arXiv:2302.03119v1 [math.CV] 6 Feb 2023

偶然 CR 结构

C. DENSON HILL、JOËL MERKER、ZHAOHU NIE 和 PAWEŁ NUROWSKI

摘要。我们注意到，Élie Cartan 与 Sigurdur Helgason 对单李例外群$\mathbf{E}_8$ 可实现的最低维数存在分歧。这引出了一个问题：例外群$\mathbf{E}_\ell$ 的各种实形式可实现的最低维数分别是多少？Cartan 声称$\mathbf{E}_6$ 可在 16 维空间中实现。然而，Cartan 指的是复群$\mathbf{E}_6$, 或其分裂实形式 E_I。他的说法对记作 E_{IV} 的实形式也成立。然而，我们发现，$\mathbf{E}_6$ 的实形式 E_{II} 和 E_{III} 无法按照 Cartan 的方式在 16 维空间中实现。本文将它们实现为 24 维空间中的群，这些群是某些较高余维 CR 结构的 CR 自同构群。

作为这两种实现方式的副产品，我们给出了满足以下条件的所有 *CR* 结构 (M, H, J) 及其在适当的 $\mathbb{C}^N$ 中的 CR 嵌入：

- 它们的实余维数为 $k > 1$,
- 实向量分布 H 关于复结构 J 作用的适当性满足 $[H, H] + H = TM$,
- 该结构 (M, H, J) 的 CR 自同构局部群 G_J 是单群，在 M 上传递作用，且其各向同性子群 P 是 G_J中的抛物子群,
- M 上向量分布 H 的局部对称群 G 与 (M, H, J)的 CR 自同构群 G_J 一致。

由于我们列表中的所有 CR 结构都满足最后一个性质，我们称它们为偶然的。我们列出的具有例外对称性 E_{II} 和 E_{III} 的高余维 CR 结构，是其中的特殊条目。

1. 引言

在其博士论文的德文版本中，Élie Cartan 将单李例外群 $\mathbf{F}_4$ 实现为某个秩为八、维数为十五的向量分布的对称群。Sigurdur Helgason 在 [4] 中报告了这一事实，内容如下：

> Cartan 用 $\mathbb{R}^{15}$ 中的 Pfaff 系统表示了 $\mathbf{F}_4$ (...)。文献 $\mathbb{R}^{16}$ 中的 $\mathbf{E}_6$ 、$\mathbb{R}^{27}$ 中的 $\mathbf{E}_7$ 以及 $\mathbb{R}^{29}$ 中的 $\mathbf{E}_8$ 也有类似结果，相关内容见 [2]。遗憾的是，这些关于例外群的卓越表示似乎没有现成的详细证明。

如今，Helgason 提及的内容原则上已在抛物几何 [3]的背景下得到理解。我们之所以使用“原则上已得到理解”这一说法，是因为：

- Cartan 的论文中有一处印刷错误，他在论文倒数第三句中写到，作为实现$\mathbf{E}_8$的空间的 $\mathbb{R}^{29}$ 应为 $\mathbb{R}^{57}$；Helgason 在 [4] 中照抄了这一印刷错误，却没有对照 Cartan 论文最后一句所给出的正确空间 $\mathbb{R}^{57}$；

日期：2023年2月8日。研究经费由挪威金融机制 2014-2021 提供，项目登记编号为 2019/34/H/ST1/00636。

- Helgason 在$\mathbb{R}^{16}$[中使用“类似”一词的表述关于E_6 在……的类似结果见 [2] 并不十分恰当，后文将会明白这一点；
- 更重要的是，与 Cartan 对$\boldsymbol{F4}$ 的实现真正相似的$\mathbf{E}_6$、$\mathbf{E}_7$ 和$\boldsymbol{E8}$ 的显式实现仍然缺失。

考察 Cartan 在 [2], 中第 418 页底部和第 419 页顶部对$\mathbf{F}_4$ 在 $\mathbb{R}^{15}$ 中的实现的描述，可以看到 Cartan 谈到的是将复单李例外群$\mathbf{F}_4$ 的分裂实形式[1] F_{I} 在 $\mathbb{R}^{15}$ 中实现为一个秩为 8 的分布 H 的对称群 $\mathbb{R}^{15}$ ；该分布定义为以下 1-形式的湮灭子

$$\lambda^{ij} = du^{ij} + x^i dx^j + y^k dy^l,$$
$$\lambda^7 = du^7 + \sum_{i=1}^{4} y^i dx^i.$$

这里， u^{ij}与 $1 \leq i < j \leq 4$、 u^7与 x^i、 $i = 1$、2、3、4，以及 y^i与 $i = 1$、2、3、4，都是 $\mathbb{R}^{15}$中的坐标；上面第一个公式中的指标 k、l 满足：指标组 $(ijkl)$（其中 $i < j$）是数字 1、2、3、4 的偶排列。

因此，Cartan 在给出复单李群分裂实形式F_{I} 的实现时非常具体，该李群为例外李群$\mathbf{F}_4$:

它是某个分布的局部对称群

$$\mathrm{H} = \{\Gamma(T\mathbb{R}^{15}) \ni X \,:\, X \lrcorner \lambda^{ij} = X \lrcorner \lambda^7 = 0,\ \forall\ 1 \leq i < j \leq 4\},$$

也就是说，它是作用在 $\mathbb{R}^{15}$ 上的局部变换群，其李代数由 $\mathbb{R}^{15}$ 上的所有满足以下条件的实向量场 Y 张成：

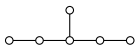
$$\big(\mathcal{L}_Y \lambda^{ij}\big) \wedge \lambda^{12} \wedge \lambda^{13} \wedge \lambda^{14} \wedge \lambda^{23} \wedge \lambda^{24} \wedge \lambda^{34} \wedge \lambda^7 = 0, \quad 1 \leq i < j \leq 4,$$
$$\big(\mathcal{L}_Y \lambda^7\big) \wedge \lambda^{12} \wedge \lambda^{13} \wedge \lambda^{14} \wedge \lambda^{23} \wedge \lambda^{24} \wedge \lambda^{34} \wedge \lambda^7 = 0.$$

Cartan 对$\mathbf{F}_4$ 实现的详细描述，与他在相应的 $\mathbb{R}^{16}$、 $\mathbb{R}^{27}$和 $\mathbb{R}^{57}$中讨论$\mathbf{E}_6$, 、$\mathbf{E}_7$ 和$\mathbf{E}_8$ 实形式的实现形成对比。在这些情形下，Cartan 只说明相应实李代数生成元之间的交换关系，并指出，在每一种$\mathbf{E}_\ell$ 情形下， $\ell = 6$、7、8 都包含相应实维数为 62、106、191 的实子代数。这仅意味着，对于相应的 $\ell = 6$、7、8，存在维数为 16、27 和 57 的 E_ℓ-齐性空间。Cartan 所说的仅此而已！尤其是，他对这些空间上哪些几何结构具有$\mathbf{E}_\ell$ 齐性只字未提。仔细考察他在这些$\mathbf{E}_\ell$中的 62、106 和 191 维子代数便会发现，相应的几何结构与那个在 15 维空间上的秩为 8 的括号生成分布截然不同；后者以$\mathbf{F}_4$ 的实形式 F_{I} 作为其局部对称群。

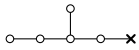
简言之：维数为 15、对称性为 $\mathbf{F}_4$ 的 Cartan 几何，若视为抛物几何，则为二步分次；而维数为 16 且对称性为 $\mathbf{E}_6$ 、维数为 27 且对称性为 $\mathbf{E}_7$ ，以及维数为 57 且对称性为$\mathbf{E}_8$ 的 Cartan 齐性空间，若视为抛物几何，则均为一步分次。特别是，他在维数 16、对称性为 $\mathbf{E}_6$ 的几何是一种 $\mathbb{R}\mathbf{Spin}(5,5)$ 几何。

[1]本文采用的简单例外李群实形式记号，与 [3] 第 612–615 页表 B.4 中给出的记号相同。

如果有人对这些 $\mathbf{F}_4$, 、$\mathbf{E}_6$, 、$\mathbf{E}_7$ 和 $\mathbf{E}_8$ 实现的细节感兴趣，我们建议她参阅即将发表的论文 [8]。对于我们当前的论文而言，重要的是，就维数为 16 的$\mathbf{E}_6$ 实现而言，Cartan 在 [2] 仅实现了E_6 的一**种特定实形式**，即分裂实形式 E_{I}, 其 Satake 图为

.

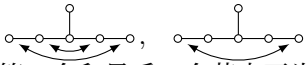
他所考虑的抛物几何属于 $(\mathrm{E}_{\mathrm{I}}, \mathbb{R}\mathbf{Spin}(5,5))$ 型，对应于以下交叉



在此图中。Cartan 在 [2] 最后一句中写道:

> 五个阶分别为 14、52、78、133、248 的特殊单群，不可能存在于少于 5、15、16、27、57 个变量的空间中[2]。

因此，特别是，他声称群 $\mathbf{E}_6$ 实现时的最低维数为 16。然而，只有在他不在意想要实现哪种 $\mathbf{E}_6$ 实形式时，这一说法才成立。如果他想在 16 维空间中实现 $\mathbf{E}_6$ 的实形式 E_{II} 或 $\mathrm{E}_{\mathrm{III}}$，他用来实现 E_{I} 的方法就行不通。这从 Satake 图中可以清楚地看出来

,

E_{II} 和 $\mathrm{E}_{\mathrm{III}}$: 由于这些图的第一个和最后一个节点互为复共轭，交叉其中一个节点时，也必须交叉与之共轭的节点；因此，这些群中不存在对应于单个交叉的 62 维抛物子群。如果我们想像 Cartan 对 E_{I} 所做的那样实现 E_{II} 和 $\mathrm{E}_{\mathrm{III}}$，就应该交叉这些群的 Satake 图中的侧根。这会自动导致对侧另一个侧根也进行交叉，对应于选择一个 54 维的抛物子群，并由此在 24 维空间中实现。我们在以下推论中展示这一结果,

推论 1.1。 单李例外群 $\mathbf{E}_6$的实形式 E_{II} 和 $\mathrm{E}_{\mathrm{III}}$ 可以在维数 *24* 中实现。这些实现由群 E_{II} 和$\mathrm{E}_{\mathrm{III}}$ 给出，它们是秩 *16* 的括号生成分布的自同构群，其增长向量为 $(16, 24)$，详见我们各自的推论 *1.4* 和 *1.5*。事实证明，这些实现与 E_{II} 和 $\mathrm{E}_{\mathrm{III}}$ 相同，后者是我们各自的定理 *1.2* 和 *1.3* 中所描述的偶然 *CR* 结构的 *CR* 自同构群。

E_{II} 和 $\mathrm{E}_{\mathrm{III}}$ 在 $\mathbb{R}^{24}$ 中的这些相应实现，很大程度上体现了 Cartan 将实形式 F_{I} 的$\mathbf{F}_4$ 实现为某个括号生成分布的对称性的思路。如下文推论 1.4 和 1.5 所述，群 E_{II} 和 $\mathrm{E}_{\mathrm{III}}$可实现为 24 维空间中某些秩 16 括号生成分布的对称性，而这些群作为抛物几何的对称性的实现是二步分次的。这些群还偶然地 成为某些高余维 CR 几何的对称性，这些几何与这些二步秩 16 分布自然相关。因此，它们是促使我们撰写本文的主要动机。更具体地说，作为 CR 结构对称性的$\mathbf{E}_6$ 实现

[2]在该陈述中， [2], 处还存在另一个印刷错误，因为 $\mathbf{E}_7$ 的维数正确应为 133，却误印为 123。

正如定理 1.2、1.3 中所述，这些高余维实现是对以下问题的肯定 回答示例：

考虑一个完全由实流形 M 上的偶秩实分布 H 定义的抛物几何。H 是否可能具有与该几何相容的可积复结构 J？这里的相容是指，H 本身的几何以典范方式唯一确定 H 上的一个复结构 J；尤其是，这意味着 M 上 H 的所有局部微分不变量，都与 M 上结构 (H, J) 的所有局部微分不变量相同？

这个问题是在我们与 Katja Sagerschnig 讨论时提出的。在本文中，我们对具有二步分次的抛物几何给出了肯定答案。具有这些性质的抛物几何完整列表见定理1.2、1.3、3.1、3.3和3.5。相应的最大对称群 G 分别为 E_{II}、$\mathrm{E}_{\mathrm{III}}$、$\mathbf{SO}(\ell-1,\ell+1)$（其中 $\ell\geq 4$）、$\mathbf{SO}^*(4m+2)$（其中 $m\geq 2$）以及 $\mathbf{SU}(t+s,r+t+s)$（其中 $(r,t)\neq 0$、$r\geq 0$、$t\geq 0$、$s\geq 2$）。

在这五种情形中，我们描述了一个 CR 结构 (M, H, J)，它对应于相应抛物几何的平坦模型。我们通过寻找这些 CR 结构各自在适当 $\mathbb{C}^N$中的显式嵌入来实现这一点。我们陈述它们的 CR 维数 n 和 CR 余维数 k。忽略 CR 分布 H 上的复结构 J，我们完全用实数项定义 H，并且由于我们的设定，可以说，分布本身的对称性与 (M, H, J)的 CR 自同构群相同。

我们还将我们的二步抛物“偶然的 CR”几何列表与 K. Yamaguchi 的列表 [10] 进行了比较，该列表包含非刚性 抛物几何。结果表明（见本文最后一节中的定理 5.8），我们列表中唯一的非刚性几何是这样的几何：其群 G 可以是由第二个根和倒数第二个根 $\mathrm{SU}(t+s,r+t+s)$、$s\geq 2$或$(r,t)\neq 0$ 分次得到的任意群。我们强调，这些非刚性抛物几何对应于高 余维数的 CR 流形（即它们不是 超曲面型）。

我们的结果与 Medori 和 Nacinovich [6,7] 对半单 Levi-Tanaka 代数及其相应 CR 流形的分类相一致。我们在第5节将我们的方法与他们的方法进行了比较。我们的技术有所不同。

回到我们关于具有“偶然的”CR 结构的二步抛物几何的列表，我们在其中发现了单李群的几何实现 $\mathbf{SU}(p,q)$、$\mathbf{SO}(\ell-1,\ell+1)$、$\mathbf{SO}^*(4m+2)$，尤其是上述例外单复李群$\mathbf{E_6}$的两个实形式 E_{II} 和 $\mathrm{E}_{\mathrm{III}}$。我们在定理*1.2*、*1.3*、*3.1*、*3.3*和*3.5*中对它们进行了描述。在本文引言中，我们重点介绍其中两个E_6-齐性例子，作为两个亮点。

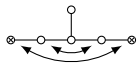
E_{II} 对称性的情况。
考虑具有全纯坐标 $(w^1, w^2, \ldots, w^8, z^1, z^2, \ldots, z^8)$ 的 $\mathbb{C}$，以及它的

子集 $M^{24}_{E_{II}} \subset \mathbb{C}^{16}$，定义如下：

$$
\begin{aligned}
M^{24}_{E_{II}} = \Big\{ & \mathbb{C}^{16} \ni (w^1, w^2, \dots, w^8, z^1, z^2, \dots z^8) \text{ s.t.} \\
& \operatorname{Im} w_1 = \operatorname{Re}\left(z_1 \bar{z}_4 + z_2 \bar{z}_3\right) \\
& \operatorname{Im} w_2 = \operatorname{Re}\left(z_1 \bar{z}_6 + z_2 \bar{z}_5\right) \\
& \operatorname{Im} w_3 = \operatorname{Im}\left(z_1 \bar{z}_7 + z_5 \bar{z}_3\right) \\
& \operatorname{Im} w_4 = \operatorname{Im}\left(z_2 \bar{z}_7 + z_3 \bar{z}_6 - z_5 \bar{z}_4 - z_8 \bar{z}_1\right) \\
& \operatorname{Im} w_5 = \operatorname{Re}\left(z_2 \bar{z}_7 + z_3 \bar{z}_6 - z_5 \bar{z}_4 - z_8 \bar{z}_1\right) \\
& \operatorname{Im} w_6 = \operatorname{Im}\left(z_2 \bar{z}_8 + z_6 \bar{z}_4\right) \\
& \operatorname{Im} w_7 = \operatorname{Re}\left(z_3 \bar{z}_8 + z_4 \bar{z}_7\right) \\
& \operatorname{Im} w_8 = \operatorname{Re}\left(z_5 \bar{z}_8 + z_6 \bar{z}_7\right) \Big\}
\end{aligned}
.
$$

我们有以下定理。

定理 1.2. 集合 $M^{24}_{E_{II}} \subset \mathbb{C}^{16}$ 是一个实 *24* 维嵌入 *CR* 流形，它从环境复空间 $\mathbb{C}^{16}$ 中获得 *CR* 维数为 $n = 8$、*CR* 余维数为 $k = 8$的 *CR* 结构。其局部 *CR* 自同构群同构于实单李例外群 E_{II}，其李代数具有 *Satake* 图 。它局部 *CR* 等价于 $E_{II}/P_{(2)}$ 这一平坦模型，该模型属于类型为 $(E_{II}, P_{(2)})$的 *24* 维抛物几何，其中 E_{II} 中的实抛物子群 $P_{(2)}$ 由相应 *Satake* 图上的以下交叉确定：。

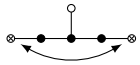


E_{III} **对称性的情形**。
考虑带有全纯坐标 $(w^1, w^2, \dots, w^8, z^1, z^2, \dots, z^8)$的 $\mathbb{C}^{16}$，以及由下式定义的其子集 $M^{24}_{E_{III}} \subset \mathbb{C}^{16}$：

$$
\begin{aligned}
M^{24}_{E_{III}} = \Big\{ & \mathbb{C}^{16} \ni (w^1, w^2, \dots, w^8, z^1, z^2, \dots z^8) \text{ s.t.} \\
& \operatorname{Im}(w^1) = \operatorname{Re}(z_1\bar{z}_8 + z_2\bar{z}_4 + z_3\bar{z}_7 + z_5\bar{z}_6) \\
& \operatorname{Im}(w^2) = \operatorname{Re}(z_1\bar{z}_4 - z_2\bar{z}_8 - z_3\bar{z}_6 + z_5\bar{z}_7) \\
& \operatorname{Im}(w^3) = \operatorname{Re}(z_1\bar{z}_7 + z_2\bar{z}_6 - z_3\bar{z}_8 - z_4\bar{z}_5) \\
& \operatorname{Im}(w^4) = \operatorname{Re}\big(\mathrm{i}(z_1\bar{z}_2 + z_3\bar{z}_5 + z_4\bar{z}_8 + z_6\bar{z}_7)\big) \\
& \operatorname{Im}(w^5) = \operatorname{Re}(z_1\bar{z}_6 - z_2\bar{z}_7 + z_3\bar{z}_4 - z_5\bar{z}_8) \\
& \operatorname{Im}(w^6) = \operatorname{Re}\big(\mathrm{i}(z_1\bar{z}_5 + z_2\bar{z}_3 - z_4\bar{z}_7 + z_6\bar{z}_8)\big) \\
& \operatorname{Im}(w^7) = \operatorname{Re}\big(\mathrm{i}(z_1\bar{z}_3 - z_2\bar{z}_5 + z_4\bar{z}_6 + z_7\bar{z}_8)\big) \\
& \operatorname{Im}(w^8) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2 + |z_5|^2 + |z_6|^2 + |z_7|^2 + |z_8|^2 \Big\}
\end{aligned}
.
$$

我们有以下定理。

定理 1.3。 集合 $M^{24}_{E_{III}} \subset \mathbb{C}^{16}$ 是一个实 *24* 维嵌入 *CR* 流形，从环境复空间 $\mathbb{C}^{16}$ 继承了 *CR* 结构，其 *CR* 维数为 $n = 8$，*CR* 余维数为 $k = 8$。其局部 *CR* 自同构群同构于实单李例外群 E_{III}，其李代数具有 *Satake* 图 。它在局部 *CR* 等价于 *24* 维抛物几何 $(E_{III}, P_{(1)})$ 型的平坦模型 $E_{III}/P_{(1)}$，其中 E_{III} 中的实抛物子群 $P_{(1)}$ 由相应的 *Satake* 图上的以下交叉确定： 。



流形 M 上的一个 *CR* 结构是一个三元组 (M, H, J)，其中 H 是 M 上的秩为 $\ell = 2n$的向量分布，并且 $J : H \to H$满足 $J^2 = -\mathrm{id}_H$，是 H上的可积复结构。CR 结构具有其不变量，其中之一是其对称群 G_J，也称为*CR* 自同构群。如果该群在 M上传递地作用，则 CR 结构 (M, H, J) 称为齐性的。CR 结构 (M, H, J) 可以被视为装饰，即附加结构，定义在分布结构 (M, H)上；换言之，就是一个配备了秩为 $\ell = 2n$ 的向量分布的流形 M。分布结构 (M, H) 也具有不变量，从而同样可以定义其对称群 G以及其齐性。

本文聚焦于偶然的 CR 结构 (M, H, J)。这类齐性 CR 结构 (M, H, J) 具有以下特点：其未加装饰的分布结构 (M, H) 也是齐性的，且相应的对称群 G_J 和 G 相同。因此，定理 1.2 和 1.3 中给出的嵌入 CR 结构是偶然的（更多细节见第 2.4 节和定义 2.8）。由于其偶然性，定理 1.2 和 1.3 涉及的 CR 结构也为实例外单李群 E_{II} 和 E_{III} 提供了很好的纯实形式实现。事实上，这两个定理推出了以下两个推论。在这两个推论中，这些群被视为 $\mathbb{R}^{24}$ 原点附近两个特定向量分布的对称变换群。

推论 *1.4*。考虑一个 *24* 维流形 M^{24}_{II}，其局部坐标由实坐标 $(u^1, u^2, \dots, u^8, x^1, x^2, \dots, x^8, y^1, y^2, \dots, y^8)$ 参数化，并考虑定义在 M^{24}_{II} 上由以下 *1*-形式 $[\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^8]$ 给出的 *Pfaff* 系统

$$\lambda^1 = du^1 + \tfrac{1}{2}\big(x^1dy^4 + x^2dy^3 + x^3dy^2 + x^4dy^1 - y^1dx^4 - y^2dx^3 - y^3dx^2 - y^4dx^1\big)$$
$$\lambda^2 = du^2 + \tfrac{1}{2}\big(x^1dy^6 + x^2dy^5 + x^5dy^2 + x^6dy^1 - y^1dx^6 - y^2dx^5 - y^5dx^2 - y^6dx^1\big)$$
$$\lambda^3 = du^3 + \tfrac{1}{2}\big(x^1dx^7 - x^3dx^5 + x^5dx^3 - x^7dx^1 + y^1dy^7 - y^3dy^5 + y^5dy^3 - y^7dy^1\big)$$
$$\lambda^4 = du^4 + \tfrac{1}{2}\big(x^1dx^8 + x^2dx^7 + x^3dx^6 + x^4dx^5 - x^5dx^4 - x^6dx^3 - x^7dx^2 - x^8dx^1 + y^1$$
$$dy^8 + y^2dy^7 + y^3dy^6 + y^4dy^5 - y^5dy^4 - y^6dy^3 - y^7dy^2 - y^8dy^1\big)\lambda^5 = du^5 + \tfrac{1}{2}\big(y^1$$
$$dx^8 - y^2dx^7 - y^3dx^6 + y^4dx^5 + y^5dx^4 - y^6dx^3 - y^7dx^2 + y^8dx^1 - x^1dy^8 + x^2d$$
$$y^7 + x^3dy^6 - x^4dy^5 - x^5dy^4 + x^6dy^3 + x^7dy^2 - x^8dy^1\big)\lambda^6 = du^6 + \tfrac{1}{2}\big(x^2dx^8 - x^4d$$
$$x^6 + x^6dx^4 - x^8dx^2 + y^2dy^8 - y^4dy^6 + y^6dy^4 - y^8dy^2\big)\lambda^7 = du^7 + \tfrac{1}{2}\big(x^3dy^8 + x^4d$$
$$y^7 + x^7dy^4 + x^8dy^3 - y^3dx^8 - y^4dx^7 - y^7dx^4 - y^8dx^3\big)\lambda^8 = du^8 + \tfrac{1}{2}\big(x^5dy^8 + x^6d$$
$$y^7 + x^7dy^6 + x^8dy^5 - y^5dx^8 - y^6dx^7 - y^7dx^6 - y^8dx^5\big).$$

–

然后，在 M^{24}_{II} 上通过 H 定义秩 *16* 分布

$$H = \{TM^{24}_{II} \ni X \text{ s.t. } X \lrcorner \lambda^i = 0,\ \forall i = 1, 2, \dots, 8\}$$

