377	69	14	1	1
43/15	177	1323	2890	2718	1269	377	69	14	1	1
23/8	186	1375	2991	2806	1302	382	69	14	1	1
29/10	189	1395	3029	2833	1310	383	69	14	1	1
35/12	191	1404	3040	2838	1311	383	69	14	1	1
41/14	192	1406	3041	2838	1311	383	69	14	1	1
3	355	3983	13454	17791	9653	2465	292	37	1	1

推论 12.13。 我们得到下表，其中列出了皮卡数为 ρ 的 α^{-1}-对数典范非环面型德尔佩佐 $\mathbb{K}^*$ 曲面族的数量 $\nu_{\mathrm{nontoric}}(\alpha,\ \rho)$ ； ρ 沿水平方向排列， α 沿垂直方向排列：

α与 ρ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	13	12	7	2	—	—	—	—	—	—		
3/2	19	18	18	13	4	1	—	—	—	—	—	
5/3	21	30	56	30	6	1	—	—	—	—	—	
7/4	23	51	81	32	6	1	—	—	—	—	—	
9/5	25	70	86	32	6	1	—	—	—	—	—	
11/6	28	79	86	32	6	1	—	—	—	—	—	
13/7	31	80	86	32	6	1	—	—	—	—	—	
15/8	32	80	86	32	6	1	—	—	—	—	—	
2	61	253	471	318	107	22	4	1	—	—	—	—
11/5	67	307	524	327	107	22	4	1	—	—	—	—
7/3	80	426	950	829	302	55	8	1	—	—	—	—
17/7	84	448	954	829	302	55	8	1	—	—	—	—
5/2	104	639	1671	2179	1602	736	239	58	11	2	—	—
23/9	106	645	1672	2179	1602	736	239	58	11	2	—	—
13/5	115	817	2295	2906	1978	849	259	60	11	2	—	—
8/3	118	858	2371	2954	1992	851	259	60	11	2	—	—
19/7	128	991	2645	3147	2055	863	260	60	11	2	—	—
11/4	133	1124	3514	4876	3562	1538	447	93	14	2	—	—
25/9	136	1185	3654	4952	3577	1540	447	93	14	2	—	—
14/5	137	1186	3654	4952	3577	1540	447	93	14	2	—	—
31/11	142	1225	3709	4969	3577	1540	447	93	14	2	—	—
17/6	146	1320	4159	5653	4007	1670	468	94	14	2	—	—

α与 ρ比较	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
37/13	150	1338	4172	5655	4007	1670	468	94	14	2	—	—
43/15	151	1342	4174	5655	4007	1670	468	94	14	2	—	—
23/8	157	1421	4414	5898	4107	1688	470	94	14	2	—	—
49/17	158	1421	4414	5898	4107	1688	470	94	14	2	—	—
29/10	160	1470	4524	5972	4125	1688	470	94	14	2	—	—
35/12	164	1496	4559	5986	4127	1688	470	94	14	2	—	—
41/14	166	1507	4568	5988	4127	1688	470	94	14	2	—	—
47/16	168	1511	4569	5988	4127	1688	470	94	14	2	—	—
53/18	169	1512	4569	5988	4127	1688	470	94	14	2	—	—
3	318	3632	15174	26654	22648	10024	2731	577	100	11	2	1

推论 12.14。 我们得到以下表格，列出了具有环面作用且皮卡数为 ρ 的 α^{-1}-对数典范德尔佩佐曲面的族数目 $\nu(\alpha、\rho)$，其中 ρ 沿水平方向变化， α 沿垂直方向变化：

