arXiv:2302.03123v1 [math.CT] 6 Feb 2023

– $\mathcal{Q}$集合范畴与朋友 –
范畴构造与范畴性质

Jos´e G. Alvim* Hugo L.Mariano† Caio de A. Mendes‡

2023年2月8日

摘要

本文主要研究此处引入的 $\mathcal{Q}$-集合范畴及其函数态射，其中 $\mathcal{Q}$ 是交换的半笛卡尔量子格。我们详细描述了这个完备且余完备范畴的极限与余极限，并证明它具有正则子对象的分类子。此外，我们证明它是一个 κ^+-局部可呈范畴，其中$\kappa = max\{|\mathcal{Q}|, \aleph_0)\}$ ，并描述了该范畴中的半笛卡尔幺半闭结构层级。最后，我们讨论由定义 $\mathcal{Q}$-集合时所涉及的参数化量子幺半格之间的适当态射所诱导的“基变换”问题。在后续工作中，我们将研究由所有 Scott-完备$\mathcal{Q}$-集合构成的全子范畴中的此类问题（见 [4]）。

*mailto:alvim@ime.usp.br
†mailto:hugomar@ime.usp.br
‡mailto:caio.mendes@usp.br

目录

1 引言 2

2 预备知识 3
2.1 量子格.3 2.2 关于 $\mathscr{Q}$-集合.9 2.3 一些例子.11

3 主要构造 14
3.1 极限.14 3.2 余极限.20 3.3 子对象分类器.24

4 局部可呈现性 26
4.1 κ-紧对象.26 4.2 可及性与可呈现性.30

5 单体结构 30
5.1 将其层级形式化.3
6 6 基变换 38

1 引言

历史与动机

层论是一个成熟的研究领域，应用于代数拓扑 [8], 代数几何 [10], 几何学 [13], 逻辑学 [14], 以及其他领域。

拓扑空间 X 上的层是一个函子 $F : (\mathcal{O}(X)\ \subseteq)^{op} \to$ 集合范畴，满足由等化子图表表达的某些粘合性质，其中 $(\mathcal{O}(X)\ \subseteq)$ 表示这样一个范畴：其对象是集合 $\mathcal{O}(X)$ 中的元素，该集合由 X 的所有开子空间构成；其态射由集合包含给出。表达这个定义还有其他等价方式，但图表方法清楚地表明， X 的元素/点并非必需。因此，为"无点空间"（即给定 locale H 的范畴 $H, \leq$）定义层是直截了当的。例如，Borceux 在 [6] 中研究了 locale 上的层范畴。

在20世纪70年代，locale/完备海廷代数$\mathbb{H}$上的层托扑斯 Sh($\mathbb{H}$)，也被描述为 $\mathbb{H}$-集合范畴 [9]。更确切地说，在 [6], 中有三个范畴，其对象是 locale 值集，并且它们都等价于 locale $\mathbb{H}$ 上的层范畴。

不过，C.J. Mulvey 提出了一种称为"量子格"的 locale 的非交换、非幂等推广 [16]。量子格出现在逻辑学 [23], 以及对 C^*-代数 [20]的研究中。

后来，有人提出了更一般的范畴，用 [7] 中研究的 Mulvey 量子格取代 locale。我们不考虑源自某些 C^*-代数及其与量子物理关系的传统幂等非交换量子格，而是采用类似 [12] 和 [19], 中的方案，这些方案与仿射逻辑、模糊逻辑和连续逻辑相关。在本文中，我们考虑一类交换、积分/半笛卡尔量子格，其中包括交换含幺环的理想所构成的量子格、MV-代数、海廷代数，以及 $([0,1], \leq, \cdot)$——它与 $([0,\infty], \geq, +)$ 同构。

据我们所知，关于右侧的幂等量子格上的层有三种概念：在 [5], 中，量子格上的层的定义旨在从量子格构造格罗滕迪克托扑斯。在 [15], 中，层的定义保留了与 $\mathcal{Q}$-集的密切关系； $\mathcal{Q}$-集是论文中提出的一种对象，旨在推广 [9], 中定义的 Ω-集，其中 Ω 是完备海廷代数[1]。

近来，在 [1] 和 [21], 中，层是使某个图表成为等化子的函子。本文研究半笛卡尔量子格上的层。我们的方法与后一种方法相似，但由于每个幂等半笛卡尔量子格都是一个 locale（命题 2.4），我们的公理与他们的公理在某种意义上彼此正交。

此外，关于对合量化幺半群上的层已有大量研究，其思想可追溯至 Bob Walters [22] ——例如，Hans Heymans、Isar Stubbe [11], 和 Pedro Resende [18] 最近对这些思想进行了研究。

[1]若能为 Ω-集定义恰当的态射概念，由此得到的范畴便与 Ω 上的层范畴等价。

本文主要研究这里引入的 $\mathscr{Q}$-集合范畴及其函数态射，其中 $\mathscr{Q}$ 是交换半笛卡尔量子幺半格。未来的工作中，我们将探讨由所有 Scott 完备的 $\mathscr{Q}$-集合构成的全子范畴中的这类问题（见 [4]）。

主要结果与论文结构

1. 我们详细描述这一完备且余完备范畴的极限与余极限；2. 我们描述其生成元，并证明它具有正则子对象的分类器；3. 我们证明它是一个 κ^+-局部可呈范畴，其中 $\kappa = max\{|\mathscr{Q}|, \aleph_0\}$；4. 我们描述该范畴中半笛卡尔幺半闭结构的层级；5. 我们讨论由相关参数化量子格之间适当的态射所诱导的“基变换”问题，这些量子格参与了 $\mathscr{Q}$-集合范畴的定义。

2 预备知识

2.1 量子格

定义 2.1:
量子格是一种结构类型 $\mathscr{Q} = (|\mathscr{Q}|, \leq, \otimes)$，其中 $(|\mathscr{Q}|, \leq)$ 是完备格；$(|\mathscr{Q}|, \otimes)$ 是半群[2]；此外，$\mathscr{Q}$ 还须满足以下分配律：对于所有 $a \in \mathscr{Q}$ 和 $B \subseteq \mathscr{Q}$,

$$a \otimes \left(\bigvee_{b \in B} b \right) = \bigvee_{b \in B} (a \otimes b)$$
$$\left(\bigvee_{b \in B} b \right) \otimes a = \bigvee_{b \in B} (b \otimes a)$$

我们用 $\mathbf{E}\,\mathscr{Q}$ 表示 $\mathscr{Q}$ 中由其幂等元构成的子集。

注 2.1:

1. 在任意量子格 $\mathscr{Q}$ 中，乘法对两个变量都是单调递增的；2. 由于 $\bot$ 也是 $\emptyset$的上确界，因此对于任意 a, $a \otimes \bot = \bot = \bot \otimes a$3. 由于 $\top$ 是 $\mathscr{Q}$的上确界，因此 $\top \otimes \top = \sup_{a,\ b} a \otimes b = \sup \text{img } \otimes$

[2] $i.e.$ 二元运算 $\otimes : \mathscr{Q} \times \mathscr{Q} \to \mathscr{Q}$（称为乘法）满足结合律。

注记 2.2:
如果 $(\mathscr{Q}, \trianglelefteq)$ 是一个满足上述分配律的完备格，其中二元下确界符合这些分配律，那么由此得到的量子格以 $\top$ 为单位元，且实际上是一个 locale。反过来，每个 locale 都以这种方式成为一个幺量子格。

定义 2.2:
量子格 $\mathscr{Q}$ 称为

- 双可除的，当左（右）可除性意味着删去公理中的 ρ （λ）部分。

$$a \leq b \implies \exists \lambda, \rho : a \otimes \rho = b = \lambda \otimes a$$

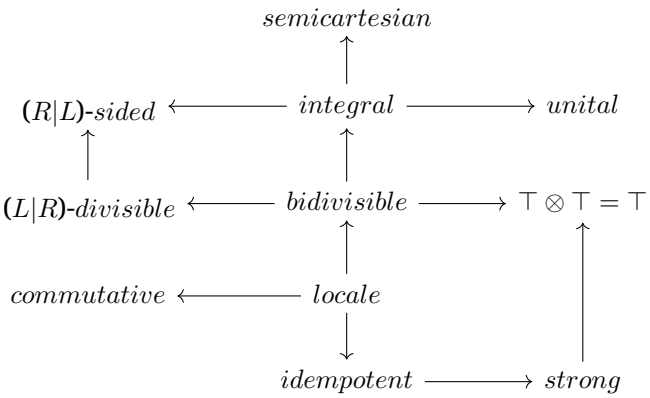
- 积分的，当 $\top \otimes a = a = a \otimes \top$。若右侧等式成立，我们称其为右侧的；若左侧等式成立，则称其为左侧的。
- 幺元的，当 $\otimes$ 有单位元；
- 为半笛卡尔的，当且仅当 $a \otimes b \leq a \wedge b$
- 为交换的，当且仅当 $\otimes$是；
- 为幂等的，当且仅当 $a \otimes a = a$；
- 为线性且严格的，当 $\leq$ 是线性序并且对于

$$a \neq \bot \; and \; a \otimes b = a \otimes c \; or \; b \otimes a = c \otimes a \implies b = c$$

- 为强的，当对于任意 e 和 A [12, , 参见第 30], 页

$$e = e \otimes e \implies e \leq \bigvee_{a \in A} a \implies e \leq \bigvee_{a \in A} a \otimes a$$

我们提供下图来说明这些定义之间的一些关系:



例 2.1:
局部或许是量子格中最好的例子：它们是交换的、幂等的、积分的（因此兼具半笛卡尔性和右侧性）、可除且强的（两者都显然成立）。其中，拓扑空间 X 的开子集构成的局部对层论尤为重要：其序关系由包含关系给出，上确界为并集，有限下确界为交集。

例 2.2:
带有逆序关系 $[0,\infty]$ – $\geq$ – 的扩展半直线，其幺半群运算为实数的通常加法。

由于序关系为 $\geq$，顶元是 0，底元是 ∞。由于它与 Lawvere 空间（与度量空间相关）有关，我们称之为 Lawvere 量子格。

一个同构的量子格是由 $[0,1]$ 给出的量子格，此处采用通常的序关系 –，并以乘法作为幺半群运算。该同构由下式给出

$$(x \in [0,1]) \mapsto (-\ln(x) \in [0,\infty])$$

一个子例子是扩展自然数 $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$，它是 Lawvere 量子格的一个限制，与图上的距离有关。

所有这些都是幺元的，但不是 locale。事实上，它们也是积分的。

注记 2.3:
当我们断言一个量子格不是 locale 时，并不是说其底层偏序集不是 locale，而只是说幺半积并非该偏序集的交运算。

例子 2.3:
下面列出一些不是 locale 的幺量子格的更多例子：

1. 交换的含幺环 R 的理想集合 $\mathcal{I}(R)$，其序为 $\subseteq$，乘法定义为理想的乘法。上确界是理想之和，最大元为 R，平凡理想为最小元；2. 含幺环 R 的右理想（或左理想）集合 $\mathcal{RI}(R)$，采用与上一个例子相同的序和乘法。于是，上确界以及最大元和最小元也与 $\mathcal{I}(R)$ 中的相同；3. 含 C^* 的代数的闭右理想（或左理想）集合，其序为闭右理想（或左理想）之间的包含关系，乘法为理想乘法的拓扑闭包。

如需了解更多详情和例子，我们推荐 [20]。

例子 2.4（“切片”构造）：
给定一个量子格 $\mathscr{Q}$，我们可以构造两个极端值 $a \leq b$ 之间的区间：

$$[a,b] = \{p \in \mathscr{Q} \mid a \leq p \leq b\}$$

这显然是一个完备格，并且包含 $[a,b] \hookrightarrow \mathscr{Q}$ 保持非空上确界和非空下确界。

现在，假设 $\mathscr{Q}$ 是（交换的）半笛卡尔且幺元的，并考虑——给定任意 $e \in Idem(\mathscr{Q})$ 和满足 $e \leq b$ 的 $b \in \mathscr{Q}$ ——集合 $[e,b]$ 满足

$$e \leq x, y \leq b \implies e = e \otimes e \leq x \otimes y \leq b \otimes b \leq b \otimes \top = b$$