其对称性群为实实例外单李群 E_{II} 。

我们还有：

推论 1.5。 考虑一个 *24* 维流形 M^{24}_{II}，其局部由实坐标 $(u^1, u^2, \dots, u^8, x^1, x^2, \dots, x^8, y^1, y^2, \dots, y^8)$ 参数化，并令 M^{24}_{II}上的 *1*-形式 $[\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^8]$ 的 *Pfaff* 系统为

$$\begin{aligned}
\lambda^1 &= du^1 + x^1 dy^8 + x^2 dy^4 + x^3 dy^7 + x^4 dy^2 + x^5 dy^6 + x^6 dy^5 + x^7 dy^3 + x^8 dy^1\\
\lambda^2 &= du^2 + x^1 dy^4 + y^8 dx^2 + y^6 dx^3 + x^4 dy^1 + x^5 dy^7 + y^3 dx^6 + x^7 dy^5 + y^2 dx^8\\
\lambda^3 &= du^3 + x^1 dy^7 + x^2 dy^6 + y^8 dx^3 + y^5 dx^4 + y^4 dx^5 + x^6 dy^2 + x^7 dy^1 + y^3 dx^8\\
\lambda^4 &= du^4 + x^2 dx^1 + x^5 dx^3 + x^8 dx^4 + x^7 dx^6 + y^2 dy^1 + y^5 dy^3 + y^8 dy^4 + y^7 dy^6\\
\lambda^5 &= du^5 + x^1 dy^6 + y^7 dx^2 + x^3 dy^4 + x^4 dy^3 + y^8 dx^5 + x^6 dy^1 + y^2 dx^7 + y^5 dx^8\\
\lambda^6 &= du^6 + x^5 dx^1 + x^3 dx^2 + x^4 dx^7 + x^8 dx^6 + y^5 dy^1 + y^3 dy^2 + y^4 dy^7 + y^8 dy^6\\
\lambda^7 &= du^7 + x^3 dx^1 + x^2 dx^5 + x^6 dx^4 + x^8 dx^7 + y^3 dy^1 + y^2 dy^5 + y^6 dy^4 + y^8 dy^7\\
\lambda^8 &= du^8 + x^1 dy^1 + x^2 dy^2 + x^3 dy^3 + x^4 dy^4 + x^5 dy^5 + x^6 dy^6 + x^7 dy^7 + x^8 dy^8.
\end{aligned}$$

那么，通过以下方式在 M^{24}_{III} 上定义的秩 *16* 分布 H

$$H = \{TM^{24}_{III} \ni X \text{ s.t. } X \lrcorner \lambda^i = 0,\ \forall i = 1, 2, \dots, 8\}$$

其对称群为实例外单李群 E_{III} 。

在结束本引言之前，我们将读者的注意力引向本文探讨的问题：

(1) 在实流形 $M = G/P$ 上，秩为 $\ell = 2n$ 的齐性括号生成实分布 H 能否容许其上的可积复结构 J，使得由此得到的 CR 结构 (M, H, J) 定义在 M 上且为齐性的，并且其 CR 自同构群 G 与未装饰分布 H 的自同构群相同？根据我们在定理 1.3 与推论 1.4 之间简要介绍的术语，这个问题是在问是否存在偶然 *CR* 结构？

(2) 有一大类齐性括号生成分布 H，它们定义了各种抛物几何的平坦模型。在此背景下，上述问题可以进一步限定为：是否存在偶然的抛物*CR* 结构？

(3) 几何学研究最深入的 CR 结构 (M, H, J) 是超曲面型且*Levi* 型非退化的 CR 结构。它们是抛物几何的实例。这些都不是偶然的，因为它们的分布 H是接触分布，其自同构群维数无限；而它们的 CR 自同构群不可能大于有限维单李群$\mathbf{SU}(p, q)$。

（4）此外，已知还有一些与超曲面型 Levi 非退化 CR 结构之外的其他抛物几何相关的非平凡非偶然CR 结构类别。例如，可以考虑与某个五维流形上的一般秩二分布 H 相关联的例外简单G_2 抛物几何。

在这里，至少在局部，总能在 H 上找到 J，使得这个实余维数为三、复维数为一的 CR 结构 (M, H, J)的对称性低于 14 维群 G_2。事实上，众所周知 [8]，在五维空间中的 G_2 平坦秩二分布 H 上，可以赋予一个 CR 结构 J，使其 CR 自同构群的维数不超过 7。不过，这类例子很容易构造，因为其中的分布 H 秩为 2，也就是说，J 只需满足代数约束 $J^2 = -\mathrm{id}_H$，而无需考虑 J 在 H中的可积性。

(5) 当 $n > 1$在 M 上给定一个秩为 $\ell = 2n$ 的分布时，要在 H 上赋予 J，除了代数约束 $J^2 = -\mathrm{id}_H$ 外，还需要对 J 施加非线性微分约束，而这些约束可能与 H 不相容。因此，人们可能会认为，如果与秩为 $\ell = 2n$ 的分布 H 相关联的抛物几何在 H 中具有一个可积复结构 J，那么它必定是偶然的。这又引出了一个问题：如果一个平坦分布 H 的秩为 $\ell = 2n \geq 4$ 定义了类型为 (G, P) 的流形 $M = G/P$ 上的抛物几何，并且具有一个可积 J，那么相关联的 *CR* 结构 (M, H, J) 是否是偶然的?

我们相信，本文中的解释和示例澄清了上述所有问题。

2. 基本概念与动机

2.1. 流形上的分布结构。 这是一个二元组 (M, H)，其中 M 是一个光滑流形，而 H 是 M上的一个向量分布。回顾一下，在一个 m维光滑流形 M上，秩为 ℓ 的向量分布 H，简称M上的 ℓ阶分布 H，是指一个光滑映射 $M \ni p \to H_p \subset T_pM$，它将M中的每个点 $p \in M$映射到 T_pM的一个 ℓ维向量子空间 H_p。秉承 Felix Klein 的思想，可以通过如下方式将几何与这类对象联系起来：若存在 M 上的一个（局部）微分同胚 $\phi : M \to M$，使得 $\phi_* H_1 = H_2$，则称 M 上的两个 ℓ阶分布 H_1 和H_2 （局部）等价。由此可知，如果这些分布不可积，也就是说它们不满足弗罗贝尼乌斯条件 $[H, H] \subset H$，那么从 M的维数 $m = 5$ 开始，局部非等价的 ℓ阶分布便存在。从现在起，我们只考虑 M上的非可积 ℓ阶分布。

下面介绍 ℓ-分布 H 最简单的局部不变量，即其增长向量。它通过考察 M 上按以下方式递归定义的一列分布来确定：$D_{-1} := H$、$D_{-i-1} := [D_{-1}, D_{-i}] + D_{-i}$（$i \in \mathbb{N}$）。H 的增长向量与这些分布的秩有关。具体而言，它是整数 $(r_{-1}, r_{-2}, \ldots, r_{-i}, \ldots)$组成的非递减序列，其中每个 r_{-i} 都是相应分布 D_{-i} 的秩，即 $r_{-i} = \text{秩}(D_{-i})$。特别地，$r_{-1} = \ell$。一般来说，增长向量在 M 上可能随点而变化，但在本文中，我们只考虑具有（局部）常数增长向量的分布结构 (M, H)。我们进一步指出，若来自结构 (M, H) 的分布 H 满足对于某个 $s \in \mathbb{N}$ 有 $r_{-s} = m = \dim(M)$，则称其为括号生成的。对于具有常数增长向量的括号生成 ℓ-分布，为了提供更多信息，会将增长向量 $(\ell, r_{-2}, \ldots, m)$纳入其名称。因此会有诸如 $(2, 3, 5)$- 分布这样的名称，它表示 5 维空间中的秩为 2 的分布，并具有常数增长向量 $(2, 3, 5)$。

ℓ-分布 H 在 M 上的另一个简单的（局部）不变量，是其（局部）自同构群 G。该群由那些称为对称性的（局部）微分同胚 $\phi : M \to M$ 组成，它们保持 H 不变，即满足 $\phi_* H = H$。G 中的群乘法就是将这些对称性视为微分同胚进行复合。简而言之，(M, H) 的（局部）自同构群 G 称为秩为 ℓ 的分布 H 的（局部）对称群。如果对称群 G 在 (M, H) 上传递地作用于 H，则称 H 分布是（局部）齐性的。在这种情况下，流形 M 在局部上微分同胚于 $M = G/P$，其中 P 是 G 的各向同性子群，它在点 $p \in M$ 处保持 H_p 不变。已知流形上存在局部（以及整体）非等价的齐性 ℓ-分布。从局部观点来看，尤其是在齐性情形下，要判断两个分布的对称群 G 是否不同，只需考察满足 $[Y, H] \subset H$ 的、M 上向量场空间 Y 的代数结构。这些向量场称为 H 的无穷小对称性，并构成该对 (M, H) 的对称性李代数 $\mathfrak{g}$。李代数 $\mathfrak{g}$ 显然是 M 上 H - ℓ 分布的局部不变量。它就是 G 的李代数。

可以通过指定余切丛 T^*M 的一个秩为 $(m-\ell)$ 的子丛 $H^\perp \subset T^*M$，并规定 H 由 M 上所有使 X 湮灭 $H^\perp$ 的向量场组成，从而在局部定义 ℓ-分布 H。$H := \{X \in TM \mid X \lrcorner H^\perp = 0\}$。

例2.1。作为以这种方式定义的分布的一个例子，我们来考察维数为 $m = 7$ 的空间中的如下 4-分布 H。令 $M = \mathbb{R}^7$ 具有笛卡尔坐标 $(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7)$，并令

$$H^\perp = \mathrm{Span}(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3),$$

其中 1-形式 λ^i、$i = 1$、2、3 定义如下：

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= dx^5 + x^1 dx^4 + x^2 dx^3, \\ \lambda^2 &= dx^6 + x^3 dx^4 + x^1 dx^2, \\ \lambda^3 &= dx^7 + x^3 dx^1 + x^2 dx^4. \end{aligned} \tag{2.1}$$

相应的 4-分布 H 为

$$H = \mathrm{Span}(X_1, X_2, X_3, X_4), \tag{2.2}$$

其中四个向量场 X_i、$i = 1$、2、3、4 湮灭 $H^\perp$，它们定义如下：

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_1 - x^3 \partial_7, \\ X_2 &= \partial_2 - x^1 \partial_6, \\ X_3 &= \partial_3 - x^2 \partial_5, \\ X_4 &= \partial_4 - x^1 \partial_5 - x^3 \partial_6 - x^2 \partial_7. \end{aligned} \tag{2.3}$$

容易验证，4-分布 H 不可可积，事实上

$$[H, H] + H = TM,$$

因为

$$\begin{aligned} [X_3, X_2] = [X_4, X_1] &= \partial_5, \\ [X_2, X_1] = [X_4, X_3] &= \partial_6, \\ [X_1, X_3] = [X_4, X_2] &= \partial_7. \end{aligned} \tag{2.4}$$

因此，分布结构 (M, H) 由一个 $(4,7)$ 分布 H强制施加于 $M = \mathbb{R}^7$ 之上。

此外，求解对称性方程后

$$[Y, X_i] \wedge X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \wedge X_4 = 0, \quad \text{for} \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

可以发现， $\mathfrak{g}$ 李代数无穷小对称性的 H 同构于李代数 $\mathfrak{sp}(1,2)$，后者是 单 李代数。因此，该分布具有一个 21 维的对称性李代数。特别是，容易验证，以下向量场：

$$Y_{10} = x^3\partial_1 + x^4\partial_2 - x^1\partial_3 - x^2\partial_4 + (x^1x^2 - x^3x^4)\partial_5 + \tfrac{1}{2}((x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2)\partial_7,$$
$$Y_{12} = \partial_4$$

是 (M, H) 的无穷小对称性。

由此可知， [3] 由上述一对 $(M = \mathbb{R}^7, H)$ 给出的分布结构，在局部微分同胚于某个抛物几何的 平坦模型 $M = \mathbf{Sp}(1,2)/P$ ，其类型为 $(\mathbf{Sp}(1,2), P)$，其中 P 是 抛物子群 $\mathbf{Sp}(1,2)$ ，与下列带叉萨泰图相关: 。这给出了一个定义在流形上的非可积、括号生成、齐性分布的例子，其具有一个 单 对称群 G （在此情形下为 $G = \mathbf{Sp}(1,2)$）。

2.2. 田中延拓与对称性。 关于Tanaka理论，我们仅介绍满足本文需要的最少信息；若读者有兴趣了解详情，请参阅原始论文 [9]。

在分布的语境下，Tanaka理论主要应用于如下情形：实 N维流形 M^N 上的向量分布 H 定义了切丛的 p-步滤过

$$\mathcal{D}^{-1} \subset \mathcal{D}^{-2} \subset \cdots \subset \mathcal{D}^{-p} = TM^N \tag{2.5}$$

其滤过分量 $\mathcal{D}^{-k}$ 定义如下:

$$\mathcal{D}^{-1} = H, \quad \text{and} \quad \mathcal{D}^{-k-1} = [\mathcal{D}^{-1}, \mathcal{D}^{-k}] + \mathcal{D}^{-k} \quad \forall k < p,\ k, p \in \mathbb{N}. \tag{2.6}$$

这定义了一个分次向量空间

$$\mathfrak{n}_- = \mathfrak{n}_{-p} \oplus \mathfrak{n}_{-(p-1)} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{n}_{-1}$$

via

$$\mathfrak{n}_{-k} = \mathcal{D}^{-k}/\mathcal{D}^{-k+1},$$

它在每一点 $x \in M^N$ 处定义了一个 p-步幂零李代数 $(\mathfrak{n}_-(x), [\cdot,\cdot]_x)$，其李括号 $[\cdot,\cdot]_x$ 由 M^N上的向量场的李括号诱导。李代数 $(\mathfrak{n}_-(x), [\cdot,\cdot]_x)$ 称为分布 H的符号代数（或幂零近似）。它是分布在 $x \in M^N$附近的局部代数微分不变量 H 。

从现在起，我们将范围限定为符号代数$\mathfrak{n}_-(x)$ 在 M^N上为常值的分布，也就是说，对于所有 $x \in M^N$均有 $\mathfrak{n}_-(x) = \mathfrak{n}_-$ 。特别地，齐性分布就是这类分布的例子。

因此，每个具有常值符号的分布都对应一个唯一的 p步幂零李代数 $(\mathfrak{n}_-, [\cdot,\cdot])$。这在代数上刻画了它。

尽管存在具有相同常值符号但（即使在局部也）不等价的分布，但它们都可以说是某个标准分布的扰动；更准确地说，它们以.....为模型，这个标准分布具有相同的符号。对于给定符号 $\mathfrak{n}_-$ 的分布而言，这个标准分布称为平坦模型 。它自然地定义在流形 Nil 上，该流形是符号代数 $\mathfrak{n}_-$ 的李群，定义如下:

符号代数 $\mathfrak{n}_-$ 中的分次 $\mathfrak{n}_- = \mathfrak{n}_{-p} \oplus \mathfrak{n}_{-(p-1)} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{n}_{-1}$，在李代数中也有所体现

$$\mathfrak{n}_-^{Nil} = \mathfrak{n}_{-p}^{Nil} \oplus \mathfrak{n}_{-(p-1)}^{Nil} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{n}_{-1}^{Nil}$$

Nil上的左不变向量场，它与 $\mathfrak{n}_-$ 同构。由此便在 Nil上定义了滤过，其中各滤过分量 $\mathcal{D}^{-k}$ 由 Nil上所有光滑函数 $f \in \mathcal{F}(Nil)$ 的线性组合张成，这些函数对应于 Nil上属于 $\mathfrak{n}_{-k}^{Nil} \oplus \mathfrak{n}_{-k+1}^{Nil} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{n}_{-1}^{Nil}$ 的左不变向量场，即

$$\mathcal{D}^{-k} = \mathrm{Span}_{\mathcal{F}(Nil)}(\mathfrak{n}_{-k}^{Nil} \oplus \mathfrak{n}_{-k+1}^{Nil} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{n}_{-1}^{Nil}).$$

由此可知，此滤过的第一步 $H = \mathcal{D}^{-1}$ 是 Nil上的分布，其符号为 $\mathfrak{n}_-$。这为所有具有常值符号 $\mathfrak{n}_-$的分布提供了一个平坦模型 。

分布 H 的符号代数 $\mathfrak{n}_-$，顾名思义，是它的代数近似。特别是，它包含了关于具有给定常值 符号 $\mathfrak{n}_-$的所有分布的最大可能 自同构群局部性质的信息。

对于所有具有恒定符号代数 $\mathfrak{n}_-$ 的分布而言，其最大对称性由与 $\mathfrak{n}_-$ 相关联的幂零李群 Nil 上的自然分布结构 $(Nil, H = \mathcal{D}^{-1})$ 实现，这并不令人意外。此外，对于具有恒定符号 $\mathfrak{n}_-$ 的分布 H，其自同构最大群的代数结构，也就是所有这些分布 H 的最大自同构李代数 $\mathfrak{aut}(H)$，可通过一种称为 田中延拓 的代数过程从符号 $\mathfrak{n}_-$ 得到。过程如下:

我们从符号代数 $\mathfrak{n}_-$ 出发，它是一个 p-步幂零李代数，即一个实李代数 $\mathfrak{n}_-$，它按照如下意义作 p-分次：它是一个直和

$$\mathfrak{n}_- = \mathfrak{n}_{-p} \oplus \mathfrak{n}_{-(p-1)} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{n}_{-1}$$

由 p 个向量空间 $\mathfrak{n}_{-j}$、$j = 1$、2、.....、p 组成，并且配备了李括号 $[\cdot,\cdot]$，使得

$$[\mathfrak{n}_{-i}, \mathfrak{n}_{-j}] \subset \begin{cases} \mathfrak{n}_{-(i+j)} & \text{if } 2 \le i+j \le p \\ \{0\} & \text{if } p < i+j \end{cases}.$$

的田中延拓是一个分次李代数，可表示为直和

$$\mathfrak{g}_T(\mathfrak{n}_-) = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{n}_0 \oplus \mathfrak{n}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{n}_j \oplus \cdots, \tag{2.7}$$

with

$$\mathfrak{n}_k = \Big\{ \bigoplus_{j<0} \mathfrak{n}_{k+j} \otimes \mathfrak{n}_j^* \ni A \text{ s.t. } A[X,Y] = [AX,Y] + [X,AY] \Big\} \tag{2.8}$$

对每个 $k \ge 0$ 都成立。特别地，$\mathfrak{n}_0$ 是由 的所有导子组成的李代数，这些导子保持其直和向量空间-$\mathfrak{n}_{-j}$ 结构。令 $[A,X] = AX$ 对所有满足 $k \ge 0$ 的 $A \in \mathfrak{n}_k$ 成立，并令 $X \in \mathfrak{n}_-$ 对所有.....成立，则 (2.8) 中的条件便成为雅可比恒等式。此外，若 $A \in \mathfrak{n}_k$ 且 $B \in \mathfrak{n}_l$、k、$l \ge 0$，则它们的交换子 $[A,B] \in \mathfrak{n}_{k+l}$ 在元素 $X \in \mathfrak{n}_-$ 上根据雅可比恒等式递归定义。这里的意思是，它应满足

$$[A,B]X = [A,BX] - [B,AX],$$

这足以定义 $[A,B]$。田中延拓 $\mathfrak{g}_T(\mathfrak{n}_-)$ 由幂零李代数 $\mathfrak{n}_-$唯一确定。给定$\mathfrak{n}_-$时，其田中延拓（2.7）中的和可能是无穷的。然而，也存在 $\mathfrak{n}_-$ 使得

田中延拓是有限的。特别是，已知在某些情况下，田中延拓

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_T(\mathfrak{g}_-)$$

p步幂零部分

$$\mathfrak{g}_- = \mathfrak{g}_{-p} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{-1}$$

在对称的意义下，

$$\mathfrak{g}_T(\mathfrak{g}_-) = \mathfrak{g}_{-p} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_p,$$

with

$$\dim(\mathfrak{g}_{-k}) = \dim(\mathfrak{g}_k), \quad k = 1, 2, \ldots, p,$$

并且当如此定义的李代数 $\mathfrak{g}_T(\mathfrak{g}_-)$ 为单时。在这种情况下，田中延拓为这个单李代数定义了一种分次，而子代数

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_p,$$

在这种情况下是抛物子群。

以下定理由 Noboru Tanaka 提出：

定理 2.2. 考虑分布结构 (M^N, H)，其中分布 H定义了一个 p步滤过，如 (2.5)-(2.6) 所示，并具有相同的常值符号$\mathfrak{n}_-$。那么

- 在所有这些分布结构中，最具对称性的是 $(\mathrm{Nil}, H = \mathcal{D}^{-1})$，其中 Nil 是与符号代数$\mathfrak{n}_-$相关联的幂零李群，而 H 是 $\mathfrak{n}_-$中的 p步分次所对应的Nil 上的自然滤过的第一个分量 $\mathcal{D}^{-1}$ 。
- 平坦模型结构 $(\mathrm{Nil}, H = \mathcal{D}^{-1})$ 的自同构李代数 $\mathfrak{aut}(H)$ 与符号代数$\mathfrak{n}_-$的田中延拓 $\mathfrak{g}_T(\mathfrak{n}_-)$ 同构， $\mathfrak{aut}(H) \simeq \mathfrak{g}_T(\mathfrak{n})$.

现在让我们回到例2.1。

例2.3. 注意，在例2.1中，向量场 X_1、X_2、X_3、X_4 以及 $X_5 = \partial_5$、$X_6 = \partial_6$、$X_7 = \partial_7$ 张成一个二步幂零李代数

$$\mathfrak{n} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(X_1, X_2, \ldots, X_7) = \mathfrak{n}_{-2} \oplus \mathfrak{n}_{-1}.$$

这里的分次分量为

$$\mathfrak{n}_{-1} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(X_1, X_2, X_3, X_4)$$
$$\mathfrak{n}_{-2} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(X_5, X_6, X_7).$$

根据上文的讨论，现在我们可以构造一个维数7、秩为4且符号为 $\mathfrak{n}$的分布平坦模型 H 。如例2.1中的(2.2)所示，这个模型分布可以与原分布 H等同。利用基 $(X_1, X_2, \ldots, X_7)$ 的交换关系以及上文讨论的田中延拓定义，我们发现 $\mathfrak{n}$ 的田中延拓为；因此， H 的自同构李代数为，

$$\mathfrak{aut}(H) = \mathfrak{g}_T(\mathfrak{n}) = \mathfrak{n}_{-2} \oplus \mathfrak{n}_{-1} \oplus \mathfrak{n}_0 \oplus \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2,$$

其子模 $\mathfrak{n}_k$ 的维数分别为

$$\dim(\mathfrak{n}_{\pm 2}) = 3$$
$$\dim(\mathfrak{n}_{\pm 1}) = 4$$
$$\dim(\mathfrak{n}_0) = 7.$$

可以看出，在这一 $\mathfrak{n}$ 的 Tanaka 延拓中，0 次齐次分量为 $\mathfrak{n}_0 = \mathbb{R} \oplus 2\mathfrak{su}(2)$，而完整 Tanaka 延拓为 $\mathfrak{g}_T(\mathfrak{n}) \simeq \mathfrak{sp}(1,2)$。根据 Tanaka 定理 2.2，这证实了如下断言：例2.1中分布结构 (M, H) 的局部自同构群为 $\mathbf{Sp}(1,2)$，正如前文所述。

2.3. **装饰分布**。 分布结构或许是人们能够在光滑流形上定义的最简单的几何结构。例如，注意到任何光滑流形都自然带有一个 m-分布结构(M, H)，其中 m 是 M 的维数，并且在每一点 $p \in M$ 处，分布 m-平面 H_p 就是该点的整个切空间 T_pM，其中 p。

如果在分布结构(M, H)或分布 H上，于每一点$p \in M$附加同类的几何对象，便可得到更有趣的几何。这类对象例如可以是定义在 H上的度量 g，定义在 H上的反对称形式 ω，或更一般地说，定义在 M上的张量 Υ，以及张量族，例如张量铅笔。这样装饰后的分布结构 (M, H) 由一个三元组 (M, H, Υ)给出，其中 Υ 是定义在 H上的适当对象。通常还要求装饰对象场 Υ 在 H 上满足某些可积性条件（见下文）。

给定一个由张量场 Υ 装饰的分布结构 (M, H, Υ)，定义两个此类装饰结构 (M, H_1, Υ_1) 和(M, H_2, Υ_2) 在 M上的（局部）等价关系：如果它们作为分布结构（局部）等价，并且分布结构等价微分同胚 $\phi : M_1 \to M_2$ 将第一个分布 H_1 上的张量场 Υ_1 变换为 H_2上的相应张量场 Υ_2，那么它们就是（局部）等价的 $\phi^*\Upsilon_2 = \Upsilon_1$。显然，我们可以讨论装饰分布结构 (M, H, Υ)的自同构（局部）群 G_Υ，以及相应的 (M, H, Υ)的无穷小对称性李代数 $\mathfrak{g}_\Upsilon$：它由分布结构 (M, H)的无穷小对称性李代数 $\mathfrak{g}$ 中的那些向量场 Y生成，这些向量场还保持 H上的 Υ。显然，在大多数装饰情形下，群 G_Υ 将是 G的真子群，而李代数 $\mathfrak{g}_\Upsilon$ 将是 $\mathfrak{g}$的真子代数。接下来，我们将进一步讨论与分布结构 (M, H, J)的特定类别的装饰相关的具体问题，这类结构称为柯西-黎曼结构，简称CR 结构。

