arXiv:2302.03125v1 [math.PR] 6 Feb 2023

关于振荡粘性布朗运动

Wajdi Touhami

突尼斯埃尔马纳尔大学，高等医疗技术学院，Dr. Zouhair Essafi 街 9 号，1006 突尼斯市，突尼斯 电子邮箱：wajdi.touhami@istmt.utm.tn

摘要

以布朗运动为基础，我们通过结合粘滞性与振荡性质，定义并研究了一种新型扩散过程。文中给出了相应的随机微分方程、预解式和半群。此外，还明确求得了该扩散过程的位置、局部时和占用时间的三元密度。进一步地，我们构造了两个带漂移且经过缩放的布朗运动，使它们之差在乘以一个常数之前为振荡粘性布朗运动。

1 引言

设 $B=(B_t,t\geq 0)$ 为从 $x\in\mathbb{R}$ 出发的布朗运动，定义在满足通常条件的滤过概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},P)$ 上。令 σ_+、σ_-、θ 为正数，并令 m 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的局部有限严格正测度，其形式为

$$m(dy)=(\frac{1}{\sigma_-^2}1_{\{y<0\}}+\frac{1}{\sigma_+^2}1_{\{y\geq 0\}})dy+\frac{1}{\theta}\delta_0(dy)$$

定义可加泛函 $(\alpha_t,t\geq 0)$ 为 $\alpha_t=\int_{\mathbb{R}}L_t^y(B)\,m(dy)$，其中 $L_t^y(B)$ 表示 B 在 $y\in\mathbb{R}$ 处的对称局部时。考虑由 B 按如下方式得到的过程 $X=(X_t,t\geq 0)$

$$X_t=B_{\alpha^{-1}},\qquad t\geq 0$$

我们称 X 为参数为 σ_+、σ_-、θ 的振荡粘性布朗运动，并记为 OSBM(σ_+,σ_-, θ)。我们的定义正是 Itˆo 和 McKean 在 [12] 中用于从布朗运动构造具有速度测度 m 的扩散过程的方法。根据占据时间公式，α 可写为

$$\alpha_t=\frac{t}{\sigma_-^2}+(\frac{1}{\sigma_+^2}-\frac{1}{\sigma_-^2})\int_0^t 1_{\{B_s\geq 0\}}ds+\frac{1}{\theta}L_t(B),\qquad t\geq 0 \tag{1}$$

时间变换 α^{-1} 的解释是：当 B 为正或负时，分别按 σ_+^2 或 σ_-^2 缩放时间；当布朗运动处于零点时，则使其速度减慢。在众所周知的特殊情形 $\sigma_+=\sigma_-=1$ 下，X 显然是粘性布朗运动。许多作者研究了这一情形，例如参见 [15, 10, 11, 6, 3, 4, 2]。另一个值得关注的情形是取 $\sigma_+=1$ 并令 σ_- 趋于无穷，此时得到反射（单侧）粘性布朗运动。这种扩散过程已在多篇论文中讨论 [9, 20, 21, 22, 6, 16, 8]。另一方面，若 θ 趋于无穷，则 X 变为振荡布朗运动，该过程在 [14] 中定义并得到研究。设 $W=(W_t,t\geq 0)$ 为标准布朗运动。本文的首要目标是证明

X 是随机微分方程的唯一弱解

$$\begin{cases} dX_t = (\sigma_- 1_{\{X_s<0\}} + \sigma_+ 1_{\{X_s>0\}})\, dW_s \\ dL_t(X) = \theta 1_{\{X_s=0\}}\, ds \\ X_0 = x \end{cases} \tag{2}$$

其中 $L_t(X)$是 X在零点处的对称局部时。方程 (2) 是噪声系数不连续且在零点具有黏滞边界行为的随机微分方程的一个特例。接下来我们证明，X 是某个适定鞅问题的解。基于斯科罗霍德表示，并采用 [20], 中的证明方法，我们计算 X 的预解式，并由此推导出其半群。本文的另一个目标是通过调整时间变换论证，推广关于黏滞耦合的结果（[10], 第 31 页）。具体而言，我们针对每个$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$，构造一对$(X, X')$扩散过程，使其满足以下随机微分问题

$$\begin{cases} X \text{ is a Brownian motion with drift } \beta_1 \text{ and scaling } \sigma_- \text{ starting from } x_1 \\ X' \text{ is a Brownian motion with drift } \beta_2 \text{ and scaling } \sigma_- \text{ starting from } x_2 \\ \frac{X-X'}{\sqrt{2}} \text{ is an OSBM } (\sigma_+, \sigma_-, \sqrt{2}\theta) \end{cases} \tag{3}$$

其中$\sigma_+ < \sqrt{2}\sigma_-$ 和 β_1、$\beta_2 \in \mathbb{R}$ 满足 $|\beta_1 - \beta_2| < 2\theta$。我们还证明，$(X, X')$的概率分布由此唯一确定。从另一种意义上说， [5]研究了两个多维非退化伊藤过程的黏滞耦合。我们研究的最终目标是求出三元组$(X_t, L_t(X)\ \Gamma_t(X))$的联合密度，其中 $\Gamma_t(X)$是 X的占用时间，由 $\Gamma_t(X) = \int_0^t 1_{\{X_s \geq 0\}} ds$定义。 [13] 首次研究了布朗运动的这种三元密度， [1] 研究了偏斜布朗运动的情形， [19] 则研究了偏斜粘滞布朗运动的情形。此外，我们还推导出 X的占用时间分布。关于扩散过程占用时间的研究，读者可参阅多篇论文，见 [14, 1, 4, 19, 18]。

2 随机微分方程、半群与黏性耦合:

定理 2.1. 随机微分方程 (2) 存在唯一的弱解，它正是 OSBM$(\sigma_+, \sigma_-, \theta)$。

证明. 考虑可加泛函 $\alpha_t = \int_{\mathbb{R}} L_t^y(B)\, m(dy)$。由占据时间公式，对于每个 $t \geq 0$，我们有 $\alpha_t = \int_0^t (\sigma_-^{-2} 1_{\{B_s<0\}} + \sigma_+^{-2} 1_{\{B_s \geq 0\}}) ds + 1/\theta L_t(B)$。因此 $t \to \alpha_t$ 连续且严格递增。事实是

$$min(\sigma_-^{-2}, \sigma_+^{-2})\, t + 1/\theta L_t(B) \leq \alpha_t, \qquad t \geq 0$$

由此得到 $\alpha_\infty = \infty$。因此，其逆过程

$$A_t = \alpha_t^{-1} \tag{4}$$

对所有 $t \geq 0$，它都是有限的。由于 $\alpha = (\alpha_t)$ 适应于 $(\mathcal{F}_t)$，因此每个 A_t 都是相对于 $(\mathcal{F}_t)$ 的停时；因此，$(A_t, t \geq 0)$ 定义了相对于 $(\mathcal{F}_t)$ 的时间变换。考虑由 $X_t = B_{A_t}$ 定义的时间变换过程 X，其中对每个 $t \geq 0$ 都成立。局部时的一个基本性质给出：对每个 $t > 0$， $L_t(X) = L_{A_t}(B)$。另一方面，由于布朗运动 B 没有粘滞点，即 $\int_0^t 1_{\{B_s=0\}}\, ds = 0$，因此可得

$$\int_0^t 1_{\{X_s=0\}}\, ds = \int_0^{A_t} 1_{\{B_s=0\}}\, d\alpha_s = \frac{1}{\theta} \int_0^t 1_{\{X_s=0\}}\, dL_s(X) = \frac{1}{\theta} L_t(X)$$