因此 $\otimes \restriction [e,b]$ 是一个子半群。此外，它还具有量子格 $x \otimes \bigvee_i y_i = \bigvee_i x \otimes y_i$的结构：对于 $x \in [e,b]$ 与非空上确界之间的分配性，无需检查；对于空上确界，只需注意

$$e = e \otimes e \leq x \otimes e \leq \top \otimes e = e$$

命题 2.1（“光滑”切片构造 [2]）：
上述切片构造显然不保持幺元性、整性（尽管它保持半笛卡尔性）。当 $\mathscr{Q}$ 是（左—右）可除且交换的（因此也立即是积分的）时，我们可以调整每个切片上的 $\otimes$ ，使其仍然可除且交换：若 $a, a' \in [0,b]$，我们可以如下定义 $\otimes_b$

$$b \otimes (b \to a) \otimes (b \to a')$$

证明。在任意量子格 $\mathscr{Q}$ 中，不难看出，

$$a \otimes (a \to (a \otimes b)) = a \otimes b$$

而在左可除量子格中，随后可以证明

$$b \leq a \implies a \otimes (a \to b) = b$$

对于右可除量子格，类似地也成立（使用适当的剩余）。由于我们处于交换的情形中——这一点在后文很重要——，因此可以直接假设上述结论成立。

首先，让我们证明按 $\otimes_b$ 定义的运算确实具有结合性。我们通过将结合性归结到 $\otimes$ 来完成证明：

$$\begin{aligned} x \otimes_b (y \otimes_b z) &= b \otimes (b \to x) \otimes (b \to \overbrace{[b \otimes (b \to y) \otimes (b \to z)]}^{y \otimes_b z}) \\ &= (b \to x) \otimes b \otimes (b \to [b \otimes (b \to y) \otimes (b \to z)]) \\ &= (b \to x) \otimes [b \otimes (b \to y) \otimes (b \to z)] \\ &= b \otimes (b \to x) \otimes (b \to y) \otimes (b \to z) \end{aligned}$$

现在，我们可以交换 x 和 z 后重复上述过程；结果当然仍然相同，从而得到

$$x \otimes_b (y \otimes_b z) = z \otimes_b (y \otimes_b x)$$

但交换性可得

$$z \otimes_b (y \otimes_b x) = z \otimes_b (x \otimes_b y) = (x \otimes_b y) \otimes_b z$$

另外，注意到 $\otimes_b$ 是交换的。现在假设 $y, x_i \leq b$，那么

$$\begin{aligned}\left(\bigvee_i x_i\right) \otimes_b y &= b \otimes \left(b \to \bigvee_i x_i\right) \otimes (b \to y) \\ &= \left(\bigvee_i x_i\right) \otimes (b \to y) \\ &= \bigvee_i x_i \otimes (b \to y) \\ &= \bigvee_i b \otimes (b \to x_i) \otimes (b \to y) \\ &= \bigvee_i x_i \otimes_b y\end{aligned}$$

这与交换性一起，便得到完全分配律。最后，我们应证明可除性。假设 $x \leq a \leq b$，于是我们可以尝试找到一个 $y \leq b$，使得 $x = y \otimes_b a$ ——而交换性则给出完全双可除性。在 $\mathscr{Q}$上的可除性表明 $a \otimes (a \to x) = x$。接下来考虑

$$y = b \otimes (a \to x)$$

双可除性给出 $y \leq b$，因为它意味着 $\mathscr{Q}$ 是半笛卡尔的，而且显然 $b \wedge (a \to x) \leq b$。现在来证明张量具有所需性质：

$$\begin{aligned}a \otimes_b [b \otimes (a \to x)] &= b \otimes (b \to a) \otimes (b \to [b \otimes (a \to x)]) \\ &= (b \to a) \otimes b \otimes (b \to [b \otimes (a \to x)]) \\ &= (b \to a) \otimes [b \otimes (a \to x)] \\ &= b \otimes (b \to a) \otimes (a \to x)) \\ &= a \otimes (a \to x)) \\ &= x\end{aligned}$$

□

命题 2.2：
考虑范畴 $\mathsf{Quan}_{c,d}$，其对象为交换且可除的量子格与上确界，$\top$ 以及它们之间保持 $\otimes$ 的态射。现在取这样一个量子格 $\mathscr{Q}$。事实上，光滑切片构造是一个函子

$$\mathscr{Q}/_ : \mathscr{Q}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Quan}_{c,d}$$

证明。取 $a \leq b$。首先，我们需要提供一个态射 $\mathscr{Q}/b \to \mathscr{Q}/a$，以对应于以下事实：$a \leq b$。为此，

$$(x \in \mathscr{Q}/b) \xmapsto{\mathscr{Q}/(a \leq b)} (a \otimes_b x \in \mathscr{Q}/a)$$

我们知道 $b \mapsto a \otimes_b b = a$，因此它保持 $\top$；我们还知道

$$\bigvee_i x_i \mapsto a \otimes_b \bigvee_i x_i = \bigvee_i a \otimes_b x_i$$

因此它保持上确界。最后，取 $x \otimes_b y$，我们知道它映射到

$$a \otimes_b (x \otimes_b y) = b \otimes (b \to a) \otimes (b \to x) \otimes (b \to y)$$

$$\begin{aligned}
(a \otimes_b x) \otimes_a (a \otimes_b y) &= a \otimes [a \to (a \otimes_b x)] \otimes [a \to (a \otimes_b y)] \\
&= a \otimes [a \to (b \otimes (b \to a) \otimes (b \to x))] \otimes [a \to (a \otimes_b y)] \\
&= (b \otimes (b \to a) \otimes (b \to x)) \otimes [a \to (a \otimes_b y)] \\
&= a \otimes (b \to x) \otimes [a \to (a \otimes_b y)] \\
&= (b \to x) \otimes (a \otimes_b y) \\
&= (b \to x) \otimes b \otimes (b \to a) \otimes (b \to y) \\
&= b \otimes (b \to x) \otimes (b \to a) \otimes (b \to y)
\end{aligned}$$

这证明它是一个态射，现在还需要证明 $\mathscr{Q}/$ 确实具有函子性。函子性的第一部分很简单：$\mathscr{Q}/(b \le b)$ 是 $b \otimes_b$，它是恒等映射，因为 b 是单位元。现在取 $a \le b \le c$ _

$$\begin{aligned}
[\mathscr{Q}/(a \le b) \circ \mathscr{Q}/(b \le c)](x) &= a \otimes_b (b \otimes_c x) \\
&= b \otimes (b \to a) \otimes (b \to [c \otimes (c \to b) \otimes (c \to x)]) \\
&= b \otimes (b \to a) \otimes (b \to [b \otimes (c \to x)]) \\
&= (b \to a) \otimes [b \otimes (c \to x)] \\
&= a \otimes (c \to x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\mathscr{Q}/(a \le c)](x) &= a \otimes_c x \\
&= c \otimes (c \to a) \otimes (c \to x) \\
&= a \otimes (c \to x)
\end{aligned}$$

□

例 2.5：
还有一种量子格的积，其序和积都是逐点定义的。很容易看出，逐点定义的恒等元就是恒等元，逐点定义的积就是积，等等。

注 2.4：
2.3 中介绍的最后两个例子既不是交换的，也不是半笛卡尔的。第一个不是幂等的，第二个则是；二者分别是右侧的（左侧的）量子格 [20, 参见]。

例 2.6:
强量子格的主要例子有海廷代数、($[0,1]$, $\leq$, $\cdot$)、严格线性量子格。一些 MV-代数，例如 Chang 的 ($[0,1]$, $\wedge$, $\vee$, $\oplus$, $\otimes$,0,1)[Chang]'s，并不是强的。

注 2.5:
(i) 交换的半笛卡尔量子格的类在任意积和切片下封闭，只要 $[a,b]$ a 是幂等的；(ii) 强量子格的类在任意积和区间构造下封闭；(iii) 如前所述，交换可除量子格在光滑切片下封闭。

从现在起，我们假设所有量子格都是交换的。

定义 2.3:
设 $\mathscr{Q}$ 为一个量子格，我们定义如下的另一种偏序 $\preceq$：

$$a \preceq b \iff a = a \otimes b$$

命题 2.3（半笛卡尔量子格的性质）:
给定一个半笛卡尔量子格，

1. 设 $\mathscr{Q}$ 是一个幺量子格，则它是积分的。2. $a \preceq b \leq c$ 蕴含 $a \preceq c$；3. 若 $e \in \mathrm{E}\mathscr{Q}$，则 ($e \preceq a$) $\iff$ ($e \leq a$)。

命题 2.4:
若 $\mathscr{Q}$ 是半笛卡尔且幂等的，则它实际上是一个完备分配格，并且 $\otimes = \wedge$。换言之，它是一个 locale。

证明。假设 $\mathscr{Q}$ 实际上是幂等的，由于 $\otimes$ 在两个变量上都是单调递增的，我们有

$$a \leq b \implies a \leq c \implies a \leq b \otimes c$$

因此，如果 a 小于 b 和 c，那么它必定小于 $b \otimes c$；但由于 $\mathscr{Q}$ 是半笛卡尔的，根据上文的注记 2.3，$\otimes \leq \wedge$。这意味着 $b \otimes c$是 b 和 c的一个下界，而我们根据幂等性得到的结论表明，它是这样的上界中最大的一个。

因此，乘法满足下确界的泛性质。上述内容只是 [17, 命题 2.1]的一个特例。□

2.2 关于 $\mathscr{Q}$-集合范畴

注记 2.6:
从现在起，我们只讨论交换半笛卡尔量子格，而不讨论不具备这些性质的量子格。

给定一个量子格 $\mathscr{Q}$，大致而言，我们可以构造一个 $\mathscr{Q}$-空间，其中点与点之间的距离由 $\mathscr{Q}$ 中的元素度量，而不是像我们通常那样由——比如说——$[0,\infty)$ 度量。$\mathscr{Q}$-集合的概念则精确表述了这个定义。

定义 2.4:
$\mathscr{Q}$-集合范畴是一个赋有 $\mathscr{Q}$-距离运算的集合，通常记作 δ。也就是说，$\mathscr{Q}$-集合范畴是一个集合 X，配有映射 $\delta\colon\ X^2 \to X$，满足:

1. $\delta(x,y) = \delta(y,x)$; 2. $\delta(x, y) \otimes \delta(y,z) \leq \delta(x,z)$; 3. $\delta(x,x) \otimes \delta(x,y) = \delta(x,y)$。

$\delta(x,x)$ 通常简记为“x的范围”，写作 $\mathrm{E}\,x$。

读者可能会注意到上述定义中的几点。（i）δ是对称的，尽管我们已经舍弃了几乎所有与度量空间相关的概念，只保留了最模糊的印象；（ii）为什么三角不等式是反过来的？（iii）$\mathrm{E}\,x \otimes \delta(x,y) = \delta(x,y)$，为什么不直接要求 $\mathrm{E}\ x = \top$?