2.3.1. 类型为 (n, k) 的 ***CR*** 结构。在配备了括号生成的 $(2n)$-分布 H 的 m维流形 M 上，具有***CR*** 维数 n和***CR*** 余维数 $k = (m-2n)$ 的几乎 CR 结构，是对结构 (M, H) 的一种装饰 (M, H, J)，其中带有线性算子 $J : H \to H$，使得 $J^2 = -\mathrm{id}_H$。当且仅当这一对 (H, J) 满足可积性条件 时，具有 CR 维数 n 和 CR 余维数 k 的几乎 CR 结构才称为具有 CR 维数 n 和 CR 余维数 k 的***CR*** 结构；也就是说，当且仅当对于属于 H 的任意两个向量场 X 和 Y，$X,\ Y \in H$，以下两个条件成立：

- 交换子 $[X, Y]$ 和 $[JX, JY]$ 之差属于 H，

$$\big([X, Y] - [JX, JY]\big) \in H; \tag{2.9}$$

- 使 ***Nijenhuis***张量为零的条件得到满足，即

$$J\big([X, Y] - [JX, JY]\big) = [JX, Y] + [X, JY]. \tag{2.10}$$

为便于后续使用，我们引入一个方便的术语：CR 维数为 n、CR 余维数为 k 的（几乎）CR 结构 (M, H, J) 将被称为（几乎）型为 (n, k)的CR 结构。对于这些结构，显然有： H 的秩为 $\ell = 2n$，而流形的维数 M 为 $m = 2n + k$。

类型为 (n, k) 的几乎 CR 结构也可以通过对偶图景来定义，即从余分布 $H^\perp$ 出发，该余分布被 H 湮灭。为此，在复化 $(T^*M)^{\mathbb{C}}$ 中，我们需要一个秩为 $(n + k)$ 的复子丛 Z^*，使得

$$(H^\perp)^{\mathbb{C}} \subset Z^* \subset (T^*M)^{\mathbb{C}} \quad \text{and} \quad (H^\perp)^{\mathbb{C}} \wedge Z^* \wedge \bar{Z}^* = \wedge^{(2n+k)}(T^*M)^{\mathbb{C}};$$

这里 $\bar{Z}^* = \{(T^*M)^{\mathbb{C}} \ni \mu \text{ s.t. } \bar{\mu} \in Z^*\}$。现在，在 H 中定义 J，称其为满足以下条件的实算子：复化后，它在湮灭子 Z^* 中的所有向量场 Z 上均作用为 $JZ = iZ$。

由于这稍微有些复杂，我们回到例2.1。

例 2.4。例 2.1 的延续：在例2.1中，我们将分布 H 定义为由三个形式 λ^1、λ^2、λ^3 张成的 $H^\perp$ 的湮灭子，如式（2.1）所示。我们定义 $Z^* = (H^\perp)^{\mathbb{C}} + W^*$，其中 $W^* = \text{Span}(\mu^1, \mu^2)$，这里

$$\begin{aligned} \mu^1 &= dx^1 + i dx^4, \\ \mu^2 &= dx^2 - i dx^3. \end{aligned} \tag{2.11}$$

这里 i 表示虚数单位，$i = \sqrt{-1}$，而 Span 是取遍 $M = \mathbb{R}^7$ 上的复值函数所得的。这就得到

$$H^\perp \subset Z^* = \text{Span}(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \mu^1, \mu^2),$$

其中 Span 同样是取遍 $\mathbb{R}^7$ 中的复值函数所得的

旗 $(H^\perp)^{\mathbb{C}} \subset Z^* \subset (T^*M)^{\mathbb{C}}$ 定义了 $\bar{Z}^* = \text{Span}(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \bar{\mu}^1, \bar{\mu}^2)$，其中复1-形式上的“横线”算子表示通常的复共轭，例如 $\bar{\mu}^1 = dx^1 - i dx^4$。此外，我们有

$$(H^\perp)^{\mathbb{C}} \wedge Z^* \wedge \bar{Z}^* = \text{Span}(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 \wedge dx^5 \wedge dx^6 \wedge dx^7) = \wedge^7 (T^*\mathbb{R}^7)^{\mathbb{C}}.$$

因此，根据上述简要步骤，我们在 $M = \mathbb{R}^7$ 中得到一个类型为 $(2, 3)$ 的近似 CR 结构。要了解中的复结构算子 H 的形式，请注意以下内容：

.....的湮灭子 Z^* 是

$$Z = \text{Span}(Z_1, Z_2),$$

with

$$Z_1 = X_1 - iX_4 \quad \text{and} \quad Z_2 = X_2 + iX_3,$$

其中，我们使用了 H 的基 (X_1, X_2, X_3, X_4)，并采用了(2.3)中定义的向量场 X_i。因此，我们有 $JZ_1 = iZ_1$ 和 $JZ_2 = iZ_2$。考察这些方程的实部和虚部，我们得到实算子 J 在 H的基 (X_1, X_2, X_3, X_4) 上的如下作用：

$$JX_1 = X_4, \quad JX_2 = -X_3, \quad JX_3 = X_2, \quad JX_4 = -X_1.$$

显然，$J^2 = -\text{id}$ 作用于 H，因此我们确实在 $\mathbb{R}^7$中得到了一个类型为 $(2, 3)$ 的拟CR 结构 $(\mathbb{R}^7, H, J)$。

有趣的是，这个几乎 CR 结构实际上是一个真正的 *CR* 结构，类型为$(2, 3)$。容易验证，Nijenhuis 可积性条件 (2.9)-(2.10) 得到满足。

回到类型为 (n,k) 的几乎 CR 结构的一般情形，我们注意到，以旗 $(H^{\perp})^{\mathbb{C}} \subset Z^* \subset (T^*M)^{\mathbb{C}}$来表述分布 H的 CR 装饰具有以下优点。由这样的旗在 M 上定义的几乎 CR 结构的 Nijenhuis 可积性条件 (2.9)-(2.10)，与一个条件等价:

来自 Z^* 的所有形式的微分都属于该理想
generated by forms from Z^*.

这里的理想位于 M 上所有（复值）反对称形式构成的 Grassmann 代数中，其乘法运算为形式的楔积。

由此得到一种操作简便的方法，用于检验 (M,H,J) 的 Nijenhuis 条件 (2.9)-(2.10):

设 $(\lambda^1,\lambda^2,\dots,\lambda^k)$ 是 $H^{\perp}$ 中 1-形式的一组基，且 $(\lambda^1,\lambda^2,\dots,\lambda^k,\mu^1,\mu^2,\dots,\mu^n)$ 是将其扩充为 Z^* 中 1-形式的一组基。则与旗 $(H^{\perp})^{\mathbb{C}} \subset Z^* \subset (T^*M)^{\mathbb{C}}$ 对应的几乎 CR 结构(M,H,J) 满足 Nijenhuis 可积性条件 (2.9)-(2.10)，当且仅当

(2.12)
$$d\lambda^i \wedge \lambda^1 \wedge \lambda^2 \wedge \ldots \wedge \lambda^k \wedge \mu^1 \wedge \mu^2 \wedge \ldots \wedge \mu^n = 0, \quad \text{for all} \quad i = 1,2,\dots,k,$$
and
$$d\mu^\alpha \wedge \lambda^1 \wedge \lambda^2 \wedge \ldots \wedge \lambda^k \wedge \mu^1 \wedge \mu^2 \wedge \ldots \wedge \mu^n = 0, \quad \text{for all} \quad \alpha = 1,2,\dots,n.$$

特别地，利用这些条件，可以很容易地验证，例 2.4 中的几乎 CR 结构是 $(2,3)$ on $M = \mathbb{R}^7$ 上的一种可积 CR 结构。

利用旗 $(H^{\perp})^{\mathbb{C}} \subset Z^* \subset (T^*M)^{\mathbb{C}}$ 对几乎 CR 结构这一概念的表述，我们也可以很容易地定义几乎 CR 结构的（局部）等价概念以及（局部）对称群的概念:

如果且仅如果存在一个（局部）微分同胚 $\phi : M \to M$，将一个旗变换为另一个旗，即满足以下条件，我们就称由 M 上的两个旗 $(H_1^{\perp})^{\mathbb{C}} \subset Z_1^* \subset (T^*M)^{\mathbb{C}}$ 和 $(H_2^{\perp})^{\mathbb{C}} \subset Z_2^* \subset (T^*M)^{\mathbb{C}}$ 分别给出的两个几乎 CR 结构（局部）等价

$$\phi^*\big((H_2^{\perp})^{\mathbb{C}} \subset Z_2^* \subset (T^*M)^{\mathbb{C}}\big) = (H_1^{\perp})^{\mathbb{C}} \subset Z_1^* \subset (T^*M)^{\mathbb{C}}.$$

进一步地，我们称（局部）微分同胚 $\phi : M \to M$ 是由 $(H^{\perp})^{\mathbb{C}} \subset Z^* \subset (T^*M)^{\mathbb{C}}$定义的几乎 CR 结构 (M,H,J) 的（局部）*CR* 自同构，当且仅当它满足

$$\phi^*\big((H^{\perp})^{\mathbb{C}} \subset Z^* \subset (T^*M)^{\mathbb{C}}\big) = (H^{\perp})^{\mathbb{C}} \subset Z^* \subset (T^*M)^{\mathbb{C}}.$$

注意，若分别以 $(\lambda^1,\lambda^2,\dots,\lambda^k)$ 和 $(\lambda^1,\lambda^2,\dots,\lambda^k,\mu^1,\mu^2,\dots,\mu^n)$作为 $H^{\perp}$ 与 Z^*中的基，则（局部）CR 自同构也可等价地定义为满足以下条件的（局部）微分同胚 $\phi : M \to M$:

$$\phi^*(\lambda^i) \wedge \lambda^1 \wedge \lambda^2 \wedge \ldots \wedge \lambda^k = 0, \qquad \text{for all} \quad i = 1,2,\dots k,$$
and
$$\phi^*(\mu^\alpha) \wedge \mu^1 \wedge \mu^2 \wedge \ldots \wedge \mu^n \wedge \lambda^1 \wedge \lambda^2 \wedge \ldots \wedge \lambda^k = 0, \qquad \text{for all} \quad \alpha = 1,2,\dots n.$$

因此，CR 自同构的（局部）群 G_J 由所有这样的 构成，其群乘法为 CR 自同构的复合。若 CR 自同构群 G_J 在 M 上传递地 作用，则（局部） $M = G_J/P$，其各向同性子群为 P，而 CR 结构 (M,H,J) 称为齐性。

几乎 *CR* 结构的无穷小对称性 （无穷小 CR 自同构）是 M 上保旗 $(H^{\perp})^{\mathbb{C}} \subset Z^{*} \subset (T^{*}M)^{\mathbb{C}}$ 的实 向量场 Y 。其最方便的等价定义同样通过 $H^{\perp}$ 中的基 $(\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^k)$ 和 Z^{*} 中的基 $(\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^k, \mu^1, \mu^2, \ldots, \mu^n)$ 给出。注意，若向量场 Y 定义在 M 上，而几乎 CR 结构由 M 上的 $(H^{\perp})^{\mathbb{C}} \subset Z^{*} \subset (T^{*}M)^{\mathbb{C}}$ 给出，则当且仅当 Y 关于 $H^{\perp}$ 中的基 $(\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^k)$ 和 Z^{*} 中的基 $(\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^k, \mu^1, \mu^2, \ldots, \mu^n)$ 满足以下偏微分方程时， Y 是该几乎 CR 结构的无穷小对称性：

(2.13)
$$\big(\mathcal{L}_Y \lambda^i\big) \wedge \lambda^1 \wedge \lambda^2 \wedge \ldots \wedge \lambda^k = 0, \quad \text{for all} \quad i = 1, 2, \ldots k,$$
and
$$\big(\mathcal{L}_Y \mu^\alpha\big) \wedge \mu^1 \wedge \mu^2 \wedge \ldots \wedge \mu^n \wedge \lambda^1 \wedge \lambda^2 \wedge \ldots \wedge \lambda^k = 0, \quad \text{for all} \quad \alpha = 1, 2, \ldots n.$$

当然，$\mathfrak{g}_J$ 无穷小对称性的李代数是上述向量场 Y 在 (M, H, J) 上的 $\mathbb{R}$-线性张成空间，其李代数$\mathfrak{g}_J$ 括号为向量场的李括号。

值得注意的是，与基相关的旗 $(H^{\perp})^{\mathbb{C}} \subset Z^{*} \subset (T^{*}M)^{\mathbb{C}}$定义在（近似）CR 结构 (M, H, J) 中尤为有用，尤其是在我们想要比较未装饰分布 (M, H) 的结构与装饰分布结构 (M, H, J)的几何时。例如，未装饰 (M, H) 结构的无穷小对称性的李代数由 M上的实向量场 Y 构成，这些向量场满足

$$\big(\mathcal{L}_Y \lambda^i\big) \wedge \lambda^1 \wedge \lambda^2 \wedge \ldots \wedge \lambda^k = 0, \qquad \text{for all} \quad i = 1, 2, \ldots k, \tag{2.14}$$

成立，而装饰该结构 (M, H) 的（近似）CR 结构 (M, H, J) 的无穷小对称性的李代数，则是满足以下条件的子代数：除满足 (2.14) 外，还满足 (2.13) 中可积性条件的第二部分，即所有涉及 $(\mathcal{L}_Y \mu^\alpha)$s 的条件。我们将在第 2.4 节回到这一（显而易见的）观察；这一点对于阐明本文的主要研究对象至关重要。

例 2.5。例 2.1 和例 2.4 的延续：在例 2.1 中，我们有一个分布结构 (M, H) ，它定义在 $M = \mathbb{R}^7$ 上，并按照（2.1）以 实丛$H^{\perp} = \mathrm{Span}(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)$ 的形式给出。在例 2.4 中，我们通过复化 $H^{\perp}$ 得到 $(H^{\perp})^{\mathbb{C}}$ ，并考虑$Z^{*} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \mu^1, \mu^2)$，从而为其赋予了一个几乎 CR 结构 (M, H, J) 。正如我们已经注意到的，由 $(H^{\perp})^{\mathbb{C}} \subset Z^{*} \subset (T^{*}M)^{\mathbb{C}}$ 定义的几乎 CR 结构(M, H, J) 是可积的；通过观察可以很容易地验证这一点：

$$\begin{aligned}
&d\lambda^1 \wedge \lambda^1 \wedge \lambda^2 \wedge \lambda^3 \wedge \mu^1 \wedge \mu^2 = 0,\\
&d\lambda^2 \wedge \lambda^1 \wedge \lambda^2 \wedge \lambda^3 \wedge \mu^1 \wedge \mu^2 = 0,\\
&d\lambda^3 \wedge \lambda^1 \wedge \lambda^2 \wedge \lambda^3 \wedge \mu^1 \wedge \mu^2 = 0,\\
&d\mu^1 \wedge \lambda^1 \wedge \lambda^2 \wedge \lambda^3 \wedge \mu^1 \wedge \mu^2 = 0,\\
&d\mu^2 \wedge \lambda^1 \wedge \lambda^2 \wedge \lambda^3 \wedge \mu^1 \wedge \mu^2 = 0.
\end{aligned}$$

此外，我们知道，结构 (M, H) 的局部对称性群为21维群$\mathbf{Sp}(1, 2)$ ，其无穷小对称性由21维李代数 $\mathfrak{g}$给出，即 Y_ν、 $\nu = 1$、2、.....、21，如例2.1所示。通过求解

CR 对称性 方程（2.13）对于 CR 结构 (M,H,J)，即求解方程

$$
\begin{aligned}
&\left(\mathcal{L}_Y\lambda^1\right)\wedge\lambda^1\wedge\lambda^2\wedge\lambda^3=0,\\
&\left(\mathcal{L}_Y\lambda^2\right)\wedge\lambda^1\wedge\lambda^2\wedge\lambda^3=0,\\
&\left(\mathcal{L}_Y\lambda^3\right)\wedge\lambda^1\wedge\lambda^2\wedge\lambda^3=0,\\
&\left(\mathcal{L}_Y\mu^1\right)\wedge\mu^1\wedge\mu^2\wedge\lambda^1\wedge\lambda^2\wedge\lambda^3=0,\\
&\left(\mathcal{L}_Y\mu^2\right)\wedge\mu^1\wedge\mu^2\wedge\lambda^1\wedge\lambda^2\wedge\lambda^3=0,
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

或者仅选择这些对称性 Y_ν、 $\nu=1$、2、...、21，即 (M,H) 的对称性；除了满足式 (2.15) 中的前三个方程外，还满足最后两个方程，我们发现，$\mathfrak{g}_J$ 的无穷小 *CR* 对称 (M,H,J) 的维数仅为 $\dim(\mathfrak{g}_J)=12$。因此，分布结构 $\mathfrak{g}$ 的对称性李代数的维数从 *21* 降至维数 *12*，即附加结构 (M,H,J) 的无穷小对称性李代数 $\mathfrak{g}_J$ 的维数。特别地，例2.1中的无穷小分布结构对称生成元 Y_{10} 不满足 CR 对称方程

$$
\begin{aligned}
&\left(\mathcal{L}_Y\mu^1\right)\wedge\mu^1\wedge\mu^2\wedge\lambda^1\wedge\lambda^2\wedge\lambda^3=0,\\
&\left(\mathcal{L}_Y\mu^2\right)\wedge\mu^1\wedge\mu^2\wedge\lambda^1\wedge\lambda^2\wedge\lambda^3=0,
\end{aligned}
$$

因此它并非一个*CR* 对称性生成元。另一方面，来自例2.1的分布结构对称性 Y_{12} 满足成为 CR 对称性的全部五个条件，并生成一个局部*CR* 自同构。因此，在这个例子中，我们明确看到了典型情形：附加结构 (M,H,J)的对称代数$\mathfrak{g}_J$ 是裸结构 (M,H)的对称代数 $\mathfrak{g}$ 的一个真子代数。

2.3.2. 将类型为 (n,k) 的 *CR* 结构嵌入 $\mathbb{C}^{(n+k)}$中。 从现在起，我们假设所有 CR 结构都是实解析的。

考虑定义在 $(2n)$-分布H 上、由旗 $(H^\perp)^{\mathbb{C}}\subset Z^*\subset(T^*M)^{\mathbb{C}}$给出的类型为 (n,k) 的 CR 结构 (M,H,J)。设 $(\lambda^1,\lambda^2,\dots,\lambda^k)$ 和 $(\lambda^1,\lambda^2,\dots,\lambda^k,\mu^1,\mu^2,\dots,\mu^n)$ 分别是 $H^\perp$ 和 Z^*中的基。*CR* 函数 $z:M\to\mathbb{C}$ 是定义在 M 上的复值可微函数，满足

$$
\mathrm{d}z\wedge\lambda^1\wedge\lambda^2\wedge\ldots\wedge\lambda^k\wedge\mu^1\wedge\mu^2\wedge\ldots\wedge\mu^n=0.
$$

如果且仅如果，在开集$\mathcal{U}$ 中，CR 函数 z_1、 z_2、...、 z_j 函数独立

$$
\mathrm{d}z_1\wedge\mathrm{d}z_2\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}z_j\neq0\qquad\text{in}\quad\mathcal{U}.
$$

众所周知， [1] 类型为 (n,k) 的解析 CR 结构总是存在 $(n+k)$个独立的 CR 函数 z_1、 z_2、..、 $z_{(n+k)}$。它们给出局部嵌入

$$
M\ni p\xrightarrow{\ \iota\ }\left(z_1(p),z_2(p),\dots,z_{(n+k)}(p)\right)\in\mathbb{C}^{(n+k)}.
\tag{2.16}
$$

一旦 CR 结构 (M,H,J) 以这种方式嵌入其中，它便给出一个类型为 (n,k) 的 CR 结构$\left(\iota(M),\iota_*H,\iota^*J\right)$，该结构作为实余维数为 k 的子流形嵌入$\mathbb{C}^{(n+k)}$中。作为一个实子流形，它还从环境复空间 $\mathbb{C}^{(n+k)}$ 中的典范复结构 I （乘以虚数单位）获得一个类型为 (n,k) 的 CR 结构。注意到 $\iota_*H=I\mathrm{T}(\iota(M))\cap\mathrm{T}(\iota(M))$ 且 $\iota^*J=I_{|\iota_*H}$，即可定义这一结构。因此， $\iota(M)$ 上的这两个 CR 结构 CR 等价，

并且与 M上的原抽象 CR 结构 (M, H, J) 等价。因此，已知 (M, H, J)的 $(n+k)$ 个相互独立的 CR 函数后，我们便有了抽象 CR 结构的一个良好模型：通过式（2.16）将其嵌入为一个较高余维数的实子流形，并从环境复空间 $\mathbb{C}^N$获得其上的 CR 结构。

一类特殊的 嵌入CR流形 $M^{2n+k} \subset \mathbb{C}^{(n+k)}$ 可以通过 k 图像 来定义，这些图像由 $\Phi^i = \Phi^i(z_1, z_2, \dots, z_n, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n)$、 $i = 1$、2、.....、k这样的实 函数构成，并满足 $\partial\Phi^1 \wedge \partial\Phi^2 \wedge \dots \wedge \partial\Phi^k \neq 0$，其中线性微分算子 ∂ 和 $\bar{\partial}$ 作用于实值可微函数 $f = f(z, \bar{z})$，其形式为

$$\partial f = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_\alpha} dz_\alpha \text{ and } \bar{\partial} f = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_\alpha} d\bar{z}_\alpha.$$

为了描述嵌入 CR 流形，记$\mathbb{C}^{n+k}$中的全纯坐标为 $(w, z) = (w_1, w_2, \dots, w_k, z_1, z_2, \dots, z_n)$。于是，这一特殊类别中的 CR 结构由以下嵌入定义：

$$M^{2n+k} = \{\mathbb{C}^{n+k} \ni (w, z) \text{ s.t. } \operatorname{Im}(w_i) - \Phi^i(z, \bar{z}) = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots k\}. \tag{2.17}$$

在这种情况下， H 上的分布由 k 个实1-形式的湮灭子定义

$$\lambda^i = d\operatorname{Re}(w_i) + i\big(\bar{\partial} - \partial\big)\Phi^i, \ i = 1, 2, \dots, k,$$

因此，在这种情况下，我们有

$$H = \{TM^{2n+k} \ni X \text{ s.t. } X \lrcorner \lambda^i = 0 \ \forall i = 1, 2, \dots, k\}.$$

将 w_is和 z_is分别写成实部和虚部 $w_i = u^i + iv^i$、$z_\alpha = x^\alpha + iy^\alpha$的形式，我们便有 $\Phi^i = \Phi^i(x^1, x^2, \dots, x^n, y^1, y^2, \dots, y^n)$，特别是

$$\lambda^i = du^i + \sum_{\alpha=1}^{n} \Big(\frac{\partial \Phi^i}{\partial x^\alpha} dy^\alpha - \frac{\partial \Phi^i}{\partial y^\alpha} dx^\alpha\Big), \quad \forall i = 1, 2, \dots, k. \tag{2.18}$$

现在，CR 流形 M^{2n+k} 可方便地用 $(u^i, x^\alpha, y^\alpha)$ 个实参数 $(2n+k)$ 参数化，其中分布 H 由以下向量张成

$$H = \operatorname{Span}(X_\alpha, Y_\alpha)$$

由以下实向量场 X_α 和 Y_α 张成，其中 $2n$ 由

$$X_\alpha = \partial_{x^\alpha} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \Phi^i}{\partial y^\alpha} \partial_{u^i}, \qquad Y_\alpha = \partial_{y^\alpha} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \Phi^i}{\partial x^\alpha} \partial_{u^i}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n.$$

这个 H 关于来自环境复空间 $\mathbb{C}^{n+k}$的复结构 I 是不变的。事实上，可得 $IX_\alpha = Y_\alpha$ 和 $IY_\alpha = -X_\alpha$ 对所有$\alpha = 1$、2、.....、n均成立。还可得，丛 Z由以下向量张成

$$Z = \operatorname{Span}(Z_\alpha)$$

由 $\alpha = 1$、2、...、n 个复值向量场

$$Z_\alpha = \tfrac{1}{2}(X_\alpha - iY_\alpha) = \partial_{z_\alpha} + i \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \Phi^i}{\partial z_\alpha} \partial_{u^i},$$

并且是自动可积的，因为 $[Z_\alpha, Z_\beta] = 0$ 对所有 α、$\beta = 1$、2、...、n 都成立。

复丛 Z^* 由所有 λ^i 和 μ^α 在复函数上的线性组合张成，其中 $\mu^\alpha = dz^\alpha$, $\alpha = 1, 2, \dots, n$。

例 2.6。**例 2.4 的续篇**：容易验证，CR 函数方程

$$dz \wedge \lambda^1 \wedge \lambda^2 \wedge \lambda^3 \wedge \mu^1 \wedge \mu^2 = 0$$

用 $(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \mu^1, \mu^2)$ Z^* 的生成元表示的例 2.4 的 CR 结构(M, H, J) 有以下五个独立解：

$$w_1 = x^1 + ix^4, \quad w_2 = x^2 - ix^3, \quad w_3 = x^5 + \tfrac{i}{2}\big((x^1)^2 - (x^2)^2\big),$$
$$z_1 = x^6 + ix^1x^3, \quad z_2 = x^7 + i(x^2 - ix^3)x^2.$$

