arXiv:2302.03113v1 [math.NT] 6 Feb 2023

平方满数中的等差数列

PRAJEET BAJPAI、MICHAEL A. BENNETT 和 TSZ HO CHAN

摘要。我们回答了 Erd˝os 关于 k次幂满数中是否存在等差数列的若干问题（即满足以下性质的整数：每个素因子都必定至少以 k 次幂出现）。此外，在假设 Masser 和 Oesterl´e 的 abc 猜想成立的条件下，我们推导出这类等差数列所满足的多种算术约束。

1. 引言

设 $k \geq 2$ 为一个整数。若正整数 n k次幂满 满足：每个素因子 p of n 都具有性质 $p^k \mid n$，则称其为 n k次幂满数。当 $k = 2$ 时，这类整数也称为平方满 数或强数（后一种称法源自 Golomb [12]）。Erd˝os 和 Szekeres [11], 于 1934年 首次研究了这类整数，并证明：若我们用 $P_k(x)$ 表示 k次幂满正整数 $\leq x$ 的数量，则

$$P_2(x) = \frac{\zeta(3/2)}{\zeta(3)} x^{1/2} + O(x^{1/3})$$

并且，更一般地，

$$P_k(x) = c_k x^{1/k} + O(x^{1/(k+1)}),$$

其中

$$c_k = \prod_{p \text{ prime}} \left(1 + \sum_{m=k+1}^{2k-1} p^{-m/k} \right).$$

这些渐近公式后来由贝特曼和格罗斯瓦尔德进一步改进 [2], ，并由特里福诺夫[24], 、刘 [14] 和第三作者 [4], 等人推广到短区间；刘和张 [15], 、第三作者和曾 [6], 以及第三作者 [3]等人则将其推广到等差数列。

尽管 k-满数构成的集合相当稀疏，但与规模相近的 k次完全幂集合相比，它们所受的局部约束没有那么严格。具体而言，虽然平方数包含

日期：2023年2月8日。第二作者的部分研究经费由加拿大自然科学与工程研究委员会提供。1

三项等差数列，但不包含四项等差数列；而当 $k \geq 3$时， k次完全幂不包含三项等差数列。另一方面，平方完全数（更一般地说， k-满数）包含任意长度的等差数列（这一点最早由Makowski观察到[16]；另见 [5]的定理3）。事实上，若我们定义

$$d = N = \prod_{p \leq m} p^k, \tag{1.1}$$

其中乘积遍历所有素数，那么每个 N、 $N+d$、.....、 $N+(m-1)d$都是 k-幂满数。

1975年，Erd˝os [10] 从多个角度提出了一系列关于 k-幂满数的问题，讨论了它们的加法性质（尤其是 Heath-Brown [13]所研究的性质）、它们之间的间隙，以及 k-幂满数中等差数列的存在性。本文将聚焦于最后一个主题。关于这一点，Erd˝os 问道：“是否存在无穷多个互素的幂满数四元组，它们构成一个等差数列？”随后，他将$A(k)$定义为满足以下条件的最大整数：存在 $A(k)$ 个互素的k-幂满数构成等差数列；并将 $A^\infty(k)$定义为满足以下条件的最大整数：存在无穷多个由 $A^\infty(k)$ 个互素 k-幂满数组成的集合，且这些数构成等差数列。他“基于相当薄弱的概率依据”猜想，对于所有 $k \geq 4$，都有 $A^\infty(k) = 2$；但 $A^\infty(3) = 3$（实际上，他陈述的是对于所有 $k \geq 4$，都有 $A^\infty(k) = 0$，但这是一个排印错误）。

我们将通过构造互素的幂满数所成的四项等差数列，以及互素的3幂满数所成的三项等差数列，对 Erd˝os 的问题给出肯定回答。随后我们将证明，Erd˝os 关于 $A^\infty(k)$ 的猜想可以由 Masser 和 Oesterl´e 的 abc 猜想推出（尽管推导过程颇为不平凡）。事实上，我们将证明以下结果。至少从猜想的角度来看，第一个结果可以理解为： m 项的 k 幂满数等差数列 N， $N+d$，.....， $N+(m-1)d$ 与式（1.1）中构造的数列相似，也就是说，$\gcd(d,\ N)$“很大”，并且 d 和 N 的大小大致相当。

定理 1.1. 在假设 abc 猜想成立的情况下，若 $m \geq 3$ 和 $k \geq 2$ 是整数，那么若 N 和 d 是满足以下条件的正整数

$$N, N+d, \ldots, N+(m-1)d$$

它们都是等差数列中的 k-幂满数，那么若 $\epsilon > 0$，我们有

$$\gcd(d, N) \gg (\max\{d, N\})^{\frac{m(1-1/k)-2}{m(1-1/k^2)-2}-\epsilon}, \tag{1.2}$$

$$d \gg N^{\frac{m(1-1/k)-1}{m(1-1/k^2)-1}-\epsilon} \tag{1.3}$$

and

$$N \gg d^{\frac{m(1-1/k)+1/k-2}{m(1-1/k^2)+1/k-2}-\epsilon}. \tag{1.4}$$

此外，若 $m \geq 2k-1$，则有更强的不等式

$$\gcd(d, N) \gg (\max\{d, N\})^{\frac{m(1-1/k)-2}{m(1-1/(2k-1))-2}-\epsilon}, \tag{1.5}$$

$$d \gg N^{\frac{m(1-1/k)-1}{m(1-1/(2k-1))-1}-\epsilon} \tag{1.6}$$

and

$$N \gg d^{\frac{m(1-1/k)+1/k-2}{m(1-1/(2k-1))+1/k-2}-\epsilon}. \tag{1.7}$$

在每种情况下，隐含常数都取决于 ϵ、k 和 m。

注意，对于所有数对 (m, k)，界 (1.2) 都是非平凡的，除非

$$(m, k) \in \{(3, 2), (3, 3), (4, 2)\}. \tag{1.8}$$

对于这些情况，有如下结论。

定理 1.2。 对于 *(1.8)* 中的每一对整数(m, k) ，都存在无穷多个由 m 项组成的 k-满数等差数列$N, N + d, \ldots, N + (m - 1)d$，且满足最大公因数$(d, N) = 1$。

结合这些定理可立即得到以下推论。

推论 1.3。 abc 猜想意味着

$$A^{\infty}(2) = 4,\ A^{\infty}(3) = 3 \ \ and \ \ A^{\infty}(k) = 2, \ \ for\ all\ k \geq 4.$$

我们应当指出，定理 1.2 中的情形 $(m, k) = (3,2)$ 和 $(3,3)$ 都相当常规，后者本质上与 Cohn [7]和 Nitaj [19]关于方程 $x+y = z$（其中 x, y, z 3为平方满且互素）的早期研究相似。我们在情形 $(m, k) = (4,2)$ 下的构造则稍显复杂，而且似乎更难找到例子。事实上，我们所知的最小例子——由四个互素的平方完全数组成的等差数列 $N, N + d, N + 2d, N + 3d$——是

$$N = 17541654662440693082022177759999563780869401733443195631720026428213538934146654259098022766103337858551130228714908264$$
$$092183795339077334979031700161975796410401371645661431360025397251281677069110162012277002086390746724745549802652454316540$$
$$271195895308716314978016592356420740449112045901950803191243774768961934231660971591185887190573577668799607394109591204214$$
$$604135648682900998727228226593126369291913667220946462186004173194306398691888158466413460639774157882482959802659110939652$$
$$136228618175027376824043417358675378159581584277370148393502133757758008198566804907384712188429439324818835809177011739706$$
$$061754762515269091685163078618119624125217884298638064713655378814564438037963281084546897486611052819897337172620291148315$$
$$280417277153060964497088448139561749108173430365387040149246930709528091212924112879928417251967934790756742633841051639584$$
$$495623456552417965269743585498263726964921039114000025167618337353033324722304307938697243424019540486387146646368242489545$$
$$610330490914468389343108667203304362239733168424653279570390475273414115369168262097104720496240973641353670263031347258604$$
$$611645652961570313664689$$

and

$$d = 29098878020517841089535116829925141651424040379718825885773155523788370484323113376880495773947818824979393753967131796 9$$
$$160141892633010956820474073627768014403498846739967727660409689203311174157249540851642483119433653474079160944563216791586 7$$
$$983229641072496202684204455967079877585222902298106764205135133998090972953520383628510708831082703460991606290744685985479$$
$$750139452655228582453798814640672918256111125205039743095138911390651175435859609841671168579738796470245640955719814431635 4$$
$$457644837518511482245405301440740565385562577850595078878340513313235102523021227328118140278482524336724560134235116393884 4$$
$$751160260302773116066977897506624178923748375866899087268273290546664828667071835154712600576056783666487622818644329704014 9$$
$$289143757596592776905787408930162671504820031787637060237987636494774981115886761843854884523110803981742134227014256951835 8$$
$$867648053131032282696815169343475521145598725337747481116772597223791815778522555020898352615827804770621705162780664672110 4$$
$$964548609477576814694190386581954416880207985409205203558875159833766744720159594584727467939426785504950930092376535301215 0\ 88500325400536.$$