这些问题都很合理——过去人们曾以不同方式回答第一个和最后一个问题，而从定义的角度来看，这正是 $\mathscr{Q}$-集合与$\mathscr{Q}$-富化范畴之间的主要区别。关于序是否应当取逆的问题，更多的是出于合理性考虑：既然我们把 $\mathscr{Q}$-集合视为带有 $\mathscr{Q}$ 值相等关系的集合，那么将 $\mathrm{E}\,x$ 视为对 x而言最充分成立的相等关系是合理的，因此三角不等式需要上下颠倒——并转化为相等关系的传递性。

注 2.7:
当我们在 $\mathscr{Q}$-集合中讨论 $P(\vec{x}) \leq Q(\vec{x})$ 类型的性质时，认为下面这个逻辑等价（但在记号上不太有帮助）的陈述，往往更有启发性:

$$P(\vec{x}) \to Q(\vec{x})\ (= \top)$$

可以在所有 $\mathscr{Q}$-集合的集合上自然地赋予两种主要的范畴结构。一种是将映射取为余压缩映射（即它们使 δ 变大）；另一种是考虑底层集合之间性质良好的 $\mathscr{Q}$ 值关系。

定义 2.5:
函数态射 $f\colon\ X \to Y$是一个函数 f，定义在 X 和 Y的底层集合之间，并且 f 递增 δ 且保持 E；也就是说

$$\delta_X \leq \delta_Y \circ (f \times f)$$

$$\mathrm{E}_X = \mathrm{E}_Y \circ f$$

注 2.8:
存在一种合适的 $\mathscr{Q}$-集合之间的态射概念，它由“取值于 $\mathscr{Q}$”的关系所承载。本文不探讨这一概念，但这类态射称为“关系态射”。

读者应注意，我们通常不会区分 δ_X 和 δ_Y，而是依靠具有暗示性的变量名称来指明它们的类型，从而表明它们所指的 δ 。换句话说，读者应当熟悉 Koeniglookup[3]。

我们将 $\mathcal{Q}$-Set$_r$ 记作由 $\mathcal{Q}$-集合及其间的关系态射构成的范畴，并将 $\mathcal{Q}$-Set$_f$ 记作具有相同对象、但对象之间为函数态射的范畴。由于我们不会处理 $\mathcal{Q}$-Set$_r$，因此我们令$\mathcal{Q}$-Set简单地表示 $\mathcal{Q}$-Set$_f$。

定义 2.6:
我们曾承诺要证明一个更强的结果，而不是证明函数态射满足范畴公理——顺便一提，这一结果对我们正在撰写的另一篇论文也很有用——即证明，在给定一般交换幺量子格的情况下， e-态射构成一个范畴，并且对于 I 为幺半群单位元时，函数态射构成 I-态射的一个广子范畴。

因此，让我们定义 e-态射：给定 $\mathcal{Q}$的一个幂等元 e ， e-态射是“允许误差 e”的函数态射:

$$e \otimes \delta(x, x') \leq \delta(f(x), f(x'))$$

$$\mathrm{E}\, f(x) = e \otimes \mathrm{E}\, f(x)$$

命题 2.5:
我们断言， $\langle e$的集合 $\varphi\rangle$ （其中 φ 是一个 e-态射）在显然的复合律下构成一个范畴。此外，恒等函数是一个 I-态射，其中 I 是量子格的单位元；更进一步，I-态射在复合下封闭，并构成一个子范畴，该子范畴按定义等于 $\mathcal{Q}$-Set$_f$。

证明。首先，显然的复合将一个 e-态射 f 和一个 e'-态射g 映射为一个 $(e \otimes e')$-态射 $g \circ f$。结合性源于函数的（也就是说，在集合范畴中的） $\circ$结合性，以及 $\otimes$ 使得 $\mathcal{Q}$ 成为一个半群这一事实。 $g \circ f$是一个 $(e \otimes e')$-态射这一点相当明显，故省略证明。

显然，恒等态射是一个 I-态射——当然，复合 I-态射会得到一个 $I \otimes I = I$-态射。 □

2.3 一些例子

例 2.7:
空集——空泛地说——是一个 $\mathcal{Q}$-集合范畴。

[3] 引用一个知名网站的话—— `cppreference.com` ——实参依赖查找（也称为 ADL 或 Koenig 查找）是一组规则，用于在函数调用表达式中查找未限定的函数名，其中包括对重载运算符的隐式函数调用。

例2.8：
$\mathscr{Q}$的幂等元集合记作 $\mathrm{E}\ \mathscr{Q}$。设 $X \subseteq \mathrm{E}\,\mathscr{Q}$，则 $(X, \otimes)$ 是一个 $\mathscr{Q}$-集合范畴。显然，$(e, e') \in \mathrm{E}\ \mathscr{Q} \times \mathrm{E}\,\mathscr{Q} \mapsto (e \otimes e')$ 满足所有 $\mathscr{Q}$-集合范畴公理；不过，作为第一个非平凡的例子，我们在此给出详细证明：

$$\begin{aligned}\delta(e, e') &= e \otimes e' \\ &= e' \otimes e \\ &= \delta(e', e)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta(e, e') \otimes \delta(e', e'') &= e \otimes e' \otimes e' \otimes e'' \\ &\leq e \otimes e'' \\ &= \delta(e', e)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta(e, e') \otimes \mathrm{E}\, e =& e \otimes e' \otimes e \otimes e \\ &= e \otimes e' \\ &= \delta(e, e')\end{aligned}$$

注意，对于任意 $e \in X$，都满足 $\delta(e, e) =\mathrm{E}\ e = e$，并且 $e \otimes e'$ 是偏序集 $\mathrm{E}\,\mathscr{Q}$ 中 $\{e, e'\}$ 的下确界。

注2.9：
不能用 E 中的整个 $\mathscr{Q}$ 来代替 $\mathscr{Q}$，因为 $\delta(x, y) \otimes \mathrm{E}\, x$ 将不成立。上述例子中之所以成立，唯一的原因是对于幂等元 $\otimes = \wedge$。不过，在满足某些条件时，可以得到一个 $\mathscr{Q}$-集合，其底层集合就是 $\mathscr{Q}$ 本身。

例2.9：
假设 $\mathscr{Q}$ 是一个带有“幂等上近似”[4] 的量子格：

$$\forall q \in \mathscr{Q} : \exists q^+ \in \mathrm{E}\,\mathscr{Q} : q^+ = \min\{e \in \mathrm{E}\,\mathscr{Q} \mid q \preceq e\}$$

Then

$$\delta(x, y) = \begin{cases} x \otimes y, & x \neq y; \\ x^+, & x = y. \end{cases}$$

在 $\mathscr{Q}$ 自身上定义一个 $\mathscr{Q}$-集合结构。

例2.10：
正如 Lawvere 量子幺半群是一个 Lawvere 空间一样，一个（积分且交换的）量子格 $\mathscr{Q}$ 是一个 $\mathscr{Q}$-集合。具体通过以下方式实现：

$$\delta(x, y) = (x \to y) \wedge (y \to x)$$

[4]在 [21]中描述了使 $\mathscr{Q}$ 具有这种性质的充分条件。

这大致等价于实数的 $|x-y|$。这未必是我们能赋予它们的最佳 $\mathscr{Q}$-集合范畴结构，因为对于任意 x，$\mathrm{E}\,x=\top$。

缓解这一现象的方法——它对 $\perp$ 尤其奇怪——包括考虑 x 上方的幂等元。一项重要的量子性质是存在一个运算 $(\,)^-$，它将元素 x 映射为 $\sup\{e\in\mathrm{E}\,\mathscr{Q}\mid e\preceq x\}$。将 $\delta(x,y)$ 乘以 $x^-\otimes y^-$，可以保证——例如——当 $\mathscr{Q}$ 是 locale 时，上述构造与终对象重合。

另一种修正方法是更直接地纳入 $\mathrm{E}\,\mathscr{Q}$，考虑底层集合为 $\mathscr{Q}\times\mathrm{E}\,\mathscr{Q}$ 且 δ 由下式给出的空间

$$\delta((x,e),(y,a))=a\otimes e\otimes[(x\to y)\wedge(y\to x)]$$

我们将这个 $\mathscr{Q}$-集合记作 $\mathscr{Q}_{\mathrm{E}}$。

例 2.11：
本文探讨的一种构造 [3]，但也适合在此提及，即 $X\boxtimes X$，其底层集合为 $|X|\times|X|$，且 δ 由各坐标的 δ 之积给出。此构造与此处相关的原因在于 $\delta:X\boxtimes X\to\mathscr{Q}_{\mathrm{E}}$ 以自然的方式：

$$(x,y)\mapsto(\delta(x,y),\mathrm{E}\,x\otimes\mathrm{E}\,y)$$

而这恰好是一个函数态射。

例 2.12：
假设 (X,d) 是一个伪度量空间，那么 (X,d) 是一个 $[0,\infty]$-集合，其中 $\delta(x,y)\neq\perp=\infty,\forall x,y\in X$。

例 2.13：
给定一个交换环 A，记其（左）理想集合为 $\mathscr{I}_A$。$\mathscr{I}_A$ 是一个量子格。给定一个左 A-模 M，我们可以赋予它一个 $\mathscr{I}_A$-集合的结构：

$$\delta(x,y)=\bigvee\{I\in\mathscr{I}_A\mid I\cdot x=I\cdot y\}$$

事实上，该上确界在某个特定理想处取到。此外，$Ex=A=\max\mathscr{I}_A$。

注 2.10（完备性）：
如前所述，存在一个由 $\mathscr{Q}$-集合构成的范畴，其间的态射为关系态射。碰巧，这个范畴是 $\mathscr{Q}$-集合范畴的一个反射子范畴（或与之等价）。这个反射子范畴中的对象称为“Scott 完备”的 $\mathscr{Q}$-集合。

完备性的概念与单点对象有关，它们是 $\mathscr{Q}$值分布，用来“测量一个点”。而 Scott 完备性意味着，我们测量的所有点都确实存在，而且不会对任何点重复测量。

从某种意义上说，这与空间是饱和的条件相似。至少还有另一种不同的完备性概念，称为粘合完备性——它与相容的局部数据恰好有一种粘合有关。这些概念以及它们所定义的反射子范畴，将在另一篇正在编写的文章中探讨 [4]。

3 主要构造

本节将介绍所有$\mathcal{Q}$-集合范畴及其函数态射中的基本构造：极限、余极限、（正则）子对象分类子等。

我们从以下命题开始：

命题 3.1（分离族）：
对于每个 $e \in \mathrm{E}\,\mathcal{Q}$，我们都可以考虑单元素集 $S_e = \{e\}$，并赋予其示例 2.8 中所述的自然 $\mathcal{Q}$-集合结构。
那么，这类 $\mathcal{Q}$-集合构成了 $\mathcal{Q}$-集合范畴的一个分离族。

证明。确实，对于任意一对态射 $f, g\colon X \to Y$，若 $f \neq g$，则必存在某个 $x \in X$，使得 $f(x) \neq g(x)$。取 $e = \{\mathrm{E}\ x\} \in \mathrm{E}\ \mathcal{Q}$，以及由 $(e \in \{e\}) \mapsto (x \in X)$ 给出的函数$s_x\colon S_e \to X$，则它是一个函数态射，并且显然将 f 与 g 区分开。

□

3.1 极限

命题 3.2（终对象）：
终对象是 $\top = (\mathrm{E}\,\mathcal{Q}, \otimes)$。

证明。$\mathcal{Q}$ 的幂等元集合 $\mathrm{E}\,\mathcal{Q}$，赋予例 2.8 中描述的自然 $\mathcal{Q}$-集合结构（$\delta(e, e') = e \otimes e'$），必定是终对象，因为 $\mathrm{E}\,e = e$。

对于每个 $\mathcal{Q}$-集合 (X, δ)，以 $\top$ 为陪域的唯一态射定义如下：

$$!\colon X \to \top$$
$$f(x) = \mathrm{E}\,x$$

由于函数态射保持范围，因此有 $\mathrm{E}\ f(x) = \mathrm{E}\ x$——然而，$\mathrm{E}\ f(x) = f(x)$，因此 $f(x) = \mathrm{E}\ x$。这证明至多存在一个态射 $X \to \mathrm{E}\,\mathcal{Q}$。

另一方面，$\delta(x, y) \leq \mathrm{E}\ x \otimes \mathrm{E}\,y$ 恰好使 $x \mapsto \mathrm{E}\ x$成为一个函数态射：

$$\delta_X(x, x') \leq \mathrm{E}\,x \otimes \mathrm{E}\,x' = \delta(x, x')$$
$$\mathrm{E}\,x = \mathrm{E}\,x \otimes \mathrm{E}\,x = \mathrm{E}\,x$$

□

命题 3.3（非空乘积）：
$\mathscr{Q}$-集合的积 $(X_i)_{i\in I}$ 是:

证明。

$$\prod_{i\in I} X_i = \left(\left\{ (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} |X_i| \;\middle|\; \forall i,j \in I (\mathrm{E}\, x_i = \mathrm{E}\, x_j) \right\}, \delta \right)$$

$$\delta((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) = \bigwedge_{i\in I} \delta_i(x_i, y_i)$$

注 3.1:
由于

$$(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i \implies \forall i,j \in I : \mathrm{E}\, x_i = \mathrm{E}\, x_j$$

我们可以得出结论:

$$\mathrm{E}(x_i)_{i\in I} = \bigwedge_{i\in I} \mathrm{E}\, x_i = \bigwedge_{i} \mathrm{E}\, x_i$$