消去 x^1、x^2、x^3、x^4、x^5、x^6、x^7 中的变量后，我们从 $(w_1, w_2, w_3, z_1, z_2)$ 得到一个实余维数为 $k = 3$ 的子流形

$$\iota(M) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C}^5 \ni (w_1, w_2, w_3, z_1, z_2) \text{ s.t.} \\ \quad Im(w_1) = \frac{1}{2}\big((Re(z_1))^2 - (Re(z_2))^2\big) \\ \quad Im(w_2) = -Re(z_1)Im(z_2) \\ \quad Im(w_3) = Re(z_1)Re(z_2) \end{array} \right\} \subset \mathbb{C}^5,$$

这给出了 $\mathbb{C}^5$中 $(\iota(M), H, J)$ 的一个 CR 嵌入。根据上面的公式，这个 $(\iota(M), H, J)$ CR 结构给出了一个分布结构 $(\iota(M), H)$，其$H^\perp = \mathrm{Span}(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)$ 由以下 1-形式给出： λ^1、 λ^2、 λ^3

$$\lambda^1 = du^1 + x^1dy^1 - x^2dy^2,$$
$$\lambda^2 = du^2 - y^2dy^1 + x^1dx^2,$$
$$\lambda^1 = du^3 + x^2dy^1 + x^1dy^2.$$

留给读者验证：在坐标为 $(x^1, y^1, x^2, y^2, u^1, u^2, u^3)$ 的 $\mathbb{R}^7$ 上，这个分布结构与例 2.1中的分布结构(M, H) 局部等价。我们也留给读者验证：嵌入流形 $\iota(M)$ 上的 CR 结构由旗 $(H^\perp)^{\mathbb{C}} \subset Z^* \subset (T^*M)^{\mathbb{C}}$ 给出，其中 $(H^\perp)^{\mathbb{C}}$ 是上述实 $H^\perp$的复化，而复丛Z^* 是 $Z^* = (H^\perp)^{\mathbb{C}} + \mathrm{Span}(\mu^1, \mu^2)$，其中 $\mu^1 = dx^1 + idy^1$ 且 $\mu^2 = dx^2 + i\,dy^2$；它与例 2.4 中的 CR 结构 (M, H, J) 局部 CR 等价。

2.4. **偶然装饰**。 例 2.4 中施加在例2.1 的分布结构 (M, H) 上的 CR 装饰 (M, H, J) 绝非典范。现在来考察例 2.4 中定义在例2.1 的分布结构 (M, H) 上的 CR 结构 (M, H, J)的以下变形。

例 2.7。 我们回到例 2.4，并考虑三个实常数a、 b、 c，使得

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1. \tag{2.19}$$

如果 $b^2 + c^2 \neq 0$，我们不采用例 2.4 中的 Z^*，而是取 $Z^*_{(a,b,c)} = (H^\perp)^{\mathbb{C}} + W^*_{(a,b,c)}$，其中 $W^*_{(a,b,c)}$ 由以下 1-形式张成

$$\mu^1 = dx^1 - iadx^2 - icdx^3 + ibdx^4,$$
$$\mu^2 = iadx^1 + dx^2 - ibdx^3 - icdx^4.$$

如果 $b = c = 0$，我们取 $Z^*_{(a,0,0)} = (H^\perp)^{\mathbb{C}} + W^*_{(a,0.0)}$，其中 $W^*_{(a,0,0)}$ 由以下 1-形式张成

$$\begin{aligned} \mu^1 &= dx^1 - iadx^2, \\ \mu^2 &= dx^3 + iadx^4. \end{aligned} \qquad a = \pm 1,$$

由此可知，如（2.19）中的三个常数 (a, b, c) 通过旗$(H^\perp)^{\mathbb{C}} \subset Z^*_{(a,b,c)} \subset (T^*M)^{\mathbb{C}}$ 的每一种取值，都会为例 2.1 中的分布 H 配备一个可积的CR 结构 $(M, H, J_{(a,b,c)})$。例 2.4 中的结构对应于取值 $(a, b, c) = (0, 1, 0)$。这表明，一个分布结构 (M, H)可能具有许多可积的CR 装饰。

我们进一步注意到，所有CR 结构 $(M, H, J_{(a,b,c)})$ 的局部 CR 自同构群 $G_{J_{(a,b,c)}}$ 的对称维数都不大于 12。因此，我们处于典型的情形：CR 结构 $(M, H, J_{(a,b,c)})$ 的局部对称群 $G_{J_{(a,b,c)}}$的维数 12小于未装饰分布结构 (M, H)的局部对称群 G 的维数 21。

本文聚焦于截然不同的情形。粗略地说，我们旨在给出一些分布结构 (M, H) 的例子，它们能够规范地定义出 H 上的非平凡装饰。我们希望仅凭分布结构自身的几何性质，就能无需任何额外输入地决定某种装饰。我们将这类装饰称为偶然的。

将最一般情形下偶然结构这一概念的精确定义留待后续研究，本文将聚焦于偶然 *CR* 结构 (M, H, J) 于齐性分布结构 (M, H)之上。

回顾一下，分布结构 (M, H) 与 CR 结构 (M, H, J) 的相应对称群 G和 G_J的典型情形是 $G_J \subsetneq G$。偶然 (M, H, J) 的概念要求这里两者相等：

定义 2.8. 若齐性分布结构(M, H) 上的 CR 结构 (M, H, J) 满足：CR 结构 (M, H, J) 的 CR 自同构群 G_J 与分布结构 (M, H) 的对称群 G 相等，则称该 CR 结构是偶然的 。

对于具有偶然 CR 结构 (M, H, J) 的 (M, H)，添加复结构 J 不会削弱 (M, H) 的对称性。换言之，复结构 J 在某种意义上与分布结构相容，或者说，它是由该分布以某种典范方式定义的。

引言中的两个 E_6 齐性 CR 结构是偶然 *CR* 结构的例子。在接下来的章节中，我们将介绍更多此类结构。实际上，我们给出了偶然 *CR* 结构的完整列表 (M, H, J)，其中分布 H 满足

- $[H, H] + H = TM$ 并且
- (M, H, J) 的几何是与分布 H 相关的抛物几何的平坦模型。

另一方面，也存在许多非偶然的齐性 CR 结构。首先，所有超曲面型 CR 结构，即在 $\mathbb{C}^N$ 中从环境复空间继承 CR 结构且具有非退化 Levi 型的实超曲面，都不是偶然的：它们的分布结构 (M, H) 是一种接触结构，因此局部对称群是无限维的 G；相反，它们的 G_J 局部 *CR* 自同构群 始终是 有限维的。

正如例 2.7 所示，高余维的非偶然齐性 CR 结构也有很多。

我们强调，分布上的偶然结构这一概念并非仅适用于可积（或近似）CR 结构。不过，这超出了本文的讨论范围，我们将把这一问题留待后续论文探讨。

2.5. **关于解决该问题的一种方法的说明**。我们将讨论范围限定于作为抛物几何平坦模型的分布结构上的偶然 CR 结构 $(M, H, J)(M, H)$，使得列出所有此类结构的任务变得可行。这是基于以下原因：

首先，所有抛物几何都已分类，因此寻找候选对象的一种方法是在现有的列表中进行查找。

其次，我们所寻找对象的偶然特性要求，所考察分布结构的符号代数的 $\mathfrak{n}_{-1}$ 部分天然地带有近似结构 J。这是因为该结构 J 应能在 $H = \mathfrak{n}_{-1}^{Nil}$上天然诱导一个近复结构 J^{Nil}，进而在群 Nil上定义平坦模型分布 H。这立即排除了所有 $\mathfrak{n}_{-1}$维数为奇数的幂零李代数。

事实上，情况要好得多：若限制在 p 步幂零李代数中，且 $\mathfrak{n}_{-1}$的维数为偶数，如果 J 在 $\mathfrak{n}_{-1}$ 中并非自然的，而我们考虑 Nil 上相应的几乎 CR 结构 $(Nil, H = \mathfrak{n}_{-}^{Nil}, J^{Nil})$，那么该几乎 CR 结构的对称性将小于 $(Nil, H = \mathfrak{n}_{-}^{Nil})$ 的对称性，因为 $(\mathfrak{n}_{-}, J)$ 的田中延拓不仅会保留 $\mathfrak{n}_{-}$ 中的分层 $\mathfrak{n}_{k-}$，还会保留 $\mathfrak{n}_{-1}$ 中的 J。这会将 $\mathfrak{n}_0$ 从不含 J 的 $\mathfrak{n}_{-}$ 情形中剔除，使其缩减到一个更小的 $\mathfrak{n}_0^J$，从而使得到的新田中延拓 $\mathfrak{g}_T^J(\mathfrak{n}_{-})$ 小于 $\mathfrak{g}_T(\mathfrak{n}_{-})$。对我们而言，关键的信息是，在这种情况下，新的 $\mathfrak{n}_0^J$ 应保留 J，其中伴随作用是由 $\mathfrak{g}_T^J(\mathfrak{n}_{-})$ 中的李括号给出的，即 $\mathfrak{n}_{-1}$ 中 $\mathfrak{n}_o^J$ 的自然伴随作用。因此，$\mathfrak{n}_0^J$ 自然应是 的酉代数的子代数 $\mathfrak{su}(\mathfrak{n}_{-1})$。

最后这一观察迫使我们将范围限定于幂零李代数；除了能生成抛物几何的平坦模型之外，它们的田中延拓中的 $\mathfrak{n}_0$ 部分还应当是酉代数的子代数，并作用于 $\mathfrak{n}_{-1}$。这就从单李代数中所有定义分次的 $\mathfrak{n}$里筛选出了一个相当小的子集。再加上所研究的 $\mathfrak{n}$必须是二步分次的这一要求，问题便迎刃而解，由此得到完整列表。请注意，通过这种代数方法，我们可以确保找到的是偶然的几乎CR 流形。有趣的是，所有找到的、也就是列在我们列表中的对象，都是真正的 CR 流形，其相应的 J满足可积性条件 (2.9)-(2.10)。

3. 对称代数为 $\mathfrak{a}_\ell$、$\mathfrak{d}_\ell$ 和 $\mathfrak{e}_6$的平坦抛物型 CR 结构

3.1. **关于 E_{II} 和 E_{III} 对称性的情形**。这在引言中的定理 1.2 和 1.3 里已有讨论。这里我们提到，CR 流形嵌入的显式公式取决于便利性，或者在大多数情况下，取决于嵌入者的个人喜好。特别是，如果通过分析适当实形式的 E_6的单根结构来猜测定理 1.3 中 CR 流形的嵌入，则可以给出 24 维 CR 流形 $M^{24}_{E_{III}}$ 的一种更自然的嵌入：

在具有全纯坐标 (z_i, w_i)、$i = 1$、2、.....、8 的 $\mathbb{C}^{8+8}$ 中，考虑

$$\tilde{M}^{24}_{E_{III}} = \Big\{ \begin{aligned} \operatorname{Re} w_1 &= \operatorname{Re}\big(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2\big), \\ \operatorname{Re} w_2 &= \operatorname{Re}\big(|z_5|^2 + |z_6|^2 + |z_7|^2 + |z_8|^2\big), \\ \operatorname{Im} w_3 &= \operatorname{Im}\big(z_1\,\bar{z}_7 + z_2\,\bar{z}_8 + z_5\,\bar{z}_3 + z_6\,\bar{z}_4\big), \\ \operatorname{Re} w_4 &= \operatorname{Re}\big(z_1\,\bar{z}_7 + z_2\,\bar{z}_8 + z_5\,\bar{z}_3 + z_6\,\bar{z}_4\big), \\ \operatorname{Im} w_5 &= \operatorname{Im}\big(z_1\,\bar{z}_6 - z_3\,\bar{z}_8 + z_5\,\bar{z}_2 - z_7\,\bar{z}_4\big), \\ \operatorname{Re} w_6 &= \operatorname{Re}\big(z_1\,\bar{z}_6 - z_3\,\bar{z}_8 + z_5\,\bar{z}_2 - z_7\,\bar{z}_4\big), \\ \operatorname{Im} w_7 &= \operatorname{Im}\big(z_2\,\bar{z}_6 + z_3\,\bar{z}_7 - z_5\,\bar{z}_1 - z_8\,\bar{z}_4\big), \\ \operatorname{Re} w_8 &= \operatorname{Re}\big(z_2\,\bar{z}_6 + z_3\,\bar{z}_7 - z_5\,\bar{z}_1 - z_8\,\bar{z}_4\big) \end{aligned} \Big\} \subset \mathbb{C}^{16}.$$

那么，这个嵌入的 24 维 CR 流形，其 CR 维数为 $n = 8$ 、CR 余维数为 $k = 8$ ，与定理 1.3 中的流形双全纯等价，因此其 CR 自同构群是例外单李群 E_{III} 。

3.2. **关于** $SO(\ell-1,\ell+1)$ **对称性**。设 $\ell \geq 4$ 和 $N(\ell) = \binom{(\ell-1)(\ell+2)}{2}$，并考虑带有全纯坐标 $(w,z) = (w^{ij}, z^k)$ 的 $\mathbb{C}^{\ell(\ell-1)/2}$。这里 $i<j$、$k = 1$、2、.....、$\ell-1$。

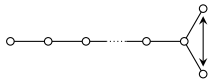
定义

$$\boxed{M^{N(\ell)} = \Big\{ \mathbb{C}^{\ell(\ell-1)/2} \ni (w,z) \ \text{ s.t. } \ \operatorname{Im}(w^{ij} - z^i \bar{z}^j) = 0 \quad \forall i<j = 1,2,\dots,\ell-1 \Big\}}.$$

我们有如下定理。

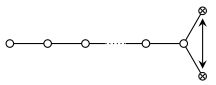
定理 3.1。设 $\ell \geq 4$。集合 $M^{N(\ell)} \subset \mathbb{C}^{\ell(\ell-1)/2}$ 是一个实 $N(\ell)$ 维嵌入 *CR* 流形，并从环境复空间 $\mathbb{C}^{\ell(\ell-1)/2}$获得 *CR* 维数为 $n = \ell-1$、*CR* 余维数为 $k = \binom{(\ell-1)(\ell-2)}{2}$ 的 *CR* 结构。其局部 *CR* 自同构群同构于实单李群

$SO(\ell-1,\ell+1)$，其李代数具有如下 *Satake* 图



具有 ℓ 个节点。它在局部上 *CR* 等价于平坦模型 $SO(\ell-1,\ell+1)/P_1$，这是一个类型为 $(SO(\ell-1,\ell+1), P_1)$的 $N(\ell)$维抛物几何，其中 $SO(\ell-1,\ell+1)$ 中的实抛物子群 P_1 由下方在

相应的 $\mathfrak{d}_\ell$ *Satake* 图：。



例 3.2。如果 $\ell = 4$ 我们有一个 9 维 CR 流形 M^9，其*CR* 维数$n = 3$ 和*CR* 余维数 $k = 3$分别为.....，嵌入于 $\mathbb{C}^6$ 中，并带有全纯坐标$(w^{12}, w^{13}, w^{23}, z^1, z^2, z^3)$，通过 $k = 3$ 个实方程

$$\operatorname{Im}(w^{12} - z^1\bar{z}^2) = \operatorname{Im}(w^{13} - z^1\bar{z}^3) = \operatorname{Im}(w^{23} - z^2\bar{z}^3) = 0.$$

该 CR 结构的局部 CR 自同构的完整群为正交群 $SO(5,3)$ 。

我们的公式对 $\ell = 3$ 同样成立。在此情况下，CR 流形 $M^{N(3)}$ 是 5 维的；其 CR 维数为 $n = 2$，CR 余维数为 $k = 1$。因此它

是 $\mathbb{C}^3$ 中的超曲面型 CR 流形。事实上，使用全纯坐标(w^{12}, z^1, z^2)，我们的公式给出了 $\mathbb{C}^3$ 中的超二次曲面 CR 结构 $\mathrm{Im}(w^{12}) = \frac{1}{2i}(z^1\bar{z}^2 - \bar{z}^1 z^2)$ 。其 *Levi* 型 的符号为 $(+,-)$，并且局部等价于 $\mathbb{C}P^3$ 中、具有齐次坐标 $[Z^1, Z^2, Z^3, W]$ 的 彭罗斯零扭量 CR 流形 $PN = \{|Z^1|^2 + |Z^2|^2 - |Z^3|^2 - |W|^2 = 0\}$。限制到 $\ell \geq 4$ 时，我们将其排除在定理之外，因为这种平坦抛物型 CR 结构已经位于经典列表中，即对应于 $\mathfrak{su}(p,q)$ 中接触分次的超曲面型抛物型 *CR* 结构经典列表。这是由于李代数 $\mathfrak{so}(4,2)$ 与 $\mathfrak{su}(2,2)$ 之间存在低维同构。

3.3. **CR 对称生成元的显式公式**。我们还计算了由无穷小 CR 自同构的向量场所生成的对称代数，该代数对应于定理 3.1 所涵盖的 $SO(\ell-1, \ell+1)$ 对称 CR 结构；显式公式见附录 C。本文还对所包含的所有其他齐性 CR 结构进行了同样的计算，但公式过长，无法在此列出。相关公式可见于 [5]。

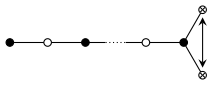
3.4. **情形，具有 $\ell = 2m+1$ 对称性**。令 $m \geq 2$、$\ell = 2m+1$ 和 $N(m) = m(2m+3)$，并考虑具有全纯坐标$(w_I, w, z, \zeta) = (w_I^{ij}, w^{k_1}, z^{k_2}, \zeta^{k_3})$的 $\mathbb{C}^{m(2m+1)}$。这里 $I = 1、2、3、4$；$i < j$、k_1、k_2、$k_3 = 1、2、\ldots\ldots、m$。

定义

$$
\begin{aligned}
M^{N(m)} = \Big\{ \mathbb{C}^{m(2m+1)} \ni (w_I, w, z, \zeta) \ \text{ s.t.} \\
\begin{cases} \mathrm{Im}(w_1^{ij}) = \mathrm{Im}(z^i\bar{z}^j + \zeta^i\bar{\zeta}^j) \\ \mathrm{Im}(w_2^{ij}) = \mathrm{Im}(z^i\bar{\zeta}^j + \zeta^i\bar{z}^j) \\ \mathrm{Im}(w_3^{ij}) = \mathrm{Re}(z^i\bar{z}^j + \zeta^i\bar{\zeta}^j) \\ \mathrm{Im}(w_4^{ij}) = \mathrm{Re}(z^i\bar{\zeta}^j + \zeta^i\bar{z}^j) \end{cases} \quad \forall i < j = 1, 2, \ldots m, \\
\mathrm{Im}(w^i) = |z^i|^2 + |\zeta^i|^2 \qquad \forall i = 1, 2, \ldots m \Big\}.
\end{aligned}
$$

我们有以下定理。

定理 3.3。设 $m \geq 2$。$\mathbb{C}^{m(2m+1)}$ 的子集 $M^{N(m)}$ 是一个实 $N(m)$ 维嵌入 *CR* 流形，它继承了环境复空间 $\mathbb{C}^{m(2m+1)}$ 的 *CR* 结构，其 *CR* 维数为 $n = 2m$，*CR* 余维数为 $k = m(2m-1)$。其局部 *CR* 自同构群同构于实单李群 $SO^*(4m+2)$，其李代数具有带 $\ell = 2m+1$ 个节点的 *Satake* 图。它在局部上 *CR* 等价于平坦模型 $SO^*(4m+2)/P_2$，该模型对应于一个 $N(m)$ 维、类型为 $(SO^*(4m+2), P_2)$ 的抛物几何，其中 $SO^*(4m+2)$ 中的实抛物子群 P_2 由相应 $\mathfrak{d}_\ell$ *Satake* 图上的以下交叉所确定：。



例 3.4。如果 $m = 2, l = 3$，我们有一个 14 维 CR 流形，其*CR* 余维数 为 $n = 4$，且 *CR* 余维数 为 $k = 6$，CR 嵌入于 $\mathbb{C}^{10}$，并具有全纯

坐标 $(w_1^{12}, w_2^{12}, w_3^{12}, w_4^{12}, w^1, w^2, z^1, z^2, \zeta^1, \zeta^2)$，由 $k = 6$ 个实方程给出

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Im}(w_1^{12} - z^1\bar{z}^2 - \zeta^1\bar{\zeta}^2) = \mathrm{Im}(w_2^{12} - z^1\bar{\zeta}^2 - \zeta^1\bar{z}^2) = 0\\
&\mathrm{Im}(w_3^{12}) - \mathrm{Re}(z^1\bar{z}^2 + \zeta^1\bar{\zeta}^2) = \mathrm{Im}(w_4^{12}) - \mathrm{Re}(z^1\bar{\zeta}^2 + \zeta^1\bar{z}^2) = 0\\
&\mathrm{Im}(w^1) - |z^1|^2 - |\zeta^1|^2 = \mathrm{Im}(w^2) - |z^2|^2 - |\zeta^2|^2 = 0.
\end{aligned}$$

该 CR 结构的局部 CR 自同构群为 $SO^*(10)$。

同样，这些公式也适用于 $m = 1$。在这种情况下，我们有一个嵌入于 $\mathbb{C}^3$、坐标为 (w, z, ζ) 的 5 维 CR 流形 M^5。实流形是 $\mathbb{C}^3$ 中的一个超曲面 $\mathrm{Im}(w) = z\bar{z} + \zeta\bar{\zeta}$。因此，我们再次得到一个嵌入超曲面 CR 结构，即海森堡群，其 CR 维数为$n = 2$，CR 余维数为 $k = 1$，但其 Levi 型的符号为 $(+, +)$。这又是系列$\mathrm{SU}(p, q)$中的经典平坦抛物型 CR 结构，其中 $p = 3, q = 1$。它的局部自同构群为 $SO^*(6)$。由于低维同构 $\mathfrak{so}^*(6) = \mathfrak{su}(3, 1)$，为避免重复对抛物型 CR 结构进行分类，本定理不包括该结构。

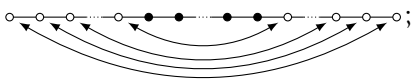
3.5. 具有对称代数的平坦抛物型 CR 结构 $\mathfrak{su}(p, q)$。我们以一类偶然的齐性 CR 流形作为例子综述的收尾，它们将余维为一、嵌入于 $\mathbb{C}^{n+1}$中的超二次曲面推广到了偶然情形。与超曲面情形类似，我们的偶然情形具有$\mathbf{SU}(p, q)$ 群的对称性，但它们的余维更高。我们将这一讨论留到综述的最后，是因为介绍所有这些具有$\mathbf{SU}(p, q)$ 对称性的高余维偶然 CR 结构相当复杂：在$\mathbf{SU}(p, q)$中有许多可选的抛物子群 P，它们会在 $M = \mathbf{SU}(p, q)/P$上导出一种偶然的CR 结构 J。

由于我们始终处于齐性情形，只需指出在 $\mathfrak{su}(p, q)$ 中哪些抛物子代数 $\mathfrak{p}$ 会导出分次 $\mathfrak{su}(p, q) = \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$，并具有自然的 $J : \mathfrak{g}_{-1} \to \mathfrak{g}_{-1}$，使得 $J^2 = -\mathrm{id}$。这些选择可描述如下：

李代数 $\mathfrak{su}(p, q)$有 $\ell = p + q - 1$个简单正根 α_1、α_2、.....、α_ℓ。出于稍后示例中将会明确的原因，在我们的讨论中，只需考虑 $p \leq q$，其中 $p \geq 2$ 和 $q \geq 3$。

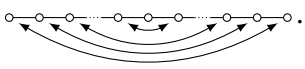
应考虑以下两种情况。

- 或者 $2 \leq p < q$，此时实李代数$\mathfrak{su}(p, q)$ 的 ***Satake*** 图为



这里，黑色节点从前 p 个白色节点之后开始，并从第 $(\ell - p + 1)^{\mathrm{st}} = q^{\mathrm{th}}$ 个节点起再次变为白色，

- 或者 $p = q$，实李代数 $\mathfrak{su}(p, p)$ 的 ***Satake*** 图为



在两幅图中，根 $\ell = p + q - 1$、α_1、.....、α_ℓ 分别由图中从左到右的白色或黑色节点表示。

由此可知，每个李代数为 $\mathfrak{p}_s$的抛物子群 P_s，都会在相应的齐性流形 $M =$上产生一种偶然 CR 结构

$\mathbf{SU}(p,q)/P_s$ 与一对根的选取$c_s=\{\alpha_s,\alpha_{p+q-s}\}$一一对应。这些根对的选取 c_s 会产生非等价的 *CR* 流形 $M=\mathbf{SU}(p,q)/P_s$

$$\text{for}\quad\text{each}\quad 1\le p<q\quad\text{and}\quad s=1,2,\dots,p,$$

and

$$\text{for}\quad\text{each}\quad q=p\ge 2\quad\text{and}\quad s=1,2,\dots,p-1.$$