本文的结构如下。第2节中，我们推导出关于 k-满数的根基的两个上界。第3节将介绍我们在应用 abc猜想时所需的多项式恒等式。第4节证明定理 1.1；第5节则构造若干由 k-满数组成的 m项等差数列，以证明定理 1.2。第6节中，我们将注意力限于 $k = 2$ 这一情形，并构造由 m元平方完全数组成的等差数列族，其中 d 相较于 N较小，从而改进了第三作者 [5]的早期成果。最后，第7节讨论这样一个问题：给定 m，确定使得 $N, N + d, \ldots, N + (m - 1)d$ 中的每一个都是平方完全数的 d 最小值，从而推广 Erd˝os、Mollin 和 Walsh [18]的一个猜想。

2. 根基的上界

若 n 是正整数，我们将 n 的根式 Rad(n) 定义为 n 的所有互异素因子的乘积（规定 Rad(1) $= 1$）。本节的目标是在去除某些公因子后，推导若干 k-强数的乘积的根基上界。我们的第一个结果适用于单个根基。

引理 2.1。设 $k \geq 2$, n 是一个 k-强数，且 t 是 n 的任意 k-强因数。那么

$$Rad\left(\frac{n}{t}\right) \leq \frac{n^{1/k}}{t^{1/k^2}}. \tag{2.1}$$

证明。要证明 (2.1)，只需证明

$$1 \leq \frac{1}{k}\nu_p(n) - \frac{1}{k^2}\nu_p(t) \quad \text{for all} \quad p \mid \frac{n}{t} \tag{2.2}$$

and

$$0 \le \frac{1}{k}\nu_p(n) - \frac{1}{k^2}\nu_p(t) \quad \text{for all} \quad p \nmid \frac{n}{t}. \tag{2.3}$$

注意，如果 $p \mid n$，那么 $\nu_p(n) \ge k$ 因为 n 是 k-强数。

情形 1： $\nu_p(n) = k$。那么，对于 n 的任意 k-强因数 t，必有 $\nu_p(t) = 0$ 或 $\nu_p(t) = k$。在前一种情况下，$\nu_p(t) = 0$，且（2.2）成立。在后一种情况下，$p \nmid \frac{n}{t}$。因此，$\nu_p(\frac{n}{t}) = 0$，且（2.3）成立。

情形 2： $e := \nu_p(n) \ge k+1$。那么，对于 n 的任意 k-强因数 t，必有 $\nu_p(t) = 0$、$k \le \nu_p(t) \le e-1$ 或 $\nu_p(t) = e$。如果 $\nu_p(t) = 0$，那么 $p^e \mathrm{k} \frac{n}{t}$，$n$ 并且（2.2）成立。如果 $k \le \nu_p(t) \le e-1$，那么 $p \mid \frac{n}{t}$ 并且

$$\frac{1}{k}\nu_p(n) - \frac{1}{k^2}\nu_p(t) \ge \frac{e}{k} - \frac{e-1}{k^2} = \frac{(k-1)e+1}{k^2} \ge 1,$$

使得 (2.2) 成立。如果 $\nu_p(t) = e$，那么 $p \nmid \frac{n}{t}$，并且我们有 (2.3)。

□

在我们的应用中，实际上需要对若干项乘积的根式进行界定。我们证明如下结果。

引理 2.2。设 $k \ge 2$ 和 $m \ge 3$ 为整数，并假设$m \ge 2k-1$。设 N 和 d 为正整数，满足

$$N, N+d, \ldots, N+(m-1)d$$

是等差数列中的 m k-满数。选取整数 $a_{i,\ j}$，使得

$$N + jd = \prod_{i=k}^{2k-1} (a_{i,j})^i \tag{2.4}$$

并记 $t =$ 最大公因数(N, d)。那么

$$Rad\left(\frac{N}{t}\frac{N+d}{t}\cdots\frac{N+(m-1)d}{t}\right) \le C_m \frac{\prod_{j=0}^{m-1}\prod_{i=k}^{2k-1} a_{i,j}}{t^{m/(2k-1)}}, \tag{2.5}$$

其中

$$C_m = \prod_{\substack{p \le m \\ p\ prime}} p.$$

证明。任何整数$\ell \ge k$都可以表示为 k、$k+1$、.....、$2k-1$ 的线性组合，且系数均为非负数。因此，将 a k-full 数表示为类似 (2.4) 的乘积是显而易见的，

系数均为非负数。首先，注意到 $m \equiv 0$ (模 $2k-1$) 意味着该量

$$\frac{\prod_{j=0}^{m-1}\prod_{i=k}^{2k-1} a_{i,j}}{t^{m/(2k-1)}}$$

是一个有理数，其 $(2k-1)$ 次方是整数，因此其自身也是整数。设 p 是一个素数，且 $p > m$ ，并且

$$\nu_p\left(\frac{N}{t}\frac{N+d}{t}\cdots\frac{N+(m-1)d}{t}\right) \geq 1.$$

Then

$$\nu_p\left(\prod_{j=0}^{m-1}\prod_{i=k}^{2k-1} a_{i,j}^{i}\right) - m\nu_p(t) \geq 1. \tag{2.6}$$

如果 $2k-1 \mid m$,

$$\nu_p\left(\frac{\prod_{j=0}^{m-1}\prod_{i=k}^{2k-1} a_{i,j}}{t^{m/(2k-1)}}\right) = \frac{1}{2k-1}\nu_p\left(\frac{\prod_{j=0}^{m-1}\prod_{i=k}^{2k-1} a_{i,j}^{2k-1}}{t^{m}}\right)$$

因此

$$\nu_p\left(\frac{\prod_{j=0}^{m-1}\prod_{i=k}^{2k-1} a_{i,j}}{t^{m/(2k-1)}}\right) \geq \frac{1}{2k-1}\nu_p\left(\frac{\prod_{j=0}^{m-1}\prod_{i=k}^{2k-1} a_{i,j}^{i}}{t^{m}}\right) \geq \frac{1}{2k-1} > 0.$$

由此可得

$$\nu_p\left(\frac{\prod_{j=0}^{m-1}\prod_{i=k}^{2k-1} a_{i,j}}{t^{m/(2k-1)}}\right) \geq 1,$$

如所需。接下来设 $2k-1 \nmid m$，于是 $m \geq 2k-1$ 意味着 $m \geq 2k$。由于

$$M = \frac{\prod_{j=0}^{m-1}\prod_{i=k}^{2k-1} a_{i,j}^{2k-1}}{t^{m}}$$

是一个正整数，因此只需证明，对于每个满足 (2.6) 的素数 $p > m$，都有

$$\nu_p(M) \geq 2k-1.$$

假设

$$\nu_p(M) \leq 2k-2.$$

由 (2.6)，可得 $\nu_p(M) \geq 1$。进一步注意，若 $2k-1 \mid \nu_p(t)$，则 $2k-1 \mid \nu_p(M)$，这就产生了矛盾。因此，我们可以写成

$$\nu_p(t) = (2k-1)d_1 + d_0, \text{ with } 1 \leq d_0 \leq 2k-2.$$

From

$$\nu_p(M) = \nu_p\left(\prod_{j=0}^{m-1}\prod_{i=k}^{2k-1} a_{i,j}^{i}\right) - m\nu_p(t) + \sum_{i=k}^{2k-2}(2k-1-i)\nu_p\left(\prod_{j=0}^{m-1} a_{i,j}\right),$$

因此可得

$$\sum_{i=k}^{2k-2}\sum_{j=0}^{m-1}(2k-1-i)\nu_p\left(a_{i,j}\right)\leq 2k-3.$$

满足条件的 j 的数量

$$\max\{\nu_p(a_{k,j}),\nu_p(a_{k+1,j}),\ldots,\nu_p(a_{2k-2,j})\}\geq 1$$

因此至多为 $2k-3$。由于 $m\geq 2k$，可知至少有 3 个 j 的值满足

$$\nu_p(a_{k,j})=\nu_p(a_{k+1,j})=\cdots=\nu_p(a_{2k-2,j})=0,$$

由此

$$\nu_p(N+jd)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2k-1).$$

由此可得

$$\nu_p(N+jd)>\nu_p(t), \tag{2.7}$$

对于每个这样的 j。注意，若 $\nu_p(d)>\nu_p(N)$，则对任何 j，都不可能有$\nu_p(N+jd)>\nu_p(t)$；而若 $\nu_p(d)<\nu_p(N)$，则 $\nu_p(N+jd)>\nu_p(t)$ 蕴含 $p\mid j$，于是由 $p>m$ 得到 $j=0$，这与存在三个满足 (2.7) 的 j 值矛盾。