α与 ρ比较	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	18 19		10	3	—	—	—	—	—	—	—	
3/2	28	38	30	16	4	1	—	—	—	—	—	
5/3	34	70	79	33	6	1	—	—	—	—	—	
7/4	41	102	105	35	6	1	—	—	—	—	—	
9/5	45	123	110	35	6	1	—	—	—	—	—	
11/6	49	132	110	35	6	1	—	—	—	—	—	
13/7	52	133	110	35	6	1	—	—	—	—	—	
15/8	53	133	110	35	6	1	—	—	—	—	—	
2	103	434	673	392	112	23	4	1	—	—	—	—
11/5	115	507	733	401	112	23	4	1	—	—	—	—
7/3	148	783	1429	1034	318	56	8	1	—	—	—	—
17/7	154	808	1433	1034	318	56	8	1	—	—	—	—
5/2	198	1269	2899	3218	2051	894	276	69	12	3	—	—
23/9	201	1277	2901	3218	2051	894	276	69	12	3	—	—
13/5	230	1621	3885	4240	2527	1024	297	71	12	3	—	—
8/3	238	1692	3998	4304	2544	1026	297	71	12	3	—	—
19/7	262	1904	4396	4565	2623	1039	298	71	12	3	—	—
11/4	287	2283	6046	7258	4691	1890	515	107	15	3	—	—
25/9	296	2380	6237	7360	4711	1892	515	107	15	3	—	—
14/5	297	2381	6237	7360	4711	1892	515	107	15	3	—	—
31/11	305	2436	6310	7384	4712	1892	515	107	15	3	—	—
17/6	320	2636	7045	8370	5276	2047	537	108	15	3	—	—
37/13	326	2660	7062	8373	5276	2047	537	108	15	3	—	—
43/15	328	2665	7064	8373	5276	2047	537	108	15	3	—	—
23/8	343	2796	7405	8704	5409	2070	539	108	15	3	—	—
49/17	344	2796	7405	8704	5409	2070	539	108	15	3	—	—
29/10	349	2865	7553	8805	5435	2071	539	108	15	3	—	—
35/12	355	2900	7599	8824	5438	2071	539	108	15	3	—	—
41/14	358	2913	7609	8826	5438	2071	539	108	15	3	—	—
47/16	360	2917	7610	8826	5438	2071	539	108	15	3	—	—
53/18	361	2918	7610	8826	5438	2071	539	108	15	3	—	—
3	673	7615	28628	44445	32301	12489	3023	614	101	12	2	1

参考文献

[1] Valery Alexeev, 《对数曲面的有界性与 K^2 》, Internat. J. Math. **5** 1994 6, ( ), 第 – 期。, 779 810 ↑1 52
[2] Ivan Arzhantsev、Lukas Braun、J¨urgen Hausen 和 Milena Wrobel, 《对数终端奇点、柏拉图元组与 Cox 环的迭代》, Eur. J. Math. 4（2018年）, 第1期, 242–312页。↑34[3] Ivan Arzhantsev、Ulrich Derenthal、J¨urgen Hausen 和 Antonio Laface, 《Cox 环》, 剑桥高等数学研究丛书, 第144卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2015年。↑3, 7, 16, 21, 22, 26, 28, 30, 43, 44, 47[4] Ivan Arzhantsev、J¨urgen Hausen、Elaine Herppich 和 Alvaro Liendo, 《复杂度一环面作用簇的自同构群》, Mosc. Math. J. **14** 2014 3, ( ), 第 – 期。[5] 429 471, 641 ↑22
Benjamin Bechtold、J¨urgen Hausen、Elaine Huggenberger 和 Michele Nicolussi, 《带有 -环面作用的终端 Fano *3* *2* **5** 2016 1563 1602 ↑2 39 41 维簇》, [6] **83** 2008
Int. Math. Res. Not. IMRN ( ), –。, , G. N. Belousov, 《具有对数终端奇点的德尔佩佐曲面》, Mat. Zametki ( ), 第2期, 170–180页（俄文, 附俄文摘要）; 英文译本见 Math. Notes 83（2008年）, 第1–2期, 152–161页。↑39
[7] Andr´e Blanchard, 《复解析簇论》, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3) 73 (1956 157 202 ↑43), –（法文）。Egbert Brieskorn, 《复曲面的有理奇点》, Invent. Math. 4 [8]
（1967/68）, 336 358 ↑34 –（德文）。David A. Cox, 《环面簇的齐次坐标环》, J. Algebraic [9]
Geom. 4 (1995 1, 17 50 ↑7), 第 – 期。David A. Cox、John B. Little 和 Henry K. Schenck, 《环面簇》, 数学研究生丛书, 第124卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2011年。↑3, 7, 8[10][11] V. I. Danilov, 《环面簇的几何》, Uspekhi Mat. Nauk 33（1978年）, 第2(200)期, 85 134, 247 ↑3 –（俄文）。
Michel Demazure, 《克雷莫纳群的极大秩代数子群》, Ann. Sci. [12] ´Ecole Norm. Sup. (4 **3** 1970 507 588 ↑3) ( ), –（法文）。William Fulton, 《托里克簇导论》, [13] 数学年刊研究丛书, 第131卷, 普林斯顿大学出版社, 普林斯顿, 纽约州, 1993年。威廉·H. 罗弗几何讲座。↑3
[14] Daniel H¨attig、J¨urgen Hausen 和 Justus Springer, 《 $\mathbb{K}^*$曲面数据库》（2023年）。↑2, 15, 21, 50, 53[15] J ¨ **8** 2008 4, 711 757, urgen Hausen, 847 ↑3 46
《Cox 环与组合学 II》, Mosc. Math. J. ( ), 第 – 期（英文, 附英文和俄文摘要）。,[16] J¨urgen Hausen 和 Elaine Herppich, 《复杂度一的阶乘分次环》, 载于《扭子、étale 同伦及其在有理点中的应用》, 伦敦数学会讲义丛书, 第405卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2013年, 第414–428页。↑2, 16, 17[17] J¨urgen Hausen、Christoff Hische 和 Milena Wrobel, 《关于高复杂度的环面作用》, Forum Math. Sigma 7（2019年）, e38。↑17[18] J¨urgen Hausen 和 Hendrik S¨uß, 《带环面作用的代数簇的 Cox 环》, Adv. Math. 225（2010年）, 第2期, 977–1012页。↑2, 16, 17, 18[19] J¨urgen Hausen 和 Milena Wrobel, 《复杂度一的非完备有理 T簇》, Math. Nachr. 290（2017年）, 第5–6期, 815–826页。↑16, 17, 18[20]J¨urgen Hausen、Christian Mauz 和 Milena Wrobel, 《非退化托里克完全交的反典范复形》, Manuscripta Math., 2022年上线, 数字对象唯一标识符 https://doi.org/10.1007/s00229-022-01400-3, 见 `arXiv:2006.04723`。↑2, 39[21] Fumio Hidaka 和 Keiichi Watanabe, 《具有丰反典范除子的正规戈伦斯坦曲面》, Tokyo J. Math. 4（1981年）, 第2期, 319–330页。↑1[22] Christoff Hische 和 Milena Wrobel, 《关于反典范复形（ 2018 `arXiv:`）》, 见。, 1808.01997 ↑2 39
[23] Elaine Huggenberger, 《复杂度一环面作用的 Fano 品种》（2013年）。↑1, 3[24] Nathan Ilten、Marni Mishna 和 Charlotte Trainor, 《通过除子多面体对 Fano 复杂度一 T簇进行分类》, Manuscripta Math. **158** 2019 3 4, 463 486 ↑1 ( ), 第 - – [25]
期。Alexander M. Kasprzyk、Maximilian Kreuzer 和 Benjamin Nill, 《托里克对数德尔佩佐曲面的组合分类》, LMS J. Comput. Math. **13** 2010 33 46 ↑16 ( ), –。Sean [26] ´
Keel 和 James McKernan, 《拟射影曲面上的有理曲线》, Mem. Amer. Math. Soc. 140（1999年）, 第669期, viii+153, 数字对象唯一标识符 10.1090/memo/0669。MR1610249 ↑39