进一步可得，对于上述整数 p、q、s，CR 流形 $M=\mathbf{SU}(p,q)/P_s$ 具有

- 实维数 $\dim M=s(2p+2q-3s)$,
- CR 维数 $n=s(p+q-2s)$ 以及
- CR 余维数 $k=s^2$。

特别地，嵌入于 $\mathbb{C}^{n+1}$中的熟知的余维数为一的超二次曲面，其 CR 自同构群为$\mathbf{SU}(p,q)$，对应于 $s=1$ 以及根 $c_1=\{\alpha_1,\alpha_{p+q-1}\}$的选择。由此可见，若 $s\ge 2$，这些 CR 结构并非超曲面型。在所有情况下，$s\ge 2$ 这些 CR 结构都是偶然的。

因此，要陈述一个关于具有$\mathbf{SU}(p,q)$ 对称性的偶然 CR 结构的适当定理，我们需要选取三个整数 p、q、s，其取值范围如上所述。事实证明，为了建立这些 CR 流形在 $\mathbb{C}^{n+k}$中的嵌入公式，将整数 p、q、s替换为新的整数会更方便

$$t=p-s\quad\text{and}\quad r=q-p.$$

如果 p、q、s按上述方式变化，则 t、r和 s的取值范围如下:

$$r\ge 0,\quad t\ge 0,\quad s\ge 1\quad\text{and}\quad (r,t)\ne(0,0).$$

Let

$$N(t,r,s)=s(2r+4t+s)$$

并考虑具有全纯坐标的 $\mathbb{C}^{s(r+2t+s)}$

$$(z,u,v,w)=(z_{a\mu},u_{bA},v_{cB},w_{de})$$

以及具有 $1\le a$、b、c、d、$e\le s$、$1\le\mu\le r$和 $1\le A$、$B\le t$的情形，条件是$r\ne 0$和 $t\ne 0$。如果 $r=0$，则 z变量不会出现在 (z,u,v,w)中；如果 $t=0$，则 u和 v变量不会出现在 (z,u,v,w)中。

定义

$$M^{N(t,r,s)}=\left\{\begin{array}{l}\mathbb{C}^{s(r+2t+s)}\ni(z,u,v,w)\ \text{ s.t.}\\[2ex] \operatorname{Im}w_{ac}=\operatorname{Im}\left\{\begin{array}{r}z_{a1}\bar z_{c1}+\dots+z_{ar}\bar z_{cr}\\ +u_{a1}\bar v_{c1}+\dots+u_{at}\bar v_{ct}\\ +v_{a1}\bar u_{c1}+\dots+v_{at}\bar u_{ct}\end{array}\right.\quad\text{for}\quad 1\le a<c\le s,\\[4ex] \operatorname{Re}w_{ac}=\operatorname{Re}\left\{\begin{array}{r}z_{a1}\bar z_{c1}+\dots+z_{ar}\bar z_{cr}\\ +u_{a1}\bar v_{c1}+\dots+u_{at}\bar v_{ct}\\ +v_{a1}\bar u_{c1}+\dots+v_{at}\bar u_{ct}\end{array}\right.\quad\text{for}\quad 1\le c\le a\le s.\end{array}\right\}.$$

我们有以下定理。

定理 3.5。设 $r \geq 0$, $t \geq 0$, $s \geq 1$ 和 $(r,t) \neq (0,0)$。集合 $M^{N(t,r,s)} \subset \mathbb{C}^{s(r+2t+s)}$ 是一个实 $N(t,r,s)$ 维嵌入 *CR* 流形，它从环境复空间 $\mathbb{C}^{s(r+2t+s)}$继承了 *CR* 结构，其 *CR* 维数为 $n = s(r+2t)$，*CR* 余维数为 $k = s^2$。其局部 *CR* 自同构群同构于实单李群 $\mathbf{SU}(t+s, r+t+s)$。它在局部 *CR* 等价于平坦模型 $\mathbf{SU}(t+s, r+t+s)/P_s$，这是类型为 $(\mathbf{SU}(t+s, r+t+s),\ P_s)$、维数为 $N(t,r,s)$ 的抛物几何的平坦模型，其中实抛物子群 P_s 位于 $\mathbf{SU}(t+s, r+t+s)$ 中，由在$\mathbf{SU}(t+s, r+t+s)$的 *Satake* 图上交叉根 α_s 和 α_{r+2t+s} 确定。

例 3.6。要得到具有 偶然 CR 结构且具有 $\mathbf{SU}(p,q)$ 对称性的 CR 流形，我们需要满足 $s \geq 2$，因为否则该 CR 流形的余维数为一，并且属于超曲面型。由于我们知道需要使 s 至少等于 2，并利用关于 t 和 r的不等式，很容易看出，偶然 CR 结构的最小可能 $\mathbf{SU}(p,q)$对称群为 $\mathbf{SU}(2,3)$。在这种情况下，$p = 2$、$q = 3$以及在 $\mathbf{SU}(2,3)$ 中的相应抛物子群 P_s 选择，使其在 $\mathbf{SU}(2,3)/P_s$ 上导出偶然 CR 结构，在李代数层面上由 $\mathfrak{su}(2,3)$ Satake 图中的以下交叉给出：

$\mathbf{SU}(2,3)$:  $(n,k) = (2,4)$.

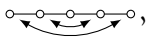
如图所示，在 $\mathbf{SU}(2,3)$ 中对抛物子群 P_2 的这一选择对应于一个偶然 CR 流形 $M^8 = \mathbf{SU}(2,3)/P_s$。这个 $\mathbf{SU}(2,3)$ 齐性 CR 流形的维数为 $N = 8$，CR 维数为 $n = 2$，CR 余维数为 $k = 4$。它嵌入 $\mathbb{C}^6$ 的方式如下：

$$M^8 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C}^6 \ni (z_1, z_2, w_{11}, w_{12}, w_{21}, w_{22}) \text{ s.t.} \\ \quad w_{12} - \bar{w}_{12} = z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2 \\ \quad w_{11} + \bar{w}_{11} = 2z_1\bar{z}_1 \\ \quad w_{21} + \bar{w}_{21} = z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 \\ \quad w_{22} + \bar{w}_{22} = 2z_2\bar{z}_2 \end{array} \right\},$$

并且具有 $\mathbf{SU}(2,3)$ CR 自同构群。

例 3.7. 对于 $\mathbf{SU}(3,3)$ CR 对称性，我们有 $p = q = 3$，即 $r = 0$和 $t = 3 - s > 0$；若要得到偶然 CR 结构，我们需要选择唯一的可能性 $s = 2$。

$\mathfrak{su}(3,3)$ 的 Satake 图为

,

而导致偶然 CR 结构的抛物子群选择为：

, with $(n,k) = (4,4)$.

嵌入由下式给出：

$$M^{12} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C}^8 \ni (u_a, v_b, w_{cd}), a,b,c,d = 1,2, \text{s.t.} \\ \quad w_{12} - \bar{w}_{12} = u_1\bar{v}_2 + v_1\bar{u}_2 - \bar{u}_1 v_2 - \bar{v}_1 u_2 \\ \quad w_{11} + \bar{w}_{11} = 2(u_1\bar{v}_1 + v_1\bar{u}_1) \\ \quad w_{21} + \bar{w}_{21} = u_2\bar{v}_1 + v_2\bar{u}_1 + \bar{u}_2 v_1 + \bar{v}_2 u_1 \\ \quad w_{22} + \bar{w}_{22} = 2(u_2\bar{v}_2 + v_2\bar{u}_2) \end{array} \right\},$$

并在 $\mathbb{C}^8$ 中提供了一个偶然的 CR 结构，其 CR 维数为 $n=4$，CR 余维数为 $k=4$，其 CR 自同构群为 $\mathbf{SU}(3,3)$。

例 3.8。对于 $\mathbf{SU}(2,4)$ CR 对称性，我们有 $p=2,\ q=4$，即$r=2$和 $t=2-s\geq 0$，且只有在 $s=2$时才会出现偶然 CR 结构。在这种情况下 $t=0$。

$\mathfrak{su}(2,4)$ 的 Satake 图为



而导致偶然 CR 结构的抛物子群选择为：



with $(n,k)=(4,4)$.

嵌入为：

$$M^{12}=\left\{\begin{array}{l}\mathbb{C}^8\ni(z_{ab},w_{cd}),a,b,c,d=1,2,\text{s.t.}\\ \quad w_{12}-\bar{w}_{12}=z_{11}\bar{z}_{21}+z_{12}\bar{z}_{22}-\bar{z}_{11}z_{21}-\bar{z}_{12}z_{22}\\ \quad w_{11}+\bar{w}_{11}=2(z_{11}\bar{z}_{11}+z_{12}\bar{z}_{12})\\ \quad w_{21}+\bar{w}_{21}=z_{21}\bar{z}_{11}+z_{22}\bar{z}_{12}+\bar{z}_{21}z_{11}+\bar{z}_{22}z_{12}\\ \quad w_{22}+\bar{w}_{22}=2(z_{21}\bar{z}_{21}+z_{22}\bar{z}_{22})\end{array}\right\}.$$

这在 $\mathbb{C}^8$中产生了一个 CR 维数为 $n=4$、CR 余维为 $k=4$ 的偶然的 CR 结构。其 CR 自同构群为 $\mathbf{SU}(2,4)$。

例 3.9。如果 $p=3$、$q=4$，且 CR 自同构群为 $\mathbf{SU}(3,4)$，那么我们有 $r=4-3=1$和 $t=3-s\geq 0$；当存在 两个 非等价的偶然的 CR 流形时，就遇到了维数最低的情形。这是因为在这种情况下，s 有两个不等于 1 的可能取值，即 $s=2$ 和$s=3$。对于 $\mathfrak{su}(3,4)$，选取与 $s=2$相关的抛物子群后，其 Satake 图为



$(n,k)=(6,4)$,

对于 $\mathfrak{su}(3,4)$，选取与 $s=3$ 相关的抛物子群后，其 Satake 图为



$(n,k)=(3,9)$.

- 在 $s=2$、$r=1$、$t=1$的情形下，相应的维数为 $N=16$、CR 维数为 $n=6$ 且 CR 余维数为 $k=4$ 的偶然 CR 结构在 $\mathbb{C}^{10}$ 中的嵌入由下式给出：

$$M^{16}=\left\{\begin{array}{l}\mathbb{C}^{10}\ni(z_a,u_b,v_c,w_{de}),a,b,c,d,e=1,2,\text{s.t.}\\ \quad \mathrm{Im}(w_{12})=\mathrm{Im}\big(z_1\bar{z}_2+u_1\bar{v}_2+v_1\bar{u}_2\big)\\ \quad \mathrm{Re}(w_{11})=z_1\bar{z}_1+u_1\bar{v}_1+v_1\bar{u}_1\\ \quad \mathrm{Re}(w_{21})=\mathrm{Re}\big(z_2\bar{z}_1+u_2\bar{v}_1+v_2\bar{u}_1\big)\\ \quad \mathrm{Re}(w_{22})=z_2\bar{z}_2+u_2\bar{v}_2+v_2\bar{u}_2\end{array}\right\}.$$

根据构造，这种偶然的 CR 结构的 CR 自同构群为$\mathbf{SU}(3,4)$。

- 在 $s=3$、$r=1$、$t=0$ 的情况下，相应的维数为 $N=15$、CR 维数为 $n=3$、CR 余维数为 $k=9$ 的偶然 CR 结构在 $\mathbb{C}^{12}$ 中的嵌入为：

$$M^{15}=\left\{\begin{array}{l}\mathbb{C}^{12}\ni(z_a,w_{bc}),a,b,c=1,2,3,\text{s.t.}\\ \quad w_{12}-\bar{w}_{12}=z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2\\ \quad w_{13}-\bar{w}_{13}=z_1\bar{z}_3-\bar{z}_1z_3\\ \quad w_{23}-\bar{w}_{23}=z_2\bar{z}_3-\bar{z}_2z_3\\ \quad w_{11}+\bar{w}_{11}=2z_1\bar{z}_1\\ \quad w_{21}+\bar{w}_{21}=z_2\bar{z}_1+\bar{z}_2z_1\\ \quad w_{22}+\bar{w}_{22}=2z_2\bar{z}_2\\ \quad w_{31}+\bar{w}_{31}=z_3\bar{z}_1+\bar{z}_3z_1\\ \quad w_{32}+\bar{w}_{32}=z_3\bar{z}_2+\bar{z}_3z_2\\ \quad w_{33}+\bar{w}_{33}=2z_3\bar{z}_3\end{array}\right\}.$$

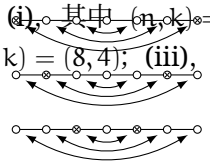
根据构造，这个偶然的 CR 结构的 CR 自同构群为$\mathbf{SU}(3,4)$。

例3.10。对于$\mathbf{SU}(4,4)$，我们有 $p=q=4$，即 $r=0$和 $t=4-s>0$。这表明 s 只能取三个值 $s=1$、2、3。$\mathfrak{su}(4,4)$ 的 Satake 图为



产生这 3 种偶然 CR 结构的抛物子群有三种可能的选择：

(i)，其中 $(n,k)=(6,1)$；(ii)，其中 $(n,k)=(8,4)$；(iii)，其中 $(n,k)=(6,9)$。



在情形 (i) 中，我们有熟悉的超曲面型 13 维超二次曲面 CR 流形

$$M^{13}=\left\{\begin{array}{l}\mathbb{C}^7\ni(u_A,v_B,w),A,B=1,2,3,\text{s.t.}\\ \quad \mathrm{Re}(w)=2\mathrm{Re}\big(u_1\bar{v}_1+u_2\bar{v}_2+u_3\bar{v}_3\big)\end{array}\right\}$$

在 $\mathbb{C}^7$ 中，其 CR 自同构群为 $\mathbf{SU}(4,4)$。

在情形 (ii) 中，我们有一个偶然的 20 维 CR 流形

$$M^{20}=\left\{\begin{array}{rcl}\mathbb{C}^{12}&\ni&(u_{ab},v_{cd},w_{ef}),a,b,c,d,e,f=1,2,\text{s.t.}\\ \mathrm{Im}(w_{12})&=&\mathrm{Im}\big(u_{11}\bar{v}_{21}+u_{12}\bar{v}_{22}+v_{11}\bar{u}_{21}+v_{12}\bar{u}_{22}\big)\\ \mathrm{Re}(w_{11})&=&2\mathrm{Re}\big(u_{11}\bar{v}_{11}+u_{12}\bar{v}_{12}\big)\\ \mathrm{Re}(w_{21})&=&\mathrm{Re}\big(u_{21}\bar{v}_{11}+u_{22}\bar{v}_{12}+v_{21}\bar{u}_{11}+v_{22}\bar{u}_{12}\big)\\ \mathrm{Re}(w_{22})&=&2\mathrm{Re}\big(u_{21}\bar{v}_{21}+u_{22}\bar{v}_{22}\big)\end{array}\right\}$$

CR 维数为 $n=8$、CR 余维数为 $k=4$，位于 $\mathbb{C}^{12}$ 中，且其 CR 自同构群为 $\mathbf{SU}(4,4)$。

在情形 (iii) 中，我们有一个偶然的 21 维 CR 流形

$$M^{21}=\left\{\begin{array}{l}\mathbb{C}^{15}\ni(u_a,v_b,w_{cd}),a,b,c,d=1,2,3,\text{s.t.}\\ \quad w_{12}-\bar{w}_{12}=u_1\bar{v}_2+v_1\bar{u}_2-\bar{u}_1v_2-\bar{v}_1u_2\\ \quad w_{13}-\bar{w}_{13}=u_1\bar{v}_3+v_1\bar{u}_3-\bar{u}_1v_3-\bar{v}_1u_3\\ \quad w_{23}-\bar{w}_{23}=u_2\bar{v}_3+v_2\bar{u}_3-\bar{u}_2v_3-\bar{v}_2u_3\\ \quad w_{11}+\bar{w}_{11}=2\big(u_1\bar{v}_1+v_1\bar{u}_1\big)\\ \quad w_{21}+\bar{w}_{21}=u_2\bar{v}_1+v_2\bar{u}_1+\bar{u}_2v_1+\bar{v}_2u_1\\ \quad w_{22}+\bar{w}_{22}=2\big(u_2\bar{v}_2+v_2\bar{u}_2\big)\\ \quad w_{31}+\bar{w}_{31}=u_3\bar{v}_1+v_3\bar{u}_1+\bar{u}_3v_1+\bar{v}_3u_1\\ \quad w_{32}+\bar{w}_{32}=u_3\bar{v}_2+v_3\bar{u}_2+\bar{u}_3v_2+\bar{v}_3u_2\\ \quad w_{33}+\bar{w}_{33}=2\big(u_3\bar{v}_3+v_3\bar{u}_3\big)\end{array}\right\}$$

具有 CR 维数 $n=6$ 和 CR 余维数 $k=9$ 的 $\mathbb{C}^{15}$，其 CR 自同构群仍为 $\mathbf{SU}(4,4)$。

例 3.11。在 $\mathbf{SU}(3,5)$ 的情形下，我们有 $p=3,q=5$，即 $r=2$ 和$t=3-s\geq 0$。这表明，s仍只能取三个 值：$s=1$、2、3。$\mathfrak{su}(3,5)$ 的 Satake 图如下：



导致这 3 种偶然 CR 结构的抛物子群有以下三种可能的选择：

(i) , with $(n,k)=(6,1)$,

(ii) , with $(n,k)=(8,4)$,

(iii) , with $(n,k)=(6,9)$.

在情形 (i) 中，我们仍得到一个超曲面型、13 维的超二次曲面 CR 流形

$$M^{13}=\left\{\begin{array}{l}\mathbb{C}^{7}\ni(z_{1a},u_{1b},v_{1c},w_{11}),a,b,c=1,2,\text{s.t.}\\ \quad w_{11}+\bar{w}_{11}=2\big(z_{11}\bar{z}_{11}+z_{12}\bar{z}_{12}+u_{11}\bar{v}_{11}+u_{12}\bar{v}_{12}+v_{11}\bar{u}_{11}+v_{12}\bar{u}_{12}\big)\end{array}\right\}$$

位于 $\mathbb{C}^7$ 中，其 CR 自同构群为 $\mathbf{SU}(3,5)$。

在情形 (ii) 中，我们有一个偶然的 20 维 CR 流形

$$M^{20}=\left\{\begin{array}{rl}\mathbb{C}^{12}\ni(z_{ab},u_{c1}v_{d1},w_{ef}),a,b,c,d,e,f=1,2,\text{s.t.}\\ \mathrm{Im}\big(w_{12}\big)&=\mathrm{Im}\big(z_{11}\bar{z}_{21}+z_{12}\bar{z}_{22}+u_{11}\bar{v}_{21}+v_{11}\bar{u}_{21}\big)\\ w_{11}+\bar{w}_{11}&=2\big(z_{11}\bar{z}_{11}+z_{12}\bar{z}_{12}+u_{11}\bar{v}_{11}+v_{11}\bar{u}_{11}\big)\\ \mathrm{Re}\big(w_{21}\big)&=\mathrm{Re}\big(z_{21}\bar{z}_{11}+z_{22}\bar{z}_{12}+u_{21}\bar{v}_{11}+v_{21}\bar{u}_{11}\big)\\ w_{22}+\bar{w}_{22}&=2\big(z_{21}\bar{z}_{21}+z_{22}\bar{z}_{22}+u_{21}\bar{v}_{21}+v_{21}\bar{u}_{21}\big)\end{array}\right\}$$

CR 维数为 $n=8$、CR 余维数为 $k=4$，位于 $\mathbb{C}^{12}$ 中，且 CR 自同构群为 $\mathbf{SU}(3,5)$。

在情形 (iii) 中，我们有一个偶然的 21 维 CR 流形

$$M^{21}=\left\{\begin{array}{l}\mathbb{C}^{15}\ni(z_{a\mu},w_{bc}),a,b,c=1,2,3,\ \mu=1,2\ \text{s.t.}\\ \quad w_{12}-\bar{w}_{12}=z_{11}\bar{z}_{21}+z_{12}\bar{z}_{22}-\bar{z}_{11}z_{21}-\bar{z}_{12}z_{22}\\ \quad w_{13}-\bar{w}_{13}=z_{11}\bar{z}_{31}+z_{12}\bar{z}_{32}-\bar{z}_{11}z_{31}-\bar{z}_{12}z_{32}\\ \quad w_{23}-\bar{w}_{23}=z_{21}\bar{z}_{31}+z_{22}\bar{z}_{32}-\bar{z}_{21}z_{31}-\bar{z}_{22}z_{32}\\ \quad w_{11}+\bar{w}_{11}=2(z_{11}\bar{z}_{11}+z_{12}\bar{z}_{12})\\ \quad w_{21}+\bar{w}_{21}=z_{21}\bar{z}_{11}+z_{22}\bar{z}_{12}+\bar{z}_{21}z_{11}+\bar{z}_{22}z_{12}\\ \quad w_{22}+\bar{w}_{22}=2(z_{21}\bar{z}_{21}+z_{22}\bar{z}_{22})\\ \quad w_{31}+\bar{w}_{31}=z_{31}\bar{z}_{11}+z_{32}\bar{z}_{12}+\bar{z}_{31}z_{11}+\bar{z}_{32}z_{12}\\ \quad w_{32}+\bar{w}_{32}=z_{31}\bar{z}_{21}+z_{32}\bar{z}_{22}+\bar{z}_{31}z_{21}+\bar{z}_{32}z_{22}\\ \quad w_{33}+\bar{w}_{33}=2(z_{31}\bar{z}_{31}+z_{32}\bar{z}_{32})\end{array}\right\}$$

在 $\mathbb{C}^{15}$ 中具有 CR 维数 $n=6$ 和 CR 余维数 $k=9$，同样具有 CR 自同构群 $\mathbf{SU}(3,5)$。

4. 为什么第 2 节和第 3 节中的例子是平坦的抛物几何?

4.1. **定理 1.2 和 1.3 的证明**。在本节余下部分，我们仅对定理 1.2、1.3、3.1、3.3 和 3.5 给出论证。由于这些定理的思路相同，我们将只着重证明与 $\mathfrak{e}_6$ 相关的定理 1.2 和 1.3。无论如何，这一点并不那么重要，因为定理 1.3、1.2、3.1、3.3 和 3.5 的证明可直接由第 5 节以及（在完全一般的情形下）参考文献 [7] 得出。

基本观察（而且并非显而易见！）适用于定理 1.3、1.2、3.1、3.3 和 3.5：其中出现的 CR 流形 M^N 的全部 CR 几何，完全由实分布 H的几何决定。也就是说，对于这些定理中的所有 *CR* 流形，H 中的复结构 J 完全由这一对 (M^N,H)决定。换句话说，对于定理 1.3、1.2、3.1 和 3.3 中的所有 CR 流形，CR 结构 (M^N,H,J) 的局部微分几何与实流形上结构 (M^N,H) 的局部几何相同；该实流形的维数为 N，并带有一个秩为 $2n$ 的（实）分布 H （其符号代数适当）。这就是我们将定理 1.3、1.2、3.1 和 3.3 中的 CR 结构称为偶然的CR 结构的原因：它们是 M^N 上的向量分布 H 的结构，而 H中的 J 则是由几何数据 (M^N,H)馈赠的，或者说是一个偶然产物。

当然，关于定理 1.3、1.2、3.1 和 3.3 中的所有结构，其 CR 结构(M^N,H,J) 的局部微分几何相同 于实流形 (M^N,H) 上的维数为 N 、秩为 $2n$ 的（实）分布 H的局部几何这一说法，需要加以证明。下面我们将分别考察所有这些情形并给出证明。

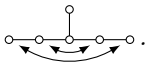
定理 1.2 的证明。 在这种情况下，转到实变量 (u^i,v^i,x^i,y^i) 后，我们可以将 CR 结构 $M^{24}_{E_{11}}$ 写成形式 (2.17)，其中包含 8 个定义函数

Φ^i 如下:

$$\begin{aligned}
\Phi^1 &= x^2x^3 + x^1x^4 + y^2y^3 + y^1y^4\\
\Phi^2 &= x^2x^5 + x^1x^6 + y^2y^5 + y^1y^6\\
\Phi^3 &= x^7y^1 - x^5y^3 + x^3y^5 - x^1y^7\\
\Phi^4 &= x^8y^1 + x^7y^2 + x^6y^3 + x^5y^4 - x^4y^5 - x^3y^6 - x^2y^7 - x^1y^8\\
\Phi^5 &= x^2x^7 + x^3x^6 - x^1x^8 - x^4x^5 + y^2y^7 + y^3y^6 - y^1y^8 - y^4y^5\\
\Phi^6 &= x^8y^2 - x^6y^4 + x^4y^6 - x^2y^8\\
\Phi^7 &= x^4x^7 + x^3x^8 + y^4y^7 + y^3y^8\\
\Phi^8 &= x^6x^7 + x^5x^8 + y^6y^7 + y^5y^8.
\end{aligned}$$

因此，现在我们的 CR 流形 $M^{24}_{E_{II}}$ 由实坐标 $(u^i, x^i, y^i), i = 1, 2, \dots, 8$ 参数化，使得根据公式 (2.18)，在 $M^{24}_{E_{II}}$ 上消灭秩 16 分布 H 的形式 λ^i，由推论 1.4 中 Pfaff 系统的 1-形式 λ^i, $i = 1, 2, \dots, 8$ 给出。现在我们有以下引理[3]。

引理 4.1. 在 $M^{24}_{E_{II}}$ 上由推论 *1.4* 中的形式 λ^i 给出的 *Pfaff* 系统 $[\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^8]$ 的无穷小对称性李代数，或者等价地，秩 *16* 分布 $H = [\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^8]^\perp$ 的无穷小对称性李代数，是简单例外李代数 $\mathfrak{e}_6$ 的实形式，其 *Satake*

图  .