其中，最后一个等式成立是因为映射 $s \to L_s(X)$ 仅在 $X_s = 0$ 时才递增。另一方面，利用 (1) 可得

$$\begin{aligned}
\Gamma_t(X) &= \int_0^t 1_{\{B_{A_s}>0\}}\, d\alpha_{A_s} + \int_0^t 1_{\{X_s=0\}}\, ds \\
&= \int_0^{A_t} 1_{\{B_s>0\}}\, (\frac{ds}{\sigma_-^2} + (\frac{1}{\sigma_+^2} - \frac{1}{\sigma_-^2}) 1_{\{B_s\geq 0\}} ds + \frac{1}{\theta} dL_s(B)) + \frac{1}{\theta} L_t(X) \\
&= \frac{1}{\sigma_+^2} \int_0^{A_t} 1_{\{B_s\geq 0\}}\, ds + \frac{1}{\theta} L_t(X) \\
&= \frac{1}{\sigma_+^2} \Gamma_{A_t}(B) + \frac{1}{\theta} L_t(X) \qquad (5)
\end{aligned}$$

由 (1)、(4) 和 (5) 得到

$$\begin{aligned}
A_t &= \sigma_-^2 t + (\sigma_+^2 - \sigma_-^2)\Gamma_t(X) - \frac{\sigma_+^2}{\theta} L_t(X) \qquad (6) \\
&= \sigma_-^2 \int_0^t (1_{\{X_s<0\}} + 1_{\{X_s\geq 0\}})\, ds + (\sigma_+^2 - \sigma_-^2) \int_0^t 1_{\{X_s\geq 0\}}\, ds - \sigma_+^2 \int_0^t 1_{\{X_s=0\}}\, ds \\
&= \int_0^t (\sigma_-^2 1_{\{X_s<0\}} + \sigma_+^2 1_{\{X_s>0\}})\, ds
\end{aligned}$$

注意， X 是连续局部鞅，并且对所有 $t \geq 0$， $< X >_t = A_t$。于是，根据（[17], 命题 V.3.8），存在一个布朗运动 $\{W_t, t \geq 0\}$，使得

$$X_t = X_0 + \int_0^t (\sigma_-^2 1_{\{X_s<0\}} + \sigma_+^2 1_{\{X_s>0\}})^{1/2}\, dW_s = x + \int_0^t (\sigma_-^2 1_{\{X_s<0\}} + \sigma_+^2 1_{\{X_s>0\}})\, dW_s$$

由此便完成了弱存在性的证明。现在我们证明方程 (2) 的依分布唯一性。设 X和 W是 (2) 的解，并令 $A_t = \int_0^t (\sigma_+^2 1_{\{X_s>0\}} + \sigma_-^2 1_{\{X_s<0\}})\, ds$。注意到 $A_\infty = \infty$ 几乎必然成立。事实上，为验证这一点，利用 (1) 并应用 Itô–Tanaka 公式可得 $|X_t| = |x| + M_t + \theta \int_0^\infty 1_{\{X_s=0\}}\, ds$，其中 $M = (M_t, t \geq 0)$ 是连续鞅，且 $< M >_t = A_t \uparrow A_\infty$ 是其 $t \to \infty$。进一步令 $A_t^0 = \sigma_+^2 \int_0^t 1_{\{X_s=0\}}\, ds$，并注意到对 $t \geq 0$，$A_t + A_t^0 = \int_0^t (\sigma_-^2 1_{\{X_s<0\}} + \sigma_+^2 1_{\{X_s\geq 0\}})\, ds$。由此可见，在 $\{A_\infty < \infty\}$ 上，$A_t^0 \uparrow \infty$，因为 $t \to \infty$。但是，在 $\{A_\infty < \infty\}$ 上几乎必然有 $|X_t| = |x| + M_t + \frac{\theta}{\sigma_+^2} A_t^0 \to \infty$，因为 $t \to \infty$；这与 $A_t^0 \uparrow \infty$ 在 $\{A_\infty < \infty\}$ 上成立相矛盾，除非其概率为零。这说明，如所声称的， $A_\infty = \infty$几乎必然成立。由于 $t \to A_t$ 连续且递增，其右逆 $t \to \alpha_t$定义为

$$\alpha_t = \inf\{s \geq 0 : A_s > t\} \qquad (7)$$

对所有 $t \geq 0$ 均有限，并且其自身也满足相同的性质。考虑到 $< X >_t = A_t$，并利用 Dambis-Dubins-Schwartz 定理（[17], 定理 V.1.6），我们断言 $B = (X_{\alpha_t}, t \geq 0)$ 是一个布朗运动，并且

$$L_t(B) = L_{\alpha_t}(X) = \theta \int_0^{\alpha_t} 1_{\{X_s=0\}} ds \qquad (8)$$

因此，由（7）、（8）和（6）可得

$$\begin{aligned}\alpha_t &= \int_0^{\alpha_t} 1_{\{X_s<0\}} ds + \int_0^{\alpha_t} 1_{\{X_s>0\}} ds + \int_0^{\alpha_t} 1_{\{X_s=0\}} ds \\ &= \frac{1}{\sigma_-^2}\int_0^{\alpha_t} (\sigma_-^2 1_{\{X_s<0\}} + \sigma_+^2 1_{\{X_s>0\}})\, ds + \frac{\sigma_-^2-\sigma_+^2}{\sigma_-^2}\int_0^{\alpha_t} 1_{\{X_s>0\}}\, ds + \frac{1}{\theta}L_t(B) \\ &= \frac{t}{\sigma_-^2} + (\frac{1}{\sigma_+^2}-\frac{1}{\sigma_-^2})\big[(\sigma_+^2-\sigma_-^2)\int_0^{\alpha_t} 1_{\{X_s\geq 0\}} ds + \sigma_-^2\int_0^{\alpha_t} 1_{\{X_s\geq 0\}} ds - \sigma_+^2\int_0^{\alpha_t} 1_{\{X_s=0\}} ds\big] \\ &+ \frac{1}{\theta}L_t(B) \\ &= \frac{t}{\sigma_-^2} + (\frac{1}{\sigma_+^2}-\frac{1}{\sigma_-^2})\int_0^{\alpha_t} 1_{\{X_s\geq 0\}}\, dA_s + \frac{1}{\theta}L_t(B) \\ &= \frac{t}{\sigma_-^2} + (\frac{1}{\sigma_+^2}-\frac{1}{\sigma_-^2})\,\Gamma_t(B) + \frac{1}{\theta}L_t(B) \end{aligned} \tag{9}$$