因此，我们可以假设

$$\nu_p(N)=\nu_p(d)=\nu_p(t),$$

由此可知，存在两个满足 (2.7) 的值 $0\leq j_1<j_2\leq m-1$，这意味着

$$p^{\nu_p(d)+1}\mid((N+j_2d)-(N+j_1d))=(j_2-j_1)d,$$

因此 $p\mid j_2-j_1$，从而 $p\leq j_2-j_1<m$，矛盾。

□

3. 等差数列中连续项的恒等式

本节将推导若干多项式恒等式，以便将等差数列中的 m k-幂满数归纳在一起，从而能够应用 Masser 和 Oesterlé 的 abc 猜想。以下内容本质上是 Shorey 和 Tijdeman 的引理 8.1 [22]；为求完整，我们给出其证明。

对于任意正整数 n 和 ℓ，令 $\left\{{n\atop \ell}\right\}$ 表示将 n 个带标签的对象划分为 ℓ 个非空无标签子集的方法数。这也称为第二类斯特林数。那么，从一个含有 n个元素的集合到一个含有 ℓ个元素的集合的满射数为 $\ell!\left\{{n\atop \ell}\right\}$。

由于从一个含有 n个元素的集合到一个含有 j个元素的集合的函数数为 j^n，因此我们有

$$\ell! \left\{ n \atop l \right\} = \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^{\ell-j} \binom{\ell}{j} j^n,$$

根据容斥原理。特别地，当 $n < \ell$ 时，

$$\sum_{j=0}^{\ell} (-1)^{\ell-j} \binom{\ell}{j} j^n = 0 = \sum_{j=1}^{\ell} (-1)^{j-1} \binom{\ell}{j} j^n, \tag{3.1}$$

因为不存在从含有 n 个元素的集合到含有 ℓ 个元素的集合的满射。显然，$\left\{ \ell \atop \ell \right\} = 1$，由此

$$\sum_{j=0}^{\ell} (-1)^{\ell-j} \binom{\ell}{j} j^{\ell} = \ell! \quad \text{or} \quad \sum_{j=1}^{\ell} (-1)^{j-1} \binom{\ell}{j} j^{\ell} = (-1)^{\ell-1} \ell!. \tag{3.2}$$

引理 3.1。设 $\ell \geq 2$ 和 $d \geq 1$ 为整数，并令

$$F_d(X) = \prod_{\substack{1 \leq j \leq \ell \\ j \ odd}} \Big(X + jd\Big)^{\binom{\ell}{j}} - \prod_{\substack{0 \leq j \leq \ell \\ j \ even}} \Big(X + jd\Big)^{\binom{\ell}{j}}.$$

于是 $F_d(X) = d^{\ell} G_d(X)$，其中 $G_d(X)$ 是关于 X 和 d的一个具有整数系数、次数为 $2^{\ell-1} - \ell$的二元形式，满足 $G_0(1) = (\ell - 1)!$ 。

证明。首先，将 d 视为变量并展开 $F_d(X)$，显然可见它是如下形式的齐次多项式

$$\sum_{i+j=2^{\ell-1}} c_{i,j} d^i X^j \tag{3.3}$$

as

$$\sum_{1 \leq j \leq \ell,\, j \text{ odd}} \binom{\ell}{j} = \sum_{0 \leq j \leq \ell,\, j \text{ even}} \binom{\ell}{j} = 2^{\ell-1}.$$

考虑比值

$$R(x) = \frac{\prod_{1 \leq j \leq \ell,\, j \text{ odd}} \Big(1 + jx\Big)^{\binom{\ell}{j}}}{\prod_{0 \leq j \leq \ell,\, j \text{ even}} \Big(1 + jx\Big)^{\binom{\ell}{j}}}.$$

取对数并利用 $\log(1 + x)$ 的泰勒级数，我们可以将 $\log R(x)$ 展开为

$$\sum_{j=1}^{\ell} (-1)^{j-1} \binom{\ell}{j} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{(jx)^i}{i} = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{x^i}{i} \sum_{j=1}^{\ell} (-1)^{j-1} \binom{\ell}{j} j^i.$$

由 (3.1) 可知，项 x、x^2、.....、$x^{\ell-1}$ 的系数均为零，因此

$$\log R(x) = (\ell-1)!x^\ell + O_\ell(x^{\ell+1})$$

由 (3.2) 得。将两边取指数，并使用 e^x的泰勒级数，我们得到

$$R(x) = 1 + (\ell-1)!x^\ell + O_\ell(x^{\ell+1}).$$

将 $x = d/N$ 代入某个较大的参数 $N > d$，我们有

$$\frac{\prod_{1\le j\le \ell,\, j \text{ odd}}\Big(N+jd\Big)^{\binom{\ell}{j}}}{\prod_{0\le j\le \ell,\, j \text{ even}}\Big(N+jd\Big)^{\binom{\ell}{j}}} = 1 + (\ell-1)!\frac{d^\ell}{N^\ell} + O_\ell\Big(\frac{d^{\ell+1}}{N^{\ell+1}}\Big),$$

i.e.

$$F_d(N) = (\ell-1)!N^{2^{\ell-1}-\ell}d^\ell + O_\ell\Big(N^{2^{\ell-1}-\ell-1}d^{\ell+1}\Big),$$

由此

$$\lim_{N\to\infty}\frac{F_d(N)}{N^{2^{\ell-1}-\ell}} = (\ell-1)!d^\ell.$$

由于 $F_d(X)$ 是一个多项式，其关于 X的次数必定恰为 $2^{\ell-1}-\ell$，首项系数为 $(\ell-1)!d^\ell$。结合 (3.3)，引理得证。□

4. 定理 1.1 的证明

我们已经具备证明定理 1.1 所需的工具，而该定理从根本上依赖于 abc-猜想:

猜想 4.1 (Masser 和 Oesterl´e)。若 $\epsilon > 0$，则存在一个常数 $\kappa(\epsilon) > 0$，使得当 a、b 和 c 为正的、满足 $a+b=c$ 的互素整数时，

$$c < \kappa(\epsilon)Rad(abc)^{1+\epsilon}.$$

设 $m \ge 3$ 和 $k \ge 2$ 是整数，且N、$N+d$、.....、$N+(m-1)d$均为 k-幂满数。由引理 3.1，取$\ell = m-1$，可得

$$\prod_{\substack{1\le j\le m-1\\ j \text{ odd}}}\Big(N+jd\Big)^{\binom{m-1}{j}} = \prod_{\substack{0\le j\le m-1\\ j \text{ even}}}\Big(N+jd\Big)^{\binom{m-1}{j}} + d^{m-1}G_d(N). \tag{4.1}$$

Let

$$t := \gcd(N,d) = \gcd(N,N+d),$$

由于 N 和 $N+d$ 均为 k-幂满数，因此它是 k-幂满数。于是，$N_0 = N/t$ 和$d_0 = d/t$ 互素，(4.1)化为

$$\prod_{\substack{1\le j\le m-1\\ j \text{ odd}}} \Big(N_0 + jd_0\Big)^{\binom{m-1}{j}} = \prod_{\substack{0\le j\le m-1\\ j \text{ even}}} \Big(N_0 + jd_0\Big)^{\binom{m-1}{j}} + d_0^{m-1} G_{d_0}(N_0). \tag{4.2}$$

Let

$$D := \gcd\left(\prod_{\substack{1\le j\le m-1\\ j \text{ odd}}} \Big(N_0 + jd_0\Big)^{\binom{m-1}{j}}, \prod_{\substack{0\le j\le m-1\\ j \text{ even}}} \Big(N_0 + jd_0\Big)^{\binom{m-1}{j}}\right)$$

由于最大公因数$(d_0,\ N_0) = 1$，我们有最大公因数$(d_0,\ N_0 + id_0) = 1$，因此

$$\gcd(N_0 + id_0, N_0 + jd_0) = \gcd(N_0 + id_0, (j-i)d_0) = \gcd(N_0 + id_0, j-i),$$

由此可得

$$\gcd(N_0 + id_0, N_0 + jd_0) \le |j-i|$$

对任意 $1 \le i,\ j \le m-1$。因此

$$D \le (m-1)^{(m-1)^2} \ll_m 1.$$

由于 $t \mid N$ 且 $t \mid d$，我们有 $t \mid N,\ N+d,\ \ldots,\ N+(m-1)d$。

首先假设 $d \le N$。那么

$$\mathrm{Rad}(N_0),\ \mathrm{Rad}(N_0+d_0),\ \cdots,\ \mathrm{Rad}(N_0+(m-1)d_0) \ll \frac{N^{1/k}}{t^{1/k^2}}, \tag{4.3}$$

由引理 2.1 得。现在，我们将猜想 4.1 应用于 (4.2)，并除以 D，即取

$$a = \frac{1}{D}\prod_{\substack{0\le j\le m-1\\ j \text{ even}}} \Big(N_0 + jd_0\Big)^{\binom{m-1}{j}},\ \ b = \frac{1}{D} d_0^{m-1} G_{d_0}(N_0)$$

and

$$c = \frac{1}{D}\prod_{\substack{1\le j\le m-1\\ j \text{ odd}}} \Big(N_0 + jd_0\Big)^{\binom{m-1}{j}},$$