引理 4.1 的证明。 至少有三种证明该引理的方法:

- 蛮力法：求解偏微分方程 (2.14)，以求得 Y 分布结构 (M, H) 的对称性；该结构定义为引理中给出的 Pfaff 系统$[\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^8]$ 的湮灭子。例如，可以使用 I. Anderson 的 Maple微分几何软件包 来完成。该软件包还可以对求得的对称性的李代数进行分类，表明该代数属于类型$\mathfrak{e}_6$。不过，这需要一台性能相当强大的计算机以及商业软件 Maple。

- 将 嘉当等价法 应用于流形$M^{24}_{E_{II}}$ 上给出的形式 (λ^i)，并考虑变换 $\lambda^i \mapsto a^i{}_j\lambda^j$，其中实 8×8 矩阵$(a^i{}_j)$ 属于 $GL(8, \mathbb{R})$。这种方法非常繁琐，最终会得到某个 78 维流形 $\mathcal{G}$ 上的 78 个线性无关的 1-形式；该流形满足单李例外群 E_6适当实形式上的毛雷尔-嘉当形式的外微分系统。

- 按照田中延拓法，我们将在本文中采用这种方法。

引理的证明基于田中定理 2.2。为此，我们将引理中生成 Pfaff 系统的八个 1-形式 λ^i 扩展为余标架 (λ^A), $A = 1, 2 \dots 24$，在 $M^{24}_{E_{III}}$ 上定义如下:

$$\lambda^{i+8} = dx^i, \qquad \lambda^{i+16} = dy^i, \quad i = 1, 2, \dots, 8.$$

[3]实际上，为了简化此处给出的 λ表达式，并使后文的外微分系统公式更加对称，我们将（2.18）中出现的原始坐标 u^i 替换为此处出现的更合适的 u^i，并对（2.18）中的 λ稍作重新缩放。

我们计算所有的外微分 $d\lambda^A$ ，得到：

(4.1)
$$
\begin{aligned}
d\lambda^1 &= \lambda^9\wedge\lambda^{20}+\lambda^{10}\wedge\lambda^{19}+\lambda^{11}\wedge\lambda^{18}+\lambda^{12}\wedge\lambda^{17}\\
d\lambda^2 &= \lambda^9\wedge\lambda^{22}+\lambda^{10}\wedge\lambda^{21}+\lambda^{13}\wedge\lambda^{18}+\lambda^{14}\wedge\lambda^{17}\\
d\lambda^3 &= \lambda^9\wedge\lambda^{15}-\lambda^{11}\wedge\lambda^{13}+\lambda^{17}\wedge\lambda^{23}-\lambda^{19}\wedge\lambda^{21}\\
d\lambda^4 &= \lambda^9\wedge\lambda^{16}+\lambda^{10}\wedge\lambda^{15}+\lambda^{11}\wedge\lambda^{14}+\lambda^{12}\wedge\lambda^{13}+\lambda^{17}\wedge\lambda^{24}+\lambda^{18}\wedge\lambda^{23}+\\
&\quad \lambda^{19}\wedge\lambda^{22}+\lambda^{20}\wedge\lambda^{21}\\
d\lambda^5 &= -\lambda^9\wedge\lambda^{24}+\lambda^{10}\wedge\lambda^{23}+\lambda^{11}\wedge\lambda^{22}-\lambda^{12}\wedge\lambda^{21}-\lambda^{13}\wedge\lambda^{20}+\lambda^{14}\wedge\lambda^{19}+\\
&\quad \lambda^{15}\wedge\lambda^{18}-\lambda^{16}\wedge\lambda^{17}\\
d\lambda^6 &= \lambda^{10}\wedge\lambda^{16}-\lambda^{12}\wedge\lambda^{14}+\lambda^{18}\wedge\lambda^{24}-\lambda^{20}\wedge\lambda^{22}\\
d\lambda^7 &= \lambda^{11}\wedge\lambda^{24}+\lambda^{12}\wedge\lambda^{23}+\lambda^{15}\wedge\lambda^{20}+\lambda^{16}\wedge\lambda^{19}\\
d\lambda^8 &= \lambda^{13}\wedge\lambda^{24}+\lambda^{14}\wedge\lambda^{23}+\lambda^{15}\wedge\lambda^{22}+\lambda^{16}\wedge\lambda^{21}\\
d\lambda^\mu &= 0,\quad \forall \mu = 9, 10, \dots, 24.
\end{aligned}
$$

因此我们有

$$
d\lambda^A = -\tfrac{1}{2}c^A{}_{BD}\lambda^B\wedge\lambda^D, \tag{4.2}
$$

其中所有系数 $c^A{}_{BD} = -c^A{}_{DB}$ 均为常数。因此，我们的 24 维流形 $M^{24}_{E_{11}}$ 连同余标架 (λ^A) ，在局部可视为一个李群，例如 $\mathcal{N}$；其中余标架 (λ^A) 是一组毛雷尔-嘉当形式。考察该群的李代数 $\mathfrak{n}$ 的结构常数（可由 (4.1) 通过 (4.2) 读出），可知这个李群是幂零的。事实上，取 $\mathcal{N}$ 上与余标架 1-形式 λ^B, $X_A \lrcorner \lambda^B = \delta^B_A$ 对偶的向量场 X_A, $A = 1, 2, \dots, 24$，可见它们构成一个二步幂零李代数

$$
\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_{-2}\oplus\mathfrak{n}_{-1} \tag{4.3}
$$

with

$$
\mathfrak{n}_{-1} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(X_9, X_{10}, \dots, X_{24}),\qquad \mathfrak{n}_{-2} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(X_1, X_2, \dots, X_8). \tag{4.4}
$$

这里我们使用了由 (4.1)-(4.2) 通过公式 $[X_A, X_B] = c^E{}_{AB}X_E$ 得到的向量场 X_A 的交换关系。现在注意，引理 4.1 中的分布 H ，恰好是由 $\mathcal{N}$ 上的函数所张成的分布，其生成元为左不变向量场 X_μ, $\mu = 9, 10, \dots, 24$；这些向量场张成二步幂零李代数 $\mathfrak{n}$的 $\mathfrak{n}_{-1}$ 部分。

那么，引理中的分布 H 的对称性的李代数 $\mathfrak{aut}(H)$ 是什么?

根据 Tanaka理论，这个李代数同构于幂零李代数 $\mathfrak{n} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(X_A)$的 Tanaka 延拓 $\mathfrak{g}_T(\mathfrak{n})$ 。因此，要确定我们的秩 16 分布 H 的自同构李代数，只需计算$\mathfrak{g}_T(\mathfrak{n})$ ，其中 $\mathfrak{n}$ 取自 (4.3)–(4.4)。

计算田中延拓 $\mathfrak{g}_T(\mathfrak{n}_-)$ 是一个算法式的归纳过程，只涉及对 $\mathfrak{n}_-$ 及其后继 $\mathfrak{n}_j$、$j \geq 0$应用线性代数。首先计算 $\mathfrak{n}_0$，然后计算 $\mathfrak{n}_1$，依此类推。为简洁起见，这里仅详细展示如何计算我们在 (4.3)-(4.4) 中的 $\mathfrak{n}$的 $\mathfrak{n}_0$

$\mathfrak{n}_0$ 的元素是 $\mathfrak{n}$ 的导子 A，它们在 $\mathfrak{n}$中保持分层 $\mathfrak{n}_{-1}$ 和 $\mathfrak{n}_{-2}$。因此，属于 $\mathfrak{n}_0$ 的线性映射 $A:\mathfrak{n}\to\mathfrak{n}$ 的矩阵元 $(A_B{}^C)$，在基 (X_A)下必须满足以下方程:

(1) $A_i{}^\mu = 0$ and $A_\mu{}^i = 0$, for $i = 1,2,\dots 8$, $\mu = 9,10,\dots,24$, (preservation of the strata)
(2) $c^E{}_{BD}A_E{}^F - c^F{}_{BE}A_D{}^E + c^F{}_{DE}A_B{}^E = 0$, $B,D,F = 1,2,\dots,24$, (derivation property).

这些关于矩阵元素 $A_B{}^C$ 的线性 方程，其中 $c^B{}_{DE}$ 由 (4.3)-(4.4) 给出，其解空间为 30 维。具体而言

$$(A_B{}^C) = \begin{pmatrix} A_i{}^j & | & 0 \\ -- & & -- \\ 0 & | & A_\mu{}^\nu \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

其中

$$(A_i{}^j) = \begin{pmatrix} a_{27}+a_{28}+2a_{30} & a_7 & a_8 & 2a_9 & 2a_{10} & a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_1 & -a_{27}+a_{29}+a_{30} & a_{17} & 2a_{18} & 2a_{19} & a_{20} & 0 & a_{12} \\ a_2 & a_{13} & -a_{28}+a_{29}+a_{30} & 2a_{23} & 2a_{24} & 0 & a_{20} & -a_{11} \\ a_3 & a_{14} & a_{21} & a_{30} & -a_{25}-a_{26} & a_{23} & -a_{18} & a_9 \\ a_4 & a_{15} & a_{22} & a_{25}+a_{26} & a_{30} & a_{24} & -a_{19} & a_{10} \\ a_5 & a_{16} & 0 & 2a_{21} & 2a_{22} & a_{28}-a_{29}+a_{30} & a_{17} & -a_8 \\ a_6 & 0 & a_{16} & -2a_{14} & -2a_{15} & a_{13} & a_{27}-a_{29}+a_{30} & a_7 \\ 0 & a_6 & -a_5 & 2a_3 & 2a_4 & -a_2 & a_1 & -a_{27}-a_{28} \end{pmatrix},$$

且实矩阵 $(A_\mu{}^\nu)$ 为:

$$(A_\mu{}^\nu) = \sum_{k=1}^{30} a_k E_k, \tag{4.6}$$

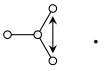
16×16矩阵 E_k, $k = 1,2,\dots,30$ 见附录 A。注意，矩阵 $(A_B{}^C)$ 中有 30 个实矩阵系数 a_k, $k = 1,2,\dots,30$。

上述矩阵 $(A_A{}^B)$ 关于交换子 $([A,A']_B{}^C) = (A_B{}^D A'_D{}^C - A'_B{}^D A_D{}^C)$ 封闭，正如预期的那样，并构成 Tanaka 延拓 $\mathfrak{g}_T(\mathfrak{n})$ 的 $\mathfrak{n}_0$。

这是什么李代数? 通过寻找在矩阵 $(A_i{}^j)$ 对 $\mathfrak{n}_{-2}$ 的伴随作用下不变的对称张量 $g_{ij} = g_{ji}\ \mathrm{Tr}(A)g_{i\bar{j}}$，我们发现 (g_{ij}) 是数值矩阵的倍数

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

这表明 A 在 $\mathfrak{n}_{-2}$ 中作为李代数 $\mathfrak{cso}(3,5)$ 作用。因此，李代数 $\mathfrak{n}_0$ 是

$$\mathfrak{n}_0 = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{cso}(3,5) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(3,5) = 2\mathbb{R} \oplus$$  .

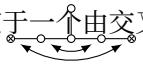
进一步计算表明，$\mathfrak{n}_1$ 是一个维数为 16 =$\dim(\mathfrak{n}_{-1})$的李代数，且 $\dim(\mathfrak{n}_2) = 8 = \dim(\mathfrak{n}_{-2})$，并且对所有 $k > 2$都有 $\mathfrak{n}_k = \{0\}$。这表明，根据我们的引理，分布 H 的自同构李代数 $\mathfrak{aut}(H)$，即田中延拓 $\mathfrak{g}_T(\mathfrak{n}) = \mathfrak{aut}(H)$，具有一种对称分次

$$\mathfrak{aut}(H) = \mathfrak{n}_{-2} \oplus \mathfrak{n}_{-1} \oplus \mathfrak{n}_0 \oplus \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2,$$

其维数为

$$78 = 8 + 16 + 30 + 16 + 8.$$

这正是一个简单李代数中的抛物分次的典型特征。在我们的情形中，事实证明，这个李代数对应于一个由交叉[4]所指示的抛物子群。引理得证。



□

回到定理 1.2 的证明，根据引理可知，我们在 $M^{24}_{E_{II}}$ 上的 CR 结构具有局部 E_{II} 对称的 Levi 分布 H。但是，分布 H 定义了 $\mathfrak{n}_0$，后者在每一点自然地作用于 H。我们强调，H 其自身定义了 $\mathfrak{n}_0$ 及其作用。因此，人们自然会想知道，在 H 中是否存在某个对象，例如张量 T，使其关于这一作用保持不变。所以现在，我们想考察在 H 中是否存在一个秩为 $\binom{1}{1}$ 的张量 J，它在 H中受 $\mathfrak{n}_0$ 的作用保持不变；这等价于询问是否存在一个 16×16 矩阵 $(T_\mu{}^\nu)$，使得

$$T_\mu{}^\rho A_\rho{}^\nu = A_\mu{}^\rho T_\rho{}^\nu \quad \forall \mu, \nu = 9, 10, \dots, 24. \tag{4.7}$$

这里的矩阵 $(A\mu^\nu)$ 与（4.5）中的相同。

我们求解了方程（4.7），得到了 H中的一个 $\mathfrak{n}_0$ 不变张量 T。结果发现，这类不变 T构成一个二参数族，可用实数 α、β来参数化，

$$T = \alpha\, \mathrm{id}_H + \beta J,$$

with

$$J = \begin{pmatrix} 0 & | & -\mathrm{id}_{8\times 8} \\ -- & & -- \\ \mathrm{id}_{8\times 8} & | & 0 \end{pmatrix} = E_{25} - E_{26}. \tag{4.8}$$

在这类不变 T中，存在唯一一个（相差一个符号） T，满足 $T^2 = -\mathrm{id}_H$。当且仅当 $\alpha = 0$、$\beta = \pm 1$时，这一条件成立。

因此，尽管我们没有假设 H上存在任何复结构 J，其中却有一个优选的复结构！它在相差一个符号的意义下由以下条件唯一确定： H中的 J 满足 $J^2 = -\mathrm{id}_H$，且与 $\mathfrak{n}_0$的作用可交换。又由于 $\mathfrak{n}_0$ 也完全由 H确定，因此这个 J 仅由实分布 H 决定。

如果这样的 J不是 $\mathfrak{n}_0$ 不变的，那么在计算复合结构 (H, J)的田中延拓时，除了要求 $\mathfrak{n}_0$ 由

[4]注意，去掉带叉的节点后，剩下的就是$\mathfrak{so}(3,5)$的Dynkin图；再加上作为 $2\mathbb{R}$计入的带叉节点，便得到计算出的 $\mathfrak{n}_0$。

$\mathfrak{n}$的保持分层的导子组成之外，还应要求 $\mathfrak{n}_0$ 由 $\mathfrak{n}$ 中那些额外保持 J 于 $\mathfrak{n}_{-1}$中的保持分层的导子组成。在我们的情形中，由于 J 与 $\mathfrak{n}_0$对易，李代数“ $\mathfrak{n}$的保持分层的导子”和“ $\mathfrak{n}$ 中也保持 J 于 $\mathfrak{n}_{-1}$中的保持分层的导子”是相同的。因此，整个 $\mathfrak{n}$ 的田中延拓仅与分布 H的结构有关；而分布 H 连同J的结构的田中延拓也相同，因为它是 H定义的。因此，结构$(M^{24}_{E_{II}}, H, J)$ 与 $(M^{24}_{E_{II}}, H)$具有相同的田中延拓，进而整个**CR** 结构 $(M^{24}_{E_{II}}, H, J)$ 是（局部） E_{II} 对称的。

最后，利用从 $(M^{24}_{E_{II}}, H)$ 得到的 $(M^{24}_{E_{II}}, H, J)$，验证相应的 $(H^{\perp})^{\mathbb{C}} \subset Z^* \subset (T^*M)^{\mathbb{C}}$ 是可积的，并将其嵌入 $\mathbb{C}^{16}$。由此可知，该嵌入与定理 1.2 中给出的嵌入 CR 等价。

这就完成了该定理的证明。 □

现在我们转而证明定理 1.3。由于其证明与定理 1.2 的证明几乎相同，因此我们只给出本定理中与定理 1.2 中公式不同的那些公式。

定理 1.3 的证明。这次， $M^{24}_{E_{III}}$ 中的实分布 H 是庞加莱形式 $[\lambda^1, \dots, \lambda^8]$ 的湮灭子；在实坐标(u^i, x^i, y^i) 中，这些形式由推论 1.5 给出。再次引入 $\lambda^{i+8} = dx^i$ 和 $\lambda^{i+16} = dy^i$， $i = 1, \dots, 8$，我们很容易看出这些形式满足以下外微分系统:

$$
\begin{aligned}
d\lambda^1 &= \lambda^9 \wedge \lambda^{24} + \lambda^{10} \wedge \lambda^{20} + \lambda^{11} \wedge \lambda^{23} + \lambda^{12} \wedge \lambda^{18} + \lambda^{13} \wedge \lambda^{22} + \lambda^{14} \wedge \lambda^{21} + \\
&\quad \lambda^{15} \wedge \lambda^{19} + \lambda^{16} \wedge \lambda^{17} \\
d\lambda^2 &= \lambda^9 \wedge \lambda^{20} + \lambda^{24} \wedge \lambda^{10} + \lambda^{22} \wedge \lambda^{11} + \lambda^{12} \wedge \lambda^{17} + \lambda^{13} \wedge \lambda^{23} + \lambda^{19} \wedge \lambda^{14} + \\
&\quad \lambda^{15} \wedge \lambda^{21} + \lambda^{18} \wedge \lambda^{16} \\
d\lambda^3 &= \lambda^9 \wedge \lambda^{23} + \lambda^{10} \wedge \lambda^{22} + \lambda^{24} \wedge \lambda^{11} + \lambda^{21} \wedge \lambda^{12} + \lambda^{20} \wedge \lambda^{13} + \lambda^{14} \wedge \lambda^{18} + \\
&\quad \lambda^{15} \wedge \lambda^{17} + \lambda^{19} \wedge \lambda^{16} \\
d\lambda^4 &= \lambda^{10} \wedge \lambda^9 + \lambda^{13} \wedge \lambda^{11} + \lambda^{16} \wedge \lambda^{12} + \lambda^{15} \wedge \lambda^{14} + \lambda^{18} \wedge \lambda^{17} + \lambda^{21} \wedge \lambda^{19} + \\
&\quad \lambda^{24} \wedge \lambda^{20} + \lambda^{23} \wedge \lambda^{22} \\
d\lambda^5 &= \lambda^9 \wedge \lambda^{22} + \lambda^{23} \wedge \lambda^{10} + \lambda^{11} \wedge \lambda^{20} + \lambda^{12} \wedge \lambda^{19} + \lambda^{24} \wedge \lambda^{13} + \lambda^{14} \wedge \lambda^{17} + \\
&\quad \lambda^{18} \wedge \lambda^{15} + \lambda^{21} \wedge \lambda^{16} \\
d\lambda^6 &= \lambda^{13} \wedge \lambda^9 + \lambda^{11} \wedge \lambda^{10} + \lambda^{12} \wedge \lambda^{15} + \lambda^{16} \wedge \lambda^{14} + \lambda^{21} \wedge \lambda^{17} + \lambda^{19} \wedge \lambda^{18} + \\
&\quad \lambda^{20} \wedge \lambda^{23} + \lambda^{24} \wedge \lambda^{22} \\
d\lambda^7 &= \lambda^{11} \wedge \lambda^9 + \lambda^{10} \wedge \lambda^{13} + \lambda^{14} \wedge \lambda^{12} + \lambda^{16} \wedge \lambda^{15} + \lambda^{19} \wedge \lambda^{17} + \lambda^{18} \wedge \lambda^{21} + \\
&\quad \lambda^{22} \wedge \lambda^{20} + \lambda^{24} \wedge \lambda^{23} \\
d\lambda^8 &= \lambda^9 \wedge \lambda^{17} + \lambda^{10} \wedge \lambda^{18} + \lambda^{11} \wedge \lambda^{19} + \lambda^{12} \wedge \lambda^{20} + \lambda^{13} \wedge \lambda^{21} + \lambda^{14} \wedge \lambda^{22} + \\
&\quad \lambda^{15} \wedge \lambda^{23} + \lambda^{16} \wedge \lambda^{24} \\
d\lambda^\mu &= 0, \quad \forall \mu = 9, 10, \dots, 24.
\end{aligned}
$$

上面的 $d\lambda^A = -\frac{1}{2}C_{BD}{}^A\lambda^B\wedge\lambda^D$ 中系数 $C^A{}_{BD} = -C^A{}_{DB}$ 的恒定性及其代数结构，再次表明这些是某个幂零李群（记作 $\mathcal{N}$）上的毛雷尔-嘉当形式，其李代数 $\mathfrak{n}$ 是二步幂零的

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_{-2} \oplus \mathfrak{n}_{-1},$$

with

$$\mathfrak{n}_{-1} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(X_9, \dots, X_{24}), \quad \mathfrak{n}_{-2} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(X_1, \dots, X_8),$$

以及 $X_A \lrcorner \lambda^B = \delta_A^B$。

该幂零李代数 $\mathfrak{n}$ 的田中延拓 $\mathfrak{g}_T(\mathfrak{n})$ 由以下形式的矩阵组成（矩阵中的交换子）：

$$(A_B{}^C) = \begin{pmatrix} A_i{}^j & | & 0 \\ -- & & -- \\ 0 & | & A_\mu{}^\nu \end{pmatrix},$$

其中

$$(A_i{}^j) = \begin{pmatrix} a_{30} & a_{22} & a_{28} & a_{13} & a_{27} & a_{25} & a_{18} & a_7 \\ -a_{22} & a_{30} & -a_{21} & a_9 & -a_{20} & -a_{19} & a_{14} & a_3 \\ -a_{28} & a_{21} & a_{30} & a_{12} & a_{26} & a_{24} & a_{17} & a_6 \\ -a_{13} & -a_9 & -a_{12} & a_{30} & -a_{11} & -a_{10} & -a_8 & -a_1 \\ -a_{27} & a_{20} & -a_{26} & a_{11} & a_{30} & a_{23} & a_{16} & a_5 \\ -a_{25} & a_{19} & -a_{24} & a_{10} & -a_{23} & a_{30} & a_{15} & -a_4 \\ -a_{18} & -a_{14} & -a_{17} & a_8 & -a_{16} & -a_{15} & a_{30} & -a_2 \\ a_7 & a_3 & a_6 & -a_1 & a_5 & -a_4 & -a_2 & a_{30} \end{pmatrix},$$

实矩阵 $(A_\mu{}^\nu)$ 为：

$$(A_\mu{}^\nu) = \sum_{k=1}^{30} \tfrac{1}{2} a_k \tilde{E}_k, \tag{4.9}$$

˜其中，矩阵 16×16 E_k、 $k = 1$、 2、.....、30 见附录 B。再次注意，矩阵 $(A_B{}^C)$中有 30 个实矩阵系数 a_k $k = 1$、 2 、 ..... 、 30。

上述矩阵 $(A_A{}^B)$ 关于交换子 $([A, A']_B{}^C) = (A_B{}^D A'_D{}^C - A'_B{}^D A_D{}^C)$封闭，正如预期的那样，并构成 Tanaka 延拓 $\mathfrak{g}_T(\mathfrak{n})$的 $\mathfrak{n}_0$。

再次提出“这个李代数是什么？”这个问题。按照同样的思路，寻找在矩阵 $(A_i{}^j)$ 于 $\mathfrak{n}_{-2}$中的伴随作用下保持不变的对称张量 $g_{ij} = g_{ji}$ ，并发现 (g_{ij}) 是形如 $\mathrm{diag}(-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,1)$的对角矩阵的倍数，由此可见， A 在 $\mathfrak{n}_{-2}$ 中作为李代数 $\mathfrak{cso}(1,7)$作用。因此，李代数 $\mathfrak{n}_0$ 是

$$\mathfrak{n}_0 = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{cso}(1,7) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(1,7) = 2\mathbb{R} \oplus$$  .