□

证明： $\mathscr{Q}$-集合范畴。

$$\begin{aligned}\delta((x_i)_{i\in I},(y_i)_{i\in I}) &= \bigwedge_{i\in I}\delta_i(x_i,y_i)\\ &= \bigwedge_{i\in I}\delta_i(x_i,y_i)\\ &= \delta((y_i)_{i\in I},(x_i)_{i\in I})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\delta((x_i)_{i\in I},(y_i)_{i\in I})\otimes\delta((x_i)_{i\in I},(x_i)_{i\in I})\\ &\qquad= \bigwedge_{i\in I}\delta(x_i,y_i)\otimes\bigwedge_{j\in I}\delta(x_j,x_j)\\ &\qquad= \bigwedge_{i\in I}\delta(x_i,y_i)\otimes \mathrm{E}(x_j)_{j\in J}\\ &\qquad= \bigwedge_{i\in I}\delta(x_i,y_i)\otimes \mathrm{E}(x_i)\\ &\qquad= \bigwedge_{i\in I}\delta(x_i,y_i)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta((x_i)_{i\in I},(y_i)_{i\in I})\otimes\delta((y_i)_{j\in I},(x_i)_{z\in I}) &= \bigwedge_{i\in I}\delta(x_i,y_i)\otimes\bigwedge_{j\in I}\delta(y_j,z_j)\\ &\le \bigwedge_{i\in I}\delta(x_i,y_i)\otimes\delta(y_i,z_i)\\ &\le \bigwedge_{i\in I}\delta(x_i,z_i)\\ &= \delta((x_i)_{i\in I},(y_i)_{i\in I})\end{aligned}$$

□

证明：投影。

$$\begin{aligned}\pi_i : \prod_{i\in I} X_i &\to X_i\\ \pi_i((x_j)_{j\in I}) &= x_i\end{aligned}$$

它们是态射，因为

$$\begin{aligned}\delta_i(\pi_i((x_j)_{j\in I}),\pi_i((y_j)_{j\in I})) &= \delta_i(x_i,y_i)\\ &\geq \bigwedge \delta_j(x_j,y_j)\\ &= \delta((x_j)_{j\in I},(y_j)_{j\in I})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_i(\pi_i((x_j)_{j\in I}),\pi_i((x_j)_{j\in I})) &= Ex_i\\ &= \bigwedge_{j\in I} Ex_j\\ &= \delta((x_j)_{j\in I},(x_j)_{j\in I})\end{aligned}$$

□

证明：泛性质。设 $f_i:\ A\to X_i$ 是一族态射。我们定义：

$$\begin{aligned}h : A &\to \prod_{i\in I} X_i\\ h(a) &= (f_i(a))_{i\in I}\end{aligned}$$

那么 h 满足泛性质：

$$\begin{aligned}\pi_i\circ h(a) &= \pi_i((f_i(a))_{i\in I}) = f_i(a)\\ \pi_i\circ h &= f_i\end{aligned}$$

□

命题 3.4：
f、g：$(X,\delta)\to(Y,\delta')$ 的等化子为：

$$\mathrm{Eq}(f,g)=\left(\{x\in X\mid f(x)=g(x)\},\delta\restriction_{\{x\in X\mid f(x)=g(x)\}}\right)$$

证明。显然它是一个 $\mathscr{Q}$-集合。它显然使这对态射相等。现在，对于一个给定的 α：$A\to X$，它也使这对态射相等。注意到 α 的像必定完全包含在 $\mathrm{Eq}(f,g)$ 中，因为

$$[f\circ\alpha(a)=g\circ\alpha(a)]\iff a\in\mathrm{Eq}(f,g)$$

因此，对陪域作限制便得到使图表交换并确立泛性质的唯一态射。

□

注记 3.2：
鉴于极限可表示为积的等化子，已证明该范畴是完备的。

命题 3.5（单态射）：
一个态射是单态射，当且仅当它作为函数是单射。

证明。单射性蕴含单态性，这一点显而易见。反过来不显然的唯一原因在于，原则上，态射可能不够多，无法证明一个非单射态射不是单态射。但这很容易证明：设$f(x) = f(y)$，考虑如下的 $\mathscr{2}$集合：$\{*_e\}$，其中 $e = \mathrm{E}\ x = \mathrm{E}\ y$，且 $\mathrm{E}\ *_e = e$。这个$\mathscr{2}$集合（例如 2.8）可以通过将 $*_e$ 映射到 x 或 y而嵌入我们的对象中；若 f是单态射，那么我们便有 $x = y$，从而证明了单射性。 □

命题 3.6（正则单态射）：
正则单态射类与保持 δ的单射态射类相同。它们恰好是底层集合之间保持 δ的单射函数。

证明。单态射是平行箭头对的等化子时，称其为正则单态射。设 $g, h : A \to B$，理解等化子的一种方式是将其视为使图表交换的 A 的最大子对象。显然，一般而言，子对象必定是其 δ逐点更小的子集。因此，使这对箭头相等的 A 的最大子对象，就是A 中函数取值相同的那些点构成的子集，而其 δ取可能的最大值：即 A的 δ。

因此，我们看到这样一种模式：等化子——一般而言——不过是带有 δ 的子集，而 δ 来自对原对象的限制。不过，需要特别指出的是，我们将“正则子对象”称为保持 δ 的单态射——因为它们已被等价地刻画。

持怀疑态度的读者可能会质疑：我们仅仅证明了正则单态射保持 δ，而没有证明保持 δ是一个充分条件。

在这种情况下，鉴于单态射是单射函数，保持 δ的单态射不过是带有其超集的 δ 的子集；考虑这样一个单态射：$f : A \rightarrowtail X$（我们可以认为 $A \subseteq X$ 和 $\delta_A = \delta_{X_{|A\times A}}$），取 $X_f = (X \amalg X) / \sim_f$，其中将$\sim_f$ 定义为恰好标识 A的两个副本。

$$\delta([\![(x,i)]\!], [\![(y,j)]\!]) = \begin{cases} \delta(x,y), & i = j \\ \bigvee_{a\in A} \delta(x, f(a)) \otimes \delta(f(a), y), & i \neq j \end{cases}$$

□

证明：X_f是一个 $\mathscr{2}$-集合范畴。取 i、j、k为不同的指标

$$\begin{aligned} \delta([\![(y,i)]\!], [\![(y',i)]\!]) &= \delta(y, y') \\ &= \delta(y', y) \\ &= \delta([\![(y',i)]\!], [\![(y,i)]\!]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta([\![(y,i)]\!],[\![(y',i)]\!])\otimes\delta([\![(y',i)]\!],[\![(y'',i)]\!]) &= \delta(y,y')\otimes\delta(y',y'')\\ &\le \delta(y,y'')\\ &= \delta([\![(y,i)]\!],[\![(y'',i)]\!])\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta([\![(y,i)]\!],[\![(y',i)]\!])\otimes\delta([\![(y,i)]\!],[\![(y,i)]\!]) &= \delta(y,y')\otimes\delta(y,y)\\ &= \delta(y,y')\\ &= \delta([\![(y,i)]\!],[\![(y',i)]\!])\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta([\![(y,i)]\!],[\![(y',j)]\!]) &= \bigvee_{x\in X}\delta(y,f(x))\otimes\delta(f(x),y')\\ &= \bigvee_{x\in X}\delta(y',f(x))\otimes\delta(f(x),y)\\ &= \delta([\![(y',j)]\!],[\![(y,i)]\!])\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta([\![(y,i)]\!],[\![(y',j)]\!])\otimes\delta([\![(y',j)]\!],[\![(y'',j)]\!]) &= \bigvee_{x\in X}\delta(y,f(x))\otimes\delta(f(x)\ y')\otimes\delta(y',y'')\\ &\le \bigvee_{x\in X}\delta(y,f(x))\otimes\delta(f(x),y'1)\\ &= \delta([\![(y,i)]\!],[\![(y'',j)]\!])\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta([\![(y,i)]\!],[\![(y',j)]\!])\otimes\delta([\![(y',j)]\!],[\![(y'',k)]\!]) &= \bigvee_{x\in X}\bigvee_{x'\in X}\delta(y,f(x))\otimes\delta(f(x),y')\otimes\delta(y',f(x'))\otimes\delta(f(x'),y'')\\ &\le \bigvee_{x\in X}\bigvee_{x'\in X}\delta(y,f(x))\otimes\delta(f(x),f(x'))\otimes\delta(f(x'),y'')\\ &= \bigvee_{x\in X}\delta(y,f(x))\otimes\delta(f(x),y'')\\ &= \delta([\![(y,i)]\!],[\![(y'',k)]\!])\end{aligned}$$

□

证明：正则性。定义 $g_0,g_1:Y\to X_f$ 为 $g_i(y)=(y,i)$。两者都是态射：

$$\delta(g_i(y),g_i(y'))=\delta((y,i),(y',i))=\delta(y,y')$$

g_0和 g_1的等化子恰好是 f的像:

$$\begin{aligned} g_0(y) = g_1(y) &\implies [\![(y,0)]\!] = [\![(y,1)]\!] \\ &\implies y \in Imf \end{aligned}$$

因此， f 是正则的。 □

3.2 余极限

命题 3.7（始对象）:
始对象是 $\perp = (\varnothing, \varnothing)$

证明。根据空真性（例 2.7），这是一个 $\mathscr{Q}$-集合。空函数同样根据空真性是一个态射；它显然必定是始对象，因为态射尤其也是函数。 □

命题 3.8（非空余积）:
$\mathscr{Q}$-集合的余积 $(X_i)_{i\in I}$ 是:

$$\coprod_{i\in I} X_i = (\coprod_{i\in I} |X_i|, \delta)$$

$$\delta((x,i),(y,i)) = \begin{cases} \delta_i(x,y), & i = j \\ \perp, & i \neq j. \end{cases}$$

证明：这是一个 $\mathcal{Q}$-集合。假设 $i \neq j \neq k \neq i$。不妨设：

$$\begin{aligned} \delta((x,i),(y,i)) &= \delta_i(x,y) && (\delta \text{ is symmetric}) \\ &= \delta_i(y,x) \\ &= \delta((y,i),(x,i)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta((x,i),(y,j)) &= \bot \\ &= \delta((y,j),(x,i)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta((x,i),(y,i)) \otimes E(x,i) &= \delta_i(x,y) \otimes Ex && (\text{extensionality}) \\ &= \delta_i(x,y) \\ &= \delta((x,i),(y,i)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta((x,i),(y,j) \otimes E(x,i) &= \bot \otimes Ex \\ &= \bot \\ &= \delta((x,i),(y,j)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta((x,i),(y,i)) \otimes \delta((y,i),(z,i)) &= \delta_i(x,y) \otimes \delta_i(y,z) && (\text{三角不等式}) \\ &\leq \delta_i(x,z) \\ &= \delta((x,i),(z,i)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta((x,i),(y,j) \otimes \delta((y,j),(z,j)) &= \bot \otimes \delta((y,j),(z,j) \\ &= \bot \\ &\leq \delta((x,i),(z,j)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta((x,i),(y,j) \otimes \delta((y,j),(z,k)) &= \bot \otimes \bot \\ &= \bot \\ &\leq \delta((x,i),(z,k)) \end{aligned}$$

□

证明：余投影。

$$\begin{aligned} \pi^i : X_i &\to \coprod_{i \in I} X_i \\ \pi^i(x_i) &= (x_i, i) \end{aligned}$$

根据构造，它们显然是态射。 □

证明：泛性质。设 $f_i:\ X_i \to A$ 是一族态射。我们定义：

$$\begin{aligned} h : \coprod_{i\in I} X_i &\to A \\ h(x,i) &= f_i(x) \end{aligned}$$

那么， h 满足泛性质：

$$\begin{aligned} f_i \circ {}_{\pi^i}(x,i) = f_i(x) &= h(x,i) \\ f_i \circ {}_{\pi^i} &= h \end{aligned}$$

□

例 3.1:
给定一个非空指标集 I，我们有一个 $\mathscr{Q}$-集合 $\coprod_{i\in I} \top$，定义如下

$$\delta((e,i),(e',i')) = \begin{cases} e \otimes e', & \text{if } i = i'; \\ \bot, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