从 (4.3) 得出

$$\frac{N^{2^{m-2}}}{t^{2^{m-2}} D} \ll_{\epsilon,m} \left(\left(\frac{N^{1/k}}{t^{1/k^2}}\right)^m \cdot \frac{d}{t} \cdot \frac{N^{2^{m-2}-m+1}}{t^{2^{m-2}-m+1}}\right)^{1+\epsilon}, \tag{4.4}$$

其中 $\epsilon > 0$ 是任意的。由于 $d \le N$，可得

$$t \gg N^{\frac{m(1-1/k)-2}{m(1-1/k^2)-2} - \epsilon'},$$

其中 $\epsilon' > 0$ 取决于 ϵ，k 和 m（但当 ϵ 趋于零时，它也趋于零）。仅利用 $t \le d$，由（4.4）可得

$$d \gg N^{\frac{m(1-1/k)-1}{m(1-1/k^2)-1}-\epsilon''},$$

其中 ϵ'' 足够小且为正。

另一方面，如果 $d > N$，

$$\frac{d^{2^{m-2}}}{t^{2^{m-2}}D} \ll_{\epsilon,m} \left(\left(\frac{d^{1/k}}{t^{1/k^2}}\right)^{m-1} \cdot \frac{N^{1/k}}{t^{1/k^2}} \cdot \frac{d}{t} \cdot \frac{d^{2^{m-2}-m+1}}{t^{2^{m-2}-m+1}}\right)^{1+\epsilon}, \tag{4.5}$$

从而

$$t \gg d^{\frac{m(1-1/k)-2}{m(1-1/k^2)-2}-\epsilon'},$$

and

$$N \gg d^{\frac{m(1-1/k)+1/k-2}{m(1-1/k^2)+1/k-2}-\epsilon''}.$$

重新命名 ϵ 后，我们得到不等式 (1.2)、(1.3) 和 (1.4)。

现在假设 $m \ge 2k-1$。如果 $d \le N$，利用引理 2.2，我们可以将不等式 (4.4) 替换为

$$\frac{N^{2^{m-2}}}{t^{2^{m-2}}D} \ll_{\epsilon,m} \left(\left(\frac{N^{1/k}}{t^{1/(2k-1)}}\right)^{m} \cdot \frac{d}{t} \cdot \frac{N^{2^{m-2}-m+1}}{t^{2^{m-2}-m+1}}\right)^{1+\epsilon}, \tag{4.6}$$

而 $d > N$ 意味着

$$\frac{d^{2^{m-2}}}{t^{2^{m-2}}D} \ll_{\epsilon,m} \left(\left(\frac{d^{1/k}}{t^{1/(2k-1)}}\right)^{m-1} \cdot \frac{N^{1/k}}{t^{1/(2k-1)}} \cdot \frac{d}{t} \cdot \frac{d^{2^{m-2}-m+1}}{t^{2^{m-2}-m+1}}\right)^{1+\epsilon}. \tag{4.7}$$

如前所述的论证可得 (1.5)、(1.6) 和 (1.7)。至此，定理 1.1 得证。

5. 定理 1.2 的证明

5.1. 情形 $(m,k) = (3,2)$。 构造三项互素平方满数等差数列的方法有很多。最简单的一种是注意到，若 X, Y 和 Z 是满足 $X^2 + Y^2 = 2Z^2$ 的互素正整数，且 $X < Y$，那么令 $N = X^2$ 和 $d = Z^2 - X^2$，即可得到由互素平方满数组成的三项等差数列 N, $N+d, N+2d$。对 $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ 运用标准因式分解论证可知，所有这类解 X, Y, Z 均可参数化为

$$X = a^2 - b^2 \pm 2ab,\ Y = a^2 - b^2 \mp 2ab \ \text{ and } \ Z = a^2 + b^2,$$

其中 a 和 b 是整数，且 $\gcd(a, b) = 1$，而 a 和 b 的奇偶性相反。

5.2. 情形 $(m,\ k) = (3,\ 3)$。 假设我们有一个解满足

$$X^3 + Y^3 = 2 \cdot 3^4 Z^3, \tag{5.1}$$

其中 X 和 Y 互素且不相等，并且 $Z \neq 0$。注意，这保证了 $X \equiv -Y$（模 3）。令 $X_0 = X$、$Y_0 = Y$，一般地，对于 $i \geq 0$，设

$$X_{i+1} = X_i(X_i^3 + 2Y_i^3),\ \ Y_{i+1} = -Y_i(2X_i^3 + Y_i^3)$$

and

$$Z_{i+1} = Z_i(X_i - Y_i)(X_i^2 + X_iY_i + Y_i^2).$$

由此可知，$(X_{i+1},\ Y_{i+1},\ Z_{i+1})$ 满足方程 (5.1)。此外，

$$|Z_{i+1}| = |X_i - Y_i|(X_i^2 + X_iY_i + Y_i^2)|Z_i| > |Z_i|.$$

设 p 是一个素数，具有如下性质：$p \mid$ 最大公因数$(X_1,\ Y_1)$。由于 X 和 Y 互素且为奇数，因此可得 $p \mid X^3 + 2Y^3$ 和$p \mid 2X^3 + Y^3$，从而 $p = 3$，这与 X 和 Y 互素且满足 $X \equiv -Y$（模 3）的事实矛盾。因此，我们有最大公因数$(X_1,\ Y_1) = 1$。从解 $X = 37,\ Y = 17,$ $Z = 7$ 出发，便可得到方程 (5.1) 的无穷多个互不相同的互素解。

为了确保存在无穷多个这样的解，且每个X、Y和 Z都为正（这样，若选取 $N = X^3$和 $d = 3^4Z^3 - X^3$，则 N、$N+d$和 $N+2d$互素、为正且是立方幂满数），我们必须稍加小心。我们断言，至少以下三元组中的一个

$$\pm(X_{i+h}, Y_{i+h}, Z_{i+h}),\ \ \text{for}\ \ 0 \leq h \leq \log|X_i|$$

完全由正整数组成。若 (X_i, Y_i, Z_i) 和 $(-X_i, -Y_i, -Z_i)$ 不满足这一点，则不妨（可能将 (X_i, Y_i, Z_i) 替换为 (Y_i, X_i, Z_i)、$(-X_i, -Y_i, -Z_i)$ 或 $(-Y_i, -X_i, -Z_i)$ 之一之后）假设 $X_i > 0$、$Y_i < 0$ 和 $Z_i > 0$。此外，若有 $X_i > \sqrt[3]{2}|Y_i|$，则 X_{i+1} 和 Y_{i+1} 均为正。若 $X_i > 0$,$Y_i < 0$ 且有 $X_i < \sqrt[3]{2}|Y_i|$，那么由于 $X_i^3 + Y_i^3 > 0$，可得 $X_{i+1} < 0$，并且 $Y_{i+1} > 0$。记

$$u = \frac{Y_i}{X_i} = -1 + \delta,\ \ \text{where}\ \ \frac{1}{|X_i|} \leq \delta < 1 - 2^{-1/3}.$$

Then

$$\left|\frac{Y_{i+1}}{X_{i+1}}\right| = |u| \cdot \left|\frac{u^3 + 2}{2u^3 + 1}\right|$$

并且，利用中值定理，我们可以写出

$$\frac{u^3 + 2}{2u^3 + 1} = -1 - \delta_1,\ \ \text{where}\ \ \delta_1 > 9\delta.$$

由此可得

$$\left|\frac{Y_{i+1}}{X_{i+1}}\right| = (1-\delta)(1+\delta_1) > (1-\delta)(1+9\delta) > 1 + (9\cdot 2^{-1/3} - 1)\delta$$