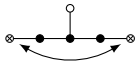
随后我们计算了 $\mathfrak{n}_1$ 和 $\mathfrak{n}_2$ ，特别得到 $\mathfrak{n}_1$ 是一个维数为 $16 = \dim(\mathfrak{n}_{-1})$的李代数，$\dim(\mathfrak{n}_2) = 8 = \dim(\mathfrak{n}_{-2})$，且对所有 $k > 2$ 都有 $\mathfrak{n}_k = \{0\}$。与定理 1.3 的情形一样，这表明，根据我们的引理 $\mathfrak{aut}(H)$，分布 H 的自同构李代数是田中延拓 $\mathfrak{g}_T(\mathfrak{n}) = \mathfrak{aut}(H)$，并具有对称分次

$$\mathfrak{aut}(H) = \mathfrak{n}_{-2} \oplus \mathfrak{n}_{-1} \oplus \mathfrak{n}_0 \oplus \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2,$$

其维数

$$78 = 8 + 16 + 30 + 16 + 8.$$

由此得出结论：根据交叉所示的抛物子群的选取，这个李代数为[5]。这证明了定理 1.3 中的分布 H 的局部对称群为 E_{III}，其李代数为

.

现在来问：“ $M^{24}_{E_{III}}$上的 CR 结构有哪些对称性？ ”。关键在于，同样地，单凭其代数结构，(Levi) 分布 H 本身就定义了其中的 J。同样，存在一个唯一的 （相差一个符号）秩为 $\binom{1}{1}$ 的张量 J，它在 H中由 H 里的 $\mathfrak{n}_0$ 作用保持不变，且平方为“$-\mathrm{id}_H$”。在 H 中的基 $(X_9, \dots, X_{24})$下，它表示为

$$J = \begin{pmatrix} 0 & | & -\mathrm{id}_{8\times 8} \\ -- & & -- \\ \mathrm{id}_{8\times 8} & | & 0 \end{pmatrix} = \tilde{E}_{29}.$$

因此，同样地，结构 $(M^{24}_{E_{III}}, H, J)$ 与$(M^{24}_{E_{III}}, H)$具有相同的田中延拓，进而整个结构 $(M^{24}_{E_{III}}, H, J)$ 是（局部） E_{III} 对称的。

此外，与前一种情况一样，使用从 $(M^{24}_{E_{III}}, H)$ 得到的 $(M^{24}_{E_{III}}, H, J)$，并将其嵌入到 $\mathbb{C}^{16}$ 中。由此可知，这个嵌入等价于定理 1.3 中给出的嵌入。

这就完成了该定理的证明。 □

5. 偶然 CR 分次单李代数的分类

根据第 2.5 小节中关于我们寻找偶然 CR 结构的方法的讨论，我们首先对相应的分次单李代数进行分类。

回顾一下，实分次李代数（简称 GLA）是一个实李代数$\mathfrak{g}$，具有直和分解 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_p$，其中每个 $\mathfrak{g}_p$ 都是 $\mathfrak{g}$ 的有限维实向量子空间，并且对于所有整数 p、q，$[\mathfrak{g}_p, \mathfrak{g}_q] \subset \mathfrak{g}_{p+q}$。

注意，$\mathfrak{g}_0$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数；通过限制伴随表示，对于任意整数 p，$\mathfrak{g}_0$ 在 $\mathfrak{g}_p$ 上都有一个自然表示。

我们用 $\mathfrak{n}_-(\mathfrak{g})$ 表示 $\mathfrak{g}$的幂零子代数 $\oplus_{p<0}\mathfrak{g}_p$。使 $\mathfrak{g}_{-p} \neq 0$ 成立的整数集合 p 的最大值 d 称为 GLA 的**深度**。若 GLA $\mathfrak{g} = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_p$ 的基本 子代数 $\mathfrak{g}_{-1}$ 生成 $\mathfrak{n}_-(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{p<0} \mathfrak{g}_p$，则称其为基本 GLA。

实**单** 李代数 $\mathfrak{g}$ 属于两个互不相交的族（见 [10]）：

(1) 复型： $\mathfrak{g}$ 是一个视为实李代数的复单李代数 $\tilde{\mathfrak{g}}$。此时，复化 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 作为复李代数仅为半单。**(2) 实型：** $\mathfrak{g}$是一个复李代数的实形式。此时， $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 作为复李代数是单李代数。

本文主要关注实型的第二种情况。注意，对于简单 GLA $\mathfrak{g}$ 的 Killing形式 κ，我们有 $\kappa(\mathfrak{g}_p, \mathfrak{g}_q) \neq 0 \iff p + q = 0$。

[5]请注意，移除交叉节点后，剩下的将是$\mathfrak{so}(1,7)$的 Dynkin图；该图与交叉节点（计作 $2\mathbb{R}$）合在一起，得到计算出的 $\mathfrak{n}_0$。

定义 5.1。设

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-d} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_d$$

是一个实型分次单李代数。若 $\mathfrak{g}$ 满足以下条件，则称其具有 偶然 *CR* 结构

(1) $\mathfrak{g}$ 是基本的，(2) $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{n}_-$的田中延拓，(3) $\mathfrak{g}_{-1}$ 具有一个与 $\mathfrak{g}_0$作用相容的近复结构 J，也就是说，存在一个 $\mathbb{R}$-线性变换 $J : \mathfrak{g}_{-1} \to \mathfrak{g}_{-1}$，使得

$$J^2 = -\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}_{-1}}, \quad \text{and} \quad \mathrm{ad}_H \circ J = J \circ \mathrm{ad}_H, \ \forall H \in \mathfrak{g}_0.$$

注 5.2。如上文第 2.5 小节所述，这一定义的模式应当也可用于定义其他偶然结构 。

本文作者从这一定义出发，试图对这类偶然 CR 分次单李代数进行分类。通过使用 Maple 计算许多例子，他们认识到，当分次的分次根在 Satake 图中成对出现时，这类偶然 CR 结构便会存在。

意识到他们列出的这类候选单李代数与 [7, 第 4], 节中完全相同后，本文作者便开始关注 Medori 和 Nacinovich 的基础性工作 [6, 7]。

第一篇论文 [6]沿用 N. Tanaka 的方法，系统地研究了 Levi-Tanaka 代数。第二篇论文 [7], 中，Medori 和 Nacinovich 对复型和实型的所有半单 Levi-Tanaka 代数进行了分类。

为方便读者，我们回顾其基本定义，并将他们的结果与我们较为朴素的版本进行比较。对于 CR 几何的应用，应当从一开始就将 [6, 7] J 中的（2.9）和（2.10）所列的可积性条件置于首要位置。

定义 5.3 ([7, 第 287] 页)。设 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_p$ 为一个有限维实分次李代数。$\mathfrak{g}$ 称为 ***Levi-Tanaka*** 代数，如果

(1) $\mathfrak{g}$ 是基本的；(2) 在 $\mathfrak{g}$上存在一个部分复结构，即一个 $\mathbb{R}$-线性映射 $J : \mathfrak{g}_{-1} \to \mathfrak{g}_{-1}$，满足

$$\begin{cases} J^2 = -\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}_{-1}}, \\ [JX, JY] = [X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}_{-1}. \end{cases} \tag{5.1}$$

(3) 伴随表示给出了 $\mathfrak{g}_0$ 与 $\mathfrak{n}_-(\mathfrak{g})$ 的零次导子代数之间的同构，其在 $\mathfrak{g}_{-1}$ 上的限制与 J可交换;

定义 5.4 （[7, 第 4]节）。实型简单 *Levi-Tanaka* 李代数是同时也是实型单李代数的 Levi-Tanaka 李代数。

比较定义 5.1 与定义 5.3 和 5.4 可知，我们没有要求满足部分可积条件 (5.1)。此外，Levi-Tanaka 代数 5.3 的条件 (3) 更强，要求 $\mathfrak{g}_0$ 等于 J的酉代数$\mathfrak{su}(\mathfrak{g}_{-1})$；而偶然 CR 结构 5.1 只要求 $\mathfrak{g}_0$ 是 $\mathfrak{su}(\mathfrak{g}_{-1})$的子代数。另一方面，对于偶然 CR 结构 5.1，条件 (2) 明确要求单李代数是 $\mathfrak{n}_-$的田中延拓。

第二种情形下实型单李代数上的分次，可以用限制根来描述，也可以用 Satake 图 [10], 来描述；后者提供的信息更多。

回顾一下：Satake 图上的节点若对应的单根是紧的（或纯虚的），则为黑色；否则为白色。某些白色节点对之间用弯曲箭头连接，表示它们模去紧根后互为共轭。其余白色节点则单独存在。利用 Satake 图， $\mathfrak{g}$ 上的一个分次由单根的一个子集 $\mathcal{B}_{-1}$ 给出，这些单根以白色节点表示；其中可以选择某些单独存在的白色节点，也可以选择由弯曲箭头连接的白色节点对。

定理 5.5 ([7, 定理 4.1])。 设 $\mathfrak{g}$ 是实型分次单李代数。那么，当且仅当其 *Satake* 图满足分次根集非空，且由若干对以弯箭头相连的白根互不相交地组成时，$\mathfrak{g}$ 才具有 *Levi-Tanaka* 代数的结构。

那么， [7, 第 4] 节列出了所有可能的实型简单 Levi-Tanaka 代数，如下所示。

(1) $\mathfrak{su}(p,q), 1 \le p < q, p+q = \ell+1$ 按如下方式分次

$$\mathcal{B}_{-1} = \{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_\nu}, \alpha_{\ell-i_\nu+1}, \dots, \alpha_{\ell-i_1+1}\}$$

其中 $1 \le i_1 < \cdots < i_\nu \le p$， 深度为 2ν,

(2) $\mathfrak{su}(p,p), p \ge 2, 2p = \ell+1$ 按如下方式分次

$$\mathcal{B}_{-1} = \{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_\nu}, \alpha_{\ell-i_\nu+1}, \dots, \alpha_{\ell-i_1+1}\}$$

其中 $1 \le i_1 < \cdots < i_\nu \le p-1$， 深度为 2ν,

(3) $\mathfrak{so}(\ell-1, \ell+1), \ell \ge 4$ 按 $\mathcal{B}_{-1} = \{\alpha_{\ell-1}, \alpha_\ell\}$分级，深度 2，(4) $\mathfrak{so}^*(2\ell)$, $\ell = 2m+1, m \ge 2$ 按 $\mathcal{B}_{-1} = \{\alpha_{\ell-1}, \alpha_\ell\}$分级，深度 2，(5) E_{II} 按 $\mathcal{B}_{-1} = \{\alpha_1, \alpha_6\}, \{\alpha_3, \alpha_5\}$或 $\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6\}$分级，深度为 2、4、6，(6) E_{III} 按 $\mathcal{B}_{-1} = \{\alpha_1, \alpha_6\}$ 分级，深度 2。

将他们的证明调整到我们的情形后，我们也可以得到以下结果。

定理 5.6。 实型单李代数存在偶然 *CR* 结构，当且仅当它具有除以下情形之外的 *Levi-Tanaka* 结构

$$\begin{aligned} &\mathfrak{su}(p,q), 1 \le p < q, p+q = \ell+1 \ \textit{graded by}\ \mathcal{B}_{-1} = \{\alpha_1, \alpha_\ell\}, \\ &\mathfrak{su}(p,p), 2 \le p, 2p = \ell+1 \ \textit{graded by}\ \mathcal{B}_{-1} = \{\alpha_1, \alpha_\ell\}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

因此，可以使偶然 *CR* 结构中的 J 可积，并且除符号之外，这样的可积 J 是唯一的。

证明。 关于分次单李代数 $\mathfrak{g}$ 成为 $\mathfrak{n}_-$的延拓的判据见 [10, 定理 5.3]。于是，除了(5.2)中列出的那些情形，即引言中讨论的超曲面型CR结构之外，所有简单 Levi-Tanaka 李代数都具有偶然结构。

现在反过来，我们可以证明，偶然 CR 结构总是蕴含一个 Levi-Civita 结构。

与我们最初更具计算性的做法相比， [7] 中证明的主要技术优势在于其定理 2.4。该定理指出，部分复结构J 由唯一的元素 $J \in \mathfrak{g}_0$诱导。这部分不需要可积性条件，只要求 $J : \mathfrak{g}_{-1} \to \mathfrak{g}_{-1}$ 定义了 $\mathfrak{n}_-$的一个 0 次导子。在 Levi-Tanaka 情形中，这个导子就是 J 本身，因此它属于 $\mathfrak{g}_0$。在我们讨论的偶然 CR 结构情形中，条件 (2) 意味着这样的导子属于田中延拓的 0 次部分，因此也属于我们的 $\mathfrak{g}_0$。

现在，可积性条件是我们可以对偶然 CR 结构额外要求的条件；正如 Medori 和 Nacinovich 所证明的，除一个符号差异外，它是唯一的。如果我们要求 J 可积，这一结论对我们的偶然 CR 结构也成立。□

注 5.7. Medori 和 Nacinovich [7] 也对复型简单 Levi-Tanaka 李代数进行了分类。在那里，分次根集更加灵活，而可积性条件则更为突出，并且是决定结果的主要因素。

我们在下述定理中总结了本文研究的深度 2 偶然 CR 结构，并从中找出了非刚性的结构。

定理 5.8. (1) 具有深度 *2* 偶然 *CR* 结构的实型简单李代数列表如下。

(a) E_{II} 按 $\mathcal{B}_{-1}=\{\alpha_1,\alpha_6\}$ 分次，对应定理 *1.2*，(b) $\mathrm{E}_{\mathrm{III}}$ 按 $\mathcal{B}_{-1}=\{\alpha_1,\alpha_6\}$ 分次，对应定理 *1.3*，(c) $\mathfrak{so}(\ell-1,\ell+1),\ell\geq 4$ 按 $\mathcal{B}_{-1}=\{\alpha_{\ell-1},\alpha_\ell\}$ 分次，对应定理 *3.1*，(d) $\mathfrak{so}^*(2\ell),\ell=2m+1,m\geq 2$ 按 $\mathcal{B}_{-1}=\{\alpha_{\ell-1},\alpha_\ell\}$ 分次，对应定理 *3.3*，(e) $\mathfrak{su}(p,q),1\leq p\leq q,p+q=\ell+1$ 按 $\mathcal{B}_{-1}=\{\alpha_s,\alpha_{\ell-s+1}\}$ 分次，其中 $2\leq s\leq p$ 若 $p<q$，且 $2\leq s<p$ 若 $p=q$，对应定理 *3.5*。(2) 在这类深度 *2* 偶然 *CR* 结构中，唯一非刚性的结构是 $\mathfrak{su}(p,q),p+q=\ell+1$ 按 $\mathcal{B}_{-1}=\{\alpha_2,\alpha_{\ell-1}\}$ 分次，其中 $2\leq p<q$ 或 $3\leq p=q$。

证明。 第（1）部分由定理 5.5、其后的列表以及定理 5.6 得出。

回顾一下，模型为分次李代数 $\mathfrak{g}$ 且负部分为 $\mathfrak{n}_-$ 的抛物几何，若李代数上同调 $H^2(\mathfrak{n}_-,\mathfrak{g})$ 具有非负权的非零分量，则称其为非刚性。K. Yamaguchi 在 [10, 命题 5.5] 中列出了所有此类简单分次李代数。将该列表与第（1）部分进行比较可知，唯一的共同情形是 Yamaguchi 的情形 (I.8)（对于 $\ell=4$）和 (I.10)（对于 $\ell\geq 5$），即按 $\{\alpha_2,\alpha_{\ell-1}\}$ 分次的 A_ℓ，其中 $\ell\geq 4$。这就是我们的第（2）部分。□

6. 附录 A

6.1. 基 $\mathbb{R}\oplus\mathfrak{csp}(3,5)$ 在 16 维表示中。 首先，我们引入 16×16实矩阵 $F^\mu{}_\nu=(F^\mu{}_{\nu\alpha}{}^\beta)$，$\mu,\nu=1,2,\dots,16$，$\alpha,\beta=1,2,\dots,16$，其矩阵元为 $F^\mu{}_{\nu\alpha}{}^\beta=\delta^\mu_\alpha\delta^\beta_\nu$。然后，张成 $\mathbb{R}\oplus\mathfrak{csp}(3,5)$ 并出现在公式 (4.6) 中的矩阵为：

$$
\begin{aligned}
E_1 &= F^5{}_3+F^6{}_4+F^{13}{}_{11}+F^{14}{}_{12},\\
E_2 &= -F^5{}_{10}+F^7{}_{12}+F^{13}{}_2-F^{15}{}_4,\\
E_3 &= F^5{}_9+F^6{}_{10}+F^7{}_{11}+F^8{}_{12}-F^{13}{}_1-F^{14}{}_2-F^{15}{}_3-F^{16}{}_4,\\
E_4 &= -F^5{}_1+F^6{}_2+F^7{}_3-F^8{}_4-F^{13}{}_9+F^{14}{}_{10}+F^{15}{}_{11}-F^{16}{}_{12},\\
E_5 &= -F^6{}_9+F^8{}_{11}+F^{14}{}_1-F^{16}{}_3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_{6} =&F^{7}{}_{1}+F^{8}{}_{2}+F^{15}{}_{9}+F^{16}{}_{10},\\
E_{7} =&F^{3}{}_{5}+F^{4}{}_{6}+F^{11}{}_{13}+F^{12}{}_{14},\\
E_{8} =&F^{2}{}_{13}-F^{4}{}_{15}-F^{10}{}_{5}+F^{12}{}_{7},\\
E_{9} =&-F^{1}{}_{13}-F^{2}{}_{14}-F^{3}{}_{15}-F^{4}{}_{16}+F^{9}{}_{5}+F^{10}{}_{6}+F^{11}{}_{7}+F^{12}{}_{8},\\
E_{10} =&-F^{1}{}_{5}+F^{2}{}_{6}+F^{3}{}_{7}-F^{4}{}_{8}-F^{9}{}_{13}+F^{10}{}_{14}+F^{11}{}_{15}-F^{12}{}_{16},\\
E_{11} =&F^{1}{}_{14}-F^{3}{}_{16}-F^{9}{}_{6}+F^{11}{}_{8},\\
E_{12} =&F^{1}{}_{7}+F^{2}{}_{8}+F^{9}{}_{15}+F^{10}{}_{16},\\
E_{13} =&F^{3}{}_{10}+F^{7}{}_{14}-F^{11}{}_{2}-F^{15}{}_{6},\\
E_{14} =&-F^{3}{}_{9}-F^{4}{}_{10}+F^{7}{}_{13}+F^{8}{}_{14}+F^{11}{}_{1}+F^{12}{}_{2}-F^{15}{}_{5}-F^{16}{}_{6},\\
E_{15} =&F^{3}{}_{1}-F^{4}{}_{2}+F^{7}{}_{5}-F^{8}{}_{6}+F^{11}{}_{9}-F^{12}{}_{10}+F^{15}{}_{13}-F^{16}{}_{14},\\
E_{16} =&F^{4}{}_{9}+F^{8}{}_{13}-F^{12}{}_{1}-F^{16}{}_{5},\\
E_{17} =&-F^{2}{}_{11}-F^{6}{}_{15}+F^{10}{}_{3}+F^{14}{}_{7},\\
E_{18} =&F^{1}{}_{11}+F^{2}{}_{12}-F^{5}{}_{15}-F^{6}{}_{16}-F^{9}{}_{3}-F^{10}{}_{4}+F^{13}{}_{7}+F^{14}{}_{8},\\
E_{19} =&F^{1}{}_{3}-F^{2}{}_{4}+F^{5}{}_{7}-F^{6}{}_{8}+F^{9}{}_{11}-F^{10}{}_{12}+F^{13}{}_{15}-F^{14}{}_{16},\\
E_{20} =&-F^{1}{}_{12}-F^{5}{}_{16}+F^{9}{}_{4}+F^{13}{}_{8},\\
E_{21} =&F^{2}{}_{1}-F^{4}{}_{3}-F^{6}{}_{5}+F^{8}{}_{7}+F^{10}{}_{9}-F^{12}{}_{11}-F^{14}{}_{13}+F^{16}{}_{15},\\
E_{22} =&F^{2}{}_{9}+F^{4}{}_{11}+F^{6}{}_{13}+F^{8}{}_{15}-F^{10}{}_{1}-F^{12}{}_{3}-F^{14}{}_{5}-F^{16}{}_{7},\\
E_{23} =&F^{1}{}_{2}-F^{3}{}_{4}-F^{5}{}_{6}+F^{7}{}_{8}+F^{9}{}_{10}-F^{11}{}_{12}-F^{13}{}_{14}+F^{15}{}_{16},\\
E_{24} =&-F^{1}{}_{10}-F^{3}{}_{12}-F^{5}{}_{14}-F^{7}{}_{16}+F^{9}{}_{2}+F^{11}{}_{4}+F^{13}{}_{6}+F^{15}{}_{8},\\
E_{25} =&-F^{1}{}_{9}-F^{4}{}_{12}-F^{6}{}_{14}-F^{7}{}_{15}+F^{9}{}_{1}+F^{12}{}_{4}+F^{14}{}_{6}+F^{15}{}_{7},\\
E_{26} =&F^{2}{}_{10}+F^{3}{}_{11}+F^{5}{}_{13}+F^{8}{}_{16}-F^{10}{}_{2}-F^{11}{}_{3}-F^{13}{}_{5}-F^{16}{}_{8},\\
E_{27} =&F^{3}{}_{3}+F^{4}{}_{4}-F^{5}{}_{5}-F^{6}{}_{6}+F^{11}{}_{11}+F^{12}{}_{12}-F^{13}{}_{13}-F^{14}{}_{14},\\
E_{28} =&F^{2}{}_{2}+F^{4}{}_{4}-F^{5}{}_{5}-F^{7}{}_{7}+F^{10}{}_{10}+F^{12}{}_{12}-F^{13}{}_{13}-F^{15}{}_{15},\\
E_{29} =&F^{1}{}_{1}-F^{4}{}_{4}+F^{5}{}_{5}-F^{8}{}_{8}+F^{9}{}_{9}-F^{12}{}_{12}+F^{13}{}_{13}-F^{16}{}_{16},\\
E_{30} =&F^{1}{}_{1}+F^{2}{}_{2}+F^{3}{}_{3}+F^{4}{}_{4}+F^{9}{}_{9}+F^{10}{}_{10}+F^{11}{}_{11}+F^{12}{}_{12}.
\end{aligned}
$$