命题 3.9（余等化子）：
对于 $f,g\colon (X,\delta) \to (Y,\delta')$，我们将等价关系 $\sim \subseteq |Y| \times |Y|$ 定义为 $f(x) \sim f(x) \sim g(x) \sim g(x)$ 的传递闭包。

$f,g\colon (X,\delta) \to (Y,\delta')$ 的余等化子为：

$$\begin{aligned} \mathrm{coEq}(f,g) &= \left(Y \big/ \sim, \delta \right) \\ \delta([\![y]\!],[\![y']\!]) &= \bigvee_{\substack{a\sim y \\ a'\sim y'}} \delta(a,a') \end{aligned}$$

证明： $\mathscr{Q}$-集合范畴。

$$\begin{aligned} \delta([\![y]\!],[\![y']\!]) = \bigvee_{\substack{a\sim y \\ a'\sim y'}} \delta(a,a') &= \bigvee_{\substack{a\sim y \\ a'\sim y'}} \delta(a',a) \\ &= \delta([\![y']\!],[\![y]\!]) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\delta([\![y]\!],[\![y']\!]) &\geq \delta([\![y]\!],[\![y']\!]) \otimes \mathrm{E}\,[\![y]\!] \\
&= \delta([\![y]\!],[\![y']\!]) \otimes \bigvee_{\substack{a\sim y \\ a'\sim y}} \delta(a',a) \\
&= \bigvee_{\substack{a\sim y \\ a'\sim y'}} \delta(a',a) \otimes \bigvee_{a\sim y} Ea \\
&\geq \bigvee_{\substack{a\sim y \\ a'\sim y'}} \delta(a',a) \otimes Ea \\
&= \bigvee_{\substack{a\sim y \\ a'\sim y'}} \delta(a',a) \\
&= \delta([\![y]\!],[\![y']\!])
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta([\![y]\!],[\![y']\!]) \otimes \delta([\![y']\!],[\![y'']\!]) &= \bigvee_{\substack{a\sim y \\ a'\sim y'}} \delta(a',a) \otimes \bigvee_{\substack{b\sim y' \\ b'\sim y''}} \delta(b,b') \\
&= \bigvee_{\substack{a\sim y \\ a'\sim y'}} \bigvee_{\substack{b\sim y' \\ b'\sim y''}} \delta(a',a) \otimes \delta(b,b') \\
&= \bigvee_{\substack{a\sim y \\ a'\sim y'}} \bigvee_{\substack{b\sim y' \\ b'\sim y''}} \delta(a',a) \otimes Ea \otimes \delta(b,b') \\
&= \bigvee_{\substack{a\sim y \\ a'\sim y'}} \bigvee_{\substack{b\sim y' \\ b'\sim y''}} \delta(a',a) \otimes \delta(a,b) \otimes \delta(b,b') \\
&\leq \bigvee_{\substack{a\sim y \\ a'\sim y'}} \bigvee_{\substack{b\sim y' \\ b'\sim y''}} \delta(a,b) \otimes \delta(b,b') \\
&\leq \bigvee_{\substack{a\sim y \\ a'\sim y'}} \bigvee_{\substack{b\sim y' \\ b'\sim y''}} \delta(a,b') \\
&= \bigvee_{\substack{a\sim y \\ b'\sim y'}} \delta(a,b') \\
&= \delta([\![y]\!],[\![y'']\!])
\end{aligned}
$$

□

命题 3.10（满态射）：
满态射恰好是满射态射。设 $f\colon X \to Y$是满射。那么，$\forall y \in Y\colon \exists x \in X\colon f(x) = y$。令 g, $h\colon Y \to A$。设 $\forall x \in X\colon g \circ f(x) = h \circ f(x)$。令 $y \in Y$。存在一个 $x \in X$使得

$f(x) = y$. Then $g(y) = g \circ f(x) = h \circ f(x) = h(y)$.

证明。取一些 $f\colon\ X \to Y$并假设

$$\exists y_0 \in Y : \forall x \in X : f(x) \neq y_0$$

令 $Y_f = \Big((Y \amalg Y)/\!\sim, \delta\Big)$，由以下内容生成

$$y \in \mathbf{img}\, f \implies {}_{\pi^l}(y) \sim {}_{\pi^r}(y)$$

令 $g, h\colon\ Y \to Y_f$作为 $g(y) = [\![(y, 0)]\!]$和 $h(y) = [\![(y, 1)]\!]$。那么 $g \neq h$但是 $g \circ f = h \circ f$。 □

3.3 子对象分类器

这个简短小节的目标是证明，范畴 $\mathcal{Q}$-集合拥有一个（几乎平凡的）正则子对象分类器。

注 3.3:

注意，该范畴并非平衡的，因为存在许多双射态射——特别是，不是同构的单态射+满态射；这些态射恰好是保留 δ 的双射态射。

命题 3.11（正则子对象分类器）：令 $\Omega = (\top \dot\cup \top, \delta)$,
其中:

$$\delta((e, i), (e', j)) = e \otimes e'$$

并考虑态射 $t\colon\ \top \to \Omega$，它将 $\top$ 包含到 Ω 中 $\top$的第二个副本中: $t(e) = (e, 1)$。
那么 $t\colon\ \top \to \Omega$ 是正则子对象的分类器。

证明。首先注意，Ω 是良定义的 $\mathcal{Q}$-集合，并且恒等映射$\top \coprod \top \to \Omega$ 是一个几乎从不同构的双射态射（当且仅当 $\mathcal{Q}$ 有唯一的幂等元时，它才是同构）。此外，注意到$t\colon\ \top \to \Omega$ 是一个正则单态射。

对于每个正则单态射 $f\colon\ X \to Y$，我们将 $\chi_f\colon\ Y \to \Omega$ 定义为

$$\begin{cases} (\mathrm{E}\, y, 1), & y = f(x), \\ (\mathrm{E}\, y, 0), & y \in Y \setminus f[X] \end{cases}$$

显然这是一个态射，因为它类似于终端箭头，但我们额外插入了一个不会干扰 δ、却能让我们追踪该元素来源的标签。

断言 $\chi_f \circ f = t \circ !_X$:

$$\chi_f(f(x)) = (Ef(x), 1) = (Ex, 1) = t(Ex) = t(!_X(x))$$

断言 上面的交换图表

$$(\Omega \xleftarrow{t} \top \xleftarrow{!_X} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\check{f}} \Omega)$$

是一个拉回方块。

令 $u\colon X \to \top \times Y$ 为拉回的普适Ω性质所给出的唯一态射。我们将证明 u 是一个保持 δS 的双射态射，因此它是一个同构。

注意，对每个 $x \in X$， $u(x) = (E_X x, f(x))$，因为 $E_\top(E_X x) = E_X x = E_Y f(x)$ 且 $t(E_X x) = \chi_f(f(x))$。

u 是单射：若 $u(x) = u(x')$，那么 $x = x'$，因为 f 是单射。

u 是满射：若 $(e, y) \in \top \times \Omega Y$，那么 $E_\top(e) = e = E_Y y$，且 $(e, 1) = t(e) = \chi_f(y)$；因此，根据 χ_f 的定义，对于某个（唯一的）$x \in X$，有 $y = f(x)$。于是 $e = E_Y y = E_Y f(x) = E_X x$，且 $(e, y) = (E_X x, f(x))$。

u 保持 δS：

$$\delta(u(x), u(x')) = \delta((E_X x, f(x)), (E_X x', f(x'))) =$$

$$\delta_\top(E_X x, E_X x') \wedge \delta_Y(f(x), f(x')) = \delta_\top(E_X x, E_X x') \wedge \delta_X(x, x') =$$

$$(E_X x \otimes E_X x') \wedge \delta_X(x, x') = \delta_X(x, x')$$

完成该断言的证明。

˘ 断言 χ_f 是唯一箭头 $f\colon Y \to \Omega$，使得图表

$$(\Omega \xleftarrow{t} \top \xleftarrow{!_X} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\check{f}} \Omega)$$

是一个拉回。

˘ 设 $x \in X$。由图表的交换性， $f(f(x)) = t(!_X(x)) = (E_X x, 1) = (E_Y f(x), 1)$。

令 $y \in Y \setminus f[X]$。考虑 $\mathcal{Q}$-集合范畴 $Z = \{e\}$，其中 $e = E_Y y$，如 2.8 中所述，以及（定义良好的）态射 $g\colon Z \to Y$，使得$g(E_Y y) = y$。若˘ $f(g(e)) = t(!_Z(e)) = t(e) = (e, 1)$，则存在唯一态射 $v\colon Z \to X$，使得 $f(v(e)) = g(e) = y$。因此˘ $f(y) = \breve{}\breve{}\breve{}\breve{}f(g(e)) \neq (e, 1)$。但是 $E_\Omega f(y) = E_\Omega f \circ g(e) = E_Z e = e$，并且 $f(y) \in \{(e', 0), (e', 1)\}$，其中某个幂等的 e' 满足 $e' = e' \otimes e' = E_\Omega \breve{f}(y)$。˘这意味着 $f(y) = (e, 0) = (E_Y y, 0)$，从而完成了该断言的证明。

□

4 局部可呈示性

毋庸置疑，范畴局部可呈现是一项非常强的性质；例如，当相关范畴局部可呈现时，它使我们能够为任何“理应”拥有右伴随的函子（余连续函子）构造右伴随。它也会对相关范畴的切片产生积极影响。

考虑这样一种情形：我们有一个对象 X，它属于 $\mathscr{C}$——一个足够余完备的范畴——以及一个图表 $D:\ \mathscr{I} \to \mathscr{C}$。由余投影的泛性质可得一个典范映射[5] ${}_{\pi^k}$：$D_k \to$ 余极限$_k$ D_k:

$$\operatorname*{colim}_k \mathbf{hom}(X, D_k) \xrightarrow{\varphi} \mathbf{hom}(X, \operatorname*{colim}_k D_k)$$

$$[\![(f,k)]\!] \longmapsto {}_{\pi^k} \circ f$$

为了使 $\hom(X,)$ 保持余极限，只需使这个自然映射成为自然同构。因此，只需逐点为同构即可——因为它本来就是自然的。我们将以此证明 $\mathscr{Q}$-集合范畴是可达的；而它既是可达的又是余完备的，所以必定是局部可呈示的。

对于可达性，我们需要一个正则基数 κ ——其值待定——以及一族（本质上）小的 κ 紧对象，使其在 κ 有向余极限下生成 $\mathscr{Q}$-集合范畴。首先，我们要寻找这样一类对象，然后证明它们以适当的方式生成该范畴。

4.1 κ-紧对象

要确定它们，显然必须选定某个正则基数。事实证明，$|\mathscr{Q}|^+$ ——即 $\mathscr{Q}$ 的基数的后继基数——就足够了。按此定义，要给出一个本质上小的 κ-紧对象类相当直接。

考虑一个 X a $\mathscr{Q}$-集合，其载体集的基数小于 κ。我们将证明，它关于 κ 是紧的。当然，这需要证明 $\hom(X,)$ 保持 κ- 定向余极限。我们分两步完成:– 证明对于我们的 X，φ 的满射性和单射性。

引理 4.1（φ 是满射）：
设 $D:\ \langle I, \leq \rangle \to \mathscr{Q}$-Set 是一个 κ-定向图表——或者它也可以只是κ-滤过的，哪种情况都无关紧要。

要证明我们的断言，只需证明任意箭头 $X \to \operatorname{colim}_k D_k$ 都能实际分解经过某个（依赖于该箭头的） D_i ——这样我们就可以取从这些同态集到 $\operatorname{colim}_k \hom(X, D_k)$ 的典范映射，并为 φ 找到一个截面，从而证明它是满射。

我们通过构造一个指标集 J 来实现这一点，使得给定的 f 必须经由任何大于所有 $j \in J$的 $i \in I$ 进行分解。由于我们的构造将确保

[5] W读者可以将其读作“内积”，因为它是 π 的对偶。

$|J| \leq \kappa$ 且偏序 I （或域范畴）是 κ有向的（-滤过的）——我们将至少拥有一个这样的 i，并且会恰当地分解 f。

证明。读者还请谅解下面这个证明：它并没有深刻到足以打动读者或传递什么深邃之美，不过其繁复程度倒足以让人深感困惑。

取某个 $f\colon\ X \to \mathsf{colim}_k D_k$，供证明余下部分使用。

定义 J：给定 x、$y \in X$，考虑集合

$$\Delta(x,y) = \{\delta_i(a,b) \mid i \in I \quad a,b \in D_i \quad \pi^i(a) = f(x) \quad \pi^i(b) = f(y)\}$$