因此

$$\left|\frac{Y_{i+1}}{X_{i+1}}\right| > 1 + 6\delta.$$

交换 X_{i+1} 和 Y_{i+1} 的角色并反复应用这一论证，经过 h 次迭代后，要么我们已经找到了一对同号的 X_{i+j} 和 Y_{i+j}， $2 \le j \le h$，要么有 $X_{i+h} > 0$、 $Y_{i+h} < 0$，并且

$$\left|\frac{X_{i+h}}{Y_{i+h}}\right| > 1 + 6^h\delta.$$

由于 $\delta \ge \frac{1}{|X_i|}$，如果 $h \ge \frac{\log |X_i|}{\log 6}$，则可推出

$$\left|\frac{X_{i+h}}{Y_{i+h}}\right| > 2 > \sqrt[3]{2},$$

因此 X_{i+h+1} 和 Y_{i+h+1} 都为正数，正如所要求的。

5.3. 情形 $(m,\ k) = (4,\ 2)$。 记 $N = N_0^2$ 和 $d = 4d_0$，其中我们假设 $\gcd(N_0,\ 6d_0) = 1$。假设

$$N + d = N_0^2 + 4d_0 = r^2$$

and

$$N + 2d = N_0^2 + 8d_0 = s^2,$$

对于整数 r 和 s，则

$$N_0^2 + s^2 = 2r^2.$$

我们将这些解参数化为

$$N_0 = a^2 - b^2 + 2ab,\ s = a^2 - b^2 - 2ab \ \text{ and } \ r = a^2 + b^2,$$

其中我们假设最大公因数 $(a, b) = 1$，且 a 和 b 的奇偶性相反。由此可得

$$d_0 = ab(b^2 - a^2)$$

因此

$$N + 3d = N_0^2 + 12d_0 = a^4 - 8a^3b + 2a^2b^2 + 8ab^3 + b^4 = F(a, b).$$

我们的目标现在是证明，存在无穷多对奇偶性相反的互素整数 a 和 b，使得 $F(a,\ b) = 73^3c^2$，其中 c 是一个整数。为此，我们先假设 $F(a,\ b) = 73z^2 \text{ with} b \ne 0$。令 $X = a/b$ 和 $Y = z/b^2$，即可得出

$$X^4 - 8X^3 + 2X^2 + 8X + 1 = 73Y^2$$

注意到 $F(2,\ -1) = 73$，我们令 $X = -2 + \frac{1}{u}$，于是

$$\frac{u^4(X^4 - 8X^3 + 2X^2 + 8X + 1)}{73} = u^4 - \frac{128}{73}u^3 + \frac{74}{73}u^2 - \frac{16}{73}u + \frac{1}{73}.$$

这里的右侧为

$$\left(u^2 - \frac{64}{73}u + \frac{653}{73^2}\right)^2 + \left(-\frac{1680}{73^3}u - \frac{37392}{73^4}\right),$$

因此，取 $u = S/T, x = 2\cdot 73^2 T$和 $y = 4\cdot 73^3 S$，可得

$$E\ :\ y^2 - 128xy - 3360y = x^3 - 2612x^2 + 149568x. \tag{5.2}$$

将其追溯回原始变量 a 和 b，可得

$$\frac{y}{x} = 146u = \frac{146}{X+2} = \frac{146}{a/b+2} = \frac{146b}{a+2b}.$$

我们的椭圆曲线 E 具有 a-不变量

$$a_1 = -128,\ a_2 = -2612,\ a_3 = -3360,\ a_4 = 149568 \text{ and } a_6 = 0,$$

and

$$E(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^2,$$

其生成元为

$$T_1 = (-1176, -73\cdot 1008),\ T_2 = (-300, -73\cdot 240),$$

$$P_1 = (-976, -49344)$$

and

$$P_2 = (-408, -30192).$$

我们所知的最小示例中，使 $F(a,\ b) = 73^3c^2$且 c为整数的情形为 N和 d，如引言中所给出，对应于点

$$P = 14P_1 - 8P_2 + T_1,$$

其中我们有

$a = 144921248310429651263484981703141139178769570556975502152668794143$
$480052182418451758892471902780326419842516342775164431723307619835117$
$757401116539554425779178057391556558137040915502636845082113846639213$
$348334950317622079833010174349995034350285665447823774658503477943122$
58030799611

and

$b = 155947482664129442288576782709265033399180164546518342682672792886$
$842374838736050395265618172449826739719276740624091534227467052111071$
$855502028997131040626195954145804892358896249666194959689548129952992$
$225745137748092070297754429425885775579351566765764251536815544138122$
5265260358。

对于正整数 n，写出

$$nP_1 = \left(\frac{\phi_n}{\psi_n^2}, \frac{\Omega_n}{\psi_n^3}\right).$$

于是，在原来的四次曲线上，我们有

$$\frac{2b}{a+2b} = \frac{\Omega_n}{73\psi_n\phi_n}.$$

取 $x = -976$，我们可以定义

$$\psi_0 = 0,\ \psi_1 = 1 \ \text{ and } \psi_2 = 2^5 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13,$$

$$\psi_3 = 3x^4 + b_2x^3 + 3b_4x^2 + 3b_6x + b_8,$$

其中

$$b_2 = a_1^2 + 4a_2 = 5936,\ b_4 = 2a_4 + a_1a_3 = 729216,$$

$b_6 = a_3^2 = 11289600$ 和 $b_8 = -a_1a_3a_4 + a_2a_3^2 - a_4^2 = -116185227264$.
Thus

$$\psi_3 = -861920436224 = -2^{13} \cdot 105214897.$$

最后,

$$\frac{\psi_4}{\psi_2} = 2x^6 + b_2x^5 + 5b_4x^4 + 10b_6x^3 + 10b_8x^2 + (b_2b_8 - b_4b_6)x + (b_4b_8 - b_6^2).$$

我们通过递推生成 ψ_n，其中 $n \geq 5$

$$\psi_{m+n}\psi_{m-n} = \psi_{m+1}\psi_{m-1}\psi_n^2 - \psi_{n+1}\psi_{n-1}\psi_m^2. \tag{5.3}$$

我们还有

$$\phi_n = -976\psi_n^2 - \psi_{n-1}\psi_{n+1}$$

and

$$\Omega_n = \frac{1}{2\psi_n}\left(\psi_{2n} + \psi_n^2\left(128\phi_n + 3360\psi_n^2\right)\right).$$

我们计算得出，ψ_n 模 73 是周期性的，周期为 $2628 = 36 \cdot 73$。由 ϕ_n 和 Ω_n 满足

$$\phi_n = -976\psi_n^2 - \psi_{n-1}\psi_{n+1}$$

and

$$\Omega_n = \frac{1}{2\psi_2}\left(\psi_{n+2}\psi_{n-1}^2 - \psi_{n-2}\psi_{n+1}^2\right) + \psi_n\left(64\phi_n + 1680\psi_n^2\right),$$

分别对 $n \geq 1$ 和 $n \geq 2$ 成立时，我们可以验证，ϕ_n 模 73 周期为周期长度 $1314 = 18 \cdot 73$，而 Ω_n 模 73 的周期长度为 $876 = 12 \cdot 73$。
简短计算即可得出

$$\psi_n\phi_n \equiv 2\Omega_n \pmod{73} \ \text{ and } \ 73 \nmid \Omega_n,$$

恰当的条件是 $n \equiv 39$ (模 73)。对于这样的 n，我们有

$$\frac{\psi_n \phi_n}{\Omega_n} \equiv 2 \pmod{73},$$

由此

$$\frac{a}{b} = \frac{146\psi_n\phi_n}{\Omega_n} - 2 \equiv 290 \pmod{73^2}.$$

$X^4 - 8X^3 + 2X^2 + 8X + 1$ 的因式分解为

$$(X - 290)(X - 2738)(X - 2896)(X - 4742) \pmod{73^2}$$

因此可推出

$$F(a, b) = a^4 - 8a^3b + 2a^2b^2 + 8ab^3 + b^4 \equiv 0 \pmod{73^2},$$

因此，由于 $F(a, b) = 73z^2$, $73 \mid z$，即 $F(a, b) = 73^3c^2$，其中某个整数为 c。

接下来只需证明，存在无穷多个指标 $n \equiv$39（模 73），使得 a 和 b 的奇偶性相反。由于

$$\frac{a}{b} = \frac{146\psi_n\phi_n}{\Omega_n} - 2,$$

为了使 a 为偶数且 b 为奇数，只需证明

$$\nu_2(\Omega_n) \leq \nu_2(\psi_n) + \nu_2(\phi_n). \tag{5.4}$$

我们先证明以下结果。

命题 5.1. 若 k 是一个正整数，则有

$$\nu_2(\psi_{4k+1}) = 13k(2k + 1), \quad \nu_2(\psi_{4k-1}) = 13k(2k - 1),$$

$$\nu_2(\psi_{4k+2}) = 26k(k + 1) + 5$$

and

$$\nu_2(\psi_{4k}) = \begin{cases} 26k^2 + 4 & \text{if } k \text{ is odd} \\ 26k^2 + 5 & \text{if } k \equiv 2 \pmod 4 \\ \geq 26k^2 + 6 & \text{if } 4 \mid k. \end{cases}$$

证明. 我们使用归纳法和恒等式（5.3）。我们有

$$\nu_2(\psi_2) = 5,\ \nu_2(\psi_3) = 13,\ \nu_2(\psi_4) = 30,\ \nu_2(\psi_5) = 39,\ \nu_2(\psi_6) = 57,$$

$$\nu_2(\psi_7) = 78,\ \nu_2(\psi_8) = 109,\ \nu_2(\psi_9) = 130,\ \nu_2(\psi_{10}) = 161,\ \nu_2(\psi_{11}) = 195,$$

$$\nu_2(\psi_{12}) = 238,\ \nu_2(\psi_{13}) = 273,\ \nu_2(\psi_{14}) = 317,\ \nu_2(\psi_{15}) = 364$$

and

$$\nu_2(\psi_{16}) = 422,$$

通过直接计算。

那么，假设对于给定的 $k \geq 3$，所有 $n \leq 4k+1$ 都满足我们所需的结论。首先考虑

$$\psi_{4k+\kappa}\psi_{4k-\kappa} = \psi_{4k+1}\psi_{4k-1}\psi_{\kappa}^2 - \psi_{\kappa+1}\psi_{\kappa-1}\psi_{4k}^2,$$