7. 附录 B

7.1. 基 $\mathbb{R}\oplus\mathfrak{cso}(1,7)$ 在 16 维表示中。 张成$\mathbb{R}\oplus\mathfrak{cso}(1,7)$并出现在公式 (4.9) 中的矩阵为:

$$
\begin{aligned}
\tilde{E}_{1} =&-(F^{1}{}_{10}+F^{10}{}_{1})+(F^{2}{}_{9}+F^{9}{}_{2})-(F^{3}{}_{13}+F^{13}{}_{3})-(F^{4}{}_{16}+F^{16}{}_{4})+\\
&(F^{5}{}_{11}+F^{11}{}_{5})-(F^{6}{}_{15}+F^{15}{}_{6})+(F^{7}{}_{14}+F^{14}{}_{7})+(F^{8}{}_{12}+F^{12}{}_{8}),\\
\tilde{E}_{2} =&-(F^{1}{}_{11}+F^{11}{}_{1})+(F^{2}{}_{13}+F^{13}{}_{2})+(F^{3}{}_{9}+F^{9}{}_{3})-(F^{4}{}_{14}+F^{14}{}_{4})-\\
&(F^{5}{}_{10}+F^{10}{}_{5})+(F^{6}{}_{12}+F^{12}{}_{6})-(F^{7}{}_{16}+F^{16}{}_{7})+(F^{8}{}_{15}+F^{15}{}_{8}),\\
\tilde{E}_{3} =&(F^{1}{}_{4}+F^{4}{}_{1})-(F^{2}{}_{8}+F^{8}{}_{2})-(F^{3}{}_{6}+F^{6}{}_{3})+(F^{5}{}_{7}+F^{7}{}_{5})+\\
&(F^{9}{}_{12}+F^{12}{}_{9})-(F^{10}{}_{16}+F^{16}{}_{10})-(F^{11}{}_{14}+F^{14}{}_{11})+(F^{13}{}_{15}+F^{15}{}_{13}),
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_4 =& -(F^1{}_{13}+F^{13}{}_1)-(F^2{}_{11}+F^{11}{}_2)+(F^3{}_{10}+F^{10}{}_3)+(F^4{}_{15}+F^{15}{}_4)+\\
&(F^5{}_9+F^9{}_5)-(F^6{}_{16}+F^{16}{}_6)-(F^7{}_{12}+F^{12}{}_7)+(F^8{}_{14}+F^{14}{}_8),\\
\tilde{E}_5 =&(F^1{}_6+F^6{}_1)-(F^2{}_7+F^7{}_2)+(F^3{}_4+F^4{}_3)-(F^5{}_8+F^8{}_5)+\\
&(F^9{}_{14}+F^{14}{}_9)-(F^{10}{}_{15}+F^{15}{}_{10})+(F^{11}{}_{12}+F^{12}{}_{11})-(F^{13}{}_{16}+F^{16}{}_{13}),\\
\tilde{E}_6 =&(F^1{}_7+F^7{}_1)+(F^2{}_6+F^6{}_2)-(F^3{}_8+F^8{}_3)-(F^4{}_5+F^5{}_4)+\\
&(F^9{}_{15}+F^{15}{}_9)+(F^{10}{}_{14}+F^{14}{}_{10})-(F^{11}{}_{16}+F^{16}{}_{11})-(F^{12}{}_{13}+F^{13}{}_{12}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_7 =&(F^1{}_8+F^8{}_1)+(F^2{}_4+F^4{}_2)+(F^3{}_7+F^7{}_3)+(F^5{}_6+F^6{}_5)+\\
&(F^9{}_{16}+F^{16}{}_9)+(F^{10}{}_{12}+F^{12}{}_{10})+(F^{11}{}_{15}+F^{15}{}_{11})+(F^{13}{}_{14}+F^{14}{}_{13}),\\
\tilde{E}_8 =&-(F^1{}_5-F^5{}_1)-(F^2{}_3-F^3{}_2)-(F^4{}_7-F^7{}_4)+(F^6{}_8-F^8{}_6)-\\
&(F^9{}_{13}-F^{13}{}_9)-(F^{10}{}_{11}-F^{11}{}_{10})-(F^{12}{}_{15}-F^{15}{}_{12})+(F^{14}{}_{16}-F^{16}{}_{14}),\\
\tilde{E}_9 =&(F^1{}_{16}-F^{16}{}_1)+(F^2{}_{12}-F^{12}{}_2)-(F^3{}_{15}-F^{15}{}_3)+(F^4{}_{10}-F^{10}{}_4)-\\
&(F^5{}_{14}-F^{14}{}_5)-(F^6{}_{13}-F^{13}{}_6)-(F^7{}_{11}-F^{11}{}_7)+(F^8{}_9-F^9{}_8),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_{10} =&(F^1{}_3-F^3{}_1)-(F^2{}_5-F^5{}_2)-(F^4{}_6-F^6{}_4)-(F^7{}_8-F^8{}_7)+\\
&(F^9{}_{11}-F^{11}{}_9)-(F^{10}{}_{13}-F^{13}{}_{10})-(F^{12}{}_{14}-F^{14}{}_{12})-(F^{15}{}_{16}-F^{16}{}_{15}),\\
\tilde{E}_{11} =&(F^1{}_{15}-F^{15}{}_1)+(F^2{}_{14}-F^{14}{}_2)+(F^3{}_{16}-F^{16}{}_3)+(F^4{}_{13}-F^{13}{}_4)+\\
&(F^5{}_{12}-F^{12}{}_5)+(F^6{}_{10}-F^{10}{}_6)+(F^7{}_9-F^9{}_7)+(F^8{}_{11}-F^{11}{}_8),\\
\tilde{E}_{12} =&-(F^1{}_{14}-F^{14}{}_1)+(F^2{}_{15}-F^{15}{}_2)+(F^3{}_{12}-F^{12}{}_3)+(F^4{}_{11}-F^{11}{}_4)-\\
&(F^5{}_{16}-F^{16}{}_5)-(F^6{}_9-F^9{}_6)+(F^7{}_{10}-F^{10}{}_7)-(F^8{}_{13}-F^{13}{}_8),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_{13} =&-(F^1{}_{12}-F^{12}{}_1)+(F^2{}_{16}-F^{16}{}_2)-(F^3{}_{14}-F^{14}{}_3)-(F^4{}_9-F^9{}_4)+\\
&(F^5{}_{15}-F^{15}{}_5)-(F^6{}_{11}-F^{11}{}_6)+(F^7{}_{13}-F^{13}{}_7)+(F^8{}_{10}-F^{10}{}_8),\\
\tilde{E}_{14} =&(F^1{}_{14}-F^{14}{}_1)+(F^2{}_{15}-F^{15}{}_2)+(F^3{}_{12}-F^{12}{}_3)+(F^4{}_{11}-F^{11}{}_4)+\\
&(F^5{}_{16}-F^{16}{}_5)+(F^6{}_9-F^9{}_6)+(F^7{}_{10}-F^{10}{}_7)+(F^8{}_{13}-F^{13}{}_8),\\
\tilde{E}_{15} =&-(F^1{}_2-F^2{}_1)-(F^3{}_5-F^5{}_3)+(F^4{}_8-F^8{}_4)+(F^6{}_7-F^7{}_6)-\\
&(F^9{}_{10}-F^{10}{}_9)-(F^{11}{}_{13}-F^{13}{}_{11})+(F^{12}{}_{16}-F^{16}{}_{12})+(F^{14}{}_{15}-F^{15}{}_{14}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_{16} =&-(F^1{}_{12}-F^{12}{}_1)-(F^2{}_{16}-F^{16}{}_2)+(F^3{}_{14}-F^{14}{}_3)-(F^4{}_9-F^9{}_4)+\\
&(F^5{}_{15}-F^{15}{}_5)+(F^6{}_{11}-F^{11}{}_6)+(F^7{}_{13}-F^{13}{}_7)-(F^8{}_{10}-F^{10}{}_8),\\
\tilde{E}_{17} =&(F^1{}_{16}-F^{16}{}_1)-(F^2{}_{12}-F^{12}{}_2)+(F^3{}_{15}-F^{15}{}_3)-(F^4{}_{10}-F^{10}{}_4)-\\
&(F^5{}_{14}-F^{14}{}_5)-(F^6{}_{13}-F^{13}{}_6)+(F^7{}_{11}-F^{11}{}_7)+(F^8{}_9-F^9{}_8),\\
\tilde{E}_{18} =&-(F^1{}_{15}-F^{15}{}_1)+(F^2{}_{14}-F^{14}{}_2)+(F^3{}_{16}-F^{16}{}_3)-(F^4{}_{13}-F^{13}{}_4)-\\
&(F^5{}_{12}-F^{12}{}_5)+(F^6{}_{10}-F^{10}{}_6)-(F^7{}_9-F^9{}_7)+(F^8{}_{11}-F^{11}{}_8),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{E}_{19} =&(F^1{}_{15} - F^{15}{}_1) - (F^2{}_{14} - F^{14}{}_2) + (F^3{}_{16} - F^{16}{}_3) - (F^4{}_{13} - F^{13}{}_4) -\\
&(F^5{}_{12} - F^{12}{}_5) - (F^6{}_{10} - F^{10}{}_6) + (F^7{}_9 - F^9{}_7) + (F^8{}_{11} - F^{11}{}_8),\\
\tilde{E}_{20} =&-(F^1{}_3 - F^3{}_1) - (F^2{}_5 - F^5{}_2) - (F^4{}_6 - F^6{}_4) + (F^7{}_8 - F^8{}_7) -\\
&(F^9{}_{11} - F^{11}{}_9) - (F^{10}{}_{13} - F^{13}{}_{10}) - (F^{12}{}_{14} - F^{14}{}_{12}) + (F^{15}{}_{16} - F^{16}{}_{15}),\\
\tilde{E}_{21} =&(F^1{}_5 - F^5{}_1) - (F^2{}_3 - F^3{}_2) - (F^4{}_7 - F^7{}_4) - (F^6{}_8 - F^8{}_6) +\\
&(F^9{}_{13} - F^{13}{}_9) - (F^{10}{}_{11} - F^{11}{}_{10}) - (F^{12}{}_{15} - F^{15}{}_{12}) - (F^{14}{}_{16} - F^{16}{}_{14}),\\
\tilde{E}_{22} =&-(F^1{}_2 - F^2{}_1) + (F^3{}_5 - F^5{}_3) - (F^4{}_8 - F^8{}_4) + (F^6{}_7 - F^7{}_6) -\\
&(F^9{}_{10} - F^{10}{}_9) + (F^{11}{}_{13} - F^{13}{}_{11}) - (F^{12}{}_{16} - F^{16}{}_{12}) + (F^{14}{}_{15} - F^{15}{}_{14}),\\
\tilde{E}_{23} =&(F^1{}_{16} - F^{16}{}_1) - (F^2{}_{12} - F^{12}{}_2) - (F^3{}_{15} - F^{15}{}_3) - (F^4{}_{10} - F^{10}{}_4) +\\
\tilde{E}_{24} =&(F^1{}_{12} - F^{12}{}_1) + (F^2{}_{16} - F^{16}{}_2) + (F^3{}_{14} - F^{14}{}_3) + (F^4{}_9 - F^9{}_4) +\\
&(F^5{}_{14} - F^{14}{}_5) + (F^6{}_{13} - F^{13}{}_6) - (F^7{}_{11} - F^{11}{}_7) + (F^8{}_9 - F^9{}_8),\\
&(F^5{}_{15} - F^{15}{}_5) + (F^6{}_{11} - F^{11}{}_6) + (F^7{}_{13} - F^{13}{}_7) + (F^8{}_{10} - F^{10}{}_8),\\
\tilde{E}_{25} =&-(F^1{}_{14} - F^{14}{}_1) - (F^2{}_{15} - F^{15}{}_2) + (F^3{}_{12} - F^{12}{}_3) + (F^4{}_{11} - F^{11}{}_4) +\\
&(F^5{}_{16} - F^{16}{}_5) - (F^6{}_9 - F^9{}_6) - (F^7{}_{10} - F^{10}{}_7) + (F^8{}_{13} - F^{13}{}_8),\\
\tilde{E}_{26} =&-(F^1{}_2 - F^2{}_1) + (F^3{}_5 - F^5{}_3) + (F^4{}_8 - F^8{}_4) - (F^6{}_7 - F^7{}_6) -\\
&(F^9{}_{10} - F^{10}{}_9) + (F^{11}{}_{13} - F^{13}{}_{11}) + (F^{12}{}_{16} - F^{16}{}_{12}) - (F^{14}{}_{15} - F^{15}{}_{14}),\\
\tilde{E}_{27} =&-(F^1{}_5 - F^5{}_1) + (F^2{}_3 - F^3{}_2) - (F^4{}_7 - F^7{}_4) - (F^6{}_8 - F^8{}_6) -\\
&(F^9{}_{13} - F^{13}{}_9) + (F^{10}{}_{11} - F^{11}{}_{10}) - (F^{12}{}_{15} - F^{15}{}_{12}) - (F^{14}{}_{16} - F^{16}{}_{14}),\\
\tilde{E}_{28} =&-(F^1{}_3 - F^3{}_1) - (F^2{}_5 - F^5{}_2) + (F^4{}_6 - F^6{}_4) - (F^7{}_8 - F^8{}_7) -\\
&(F^9{}_{11} - F^{11}{}_9) - (F^{10}{}_{13} - F^{13}{}_{10}) + (F^{12}{}_{14} - F^{14}{}_{12}) - (F^{15}{}_{16} - F^{16}{}_{15}),
\end{aligned}
$$

$\tilde{E}_{29} = J$，以及 $\tilde{E}_{30} = \mathrm{id}_{16\times 16}$。

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= d\Big(x^8 - x^7 - \tfrac{1}{4}\big((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2\big)\Big) + \tfrac{1}{2}\big(x^2dx^1 - x^1dx^2 + x^4dx^3 - x^3dx^4\big)\\
\lambda_2 &= d\Big(x^8 - x^5 - \tfrac{1}{4}\big((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2\big)\Big) + \tfrac{1}{2}\big(x^3dx^1 - x^1dx^3 + x^2dx^4 - x^4dx^2\big)\\
\lambda_3 &= d\Big(x^8 - x^6 - \tfrac{1}{4}\big((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2\big)\Big) + \tfrac{1}{2}\big(x^4dx^1 - x^1dx^4 + x^3dx^2 - x^2dx^3\big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= d\big(x^8 - x^7 + x^6 + x^5\big) + x^2dx^1 - x^1dx^2 + x^4dx^3 - x^3dx^4,\\
\lambda_2 &= d\big(x^8 + x^7 + x^6 - x^5\big) + x^3dx^1 - x^1dx^3 + x^2dx^4 - x^4dx^2,\\
\lambda_3 &= d\big(x^8 + x^7 - x^6 + x^5\big) + x^4dx^1 - x^1dx^4 + x^3dx^2 - x^2dx^3.
\end{aligned}
$$

8. 附录 C

这里给出定理 3.1 中所述$\mathbf{SO}(\ell+1,\ell-1)$齐性 CR 流形的 CR 对称生成元的显式公式。记号与该定理中的一致。因此，在坐标中：

$$
z = (z^1,\dots,z^{\ell-1}) \qquad \text{and} \qquad w = \big(w^{ij}\big)_{1\leqslant i<j\leqslant \ell-1},
$$

我们有第 3.2 小节中的 CR子流形 $M^{N(\ell)} \subset \mathbb{C}^{\ell(\ell-1)/2}$，其定义为

$$w^{ij} - \overline{w}^{ij} = z^i \overline{z}^j - \overline{z}^i z^j \qquad (1 \leqslant i < j \leqslant \ell-1),$$

with

$$\mathrm{CRdim}\, M = \ell - 1 \qquad \text{and} \qquad \mathrm{codim}\, M = \tfrac{(\ell-1)(\ell-2)}{2}.$$

众所周知，当 CR 结构是嵌入的时，实无穷小CR对称性 Y（定义见 (2.13)）由以下全纯向量场确定:

$$Y = \sum_{i=1}^{\ell-1} Z_i(z,w)\, \partial_{z^i} + \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{k=1}^{\ell-1} W_{jk}(z,w)\, \partial_{w^{jk}},$$

其（双重）实部 $Y + Y$ 与（外在）CR 流形相相切：

$$\mathfrak{hol}(M) := \big\{ Y\colon\ Y + \overline{Y} \text{ is tangent to } M \big\}.$$

通过这一要求定义对称性，等价于定义 (2.13)。特别地， $\mathfrak{hol}(M)$ 是一个实 李代数，同构于定义见 (2.13) 的对称性的李代数$\mathfrak{g}_{\mathrm{I}}$ 。

下文为节省篇幅，仅写出对称性的全纯部分；要得到实对称性 Y，必须在下方公式中加上 “+Y”。

赋予权重:

$$[z^i] := 1 =: [\bar{z}^i], \quad \big[\partial_{z^i}\big] := -1 =: \big[\partial_{\bar{z}^i}\big] \quad [w^{jk}] := 2 =: [\bar{w}^{jk}], \quad \big[\partial_{w^{jk}}\big] := -2 =: \big[\partial_{\bar{w}^{jk}}\big]$$

存在一个分次:

$$\mathfrak{hol}(M) = \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 = \mathrm{SO}(\ell-1, \ell+1)\ ,\ \text{维数为}\ \mathfrak{g}_{-\lambda} = \text{维数}\ \mathfrak{g}_\lambda,$$

其中

$$\mathfrak{g}_\lambda = \big\{ Y \in \mathfrak{hol}(M)\colon\ [Y] = \lambda \big\}.$$

维数为:

$\mathfrak{g}_{-2}$	$\mathfrak{g}_{-1}$	$\mathfrak{g}_0$	$\mathfrak{g}_1$	$\mathfrak{g}_2$
$\frac{(\ell-1)(\ell-2)}{2}$	$2(\ell-1)$	$(\ell-1)^2+1$	$2(\ell-1)$	$\frac{(\ell-1)(\ell-2)}{2}$

$\mathfrak{g}_{-2}$ 的 $\frac{(\ell-1)(\ell-2)}{2}$ 生成元为:

$$Y^{-2}_{w^{ij}} := \partial_{w^{ij}} \qquad (1 \leqslant i < j \leqslant \ell-1).$$

$\mathfrak{g}_{-1}$ 的 $(\ell-1)+(\ell-1)$ 生成元为:

$$Y^{-1}_{z^i} := \partial_{z^i} + \sum_{1 \leqslant k < i} z^k\, \partial_{w^{ki}} - \sum_{i < k \leqslant \ell-1} z^k\, \partial_{w^{ik}} \qquad (1 \leqslant i \leqslant \ell-1),$$

$$\mathrm{I}Y^{-1}_{z^i} := \sqrt{-1}\, \partial_{z^i} - \sum_{1 \leqslant k < i} \sqrt{-1}\, z^k\, \partial_{w^{ki}} + \sum_{i < k \leqslant \ell-1} \sqrt{-1}\, z^k\, \partial_{w^{ik}} \qquad (1 \leqslant i \leqslant \ell-1),$$

$\frac{(\ell-1)(\ell-2)}{2} + (\ell-1) + \frac{(\ell-1)(\ell-2)}{2} + 1$ $\mathfrak{g}_0$ 的生成元为:

$$Y^0_{ij} := z^i\, \partial_{z^j} + \sum_{1 \leqslant k < i} w^{ki}\, \partial_{w^{kj}} - \sum_{i < k < j} w^{ik}\, \partial_{w^{kj}} + \sum_{j < k \leqslant \ell-1} w^{ik}\, \partial_{w^{jk}} \qquad (1 \leqslant i < j \leqslant \ell-1),$$

$$Y^0_{ii} := z^i\, \partial_{z^i} + \sum_{1 \leqslant k < i} w^{ki}\, \partial_{w^{ki}} + \sum_{i < k \leqslant \ell-1} w^{ik}\, \partial_{w^{ik}} \qquad (1 \leqslant i \leqslant \ell-1),$$

$$Y^0_{ij} := z^i\, \partial_{z^j} + \sum_{1 \leqslant k < j} w^{ki}\, \partial_{w^{kj}} - \sum_{j < k < i} w^{ki}\, \partial_{w^{jk}} + \sum_{i < k \leqslant \ell-1} w^{ik}\, \partial_{w^{jk}}, \qquad (1 \leqslant j < i \leqslant \ell-1),$$

以及旋转：

$$\mathrm{R} := \sqrt{-1}\, z^1\, \partial_{z^1} + \cdots + \sqrt{-1}\, z^{\ell-1}\, \partial_{z^{\ell-1}}.$$

Y^0_{ii} 之和等于膨胀：

$$\mathrm{D} := \sum_{1\leqslant k\leqslant \ell-1} z^k\, \partial_{z^k} + \sum_{1\leqslant k<m\leqslant \ell-1} w^{km}\, \partial_{w^{km}}.$$

$(\ell-1)+(\ell-1)$ 生成元为：

$$\begin{aligned}
Y^1_{z^i z^i} :=\ & \sum_{1\leqslant k<i} \left(z^i z^k - w^{ki}\right) \partial_{z^k} + z^i z^i\, \partial_{z^i} + \sum_{i<k\leqslant \ell-1} \left(z^i z^k + w^{ik}\right) \partial_{z^k} \\
& + \sum_{1\leqslant k<i} z^i w^{ki}\, \partial_{w^{ki}} + \sum_{i<m\leqslant \ell-1} z^i w^{im}\, \partial_{w^{im}} \\
& + \sum_{1\leqslant k<m<i} \begin{vmatrix} z^k & -w^{ki} \\ z^m & -w^{mi} \end{vmatrix} \partial_{w^{km}} + \sum_{\substack{1\leqslant k<i \\ i<m\leqslant \ell-1}} \begin{vmatrix} z^k & -w^{ki} \\ z^m & w^{im} \end{vmatrix} \partial_{w^{km}} \\
& + \sum_{i<k<m\leqslant \ell-1} \begin{vmatrix} z^k & w^{ik} \\ z^m & w^{im} \end{vmatrix} \partial_{w^{km}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}Y^1_{z^i z^i} :=\ & \sum_{1\leqslant k<i} \left(\sqrt{-1}\, z^i z^k + \sqrt{-1}\, w^{ki}\right) \partial_{z^k} + \sqrt{-1}\, z^i z^i\, \partial_{z^i} + \sum_{i<k\leqslant \ell-1} \left(\sqrt{-1}\, z^i z^k - \sqrt{-1}\, w^{ik}\right) \partial_{z^k} \\
& + \sum_{1\leqslant k<i} \sqrt{-1}\, z^i w^{ki}\, \partial_{w^{ki}} + \sum_{i<m\leqslant \ell-1} \sqrt{-1}\, z^i w^{im}\, \partial_{w^{im}} + \sum_{1\leqslant k<m<i} \sqrt{-1} \begin{vmatrix} z^k & -w^{ki} \\ z^m & -w^{mi} \end{vmatrix} \partial_{w^{km}} \\
& + \sum_{\substack{1\leqslant k<i \\ i<m\leqslant \ell-1}} \sqrt{-1} \begin{vmatrix} z^k & -w^{ki} \\ z^m & w^{im} \end{vmatrix} \partial_{w^{km}} + \sum_{i<k<m\leqslant \ell-1} \sqrt{-1} \begin{vmatrix} z^k & w^{ik} \\ z^m & w^{im} \end{vmatrix} \partial_{w^{km}}.
\end{aligned}$$

$\frac{(\ell-1)(\ell-2)}{2}$ 生成元为（其中 $i<j$）：

$$\begin{aligned}
Y^2_{w^{ij} w^{ij}} :=\ & \sum_{1\leqslant k<i} \begin{vmatrix} z^i & w^{ki} \\ z^j & w^{kj} \end{vmatrix} \partial_{z^k} + z^i w^{ij}\, \partial_{z^i} + \sum_{i<k<j} \begin{vmatrix} z^i & -w^{ik} \\ z^j & w^{kj} \end{vmatrix} \partial_{z^k} + z^j w^{ij}\, \partial_{z^j} + \sum_{j<k\leqslant \ell-1} \begin{vmatrix} z^i & -w^{ik} \\ z^j & -w^{jk} \end{vmatrix} \partial_{z^k} \\
& + \sum_{1\leqslant k<i} w^{ij} w^{ki}\, \partial_{w^{ki}} + \sum_{1\leqslant k<i} w^{ij} w^{kj}\, \partial_{w^{kj}} + \sum_{i<m<j} w^{ij} w^{im}\, \partial_{w^{im}} + w^{ij} w^{ij}\, \partial_{w^{ij}} \\
& + \sum_{j<m\leqslant \ell-1} w^{ij} w^{im}\, \partial_{w^{im}} + \sum_{i<k<j} w^{ij} w^{kj}\, \partial_{w^{kj}} + \sum_{j<m\leqslant \ell-1} w^{ij} w^{jm}\, \partial_{w^{jm}} \\
& + \sum_{1\leqslant k<m<i} \begin{vmatrix} -w^{ki} & -w^{kj} \\ -w^{mi} & -w^{mj} \end{vmatrix} \partial_{w^{km}} + \sum_{\substack{1\leqslant k<i \\ i<m<j}} \begin{vmatrix} -w^{ki} & -w^{kj} \\ w^{im} & -w^{mj} \end{vmatrix} \partial_{w^{km}} + \sum_{\substack{1\leqslant k<i \\ j<m\leqslant \ell-1}} \begin{vmatrix} -w^{ki} & -w^{kj} \\ w^{im} & w^{jm} \end{vmatrix} \partial_{w^{km}} \\
& + \sum_{i<k<m<j} \begin{vmatrix} w^{ik} & -w^{kj} \\ w^{im} & -w^{mj} \end{vmatrix} \partial_{w^{km}} + \sum_{\substack{i<k<j \\ j<m\leqslant \ell-1}} \begin{vmatrix} w^{ik} & -w^{kj} \\ w^{im} & w^{jm} \end{vmatrix} \partial_{w^{km}} \\
& + \sum_{j<k<m\leqslant \ell-1} \begin{vmatrix} w^{ik} & w^{jk} \\ w^{im} & w^{jm} \end{vmatrix} \partial_{w^{km}}.
\end{aligned}$$

参考文献

[1] Aldo Andreotti 和 Denson C. Hill，复特征坐标与切向柯西-黎曼方程，第 3 辑第 26 卷，高等师范学校，1972 年。[2] Élie Cartan，关于简单变换群，《莱比锡萨克森皇家科学院报告与会议记录》（1893），395–420。[3] Andreas Čap 和 Jan Slovák，抛物几何学（一），《数学调查与专著》，第 154 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2009 年。背景与一般理论。MR2532439[4] Sigurdur Helgason，齐性流形上的不变微分方程，BAMS **83**（1977），751-756。[5] C. Denson Hill、Joël Merker、Zhaohu Nie 和 Pawel Nurowski，偶然 *CR* 结构的无穷小 *CR* 对称，即将发表。

[6] Costantino Medori 和Mauro Nacinovich，*Levi-Tanaka* 代数与齐性 *CR* 流形，Co mpositio Math. **109** （1997），第 2 期，195–250。[7] ，半单 *Levi-Tanaka* 代数的分类，Annali di Matematica Pura ed Applicata **第 CLXXIV 卷** （1998），第 IV 期，285-349。[8] Pawel Nurowski，即将发表。[9] Noboru Tanaka，关于微分系统、分次李代数与伪群，Journal of Mathematics of Kyoto University **10**（1970），1-82。[10] Keizo Yamaguchi，与简单分次李代数相关的微分系统，《微分几何进展》，Adv. Stud. Pure Math.，第 22 卷，日本数学会，东京，1993 年，第 413–494 页，DOI 10.2969/aspm/02210413。MR1274961

数学系，石溪大学，美国纽约州石溪，邮编 11794电子邮件地址：Dhill@math.stonybrook.edu

奥赛数学实验室，巴黎-萨克雷大学，理学院引证 ，91405 奥赛 Cedex ，法国。
电子邮箱地址：joel.merker@universite-paris-saclay.fr

数学与统计学系 ，犹他州立大学 ，洛根 ，UT 84322-3900 ，USA
电子邮箱地址：zhaohu.nie@usu.edu

波兰科学院理论物理中心，飞行员大道32/46号，02-668 华沙，波兰电子邮箱地址：nurowski@cft.edu.pl