（注意，$\Delta(x,y)$并不比 X更空，因为 $f(x)$必定“属于”（即在π意义下）某个 D_i，而 $f(y)$也属于某个 D_j。因此，必定存在某个 k，它同时“属于”这两者。）

如果我们接受选择公理（我们确实接受，而且如果想要开始讨论诸如非特殊量子格上的 $|\mathscr{Q}|$ 之类的对象，也必须接受它），就可以选取一个 a $\Xi(x,y)$

$$\Xi(x,y) = \{(i,a,b) \mid i \in I \quad a,b \in D_i \quad \pi^i(a) = f(x) \quad \pi^i(b) = f(y)\}$$

使得 $\Xi(x,y) \cong \Delta(x,y)$，而同构由映射给出

$$(i,a,b) \mapsto \delta_i(a,b)$$

现在，如果我们将 $\Xi(x,y)$ 投影到第一坐标上，也就是投影到 a,b 所处的索引 i 上，就得到一个集合，我们称之为 $\Gamma(x,y)$：

$$\Gamma(x,y) = \pi_I[\Xi(x,y)]$$

现在，读者可以放心：$\Gamma(x,y)$ 的基数必定严格小于 κ。因为 $\Delta(x,y)$ 是 $\mathscr{Q}$ 的子集，而 $\mathscr{Q}$ 本身又小于 κ—— 并且我们通过应用上述构造，只会不断减小其大小。因此，我们确实可以继续定义 J

$$J = \bigcup_{x,y} \Gamma(x,y)$$

既然 $|X| < \kappa$，那么 $|X \times X|$ 也如此（比如说，只要 κ 是无限的）。否则，我们就令 $\kappa \geq \omega$，也无妨。

既然 $|X \times X| < \kappa$，那么我们所做的就是对少于 κ 个集合取并，而这些集合的基数都小于 κ ——正则性意味着这个并集本身必定小于 κ。因此，$|J|$ 实际上仍然小于 κ。

因此，令 $\gamma \in I$ 为一个大于所有 $j \in J$ 的元素。显然，对于滤过图式而非偏序集，也可以进行同样的处理。再次强调：这不会对论证造成任何影响。

令 f 经由 D_γ 分解：回顾余极限的构造，我们可以将余极限视为不交并的适当商，这一点现在将发挥核心作用：

给定 $x \in X$，其在 f 下的像是一个等价类 $[\![(a,i)]\!]$，其中的 $a \in D_i$ 是一个选出的代表元（不一定是民主选出的；选择公理并不意味着每个人都一定有发言权）。因此，显然，只要取这些代表元的指标，就会得到一个 J'，其基数小于 κ；与之相关联的有一个元素 γ'——大于它的所有元素——从而存在一个函数 $X \xrightarrow{\bar{f}} D_{\gamma'}$，将 x 映射到 $D(i \leq \gamma')(a)$，且该函数分解 f。

背叛！然而，这个函数不一定是函数态射，因为我们没有将 δ 纳入考虑！ $\delta(x,y)$ 可能并不小于 $\delta(f(x)\ f(y))$。

显然，它在 f 中分解.....在集合范畴中。尽管我们经历了许多恐惧与战栗（还夹杂着一些厌恶），或者说正是很大程度上因为这些情绪，我们仍然可以将它增强为一个能够分解它的态射。这要借助我们的老朋友 γ。

补充说明：为达到戏剧效果，证明第一部分省略了一个便于使用的事实：

$$\delta(f(x), f(y)) = \sup \Delta(x, y)$$

这是因为 δ 在余极限上的定义：

$$\delta([\![a]\!], [\![b]\!]) = \bigvee_{i \in I} \bigvee_{\substack{\alpha \in [\![a]\!] \cap D_i \\ \beta \in [\![b]\!] \cap D_i}} \delta_i(\alpha, \beta)$$

但也请回想， D_γ “高于”所有满足 $j \in J$ 的 D_j：

$$\delta_j(u, v) \leq \delta_\gamma(D(j \leq \gamma)(u), D(j \leq \gamma)(v))$$

因此，若对于某个 j，$\pi^j(a) = f(x)$ 且 $\pi^j(b) = f(y)$，则必然有

$$\delta_j(a, b) \leq \delta(D(j \leq \gamma)(a), D(j \leq \gamma)(b))$$

但对满足这些条件的 (i,a,b) 取上确界，恰好就是 $\delta(f(x)\ g(y))$。我们还知道，它不可能再增大，因此得到：

$$\delta(D(j \leq \gamma)(a), D(j \leq \gamma)(b)) = \delta(f(x), f(y))$$

这告诉我们， γ 能够完成 γ' 所能完成的一切——也就是说，对于每个 x，我们都能找到 $f(x)$在π 下的原像——而且还能以态射的方式做到这一点。我们只需关注 δ，因为范围显然总是保持不变。这意味着我们确实已将 f 分解为

$$X \xrightarrow{\bar{f}} D_\gamma \xrightarrow{\pi^\gamma} \operatorname*{colim}_k D_k$$

由此可知:

$$\varphi([\![\bar{f}]\!]) = {}_{\pi^\gamma} \circ \bar{f} = f$$

□

引理 4.2（φ是单射）：
上述命题的逆命题也成立： φ 是单射。

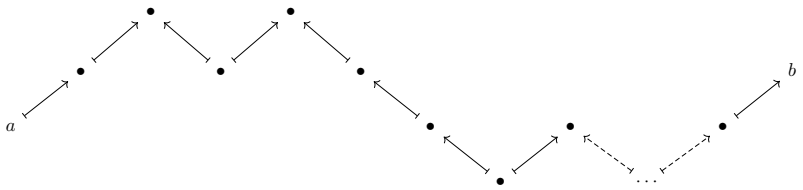
证明。取上述的 X 和 D，我们要证明 φ 是单射。因此，若 $\varphi([\![(f,i)]\!]) = \varphi([\![(g,j)]\!])$，我们就应当能够证明 $[\![(f,i)]\!] = [\![(g,j)]\!]$。这肯定会很有趣。那么，假设我们确实有这样一对。根据定义可知

$${}_{\pi^i} \circ f = {}_{\pi^j} \circ g$$

由于这些函数外延相同，对于每个 $x \in X$，我们都有 $f(x) \sim g(x)$。这里的等价关系是.....的对称传递闭包所定义的等价关系

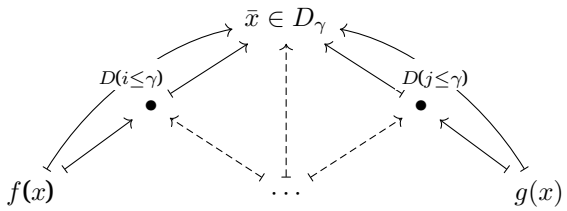
$$(a \in D_i) \sim ([D(i \leq j)](a) \in D_j)$$

定义在 $\coprod_i D_i$上。因此，这相当于说 $(a,i) \sim (b,j) \iff$之间存在如下所示的复杂之字形图，将它们连接起来



因此，对于每个 x，都存在（至少一个）如上所述的有限图，将$f(x)$和 $g(x)$连接起来。所选的每个图只涉及I 中的有限多个 i，而其中的指标少于 X个。因此，把它们全部放在一起，得到的指标总数仍然少于 κ 个。我们将这样的一组指标称为 J，至于具体是哪一组则无关紧要。

取一个大于 J 中所有 j 的 γ，然后再次考虑 D_γ。由于由 $D \restriction (J \cup \{\gamma\})$ 构成的图表是交换的，我们便以一种漂亮的交换方式，将每个 x 的复杂锯齿路径嵌入其中:



因此，在这个特定的D_γ中， $g(x)$ 和 $f(x)$ 会同时对每个 x 进行等同。特别地，我们只需令 f 为将 x 映射到 $\bar{x}$ 的态射，而这

与 $\bar{g}$ ——执行相同操作——一致。但是

$$\begin{aligned}\mathbf{hom}(X, D(j \leq \gamma))(g) &= [D(g \leq \gamma)] \circ g \\ &= \bar{g} \\ &= \bar{f} \\ &= [D(i \leq \gamma)] \circ f \\ &= \mathbf{hom}(X, D(i \leq \gamma))(f)\end{aligned}$$

因此，我们有一条连接这些箭头的杂乱之字形链（这次是在集合范畴 Set 中），所以在余极限中它们实际上是相同的：

$$[\![(f, i)]\!] = [\![(g, j)]\!]$$

这正是我们着手要证明的内容。 □

定理 4.1（$|X| < \kappa$ 蕴含 κ-紧性）：鉴于上述引理，
这一点显而易见。

4.2 可及性与可呈现性

定理 4.2（$\mathscr{Q}$-集合范畴确实是 κ-可达的）："显然"。

证明。毫不意外地，若取一个 Y 某个 $\mathscr{Q}$-集合，并取 $\mathscr{P}^{<\kappa}(|Y|)$ 的包含偏序集，则由于正则性，它总是 κ-有向的。

更准确地说，Y 的那些"小"部分会被映射到……它们自身，而 δ 由限制给出。显然，这个图表的余极限是 Y：

取一个 $y \in Y$，它对应于一个等价类，其中包含它自身的无数个副本，只是每个副本都带有一个标签，标明了哪个子集为它在不交并中贡献了成员资格。

取一对 y、y'。由于 δ 在子集上的作用由限制给出，它们对应等价类的 δ 就只是它们的 δ。因此，显然这个余极限同构于 Y。 □

定理 4.3（局部可呈示性）：
既然我们已经知道 $\mathscr{Q}$-集合范畴是一个余完备范畴，就实际上已经证明了它是局部可呈示的。因为可及余完备范畴必定是局部可呈示的。

5 幺半结构

由于前一节构造了极限，我们已经知道 $\mathscr{Q}$-集合范畴具有一种"合理"的幺半范畴结构。这个积，

然而，通常并不存在与之对应的指数对象：如果存在，$\times\ X$ 就会是余完备的。回顾范畴积的构造：

$$X \times Y = \{(x, y) \mid \mathrm{E}_X\ x = \mathrm{E}_Y\ y\}$$

其中 $\delta((x, y), (a, b)) = \delta_X(x, a) \wedge \delta(y, b)$。由于余等化子与取上确界有关，因此积余完备意味着类似这样的条件必须成立：

$$a \wedge \bigvee_i b_i = \bigvee_i a \wedge b_i$$

这会使 $\mathscr{Q}$ 的底层格成为一个 locale——当然，这并不能强制推出 $\otimes = \wedge$。

于是问题来了：在 $\mathscr{Q}$-集合范畴上，是否存在自然定义的幺半闭（且半笛卡尔）范畴结构？这些不同结构之间又有何关联？我们提出了若干此类结构，并将它们按照与 $\otimes$ 相关的幺半积层级排列。

从积的构造中，我们可以发现两个扩展点：可以更改 δ，使其使用 $\otimes$ 而非 $\wedge$；也可以使用 E_X 与 E_Y 之间的其他关系 $\sim$，而非 $=$。前者我们总是采用；后者则需要仔细考量，以确保仍能满足理想的范畴性质。

定义 5.1（局部格同余）：
局部格同余是 locale 上的一种等价关系，满足

$$[\forall i \in I : a \sim b_i] \implies a \sim \bigvee_{i \in I} b_i$$

$$[a \sim b, a \sim c] \implies [a \sim (b \wedge c)]$$

对于量子格 $\mathscr{Q}$，若其幂等元的 locale 上存在这样的同余，我们称之为“ $\mathscr{Q}$ 上的局部格同余”。

定义 5.2（同余张量）：
我们的张量来自 $\mathscr{Q}$ 上的局部格同余。也就是说，取一个这样的同余 $\sim$，我们定义运算

$$X \otimes Y = \{(x, y) \mid \mathrm{E}_X\ x \sim \mathrm{E}_Y\ y\}$$

$$\delta((x, y), (a, b)) = \delta_X(x, a) \otimes \delta(y, b)$$

我们还应定义它在态射上的作用：将 $(f :\ X \to Y,\ g : A \to B)$ 映射为

$$(x, a) \xmapsto{f \otimes g} (f(x), g(a))$$

函子性是显而易见的。

我们断言，上述内容显然定义了一个函子；它实际上是结合的和交换的，是半笛卡尔的、余完备的，并且具有一个单位元。我们将首先给出单位元的定义，然后为这些断言给出相应的证明。