对 $\kappa \in \{2,3,5\}$，我们有

$$\nu_2\left(\psi_{4k+1}\psi_{4k-1}\psi_{\kappa}^2\right) = 13k(2k+1)+13k(2k-1)+2\nu_2(\psi_\kappa) = 52k^2+2\nu_2(\psi_\kappa),$$

而

$$\nu_2\left(\psi_{\kappa+1}\psi_{\kappa-1}\psi_{4k}^2\right) \geq 52k^2 + 8 + \nu_2(\psi_{\kappa+1}) + \nu_2(\psi_{\kappa-1}).$$

对于每个 $\kappa \in \{2,3,5\}$，我们发现

$$8 + \nu_2(\psi_{\kappa+1}) + \nu_2(\psi_{\kappa-1}) > 2\nu_2(\psi_\kappa),$$

由此

$$\nu_2\left(\psi_{4k+\kappa}\right) = 52k^2 + 2\nu_2(\psi_\kappa) - \nu_2\left(\psi_{4k-\kappa}\right).$$

分别代入 $\kappa = 2$、$\kappa = 3$ 和 $\kappa = 5$，于是我们有

$$\nu_2\left(\psi_{4k+2}\right) = 52k^2 + 10 - (26k(k-1)+5) = 26k(k+1)+5,$$

$$\nu_2\left(\psi_{4k+3}\right) = 52k^2 + 26 - (13(k-1)(2k-1)) = 13(k+1)(2k+1)$$

and

$$\nu_2\left(\psi_{4k+5}\right) = 52k^2 + 78 - (13(k-1)(2k-3)) = 13(k+1)(2k+3),$$

在每种情况下均可如愿。

于是，剩下要证明的是：若 k为偶数，则 $\nu_2(\psi_{4k+4}) = 26(k+1)^2+4$；若 $k \equiv 1$ (模 4)，则 $\nu_2(\psi_{4k+4}) = 26(k+1)^2 + 5$；若 $k \equiv -1$ (模 4)，则 $\nu_2(\psi_{4k+4}) \geq 26(k+1)^2 + 6$。我们首先利用 (5.3) 和$m = 4k+1,\ n = 3$，得到

$$\psi_{4k+4}\psi_{4k-2} = \psi_{4k}\psi_{4k+2}\psi_3^2 - \psi_4\psi_2\psi_{4k+1}^2.$$

若 k 为偶数，

$$\nu_2\left(\psi_{4k}\psi_{4k+2}\psi_3^2\right) \geq 26k^2 + 5 + 26k(k+1) + 5 + 26 = 52k^2 + 26k + 36,$$ 而

$$\nu_2\left(\psi_4\psi_2\psi_{4k+1}^2\right) = 52k^2 + 26k + 35,$$

因此

$$\nu_2\left(\psi_{4k+4}\right) = 26k^2 + 52k + 30,$$

如愿。另一方面，若 k 为奇数，

$$\nu_2\left(\psi_{4k}\psi_{4k+2}\psi_3^2\right) = 26k^2 + 4 + 26k(k+1) + 5 + 26 = 52k^2 + 26k + 35$$以及

$$\nu_2\left(\psi_4\psi_2\psi_{4k+1}^2\right) = 30 + 5 + 26k(2k+1) = 52k^2 + 26k + 35,$$

由此可得

$$\nu_2\left(\psi_{4k+4}\right) \geq 52k^2+26k+36-(26k(k-1)+5) = 26k^2+52k+31.$$

若 $k \equiv 1$ （模 4），则可写成 $k = 4j+1$，其中 j 为整数，使得 $4k+4 = 16j+8$，并且

$$\psi_{16j+8}\psi_8 = \psi_{8j+9}\psi_{8j+7}\psi_{8j}^2 - \psi_{8j+1}\psi_{8j-1}\psi_{8j+8}^2.$$

我们有

$$\nu_2\left(\psi_{8j+9}\psi_{8j+7}\psi_{8j}^2\right) = 208(j+1)^2 + 2\nu_2(\psi_{8j})$$

and

$$\nu_2\left(\psi_{8j+1}\psi_{8j-1}\psi_{8j+8}^2\right) = 208j^2 + 2\nu_2(\psi_{8j+8}).$$

由于 j 和 $j+1$ 的奇偶性相反，因此

$$\nu_2\left(\psi_{4k+4}\right) = 26k^2+52k+31,$$

如所需。最后，若 $k \equiv -1$ （模 4），设 $k = 4j-1$，则有 $4k+4 = 16j$，并考虑

$$\psi_{16j}\psi_8 = \psi_{8j+5}\psi_{8j+3}\psi_{8j-4}^2 - \psi_{8j-3}\psi_{8j-5}\psi_{8j+4}^2.$$

我们有

$$\nu_2\left(\psi_{8j+5}\psi_{8j+3}\psi_{8j-4}^2\right) = 52(2j+1)^2 + 52(2j-1)^2 + 8$$

and

$$\nu_2\left(\psi_{8j-3}\psi_{8j-5}\psi_{8j+4}^2\right) = 52(2j+1)^2 + 52(2j-1)^2 + 8,$$

由此

$$\nu_2\left(\psi_{4k+4}\right) \geq 26k^2+52k+32,$$

再次得证。 □

我们将证明不等式 (5.4) 对所有 $n \equiv 4$(模 16) 都成立。设 $n = 16k+4$。应用命题 5.1，可得

$$\nu_2(\psi_{n-1}\psi_{n+1}) = 52(4k+1)^2,$$

而

$$\nu_2(976\psi_n^2) > 52(4k+1)^2,$$

因此，由 $\phi_n = -976\psi_n^2 - \psi_{n-1}\psi_{n+1}$,

$$\nu_2(\phi_n) = 52(4k+1)^2.$$

我们还可得

$$\nu_2(\psi_n) = 26(4k+1)^2+4 \text{ and } \nu_2(\psi_{2n}) = 26(8k+2)^2+5,$$

由此

$$\nu_2\left(64\psi_n\phi_n\right) = 78(4k+1)^2+10,$$
$$\nu_2\left(1680\psi_n^3\right) = 78(4k+1)^2+16$$

and

$$\nu_2\left(\frac{\psi_{2n}}{2\psi_n}\right) = 78(4k+1)^2.$$

由此可得

$$\Omega_n = \frac{1}{2\psi_n}\left(\psi_{2n} + \psi_n^2\left(128\phi_n + 3360\psi_n^2\right)\right)$$

that

$$\nu_2\left(\Omega_n\right) = 78(4k+1)^2,$$

使得

$$\nu_2\left(\frac{\Omega_n}{\psi_n\phi_n}\right) = -4,$$

这蕴含 (5.4)。

由此我们推导出以下结论。

命题 5.2. 通过 *(5.2)* 定义椭圆曲线 E，并令

$$P_1 = (-976, -49344)$$

为 E 上的一个点。对于正整数 n，记

$$nP_1 = \left(\frac{\phi_n}{\psi_n^2}, \frac{\Omega_n}{\psi_n^3}\right).$$

假设 a 和 b 是满足以下条件的互素整数

$$\frac{a}{b} = \frac{146\psi_n\phi_n}{\Omega_n} - 2,$$

其中

$$n \equiv 404 \pmod{16 \cdot 73}.$$

若定义

$$N = \left(a^2 - b^2 + 2ab\right)^2 \quad and \quad d = 4ab(b^2 - a^2),$$

then

$$N, N+d, N+2d, N+3d$$

是互素的平方完全数。更具体地说，存在无穷多个互素整数四元组 x, y, z 和 w，使得

$$N = x^2,\ N+d = y^2,\ N+2d = z^2 \quad and \quad N+3d = 73^3w^2.$$

6. 定理 1.1 的尖锐性： $k = 2$

为简便起见，在本文余下部分，我们将重点讨论 $k = 2$ 的情形，即平方满数（又称强数）的等差数列。在 [5], 中，第三作者定义了

$$\theta_m = \liminf \left\{ \frac{\log d}{\log N} : N, d \in \mathbb{N},\ N, N+d, \ldots, N+(m-1)d \text{ squarefull} \right\}$$

并证明，在假设 abc 猜想成立的条件下，有

$$\theta_3 = \frac{1}{2},\ \ \frac{1}{2} \le \theta_4 \le \frac{9}{10} \ \text{ and } \ \frac{1}{2} \le \theta_m \le 1 - \frac{1}{10 \cdot 3^{m-5}},$$