这表明 $t \to \alpha_t$ 严格递增（且连续），因此 $A_t = \alpha_t^{-1}$是 $t \geq 0$的正确逆过程。特别地，可得 $\alpha_{A_t} = t$，从而

$$X_t = X_{\alpha_{A_t}} = B_{A_t} \tag{10}$$

由 (9) 和 (10) 可知， X 是布朗运动 B的一个确定良好的可测泛函。这表明，满足 (4) 的 X 的概率分布唯一确定，从而完成了概率分布唯一性的证明。

□

命题 2.2. 存在一个随机过程 $(X_t, t \geq 0)$，定义在某个概率空间上，并从 $x \in \mathbb{R}$ 出发，使得 X 是连续局部鞅，以下过程也同样是连续局部鞅

$$X_t^2 - \int_0^t (\sigma_-^2 1_{\{X_s<0\}} + \sigma_+^2 1_{\{X_s>0\}})\, ds \tag{11}$$

$$|X_t| - \theta\int_0^{\infty} 1_{\{X_s=0\}}\, ds \tag{12}$$

此外， X 的概率分布唯一确定，且等于从 x出发的 OSBM$(\sigma_+, \sigma_-, \theta)$ 的概率分布。

证明. 设 X是方程 (2) 的一个弱解，从 x出发。则 X是经过时间变换的布朗运动，因此是连续局部鞅。令 $A_t = \int_0^t (\sigma^2{}_- 1_{\{X_s<0\}} + \sigma_+^2 1_{\{X_s>0\}})\, ds$。由于 $< X >_t = A_t$，由 (11) 给出的过程是局部鞅。此外，根据 Itô-Tanaka 公式，对每个 $t \geq 0$

$$|X_t| - \theta\int_0^{\infty} 1_{\{X_s=0\}}\, ds = x + \int_0^{\infty} (\sigma_- 1_{\{X_s<0\}} + \sigma_+ 1_{\{X_s>0\}})\, dW_s$$

由此可得其存在性。现在，设 X 是满足命题条件的随机过程。定义 $\alpha_t = A_t^{-1}$。显然，对于每个 $t \geq 0$, 都有 $< X >_t = A_t$ 和 $L_t(X) = \theta\int_0^{\infty} 1_{\{X_s=0\}} ds$。根据定理 2.1 的证明可知， X 是一个 OSBM$(\sigma_+, \sigma_-, \theta)$。

□

对于 $x \in \mathbb{R}$，我们用 P^x 表示条件概率 $P(\,\cdot\,|X_0 = x)$，用 E^x 表示关于 P^x 的期望。对于 $x,\ y \in \mathbb{R},\ p_t(x,y)$ 表示布朗运动的转移密度。记

$$H_t^0 = \int_0^t 1_{\{X_s=0\}}\, ds,\ H_t^+ = \int_0^t 1_{\{X_s>0\}}\, ds,\ H_t^- = \int_0^t 1_{\{X_s<0\}}\, ds$$

分别由 η_t^0、 η_t^+ 和 η_t^- 表示它们的右逆过程。下面引理的证明可以由 ([4], 引理 1) 的证明稍作改动而得。

引理 2.3. 存在相互独立的布朗运动 $(W_t^+, t \geq 0)$ 和 $(W_t^-, t \geq 0)$，使得

$$X^+_{\eta_t^+} = \sigma_+ W_t^+ + \frac{\theta}{2} H^0_{\eta_t^+}, \quad X^-_{\eta_t^-} = \sigma_- W_t^- + \frac{\theta}{2} H^0_{\eta_t^-}$$

其中

$$H^0_{\eta_t^+} = \frac{2\sigma_+}{\theta} \sup_{s \leq t}(-W_s^+), \quad H^0_{\eta_t^-} = \frac{2\sigma_-}{\theta} \sup_{s \leq t}(-W_s^-)$$

命题 2.4. 设 X 是 OSBM$(\sigma_+, \sigma_-, \theta)$，且 $r = \frac{1}{2}(\sigma_-^{-1} + \sigma_+^{-1})$。则 X 的转移核 $Q_t(x, dy)$ 为

$$Q_t(x, dy) = \begin{cases} \sigma_+^{-2} g(t, \frac{x+y}{\sigma_+}) dy + \theta^{-1} g(t, \frac{x}{\sigma_+}) \delta_0(dy) + p_0(t, x, y) dy \quad \text{if } x, y \geq 0 \\ \sigma_-^{-2} g(t, \frac{x}{\sigma_+} - \frac{y}{\sigma_-}) dy + \theta^{-1} g(t, \frac{x}{\sigma_+}) \delta_0(dy) \quad \text{if } x \geq 0, y < 0 \\ \sigma_-^{-2} g(t, -\frac{x+y}{\sigma_-}) dy + \theta^{-1} g(t, -\frac{x}{\sigma_-}) \delta_0(dy) + p_0(t, x, y) dy \quad \text{if } x, y < 0 \\ \sigma_+^{-2} g(t, -\frac{x}{\sigma_-} + \frac{y}{\sigma_+}) dy + \theta^{-1} g(t, -\frac{x}{\sigma_-}) \delta_0(dy) \quad \text{if } x, y < 0 \end{cases}$$

其中 $p_0(t, x, y) = [p(t\sigma_+^2, x, y) + p(t\sigma_+^2, x, -y)] 1_{\{x,y>0\}} + [p(t\sigma_-^2, x, y) + p(t\sigma_-^2, x, -y)] 1_{\{x,y<0\}}$且

$$g(s, z) = \theta \exp(2r\theta z + \theta^2 r s) \, erfc(\frac{z}{\sqrt{2s}} + r\theta\sqrt{2s}), \quad s \geq 0, z \in \mathbb{R}$$

证明. 我们依据（[20], 命题 13）以及（[4], 引理 2）。设 W 为布朗运动，使得（X, W）是方程 (2) 的解。取相互独立于（X, W）且参数为 λ 的指数分布随机时刻 T_1、T_2 和 T_3，并定义

$$T = \eta^0_{T_1} \wedge \eta^+_{T_2} \wedge \eta^-_{T_3} \tag{13}$$

根据引理 2.3，$\frac{\theta}{2\sigma_+} H^0_{\eta_t^+}$ 和 $\frac{\theta}{2\sigma_-} H^0_{\eta_t^-}$ 分别是相互独立的布朗运动 W^+ 和 W^- 的运行上确界。因此，$H^0_{\eta^+_{T_2}}$ 和 $H^0_{\eta^-_{T_3}}$ 分别服从参数为 $\frac{\theta}{2\sigma_+}\gamma$ 和 $\frac{\theta}{2\sigma_-}\gamma$ 的指数分布，其中 $\gamma = \sqrt{2\lambda}$。注意，T 服从参数为 λ 的指数分布，与 [20] 中给出的情形相同。现在，$X_T = 0$ 当且仅当 $T = \eta^0_{T_1}$，而这只有在 $\eta^0_{T_1} < \eta^+_{T_2} \wedge \eta^-_{T_3}$ 时才可能成立。由于 H^0_t 是右连续且递增的过程，因此不等式 $\eta^0_{T_1} < \eta^+_{T_2} \wedge \eta^-_{T_3}$ 意味着 $T_1 < H^0_{\eta^+_{T_2}} \wedge H^0_{\eta^-_{T_3}}$。于是得到

$$P(X_T = 0) = \frac{\lambda}{\lambda + \gamma r \theta}$$

对于 $X_T > 0$，我们应有 $T = \eta^+_{T_2}$，而这只有在 $H^0_{\eta^+_{T_2}} < T_1 \wedge H^0_{\eta^-_{T_3}}$ 时才可能。注意，$\sigma_+^{-1} X^+_{\eta^+_{T_2}}$ 是反射布朗运动，其关于 $y > 0$ 的概率分布与 $-W^+$ 的运行上确界水平无关，而根据引理 2.3，该水平等于 $H^0_{\eta^+_{T_2}}$。此外，根据引理 2.3，$\sigma_+^{-1} X^+_{\eta^+_{T_2}}$ 还与 $H^0_{\eta^-_{T_3}}$ 独立。因此，$\sigma_+^{-1} X^+_{\eta^+_{T_2}}$ 与