定义 5.3（同余张量单位元）：
给定上述 $\sim$，它在 $\mathrm{E}\,\mathscr{Q}$ 上定义了等价类，并且由于 $\sim$ 在上确界下封闭：

$$a \sim \sup [\![a]\!]$$

因此，集合范畴 $\mathrm{E}\,\mathscr{Q}$ 与下列正则子终对象存在双射，该子终对象由

$$\{\sup [\![a]\!] \mid a \in \mathrm{E}\,\mathscr{Q}\}$$

这就是我们取作 $\mathbf{1}$ 的对象——即 $\otimes$ 所声称的单位元。

注 5.1：
本节中，出于记号上的考虑，我们将使用 $\otimes$ 作为函子来表示一个一般的同余张量，它来自某个固定但一般的 $\sim$。在必要或方便时，我们可以指定关系以消除歧义。不过，后文中我们将用 $\otimes$ 指代由 $a \sim b \iff a = b$ 给出的最小张量。类似地，我们将用符号 $\boxtimes$ 指代由混沌关系给出的最大张量。

引理 5.1（$\otimes$ 是交换的）：

证明。由于 $\otimes\colon \mathscr{Q} \times \mathscr{Q} \to \mathscr{Q}$——即量子格上的实际代数运算——被视为交换的，而范围上的纤维化基于对称关系，因此显然它是交换的。 □

引理 5.2（$\otimes$ 具有结合性）：

证明。结合性有一个典范同构值得考虑——如果在集合范畴中遇到这个问题，我们也会采用这种做法：$(a,(b,c)) \mapsto ((a,b),c)$。我们应当证明这是一个同构，而不只是底层集合之间的函数。只要注意到

$$(a,(b,c)) \in A \otimes (B \otimes C) \iff \mathrm{E}\,a \sim \mathrm{E}\,b \sim \mathrm{E}\,c \iff ((a,b),c) \in (A \otimes B) \otimes C$$

我们使用 $\wedge$-同余来证明这一点：

$$\begin{aligned}(a,(b,c)) \in A \otimes (B \otimes C) &\implies [\mathrm{E}\,b \sim \mathrm{E}\,c] \text{ and } [\mathrm{E}\,a \sim \mathrm{E}\,b \otimes \mathrm{E}\,c] \\ &\implies [\mathrm{E}\,b \sim \mathrm{E}\,b \otimes \mathrm{E}\,c] \text{ and } [\mathrm{E}\,a \sim \mathrm{E}\,b \otimes \mathrm{E}\,c] \\ &\implies [\mathrm{E}\,a \sim \mathrm{E}\,b \sim \mathrm{E}\,c]\end{aligned}$$

显然，经过相应的调整，可以证明 $((a,b),c) \in (A \otimes B) \otimes C$ 也同样成立——这也可以看作上述结论与交换性的推论。显然，如果范围等价链成立，那么就可以用任一形式构造三元组，因此逻辑等价也成立。

我们已经证明，显然的结合子实际上是一个函数；但由于它显然是一个双射，并且由于 $\otimes$ 作为 $\mathscr{Q}$ 运算的结合性而保持δ，它也必然是一个同构。

我们将上述结合子称为“α”。不难看出，α 是自然的，并且确实满足五边形恒等式。对于持怀疑态度的读者，可以简要说明如下：映回 Set 的遗忘函子不会使原本不具备交换性的图表变成交换图，而我们的五边形恒等式在遗忘函子下的像，是集合中一个交换图的限制（集合论笛卡尔积的五边形恒等式）。

□

引理 5.3（$\otimes$ 以 1 为单位元）：

证明。我们没有给出 1 的 δ，而是在说它是一个正则子终对象时将其隐含了——这意味着它是 $\mathrm{E}Q$ 的一个子集，其中 δ 定义为 $\wedge$。这足以说明它确实是一个 $\mathscr{Q}$-集合。

现在假设我们有某个 $\mathscr{Q}$-集合 X，并来考察它与 1 的积：

$$X \otimes 1 = \{(x, \sup [\![e]\!]) \mid e \in \mathrm{E}\,\mathscr{Q},\ \mathrm{E}_X\, x \sim \mathrm{E}_1 \sup [\![e]\!]\}$$

因此，我们知道 $\mathrm{E}_X\, x \sim e$ 当且仅当 $(x, \sup [\![e]\!]) \in X \otimes 1$。由于 $\sim$具有对称性，可知唯一可能与 x 配对的元素是 $\sup [\![\mathrm{E}\ x]\!]$。因此，$|X|$ 与 $|X \otimes 1|$之间存在双射。这个双射自然地保持 δ:

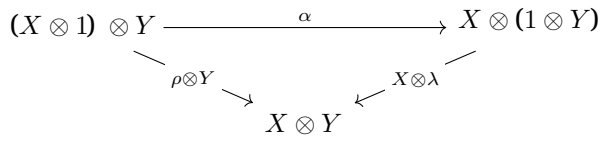
$$\begin{aligned}
\delta(x,y) &= \delta(x,y) \otimes \mathrm{E}\,x \otimes \mathrm{E}\,y \\
&= \delta(x,y) \otimes \mathrm{E}\,x \otimes \mathrm{E}\,y \otimes \sup [\![\mathrm{E}\,x]\!] \otimes \sup [\![\mathrm{E}\,y]\!] \\
&= \delta(x,y) \otimes \sup [\![\mathrm{E}\,x]\!] \otimes \sup [\![\mathrm{E}\,y]\!] \\
&= \delta(x,y) \otimes \delta_1(\sup [\![\mathrm{E}\,x]\!], \sup [\![\mathrm{E}\,y]\!]) \\
&= \delta((x, \sup [\![\mathrm{E}\,x]\!]), (y, \sup [\![\mathrm{E}\,y]\!]))
\end{aligned}$$

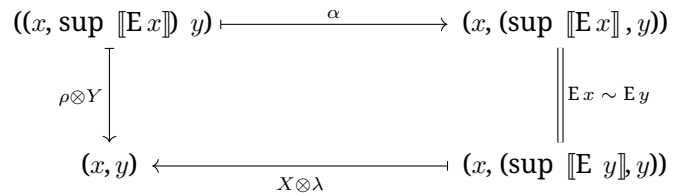
有投影 $X \otimes 1$、$1 \otimes X \to X$，它们通过遗忘第二坐标来定义（或者说，直接取我们上面建立的双射的逆）。它们将成为我们的单位子：态射 ρ：$X \otimes 1 \to X$ 和λ：$1 \otimes X \to X$ 显然都关于 X 自然，这里就不花时间证明了。

□

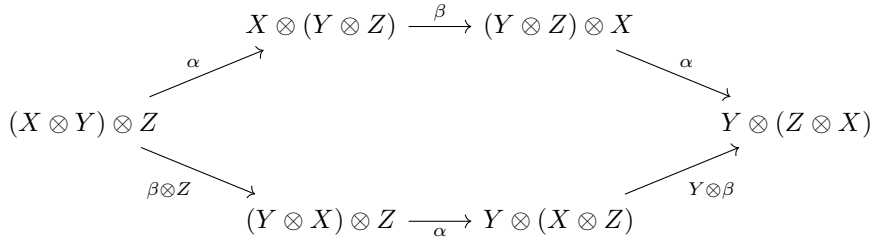
定理 5.1（($\mathscr{Q}$-集合范畴 $\otimes$,1) 是一个对称幺半范畴）：鉴于我们已经确立的结果，我们需要证明结合子和单位子满足三角恒等式，并且存在一个满足六边形恒等式之一及对称性条件的交换。

证明。我们通过沿路径追踪一个元素来证明单位元子-结合子三角恒等式，并注意到 $\mathsf{E}(x, \sup\ [\![\mathsf{E}\ x]\!]) = \mathsf{E}\ x$，因此 $\mathsf{E}\, x \sim \mathsf{E}\ y$。





这里的交换很简单：$(x, y) \mapsto (y, x)$，它可以构造为$\sim$，是对称的。此外，它显然保持 δ，且是双射，因此是一个同构。它对 X 和 Y显然是自然的；将 X 与 Y互换，反之亦然，显然表明对称性条件成立。因此，剩下的就是证明六边形交换恒等式。现在，我们先给这个交换命名：β：$X \otimes Y \to Y \otimes Y$:



这里邀请读者沿着那些路径追踪一个元素的轨道，没有陷阱——我们保证。

□

定理 5.2（$\otimes$ 在任一变量中都是余完备的）：

证明。直接证明可能很费力，因此我们选择分两步进行：证明它保留余积，以及证明它保留余等化子。由于所有余极限都是余积的余等化子，同时保留二者就意味着保留所有余极限。

余积保持性 取 X_i 对于 $i \in I$ 一个由 $\mathcal{2}$-集合构成的指标集。我们可以考察 $(\coprod_i X_i) \otimes Y$，其元素为

$$((x, i), y)\ x \in X_i \text{ st. } \mathrm{E}_i\, x \sim y$$

考察 $\coprod_i (X_i \otimes Y)$ 的元素可得

$$((x,y),i)\ x \in X_i \text{ st. } \mathrm{E}_i\, x \sim y$$

所以这只不过是打乱了标签的顺序，用来说明 x 的这个实例属于哪个索引。完全无关紧要。它们的 δ也同样相似：

$$\begin{aligned}\delta(((x,i),y),((x',i'),y')) &= \delta((x,i),(x',i')) \otimes \delta(y,y') \\ &= \begin{cases}\delta(y,y') \otimes \delta_i(x,x'), & i = i', \\ \delta(y,y') \otimes \bot, & i \neq i'.\end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta(((x,y),i),((x',y'),i')) &= \begin{cases}\delta_{X_i \otimes Y}((x,y),(x',y')), & i = i', \\ \bot, & i \neq i'.\end{cases} \\ &= \begin{cases}\delta_i(x,x') \otimes \delta(y,y') & i = i', \\ \bot, & i \neq i'.\end{cases}\end{aligned}$$

由于 $\bot$ 是吸收元，它们全都相同。

余等化子保持性 取 f_i ： 对于一对固定的 A 和 B，令 $A \to B$ ，我们来考虑余等化子

$$A \underset{f_j}{\overset{f_i}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{[\![_]\!]} C$$

如我们所知，它由以下关系的自反传递闭包的商给出：

$$f_i(a) \approx f_j(a)$$

因此，考虑 $X \otimes f_i$： $X \otimes A \to X \otimes B$。首先注意，余等化子中的一个元素必定是某个 $[\![(x,b)]\!]_{\approx'}$ ，其中 $\approx'$ 由以下内容生成：

$$(X \otimes f_i)(x,a) = (x, f_i(a)) \approx' (x, f_j(a)) = (X \otimes f_j)(x,a)$$

因此显然（因为整行中的 x 都相同，而且 $\approx'$ 由上述条件自由生成），按照上述定义的关系形成的等价类中，每个成员的 x 必定且只能相同。

考虑到第二坐标上的投影，即 $\pi_B\, [\![(x,b)]\!]$ 作为 B 的子集。显然，在这样的集合中，所有 b' 都满足 $b' \approx b$ ——这是由定义决定的。同样，$\mathrm{E}\ b' = \mathrm{E}\, b$ 也成立，因为等价关系要求它们来自同一点，只是路径可能不同且呈之字形（不过这无关紧要，因为范围会保持不变）。

由于更广的子集（即等价类$[\![b]\!]_{\approx}$）也同样成立，因此我们可以有把握地说，$\mathrm{E}\, x \sim \mathrm{E}\ [\![b]\!]_{\approx}$。所以，我们可以放心地提取