对于 $m \ge 5$。在本节中，我们将对所有 $m \ge 4$ 锐化这一结果。

命题 6.1。 假设 abc 猜想成立，若 $m \ge 4$ 是一个整数，则

$$\frac{3m-6}{4m-6} \le \theta_m \le \frac{2m-4}{2m-3}.$$

我们注意到，下界是定理 1.1 的直接推论，具体来说是不等式 (1.6) 的直接推论，并且依赖于 abc 猜想；而上界则是无条件成立的。为了推导出这些上界，我们实际上将证明以下更强的结果。

定理 6.2。 设 $m \ge 4$。那么存在无穷多个正整数 d 和 N，使得以下各数

$$N, N+d, \ldots, N+(m-1)d$$

都是平方满数，并且

$$d \ll N^{\frac{2m-4}{2m-3}} (\log N)^{\frac{-2}{2m-3}}.$$

证明。 首先通过以下方式定义整数 x_k 和 y_k：

$$x_k + \sqrt{2} y_k = (1+\sqrt{2})^k,$$

其中 k为非负整数。我们将用到以下结果。

引理 6.3。 若 j 为非负整数且 $k = 3 \cdot 5^j \pm 1$，则

$$y_k^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5^{j+1}}. \tag{6.1}$$

证明。 （引理 6.3）首先注意到，若 j 为非负整数，则

$$y_{3 \cdot 5^j} \equiv 0 \pmod{5^{j+1}}. \tag{6.2}$$

为此，在 j 中应用归纳法，从观察到 $y_3 = 5$ 这一事实出发。假设 (6.2) 成立，则记

$$A = (1+\sqrt{2})^{3 \cdot 5^j} \ \text{ and } \ B = (1-\sqrt{2})^{3 \cdot 5^j},$$

我们有

$$y_{3\cdot 5^{j+1}} = \frac{A^5 - B^5}{2\sqrt{2}} = \frac{A-B}{2\sqrt{2}}(A^4 + A^3B + A^2B^2 + AB^3 + B^4)$$

从而

$$y_{3\cdot 5^{j+1}} = y_{3\cdot 5^j}(A^4 + A^3B + A^2B^2 + AB^3 + B^4).$$

因此，剩下需要证明的是

$$A^4 + A^3B + A^2B^2 + AB^3 + B^4 \equiv 0 \pmod 5, \tag{6.3}$$

这是以下事实的推论:

$$A^4 + A^3B + A^2B^2 + AB^3 + B^4 \equiv (A-B)^4 \pmod 5.$$

为了完成引理 6.3 的证明，我们注意到，对于任意整数k，都有

$$y_{2k-1}y_{2k+1} - y_{2k}^2 = 1.$$

将此恒等式应用于 $k = \frac{3\,5^j \pm 1}{2}$，由此（6.2）推出（6.1），正如所需。□

现在令 $m \geq 4$ 为一个整数，并设

$$x = y_{3\cdot 5^j - 1},$$

使得 $2x^2 + 1$ 是平方数，并且我们有

$$x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5^{j+1}}.$$

对于 $3 \leq j \leq m$，定义

$$t_j = 2^{-\delta}\left(2x^2 + j\right),$$

其中，若 j 为奇数，则 $\delta = 0$；若 j 为偶数，则 $\delta = 1$。取

$$d = 2^2\left(\prod_{j=3}^{m-1} t_j^2\right)\left(\frac{x^2+1}{5^{j+1}}\right)^2$$

and

$$N = 2x^2 d,$$

使得

$$N + jd = d(2x^2 + j)$$

对每个 $0 \leq j \leq m-1$ 都是平方满数。由于对每个 k，我们有

$$y_k = \frac{(1+\sqrt{2})^k - (1-\sqrt{2})^k}{2\sqrt{2}},$$

由此可得

$$x < \frac{(1+\sqrt{2})^{3\cdot 5^j - 1}}{2\sqrt{2}}$$

因此

$$\log x < 2.65 \cdot 5^j < 5^{j+1}.$$

由于 $t_j \leq 2x^2 + m$，因此对每个 j，我们有

$$d \ll \frac{x^{4(m-2)}}{\log^2 x}$$

因此

$$\frac{d}{N^{\frac{2m-4}{2m-3}}} = d^{\frac{1}{2m-3}} (2x^2)^{-\frac{2m-4}{2m-3}} \ll (\log x)^{\frac{-2}{2m-3}} \ll (\log N)^{\frac{-2}{2m-3}},$$

i.e.

$$d \ll N^{\frac{2m-4}{2m-3}} (\log N)^{\frac{-2}{2m-3}}.$$

定理 6.2 的证明至此完成。 □

6.1. 情形 $m = 3$. 在 [5], 第三作者询问：“是否‘可能构造出无穷多个公差为 $d = o(N^{1/2})$ 的强数 [三项等差数列]’？”在本小节中，我们将给出一族例子的构造；至少从猜想的角度来看，这些例子达到了这一界限。假设

$$d = 4d_0 \text{ and } N = 16N_0^2.$$

为了使

$$N + d = 2^2 \cdot 3^3 \cdot t^2 \text{ and } N + 2d = 2^3 \cdot s^2,$$

其中 s和 t 为整数，我们要求

$$4N_0^2 + d_0 = 3^3 t^2 \text{ and } 2N_0^2 + d_0 = s^2,$$

因此

$$2N_0^2 + s^2 = 3^3 t^2. \tag{6.4}$$

由此可得

$$s + \sqrt{-2}N_0 = (1 + \sqrt{-2})^3 (u + \sqrt{-2}v)^2.$$

展开后,

$$s + \sqrt{-2}N_0 = \left(-5 + \sqrt{-2}\right)\left(u^2 + 2\sqrt{-2}uv - 2v^2\right),$$

因此

$$s = -5u^2 - 4uv + 10v^2$$

and

$$N_0 = u^2 - 10uv - 2v^2.$$

由 $d_0 = s^2 - 2N_0^2$可得 $d_0 = F(u, v)$, 其中

$$F(u, v) = 23u^4 + 80u^3 v - 276u^2 v^2 - 160uv^3 + 92v^4,$$

相应的根 θ_i 到 $F(x,1)=0$ 由下式给出

$$\theta_1=-5.4279\ldots,\ \theta_2=-0.8296\ldots,\ \theta_3=0.3684\ldots,\ \theta_4=2.4107\ldots$$

以及判别式 $2^{20}\cdot 3^{18}$。为了使

$$d_0=23(u-\theta_1 v)(u-\theta_2 v)(u-\theta_3 v)(u-\theta_4 v)$$

相对于.....尽可能小,

$$|N_0|=\left|u^2-2v^2-10uv\right|,$$

因此，只需在某个 i 对应的 θ_i 的无限简单连分数展开中，选取一个渐近分数 $u/v=p_k/q_k$。例如，若$u/v=p_k/q_k$ 是 θ_3的一个渐近分数，且对应的部分商为 $a_{k+1}\geq 60$ （因此 $v\geq 19$），则有

$$\left|\theta_3-\frac{u}{v}\right|<\frac{1}{a_{k+1}v^2},$$

由此可得

$$|d_0|<23.01(\theta_3-\theta_1)(\theta_3-\theta_2)(\theta_4-\theta_3)\frac{v^2}{a_{k+1}},$$

而

$$|N_0|=\left|u^2-2v^2-10uv\right|>0.99\,(10\theta_3-\theta_3^2+2)v^2.$$

因此我们有

$$\frac{\sqrt{N}}{d}=\frac{|N_0|}{|d_0|}>\frac{0.99(10\theta_3-\theta_3^2+2)}{23.01(\theta_3-\theta_1)(\theta_3-\theta_2)(\theta_4-\theta_3)}a_{k+1}.$$

简单计算可知，要使 $d<\sqrt{N}$，因此只需满足 $a_{k+1}\geq 60$。这在以下情况下成立:

$$k=5,30,122,140,206,309,\ldots$$

遗憾的是，尽管我们希望说每个 θ_i 都具有无界的部分商（或者至少有无穷多个部分商超过 60），但目前即使对于一个次数大于 2 的代数数，这样的结论也无法证明。然而，按照猜想，普遍看法是，这类数在这方面的表现如同“典型”的实数。特别是，人们猜想它们的部分商满足高斯–库兹明分布，因而是无界的。更准确地说，对于几乎所有实数 α，根据 Philipp 的工作 [20], ，如果我们定义

$$T_n(\alpha)=\max\{a_\ell\ :\ 1\leq \ell\leq n\},$$

我们有

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{T_n(\alpha)\log\log n}{n}=\frac{1}{\log 2}.$$