事件（$H^0_{\eta^+_{T_2}} < T_1 \wedge H^0_{\eta^-_{T_3}}$）独立。于是，对于 $y>0$，我们有

$$\begin{aligned} P(X_T \in dy) &= P(\sigma_+^{-1} X^+_{\eta^+_{T_2}} \in dy,\, H^0_{\eta^+_{T_2}} < T_1 \wedge H^0_{\eta^-_{T_3}}) \\ &= P(\sigma_+^{-1} X^+_{\eta^+_{T_2}} \in dy)\, P(A^0_{\eta^+_{T_2}} < T_1 \wedge H^0_{\eta^-_{T_3}}) \\ &= \frac{\gamma}{\sigma_+} \exp(-\frac{\gamma}{\sigma_+} y)\, \frac{\frac{\theta\gamma}{2\sigma_+}}{\lambda + \gamma r \theta} = \frac{\lambda\theta \exp(-\frac{\gamma}{\sigma_+} y)}{\sigma_+^2(\lambda + \gamma r\theta)} \end{aligned}$$

对于 $X_T < 0$，我们应有 $T = \eta^-_{T_3}$，而这只有在 $H^0_{\eta^-_{T_3}} < T_1 \wedge H^0_{\eta^+_{T_2}}$ 时才可能。注意，$\sigma_-^{-1} X^-_{\eta^-_{T_3}}$ 是一个反射布朗运动；出于类似原因，它与事件（$H^0_{\eta^-_{T_3}} < T_1 \wedge H^0_{\eta^+_{T_2}}$）相互独立。类似地，对于 $y<0$，我们有

$$P(X_T \in dy) = \frac{\lambda\theta \exp(-\frac{\gamma}{\sigma_-} y)}{\sigma_-^2(\lambda + \gamma r\theta)}$$

我们令 $\rho = \lambda + \gamma r\theta$。由于对于每个 $\lambda > 0$， $R_\lambda(0, dy) = 1/\lambda\, P(X_T \in dy)$，因此

$$R_\lambda(0,dy) = \frac{\theta}{\sigma_-^2 \rho} \exp(-\frac{\gamma}{\sigma_-} y) dy + \frac{1}{\rho}\delta_0(dy) 1_{\{y<0\}} + \frac{\theta}{\sigma_+^2\rho} \exp(-\frac{\gamma}{\sigma_+} y) dy + \frac{1}{\rho}\delta_0(dy) 1_{\{y\geq 0\}}$$

令 $T_0 = \inf\{s \geq 0 :\ X_s = 0\}$ 为 X 首次到达 0 的时刻，并令 $R^0_\lambda(x, dy)$ 为在 0 处被杀死的振荡布朗运动的转移核，它由下式给出

$$R^0_\lambda(x,dy) = \begin{cases} (\gamma\sigma_+)^{-1}(\exp(-\gamma\sigma_+^{-1}|x-y|) - \exp(-\gamma\sigma_+^{-1}(x+|y|))\, dy, & x \geq 0 \\ (\gamma\sigma_-^{-1})(\exp(-\gamma\sigma_-^{-1}|x-y|) - \exp(-\gamma\sigma_-^{-1}(-x+|y|))\, dy, & x < 0 \end{cases}$$

利用众所周知的首次到达时间公式，并考虑到 X在到达 0 之前表现为振荡布朗运动，我们对所有 $x \in \mathbb{R}$ 得到

$$R_\lambda(x,dy) = R^0_\lambda(x,dy) + E^x(e^{-\lambda T_0})\, R_\lambda(0,dy) \tag{14}$$

注意到（[14], 第 305 页）

$$E^x(e^{-\lambda T_0}) = \exp(-\sqrt{2\lambda}\,\frac{x}{\sigma_-}) 1_{]-\infty,0[}(x) + \exp(-\sqrt{2\lambda}\,\frac{x}{\sigma_+}) 1_{[0,\infty[}(x) \tag{15}$$

因此，（14）结合（15）得出

$$R_\lambda(x,dy) = R^0_\lambda(x,dy) + \begin{cases} \frac{\theta}{\sigma_+^2\rho} \exp\left(-\gamma(\frac{x}{\sigma_+} + \frac{y}{\sigma_+})\right) dy + \frac{1}{\rho}\exp(-\frac{\gamma x}{\sigma_+})\, \delta_0(dy);\ x,y \geq 0 \\ \frac{\theta}{\sigma_-^2\rho} \exp\left(-\gamma(\frac{x}{\sigma_+} - \frac{y}{\sigma_-})\right) dy + \frac{1}{\rho}\exp(-\frac{\gamma x}{\sigma_+})\, \delta_0(dy);\ x \geq 0, y < 0 \\ \frac{\theta}{\sigma_+^2\rho} \exp\left(-\gamma(\frac{y}{\sigma_+} - \frac{x}{\sigma_-})\right) dy + \frac{1}{\rho}\exp(\frac{\gamma x}{\sigma_-})\, \delta_0(dy);\ x < 0, y \geq 0 \\ \frac{\theta}{\sigma_-^2\rho} \exp\left(-\gamma(\frac{x}{\sigma_-} + \frac{y}{\sigma_-})\right) dy + \frac{1}{\rho}\exp(\frac{\gamma x}{\sigma_-})\, \delta_0(dy);\ x,y < 0 \end{cases}$$

利用查表法，我们可以对这些拉普拉斯变换进行反演，从而得到每个 $x, y \in \mathbb{R}$ 对应的转移核 $Q_t(x, dy)$。 □

定理 2.5. 设 $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ 和 $\theta, \sigma_-, \sigma_+ \in \mathbb{R}_+^*$ 满足 $\sigma_+ < \sqrt{2}\sigma_-$ 和 $|\beta_1 - \beta_2| < 2\theta$。那么，对于每个起始点 $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ，都存在一个随机过程 $(X, X') = ((X_t, X_t')\ t \geq 0)$ 满足 (3)。此外，(X, X') 的概率分布是唯一确定的。

证明。考虑如下随机微分方程:

$$\begin{cases} Z_t = \sqrt{2}B_t + \dfrac{\beta_1 - \beta_2}{2\theta} L_t(Z) + (\beta_1 - \beta_2)\left(\dfrac{1}{\sigma_+^2} - \dfrac{1}{\sigma_-^2}\right)\Gamma_t(Z) + \dfrac{\beta_1 - \beta_2}{\sigma_-^2} t \\ Z_0 = x_1 - x_2 \end{cases} \tag{16}$$