每个等价类 $[\![(x,b)]\!]$ 中的 X 分量，并得到一个元素 $(x,[\![b]\!]_{\approx}) \in X \otimes C$。

类似地，任何这样的元素必然满足：对于每个 $b' \in [\![b]\!]_{\approx}$，我们都可以构造 (x,b')，因此它来自一个元素 $[\![(x,b)]\!]_{\approx'}$，构造方式如上所述。我们已证明这个满射显然也是单射。因此，要证明它是同构，我们只需证明 δ-保持性。

$$\begin{aligned}
\delta((x,[\![b]\!]),(y,[\![\beta]\!])) &= \delta(x,y) \otimes \delta([\![b]\!],[\![\beta]\!]) \\
&= \delta(x,y) \otimes \bigvee_{\substack{u\in[\![b]\!] \\ v\in[\![\beta]\!]}} \delta(u,v) \\
&= \bigvee_{\substack{u\in[\![b]\!] \\ v\in[\![\beta]\!]}} \delta(x,y) \otimes \delta(u,v) \\
&= \bigvee_{\substack{u\in[\![b]\!] \\ v\in[\![\beta]\!]}} \delta((x,u),(y,v)) \\
&= \delta([\![(x,u)]\!],[\![(y,v)]\!])
\end{aligned}$$

□

定理 5.3（($\mathcal{Q}$-集合范畴 $\otimes$) 是幺半闭的）：

证明。 $X \otimes _$ 是局部可呈范畴上的余完备自函子。 □

5.1 形式化其层级

~如前所见，等价关系 $\sim$ 会产生一个张量 $\otimes$，而我们此前一直忽略了标记它所源自的关系。由于关系按包含关系（因而也按蕴涵关系）排序，若某种类似的层级不将它们的张量衍生物联系起来，倒显得奇怪。

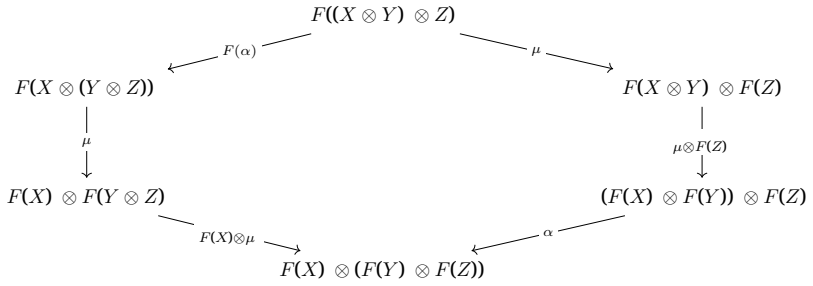
为此，我们引入了一种称为“translax”的幺半函子的幺半范畴间态射概念——它们既不是懈函子，也不是反懈函子，但确实构成一个 2-范畴，其对象为幺半范畴。

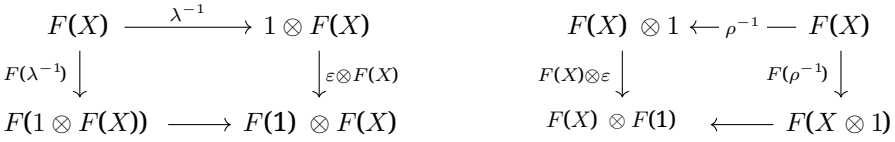
定义 5.4（反向幺半函子）：
粗略来说，反向幺半函子类似于幺半函子，但与幺半积一侧相关联的单位元箭头方向相反（因此称为“反向”）。

更正式地说，给定幺半范畴 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$，幺半函子 $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 是一个函子，附带某种张量“协变”变换和一个满足某些相干条件的“逆变”单位映射。也就是说，它是底层范畴之间的一个函子 F，并且

$$\mu : F(_ \otimes_{\mathscr{A}} _) \to F(_) \otimes_{\mathscr{B}} F(_)$$
$$\varepsilon : 1_{\mathscr{B}} \to F(1_{\mathscr{A}})$$

令人满意





定理 5.4:
显然的复合运算使其构成一个范畴，并具有自然恒等映射。

证明。 □

~我们现在断言，事实上，我们的构造 $\sim \mapsto \otimes$ 实际上是一个函子，它从 E 上局部格同余的格 $\mathscr{Q}$ 映射到由幺半范畴及其间的平移弱函子构成的 2-范畴。在我们的情形中，所涉及的平移弱函子的所有分量都是包含映射——正则单态射。

引理 5.4（单位包含）：
假设 $\sim \Longrightarrow \approx$，存在一个正则单态 ε： $1_{\approx} \to 1_{\sim}$，它是关于 $\leq$ 函子性给出的。

证明。取一个元素 $b = \sup [\![b]\!]_{\approx}$，由于 $a \sim b \implies a \approx b$，我们有 b 也是 $\sup [\![b]\!]_{\sim}$。这个简单的观察表明，较宽松的等价关系将全体性划分为更少的等价类；这也意味着，这些等价类的选定代表元将在细化我们所用等价关系的等价关系中存在。

因此，存在一个从较大张量的单位元到较小张量的单位元的包含映射。显然，这在（反变）函子性意义下成立，因为它们都只是包含映射。 □

引理 5.5（乘积包含）：
在 $\mathscr{Q}$ 上的局部格同余集合范畴上，存在一个自然变换的函子性指派。

证明。由于幺半积是通过集合描述定义的，因此显然

$$[\sim \Longrightarrow \approx] \implies [(x,y) \in X \mathbin{\tilde{\otimes}} Y \implies (x,y) \in X \mathbin{\tilde{\tilde{\otimes}}} Y]$$

因此，我们得到映射——它们在 X 和 Y 上显然是自然的——并且是“函子性地”给出的。也就是说：如果我们取函子范畴 $\mathscr{Q}$-集合范畴 $\times\mathscr{Q}$-集合范畴 $\to$ $\mathscr{Q}$-集合范畴以及它们之间的自然变换，那么将 $\sim$ 映射到 $\otimes$、并将 $\sim \leq \approx$ 映射到 $\otimes \hookrightarrow \otimes$ 的映射$\sim$ $\sim$ $\approx$显然是函子的，因为这些映射只是包含映射。

□

定理 5.5：
存在一个函子，从 $\mathscr{Q}$ 上局部格同余的蕴涵范畴到带有平移弱函子的幺半范畴之 2-范畴。该函子将 $\sim$ 映射为其对应的张量积。

证明。我们已经知道，乘积包含映射是适当类型的自然变换，并且函子性地依赖于 $\sim$。我们也知道，单位包含映射关于 $\sim$具有反变函子性。因此，显而易见的选择是 F 为 $\mathrm{id}_{\mathscr{Q}\text{-}\mathbf{Set}}$。接下来要证明的是，上述选择共同构成一个平移弱函子。

然而，这项验证读起来相当枯燥，从我们的笔记中转录出来也很乏味，因此我们将省略，因为它相当简单。 □

6 基变换

量子格之间的态射有许多可能的定义。最基本且勉强有用的定义是同时为序态射和半群态射。此类态射有很多例子，例如子量子格包含映射和投影。

存在非平凡的此类态射，例如当 $\mathscr{Q}$ 是半笛卡尔且交换的时，可以构造

$$q \mapsto q^- = \max\{e \in \mathrm{E}\, Q \mid e \preceq q\}$$

它恰好是从量子格中的幂等元到量子格的包含映射的右伴随。这意味着，由此类态射产生的关系会关联局部格集（它们与拓扑斯相关）和我们的 $\mathscr{Q}$-集。因此，目前让我们来探讨这些简单的态射，它们不过是保持积的非递减函数，以及由此产生的显然函子。

定义 6.1：
给定 $f\colon \mathscr{P} \to \mathscr{Q}$，定义 $f_*\colon$ $\mathscr{P}$-集合 $\to$ $\mathscr{Q}$-集合为如下函子

$$f_*(X, \delta) = (X, f \circ \delta)$$

其在态射上的作用是平凡的。按定义，这显然保持恒等态射。此外，基本上可以立即看出：如果 $(X, f \circ \delta)$ 总是一个 $\mathscr{Q}$-集，只要 (X, δ) 是一个 $\mathscr{P}$-集，那么该作用就是函子性的：毕竟，我们只是在复合函数。

要看清剩下的断言，只需认识到，所有 $\mathscr{Q}$-集合范畴公理要么显然成立（对称性），要么取决于 $\leq$ 和 $\otimes$ 得以保持。

参考文献

[1] Judit Mendoza Aguilar、M. Victoria Reyes S´anchez 和 Alain Verschoren。“Q-位点上的层与层化”。载于：Indagationes Mathematicae 19.4（2008），第 493–506 页。[2] Jos´eGoudet Alvim。《局部量子化量子幺半群》。https://www.linux.ime.usp.br/~josealvim/ blog/p

作者博客上的非正式发表。2021年12月。[3] Alvim, J. G、Mendes, C. de A. 和 Mariano, H. L.《$\mathcal{Q}$-集合与朋友：范畴构造及其性质》。2023年。[4] Alvim, J. G、Mendes, C. de A. 和 Mariano, H. L.《$\mathcal{Q}$-集合与朋友：关于单点对象与粘合完备性》。2023年。[5] F. Borceux 和 G. van den Bossche。《量子格及其层》。载于：Order 3（1986），第61–87页。[6] Francis Borceux。《范畴代数手册：第3卷，层论》。数学及其应用百科全书。剑桥：剑桥大学出版社，1994年。[7] Marcelo E Coniglio 和 Francisco Miraglia。《非交换拓扑与量子格》。载于：Studia Logica 65.2（2000），第223–236页。[8] A. Dimca。《拓扑学中的层》。Universitext。施普林格·柏林·海德堡，2004年。ISBN：9783540206651。URL：https://books.google.com.br/books?id=xiZgzmXVy9AC。[9] Michael P Fourman 和 Dana S Scott。《层与逻辑》。载于《层的应用》。施普林格，1979年，第302–401页。[10] Alexander Grothendieck。《概形的托扑斯理论与上同调（SGA4）》。载于：数学讲义269（1963），第299–519页。[11] Hans Heymans 和 Isar Stubbe。《富化范畴代数关系范畴的 Grothendieck 量子范》。载于：比利时数学学会公报—Simon Stevin 19.5（2012），第859–888页。[12] Ulrich H¨ohle。《幺半闭范畴、弱拓扑斯与广义逻辑》。载于：模糊集与系统 42.1（1991）。模糊集的数学方面，第15–35页。ISSN：0165-0114。DOI：https://doi.org/10.1016/0165-0114(91)90086-6

.

URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0165011491900866.[13] Masaki Kashiwara 和 Pierre Schapira。《流形上的层：附简史》。《层理论的开端》。作者：Christian Houzel。第 292 卷。施普林格科学与商业媒体，2013 年。[14] Saunders MacLane 和 Ieke Moerdijk。《几何与逻辑中的层：拓扑斯理论初步》。Universitext。纽约：施普林格，1992 年。[15] Francisco Miraglia 和 Ugo Solitro。“右侧幂等量子格上的层”。载于：IGPL逻辑期刊 6.4（1998），第 545–600 页。[16] Chris Mulvey。“J. 1986”。载于：巴勒莫数学研讨会报告增刊，第 II 辑 12（），第 99–104 页。

[17] nLab 量子格词条。https://ncatlab.org/nlab/show/quantale。访问日期：2022-10-25。[18] Pedro Resende。“群胚层作为量子幺半群层”。载于：纯粹与应用代数杂志 216.1（2012），第 41–70 页。[19] David Reyes 和 Pedro H. Zambrano。“余量子幺半群值逻辑”。载于：arxiv 预印本，https://arxiv.org/abs/2102.06067（2021）。[20] K.I. Rosenthal。《量子幺半群及其应用》。Pitman 数学研究笔记丛书。朗文科学与技术出版社，1990 年。ISBN：9780582064232。URL：https://books.google.com.br/books?id=PrkrAAAAYAAJ。[21] Ana Luiza Ten´orio、Caio de Andrade Mendes 和 Hugo Luiz Mariano。“引入交换半笛卡尔量子幺半群上的层”。载于：arXiv 预印本 arXiv:2204.08351（2022）。[22] R. F. C. Walters。“层与柯西完备范畴”。载于：《拓扑学与微分几何范畴论笔记》22.3（1981），第 283–286 页。[23] David N. Yetter。“量子格与（非交换）线性逻辑”。载于：《符号逻辑杂志》55.1（1990），第 41–64 页。DOI：10.2307/2274953。