因此我们预期

$$a_{k+1} \gg \frac{\log u}{\log\log\log u}$$

无穷多次，这将意味着

$$d = o\left(\sqrt{N}\right)$$

无穷多次。更确切地说，如果任意一个 θ_i 在其简单连分数展开的部分商方面表现得像“几乎所有”实数，那么我们的构造就会给出无穷多个平方完全数三元组 N， $N+d$， $N+2d$，满足

$$d \ll \frac{\sqrt{N}\log\log\log N}{\log N}.$$

6.2. 计算。如果我们只需枚举所有不超过 10^{12}, 的平方完全数，那么通过蛮力搜索寻找含有 $d < \sqrt{N}$ 的三项等差数列，就能找到以下例子。

d	N	$\frac{\log d}{\log N}$
$2^2 \cdot 79$	$2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^3$	0。4263 ...
$2^2 \cdot 11 \cdot 419$	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 19^3 \cdot 47^2$	0。4291。。。
$2^2 \cdot 71 \cdot 647$	$2^2 \cdot 23^2 \cdot 11087^2$	0。4611。。。
$5^2 \cdot 13^2 \cdot 41$	$3^3 \cdot 5^2 \cdot 13^3 \cdot 317^2$	0。4688 ...
$2^2 \cdot 29^2$	$2^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 29^2$	0。4691。。。
$2^2 \cdot 5^2 \cdot 41 \cdot 79$	$2^3 \cdot 5^2 \cdot 41761^2$	0。4773 ...
$2^2 \cdot 3^2$	$2^6 \cdot 3^3$	0。4807。。。
$3 \cdot 11^2$	$11^2 \cdot 37^2$	0.4904 ...
$2^2 \cdot 3 \cdot 1801$	$2^4 \cdot 6269^2$	0。4926。。。
$2^2 \cdot 1871$	$2^4 \cdot 2003^2$	0。4962 ...

这里我们只列出“本原”例子，也就是对于固定的 d/N， d min- imal 的那些例子。在 $m = 4$ 的情形下进行类似计算（此时我们注意到，我们并不知道 θ_4 的确切值，只知道 $3/5 \le \theta_4 \le 4/5$），得到了以下满足 $\frac{\log d}{\log N} < 0.7426$ 的例子。

d	N	$\frac{\log d}{\log N}$
139932	22358700	0。7001 ...
372100	90048200	0。7003 ...
10404	499392	0.7049 ...
744200	180096400	0。7112 ...
419796	67076100	0。7184 ...
6084	146016	0.7327 ...
127756	8821888	$0.7352\cdots$
323276393476	3168108656064800	0。7425 ...

正如定理 1.1 所示，至少在假设 abc-猜想成立的情况下，若 $m \geq 4$，那么此外， d 相对于 N 也不能太大。在 $m = 4$ 的情形下，我们所知的、满足 $\log d \log N$ 且 d, N 最大的本原数对如下。

d	N	$\frac{\text{对数 } d}{\text{对数 } N}$
129665228	21316	1.8741 . ..
1083676	5324	1。6195.....
9444665628	2008008	1。5826 . ..
305569492668	25347564	1.5512 . ..
810724	6728	1。5436 . ..
8876268	38988	1.5134 . ..
882683550	893025	1。5032 . ..

在 $m = 3$ 的情形下，不存在与此类似的情况（即 d 以 N 为界）。事实上，若取 $N = 1$，通过写成 $d = x^2 - 1$ 并施加条件 $2x^2 - 1 = y^2$，即可使 $d+1$ 和 $2d + 1$ 都成为完全平方数。

7. 总结： d 的较小值

对于 $m \geq 2$，定义

$d_m =$ min{d：存在 N，使得 N， $N+d$，.....， $N+(m-1)d$强数}。

显然，它关于 m 和 $d_2 = 1$ 都是非递减的。经过计算，我们猜想 $d_3 = 24$（对应于 1、25、49）。Erd˝os-Mollin-Walsh 猜想 [18]（该猜想似乎源自 Golomb 的一则评论 [12]）认为 $d_3 > 1$。一般地，由（1.1）可得

$$d_m \leq \prod_{p \leq m} p^2,$$

其中乘积遍历所有素数；似乎很可能对于 $m \geq 4$，

$$d_m = \prod_{p \leq m} p^2.$$

为了推导出 d_m 的一个下界（在 $m \geq 4$ 的情况下），注意到如果我们假设 $p \nmid d$，那么

$$p \mid N(N + d) \cdots (N + (p - 1)d).$$

因此， $m \geq p$这一事实以及 $N, N+d, \ldots, N+(m-1)d$均为平方满数这一假设意味着

$$p^2 \mid N(N + d) \cdots (N + (p - 1)d).$$

但是

$$p \parallel (N + pd)(N + (p + 1)d) \cdots (N + (2p - 1)d),$$

若 $m \geq 2p$，便会产生矛盾。因此

$$\prod_{p \leq m/2} p \mid d,$$

以便

$$m \ll \log d_m \ll m.$$

回到 Erd˝os-Mollin-Walsh 猜想，有趣的是，许多作者 [1], [7], [17], [19], [21], [23] 错误地将这一猜想（以及关于等差数列中平方完全数的相关问题）归于 Erd˝os 的论文 [8], [9], ，而这些问题实际上只在 [10] 中讨论过。这既凸显了过去获取期刊的困难，也体现了 Erd˝os 惊人的高产！

参考文献

1. K. Aktas 和 M. R. Mollin，基本单位与连续平方完全数，*Int. J. Number Th.* 13（2017），243–252。2. P. T. Bateman 和 E. Grosswald，论 Erd˝os 和 Szekeres 的一个定理，*IllinoisJ. Math.* 2（1958），88–98。3. T. H. Chan，《等差数列中的平方满数 II》，*J. Number The-ory* 152（2015），90–104。4. T. H. Chan，短区间内平方完全数的方差，*arXiv preprint*, arXiv:2205.12108v1，2022。5. T. H. Chan，强数中的等差数列，*J. Integer Se-quences* 26（2023），文章 23.1.1，共 10 页。6. T. H. Chan 和 K. M. Tsang，《等差数列中的平方满数》，*Int. J. Number Theory* 9（2013），885–901。7. J. H. E. Cohn，Erd˝os 关于 3-强数的一个猜想，*Math. Comp.* 67（1998），439–440。8. P. Erd˝os，连续整数，*Eureka, The Archimedeans' Journal* 38（1975/76），3–8。9. P. Erd˝os，关于连续整数的问题与结果，*Publ. Math. Debrecen* 23（1976），272–282。10. P. Erd˝os，关于连续整数的数论性质及相关问题的问题与结果，*Proceedings of the Fifth Manitoba Conferenceon Numerical Mathematics*（曼尼托巴大学，温尼伯，曼尼托巴省，1975），Congress. Numer. XVI，第 25–44 页，Utilitas Math.，温尼伯，曼尼托巴省，1976¨11. P. Erd˝os 和 G. Szekeres，论给定阶的阿贝尔群的数量及一个相关的数论问题，*Acta Litt. Sci.Szeged* 7（1934），95–102。12. S. W. Golomb，强数，*Amer. Math. Monthly* 77（1970），848–852。13. D. R. Heath-Brown，三元二次型与三个平方满数之和，载于 *S´em. Th. Numbers Paris 1986-87*，C. Goldstein 编，Birkh¨auser，波士顿，1988。14. H. Q. Liu，区间内立方满数的数量，*Funct. Approx.Comment. Math.* 43（2010），105–107。

15. H. Q. Liu 和 T. Zhang，论等差数列中平方满数的分布，*Archiv der Math.* 101（2013），53–64。16. A. Makowski，关于初等数论中一些问题的评注，*Acta Math. Univ. Comenian.* 50/51（1987），277–281。17. R. A. Mollin，强数的力量，*Internat. J. Math. & Math. Sci.*10（1987），125–130。18. R. A. Mollin 和 P. G. Walsh，关于强数、二次域和佩尔型的一则注记，*C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada* 8（1986），109–114。19. A. Nitaj，Erd˝os 关于 3-强数的一个猜想，*Bull. London Math.Soc.* 27（1995），317–318。20. W. Philipp，Erd˝os 关于连分数的一个猜想，*Acta Arith.* 29（1976），379–386。21. P. Ribenboim，《我的数，我的朋友：数论通俗讲座》，（施普林格，2006）。22. T. N. Shorey 和 R. Tijdeman，连续整数块的算术性质，载于《从算术到ζ函数》，施普林格（2016），455–471。23. A. J. Stephens 和 H. C. Williams，关于强数问题的一些计算结果，*Math. Comp.* 50（1988），619–632。24. O. Trifonov，接近光滑曲线的格点与短区间内的平方完全数，*J. London Math. Soc.* 65（2002），303–319。数学系，不列颠哥伦比亚大学，加拿大不列颠哥伦比亚省温哥华 V6T 1Z2电子邮箱： prajeet@math.ubc.ca数学系，不列颠哥伦比亚大学，加拿大不列颠哥伦比亚省温哥华 V6T 1Z2电子邮箱： bennett@math.ubc.ca数学系，肯尼索州立大学，美国佐治亚州玛丽埃塔 30060电子邮箱： tchan4@kennesaw.edu