其中， $B = (B_t, t \geq 0)$ 是定义在某个滤过概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)\ P)$ 上的标准布朗运动。对所有 $t > 0$, 令

$$M_t = \exp\left(-\frac{\beta_1 - \beta_2}{\sqrt{2}\sigma_-^2} B_t - \frac{(\beta_1 - \beta_2)^2}{4\sigma_-^4} t\right)$$

众所周知，$(M_t, t \geq 0)$ 是一个鞅，因此存在一个定义在 $(\Omega\ \mathcal{F})$ 上的概率测度 P ，使得对所有 $A \in \mathcal{F}_t$

$$\widehat{P}|_{\mathcal{F}_t}(A) = E(M_t\, 1_A)$$

于是，根据吉尔萨诺夫定理，在 P 下，过程 $\widehat{B} = (\widehat{B}_t, t \geq 0)$ 是一个布朗运动，其中 $\widehat{B}_t = B_t + \frac{\beta_1 - \beta_2}{\sqrt{2}\sigma_-^2} t$ 对所有 $t > 0$, 成立。因此，随机微分方程 (16) 变为

$$\begin{cases} Z_t = \sqrt{2}\widehat{B}_t + (\beta_1 - \beta_2)\left(\dfrac{1}{\sigma_+^2} - \dfrac{1}{\sigma_-^2}\right)\Gamma_t(Z) + \dfrac{\beta_1 - \beta_2}{2\theta} L_t(Z) \\ Z_0 = x_1 - x_2 \end{cases} \tag{17}$$

局部时在正标量乘法下的线性性质以及 $|\beta_1 - \beta_2| < 2\theta$ 这一事实，结合 ([7], 第 2.2.1 节)，可知方程 (17) 存在唯一的强解。因此，如果方程 (16) 存在解，则其概率分布是唯一确定的。为证明方程 (16) 存在解，我们可以从方程 (17) 的一个解出发，并反向应用吉尔萨诺夫定理。为证明定理中的存在性部分，令 $Z = (Z_t, t \geq 0)$ 是定义在 $(\Omega\ \mathcal{F}, P)$ 上的方程 (16) 的一个解。根据占据公式， Z 是一个半鞅这一事实推出 $\int_0^t 1_{\{Z_s = 0\}}\, ds = 0$。考虑由 $\alpha = (\alpha_t, t \geq 0)$ 定义的可加泛函

$$\alpha_t = \frac{t}{\sigma_-^2} + \left(\frac{1}{\sigma_+^2} - \frac{1}{\sigma_-^2}\right)\Gamma_t(Z) + \frac{1}{2\theta} L_t(Z)$$

出于与定理 2.1 的证明相同的原因，我们看到 $t \to \alpha_t$ 存在逆过程 $t \to A_t$，其定义为 $A_t = \alpha_t^{-1}$, 且对所有 $t \geq 0$ 都有限。此外，我们有

$$\begin{aligned} A_t &= \sigma_-^2 t + (\sigma_+^2 - \sigma_-^2)\Gamma_t(Z_A) - \frac{\sigma_+^2}{2\theta} L_t(Z_A) && (18) \\ &= \int_0^t (\sigma_-^2 1_{\{Z_{A_s} < 0\}} + \sigma_+^2 1_{\{Z_{A_s} > 0\}})\, ds && (19) \end{aligned}$$

由（18）可写为 $T_t := 2\sigma_-^2 t - A_t = \int_0^t (\sigma_-^2 1_{\{Z_{A_t} < 0\}} + (2\sigma_-^2 - \sigma_+^2) 1_{\{Z_{A_t} \geq 0\}})\ ds + \frac{\sigma_+^2}{2\theta} L_t(Z_A)$。那么，$t \to T_t$ 是连续、严格递增且 $T_\infty = \infty$的，因为 $\sigma_+ < \sqrt{2}\sigma_-$。因此，其逆过程 $t \to \tau_t$ 由 $\tau_t = T_t^{-1}$给出，且对所有 $t \geq 0$均为有限值。定义过程 $Z' = (Z_t', t \geq 0)$如下:

$$Z_t' = \sqrt{2}B_t' + (\beta_1 + \beta_2)\tau_t + x_1 + x_2 \tag{20}$$

其中， $B' = (B'_t, t \geq 0)$是一个与 B 独立、且定义在同一概率空间上的布朗运动。现在令 $X_t = \frac{1}{2}(Z'_{2\sigma_-^2 t - A_t} + Z_{A_t})$和 $X'_t = \frac{1}{2}(Z'_{2\sigma_-^2 t - A_t} - Z_{A_t})$，则

$$X_t = \frac{1}{\sqrt{2}} B'_{2\sigma_-^2 t - A_t} + \frac{1}{\sqrt{2}} B_{A_t} + \beta_1 t + x_1 \quad and \quad X'_t = \frac{1}{\sqrt{2}} B'_{2\sigma_-^2 t - A_t} - \frac{1}{\sqrt{2}} B_{A_t} + \beta_2 t + x_2 \quad (21)$$

令 $(\mathcal{F}_t^B)$ 和 $(\mathcal{F}_t^{B'})$ 分别为由 B 和 B' 生成的滤过，并令 $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{A_t}^B \vee \mathcal{F}_\infty^{B'}$ 和 $\mathcal{H}_t = \mathcal{F}_{2\sigma_-^2 t - A_t}^{B'} \vee \mathcal{F}_\infty^B$。由 B 和 B' 的独立性，依据连续时间变换理论可知， B_{A_t} 是 $\mathcal{G}_t$-鞅，且 $B'_{2\sigma_-^2 t - A_t}$ 是 $\mathcal{H}_t$-鞅。关系式 (21) 告诉我们

$$\mathcal{F}_t^{X,X'} := \sigma(X_s, X'_s; 0 \leq s \leq t) = \sigma(B_{A_s}, B'_{2\sigma_-^2 s - A_s}; 0 \leq s \leq t)$$

由于 $\mathcal{F}^{X,\ X'}_{t} \subset \mathcal{G}_t$ 和 $\mathcal{F}^{X,\ X'}_{t} \subset \mathcal{H}_t$，根据塔式性质，$B_{A_t}$ 和 $B'_{2\sigma_-^2 t - A_t}$ 都是 $\mathcal{F}^{X,\ X'}_{t}$-鞅。因此，过程 $(\frac{1}{\sigma_-}(X_t - \beta_1 t)\ t \geq 0)$ 和 $(\frac{1}{\sigma_-}(X'_t - \beta_2 t)\ t \geq 0)$ 都是 $\mathcal{F}^{X,\ X'}_{t}$-鞅。此外，$< X/\sigma_- >_t = < X'/\sigma_- >_t = t$、$X_0 = x_1$ 和 $X'_0 = x_2$。因此， X 是一个漂移为 β_1 、缩放系数为 σ_- 、初值为 x_1 的布朗运动，而 X' 是一个漂移为 β_2 、缩放系数为 σ_- 、初值为 x_2 的布朗运动；二者共享滤过 $(\mathcal{F}^{X,\ X'}_{t})$。接下来我们观察到

$$X_t - X'_t = Z_{A_t}, \quad t \geq 0 \quad (22)$$

由田中公式易于证明， $L_t(X - X') = L_{A_t}(Z)$。利用 (18) 和 (22)， 我们得到 (19)

$$\begin{aligned} L_t(X - X') &= \frac{2\theta}{\sigma_+^2}(\sigma_-^2 t + (\sigma_+^2 - \sigma_-^2)\Gamma_t(X - X') - A_t) \\ &= \frac{2\theta}{\sigma_+^2}[\sigma_-^2 t - \sigma_-^2 \int_0^t 1_{\{X_s \neq X'_s\}}\, ds + (\sigma_+^2 - \sigma_-^2) \int_0^t 1_{\{X_s = X'_s\}}\, ds] \\ &= 2\theta \int_0^t 1_{\{X_s = X'_s\}}\, ds \end{aligned} \quad (23)$$