[27] JongHae Keum 和 Kyoung-Seog Lee，一般型莫里梦曲面的组合极小性，上线于
2022， 10 48550 2206 02913 ↑3 数字对象唯一标识符 . /ARXIV. . . Noboru
[28]
Nakayama，指标二对数德尔佩佐曲面的分类，J. Math. Sci. Univ. Tokyo **14** (2007年)，第3期，293–498页。 ↑1[29] Peter
Orlik 和 Philip Wagreich，带有 $\mathbb{C}^*$作用的代数曲面的孤立奇点，Ann. of Math. (
2 **93** 1971 205 228 ↑30) ( )，–。,带有 $\mathbb{C}^*$作用的代数曲面的奇点，Math. Ann. **193** (1971年)，121–
[30] ↑30
135页。[31] ，带有 k^* **138** 1977 1 2, 43 81 ↑16 作用的
[32] $\mathbb{C}^*$ **227** 1977
代数曲面，Acta Math. ( )，第 - – 期。H. Pinkham，带有 - 作用的正规曲面奇点，Math. Ann. 6)，第
183 193 ↑30 –。[33] Hendrik S¨uß，*T*-簇
上的典范除子(2008年)，见 arXiv:0811.0626。 ↑1

图宾根大学数学研究所，Auf der Morgenstelle 10，72076 图宾根，德国电子邮件地址：
daniel.haettig@uni-tuebingen.de图宾根大学数学研究所，Auf der Morgenstelle 10，72076 图宾根，德国电子邮件地址： juergen.hausen@uni-tuebingen.de图宾根大学数学研究所，Auf der Morgenstelle 10，72076 图宾根，德国电子邮件地址： justus.springer@uni-tuebingen.de