由于 $< X - X' >_t = 2A_t$，由 (19)、(23) 和命题 2.2 可知， $\frac{X - X'}{\sqrt{2}}$是一个 OSBM$(\sigma_+, \sigma_-, \sqrt{2}\,\theta)$。至此，存在性证明完成。现在假设有任意一对过程 (X, X')，定义在某个滤过概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ 上，并满足定理 2.5 的条件。现在定义

$$A_t = \int_0^t (\sigma_-^2 1_{\{X_s < X'_s\}} + \sigma_+^2 1_{\{X_s > X'_s\}})\, ds$$

并令 $\alpha_t = \inf\{s \geq 0 :\ A_s > t\}$， $\tau_t = \inf\{s \geq 0 :\ 2\sigma_-^2 s - A_s > t\}$。可以证明 $A_\infty = \infty$。为证明依分布唯一性，我们必须证明 $(X_{\alpha_t} - X'_{\alpha t}, t > 0)$ 和 $(X_{\tau_t} + X'_{\tau_t}, t > 0)$ 的联合分布与 Z 和 Z'的联合分布相同，其中Z 是随机方程 (16) 的解， Z' 由 (20) 给出；还要证明 $\alpha_t = \sigma_-^{-2} t + (\sigma_+^{-2} - \sigma_-^{-2})\Gamma_t(X_\alpha - X'_\alpha) + (2\theta)^{-1} L_t(X_\alpha - X'_\alpha)$。令 W和 W' 为如下给出的布朗运动

$$W_t = \frac{1}{\sigma_-}(X_t - \beta_1 t - x_1) \quad \text{and} \quad W'_t = \frac{1}{\sigma_-}(X'_t - \beta_2 t - x_2)$$

显然， $W - W'$和 $W + W'$是鞅， $< W - W' >_t = \sigma_-^{-2} < X - X' >_t = 2\sigma_-^{-2} A_t$和

$$\begin{aligned} < W + W' >_t &= \sigma_-^{-2} < X + X' >_t \\ &= \sigma_-^{-2}(2 < X >_t + 2 < X' >_t - < X - X' >_t) \\ &= \sigma_-^{-2}(4\sigma_-^2 t - 2A_t) = 4t - 2\sigma_-^{-2} A_t \end{aligned}$$

此外， $< W+W', W-W' >= 0$。因此，根据Knight定理（[17], 定理 V.1.9），$(W_{\alpha_t} - W'_{\alpha_t}, t \geq 0)$和$(W_{\tau_t} + W'_{\tau_t}, t \geq 0)$相互独立，且各自与$(\frac{\sqrt{2}}{\sigma_-} B_t, t \geq 0)$同分布，其中B是标准布朗运动。现在注意到

$$X_{\alpha_t} - X'_{\alpha_t} = \sigma_-(W_{\alpha_t} - W'_{\alpha_t}) + (\beta_1 - \beta_2)\alpha_t + x_1 - x_2 \tag{24}$$

and

$$L_t(X_{\alpha_t} - X'_{\alpha_t}) = L_{\alpha_t}(X - X') = 2\theta \int_0^{\alpha_t} 1_{\{X_s = X'_s\}}\, ds \tag{25}$$

仿照定理 2.1 的证明，由（25）可得

$$\begin{aligned}
\alpha_t &= \int_0^{\alpha_t} 1_{\{X_s > X'_s\}}\, ds + \int_0^{\alpha_t} 1_{\{X_s < X'_s\}}\, ds + \int_0^{\alpha_t} 1_{\{X_s = X'_s\}}\, ds \\
&= \frac{t}{\sigma_-^2} + (\frac{1}{\sigma_+^2} - \frac{1}{\sigma_-^2}) \int_0^t 1_{\{X_{\alpha_s} - X'_{\alpha_s} \geq 0\}}\, ds + \int_0^{\alpha_t} 1_{\{X_s - X'_s = 0\}}\, ds \\
&= \frac{t}{\sigma_-^2} + (\frac{1}{\sigma_+^2} - \frac{1}{\sigma_-^2})\Gamma_t(X_\alpha - X'_\alpha) + \frac{1}{2\theta} L_t(X_\alpha - X'_\alpha)
\end{aligned}$$

由上述结果及（24）可知，过程（$X_{\alpha_t} - X'_{\alpha_t}, t > 0$）满足随机方程（16），因此它与 Z 同分布。接着，由于 $X_{\tau_t} + X'_{\tau_t} = \sigma_-(W_{\tau_t} + W'_{\tau_t}) + (\beta_1 + \beta_2)\tau_t + x_1 + x_2$，可知（$X_{\alpha_t} - X'_{\alpha_t}, t > 0$）与（$X_{\tau_t} + X'_{\tau_t}, t > 0$）的联合分布等于 Z 和 Z' 的联合分布，由此可得依分布唯一性。 □

3 振荡粘性布朗运动的三元密度

设 X 是一个从 $x \in \mathbb{R}$ 出发的 OSBM$(\sigma_+, \sigma_-, \theta)$。需要指出的是，$X_t = B_{A_t}$，其中 B 是一个从 x 出发的布朗运动，而（$A_t, t \geq 0$）是（$\alpha_t, t \geq 0$）的逆过程，其定义见（1）。根据（[12]，第 5 章），X 是一个强马尔可夫过程。$T_0 =$的分布与一个振荡布朗运动的分布相同，该分布由（参见 [14]，定理 2）给出。

$$P(T_0 \in ds) = h(s, \frac{x}{\sigma_+})\, 1_{\{x \geq 0\}} + h(s, -\frac{x}{\sigma_-})\, 1_{\{x \leq 0\}}$$

其中

$$h(s, z) = \frac{z}{\sqrt{2\pi}\, s^{3/2}} \exp(-\frac{z^2}{2s}),\ z \geq 0, s > 0$$

此外，根据强马尔可夫性质，h 满足以下卷积性质

$$h(\,.\,, x_1) * h(\,.\,, x_2) = h(\,.\,, x_1 + x_2), \qquad x_1, x_2 > 0 \tag{26}$$

引理 3.1. 若 X从零开始，则对每个 $t > 0$，三元组（X_t、$L_t(X)$ $\Gamma_t(X)$）和（$-Y_t$、$L_t(Y)$ $t - \Gamma_t(Y) + \frac{1}{\theta} L_t(Y)$）具有相同的概率分布，其中 Y是一个 OSBM$(\sigma_-, \sigma_+, \theta)$。

证明。根据（[13], 第 820 页），我们有

$$(B_t, L_t(B), \Gamma_t(B)) \overset{law}{=} (-B_t, L_t(B), t - \Gamma_t(B)) \tag{27}$$

由（2）可知，$Y = -X$是一个从 0 开始的 $OSBM(\sigma_-, \sigma_+, \theta)$。因此，根据 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$定理 2.1，存在一个标准布朗运动（$B_t, t \geq 0$），使得 $Y = B_{\widetilde{A}_t}$，其中 $\widetilde{A}_t = \sigma_+^2 t + (\sigma_-^2 - \sigma_+^2)\Gamma_t(Y) - \frac{\sigma_+^2}{\theta} L_t(Y)$。因此

$$\widetilde{A}_t =< \widetilde{B}_{\widetilde{A}_t} >=< Y >_t =< X >_t = A_t \tag{28}$$

根据（27）和（28），我们得到

$$(B_{A_t}, L_{A_t}(B), \Gamma_{A_t}(B)) \overset{law}{=} (-\widetilde{B}_{\widetilde{A}_t}, L_{\widetilde{A}_t}(\widetilde{B}), \widetilde{A}_t - \Gamma_{\widetilde{A}_t}(\widetilde{B})) \tag{29}$$

由 (29)、(5) 和 (6) 可得

$$(X_t, L_t(X), \sigma_+^2\Gamma_t(X) - \frac{\sigma_+^2}{\theta}L_t(X)) \overset{law}{=} (-Y_t, L_t(Y), \sigma_+^2 t - \sigma_+^2\Gamma_t(Y)) \tag{30}$$

将等式 (30) 中的每个三元组映射为 $(x, y, z) \to (x, y, \frac{z}{\sigma_+^2} + \frac{y}{\theta})$，即可立即得到该结果。

□

定理 3.2. 对于 $0 < \dfrac{l}{\theta} \le \tau \le t$，三元组 $(X_t, L_t(X)\ \Gamma_t(X))$ 的联合密度如下

$$\phi(t,x,y,l,\tau) = \begin{cases} \sigma_-^{-2} h(t-\tau, \dfrac{l/2-y}{\sigma_-})\, h(\tau - \dfrac{l}{\theta}, \dfrac{l}{2\sigma_+} + \dfrac{x}{\sigma_+});\ x \ge 0, y < 0 \\ \sigma_+^{-2} h(t-\tau, \dfrac{l}{2\sigma_-})\, h(\tau - \dfrac{l}{\theta}, \dfrac{l/2+y+x}{\sigma_+});\ x \ge 0, y > 0 \\ \sigma_-^{-2} h(t-\tau, \dfrac{l/2-y}{\sigma_-})\, h(\tau - \dfrac{l}{\theta}, \dfrac{l}{2\sigma_+} - \dfrac{x}{\sigma_-});\ x \le 0, y < 0 \\ \sigma_+^{-2} h(t-\tau, \dfrac{l}{2\sigma_-})\, h(\tau - \dfrac{l}{\theta}, \dfrac{l/2+y}{\sigma_+} - \dfrac{x}{\sigma_-});\ x \le 0, y > 0 \end{cases}$$

证明. 证明改编自 ([13], 第 822–824 页)。设 a、b、c 和 y 为正实数。定义

$$\psi(t,a,b,c) = E^0\big[\int_0^\infty 1_{[y,\infty[}(X_t)\, \exp(-at - b\Gamma_t - cL_t)\, dt\big]$$

利用 (1)、(5) 和著名的拉普拉斯逆变换，由 ([13], 引理 2.1) 可得

$$\begin{aligned}
\psi(t,a,b,c) &= E^0[\int_0^\infty 1_{[y,\infty[}(B_{A_t}) \exp(-at - \frac{b}{{\sigma_+}^2}\Gamma_{A_t}(B) - (\frac{b}{\theta}+c)L_{A_t}(B))\, dt \\
&= E^0[\int_0^\infty 1_{[y,\infty[}(B_t) \exp(-a\alpha_t - \frac{b}{{\sigma_+}^2}\Gamma_t(B) - (\frac{b}{\theta}+c)L_t(B))\, d\alpha_t \\
&= E^0[\int_0^\infty 1_{[y,\infty[}(B_t) \exp(-\frac{a}{{\sigma_-}^2}t - (\frac{a+b}{{\sigma_+}^2} - \frac{a}{{\sigma_-}^2})\Gamma_t(B) - (c + \frac{a+b}{\theta})L_t(B))\, \frac{dt}{\sigma_+^2} \\
&= \frac{2\exp(-\dfrac{y}{\sigma_+}\sqrt{2(a+b)})}{\sigma_+\sqrt{2(a+b)}(c + \dfrac{a+b}{\theta} + \dfrac{\sqrt{2a}}{2\sigma_-} + \dfrac{\sqrt{2(a+b)}}{2\sigma_+})} \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\exp(-at - b\tau - cl)\, l}{4\pi\sigma_+\sigma_-(\tau - \frac{l}{\theta})^{\frac{1}{2}}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp(-\frac{(l/2)^2}{2\sigma_-^2(t-\tau)} - \frac{(y+l/2)^2}{2\sigma_+^2(\tau - \frac{l}{\theta})}) 1_{\{0<\frac{l}{\theta}<\tau<t\}} \\
&\qquad\qquad d\tau\, dl\, dt
\end{aligned}$$

因此，对于 $y > 0$ 和 $0 < \frac{l}{\theta} < \tau < t$，我们得到

$$P^0(X_t \ge y, L_t \in dl, \Gamma_t \in d\tau) = \frac{l}{4\pi\sigma_+^2\sigma_-(\tau - \frac{l}{\theta})^{\frac{1}{2}}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp(-\frac{(l/2)^2}{2\sigma_-^2(t-\tau)} - \frac{(y+l/2)^2}{2\sigma_+^2(\tau - \frac{l}{\theta})}) dl d\tau$$

这是事件 $[X_t \geq y]$ 上二元组 (L_t, Γ_t) 的分布。对 y 求导可得，对于 $0 < \frac{l}{\theta} < \tau < t$

$$\begin{aligned}\phi(t,0,y,l,\tau) &= \frac{l(y+l/2)}{4\pi\sigma_+^3\sigma_-(\tau-\frac{l}{\theta})^{\frac{1}{2}}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\exp(-\frac{(l/2)^2}{2\sigma_-^2(t-\tau)}-\frac{(y+l/2)^2}{2\sigma_+^2(\tau-\frac{l}{\theta})}) \\ &= \sigma_+^{-2}h(t-\tau,\frac{l}{2\sigma_-})\,h(\tau-\frac{l}{\theta},\frac{y+l/2}{\sigma_+})\end{aligned}$$

对于 $y<0$，根据引理 3.1，我们可以在前一种情形中将 y 替换为 $-y$，将 τ 替换为 $t-\tau+\frac{l}{\theta}$，将 σ_+ 替换为 σ_-，并将 σ_- 替换为 σ_+。因此，对于 $0<\frac{l}{\theta}<\tau<t$，我们得到

$$\phi(t,0,y,l,\tau) = \sigma_-^{-2}h(\tau-\frac{l}{\theta},\frac{l}{2\sigma_+})\,h(t-\tau,\frac{l/2-y}{\sigma_-}) \tag{31}$$

Now 现在假设 $X_0 = x \geq 0$。利用强马尔可夫性质，对于 $y>0$，我们得到

$$\begin{aligned}P^x(X_t\in dy, L_t\in dl, \Gamma_t\in d\tau) &= P^x(X_t\in dy, L_t\in dl, \Gamma_t\in d\tau | T_0\leq\tau) \\ &= \int_0^\tau P^x(X_t\in dy, L_t\in dl, \Gamma_t\in d\tau|T_0\leq s)\,P^x(T_0\in ds) \\ &= \int_0^\tau P^0(X_{t-s}\in dy, L_{t-s}\in dl, \Gamma_{t-s}\in d\tau-s)\,h(s,\frac{x}{\sigma_+})\,ds\end{aligned}$$

结合（31），这意味着

$$\begin{aligned}\phi(t,x,y,l,\tau) &= \sigma_+^{-2}h(t-\tau,\frac{l}{2\sigma_-})\int_0^\tau h(\tau-\frac{l}{\theta}-s,\frac{l/2+y}{\sigma_+})\,h(s,\frac{x}{\sigma_+})ds \\ &= \sigma_+^{-2}h(t-\tau,\frac{l}{2\sigma_-})h(\tau-\frac{l}{\theta},\frac{l/2+y}{\sigma_+}+\frac{x}{\sigma_+})\end{aligned}$$

类似的计算可得其他情形的结果。 □

推论 3.3. 设 $r=\frac{1}{2}(\sigma_+^{-1}+\sigma_-^{-1})$，则对于 $0<l<\theta t$，我们有

$$P^x(X_t\in dy, L_t\in dl) = \begin{cases}\sigma_-^{-2}h(t-\frac{l}{\theta}, l\,r+\frac{x}{\sigma_+}-\frac{y}{\sigma_-})\,dy\,dl;\ x\geq 0, y<0 \\ \sigma_+^{-2}h(t-\frac{l}{\theta}, l\,r+\frac{x+y}{\sigma_+})\,dy\,dl + p_t^0(x,y)\,dy\,\delta_0(dl); x\geq 0, y>0 \\ \sigma_-^{-2}h(t-\frac{l}{\theta}, l\,r-\frac{x}{\sigma_-}-\frac{y}{\sigma_-})\,dy\,dl + p_t^0(x,y)\,dy\,\delta_0(dl); x\leq 0, y<0 \\ \sigma_+^{-2}h(t-\frac{l}{\theta}, l\,r-\frac{x}{\sigma_-}+\frac{y}{\sigma_+})\,dy\,dl; x\leq 0, y>0\end{cases}$$

推论 3.4. 从零开始的 OSBM$(\sigma_+,\sigma_-,\theta)$ 的占用时间在 $0<\tau<t$ 时具有以下分布

$$P^0(\Gamma_t\in d\tau) = \frac{\theta^2}{4\pi\sigma_+\sigma_-(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\int_0^\tau(\frac{1}{\sigma_+\sqrt{\tau-l}}+\frac{t-\tau}{\sigma_-(\tau-l)^{\frac{3}{2}}})l\exp(-\frac{(\theta l)^2}{8\sigma_+^2(\tau-l)}-\frac{(\theta l)^2}{8\sigma_-^2(t-\tau)})\,dl$$

推论 3.5. 从零点出发的 OSBM$(\sigma_+,\sigma_-,\theta)$ 的局部时具有如下概率分布

$$P^0(L_t\in dl) = \frac{2r}{\sqrt{2\,\pi(t-\frac{l}{\theta})}}\exp(-\frac{(lr)^2}{2(t-\frac{l}{\theta})})1_{\{0<l<\theta t\}}\,dl$$

参考文献

[1] T. Appuhamillage, V. Bokil, E. Thomann, E. Waymire, B. Wood, 《偏斜布朗运动的占用时间与局部时及其在穿越界面弥散中的应用》, 《应用概率年刊》21 (2011) 83-214.[2] G. Barraquand, M. Rychnovsky, 《粘性布朗运动的大偏差》, 《电子概率杂志》25 (2020) 1-52.[3] R. Bass, 《具有粘滞点的随机微分方程》, 《电子概率杂志》19 (2014) 1-22.[4] B. Can, M. C¸a˘glar, 《双侧粘滞布朗运动的条件分布与占用时间》, 《统计与概率通讯》165 (2020).[5] A. Eberle, R. Zimmer, 《具有漂移项的多维扩散过程的粘滞耦合》, 《亨利·庞加莱研究所概率与统计年刊》55 (2019) 2370-2394.[6]H.J. Engelbet, J. Peskir, 《粘性布朗运动的随机微分方程》, 《随机过程》86 (2014) 993-1021.[7] P. Etor´e, M. Martinez, 《涉及未知过程零点局部时的一维随机微分方程的精确模拟》, 《蒙特卡罗方法及其应用》19 (2013) 41-71.[8] H. Hajri, M. Caglar, M. Arnaudon, 《随机流在粘性布朗运动方程中的应用》, 《电子概率通讯》22 (2017) 1-10.[9] M. Harisson, 《作为存储过程极限的粘性布朗运动》, 《应用概率杂志》18 (1981) 216-226.[10] C. Howitt, 《随机流与粘性布朗运动》, 学位论文 (2007).[11] C. Howitt, J. Warren, 《布朗运动的相容族与核的随机流》, 《概率年刊》37 (2009) 1237-1272.[12] K. Itˆo, J-R. H. McKean, 《扩散过程及其样本路径》, 施普林格 (1965).[13] I. Karatzas, S-E. Sherve, 《布朗运动、其局部时与占用时间的三元密度及其在随机控制中的应用》, 《概率年刊》12 (1984) 819-828.[14] J. Keilson, J.A. Wellner, 《振荡布朗运动》, 《应用概率杂志》15 (1978) 300-310.[15] A. Majid, 《作为随机游走序列强极限的粘性布朗运动》, 《随机过程及其应用》39 (1991) 221-237.[16] M. Z.R`acz, M. Shkolnikov, 《作为排斥过程极限的多维粘滞布朗运动》, 《应用概率年刊》25 (2015) 1155-1188.[17] D. Revuz, M. Yor, 《连续鞅与布朗运动》, 第 293 卷。柏林, 施普林格 (1999).[18] P. Salminen, D. Stenlund, 《一维扩散过程的占用时间》, 《理论概率杂志》34 (2021) 975-1011.[19] W. Touhami, 《关于偏斜粘滞布朗运动》, 《统计与概率通讯》173 (2021) Id/No 109086.

[20] J. Warren, 《分枝过程、雷-奈特定理与粘性布朗运动》, S´éminaire de Probabilit´és XXXI（1997年）1-15，施普林格。[21] J. Warren, 《关于粘性布朗运动的拼接》, S´éminaire de Probabilit´és de Stras- bourgXXXIII，33（1999年）257-26，施普林格。[22] J. Warren, 《泊松蛇产生的噪声》, 电子概率期刊 7（2002年）1-21。