arXiv:2302.03142v1 [math.AG] 6 Feb 2023

计算环面曲面爆破中的非阿基米德圆柱计数

THORGAL HINAULT

摘要。全纯圆盘的计数是镜像对称 SYZ 方法的核心。在非阿基米德框架中，这些计数表示为解析圆柱的计数。在一些简单情形下，例如簇簇，这些计数可以通过散射图编码的组合算法提取。相关散射图编码了关于无穷小解析圆柱的信息。本文利用非阿基米德格罗莫夫–威滕理论，以及由热带数据参数化的退化过程，给出了一个公式，将仿射对数卡拉比-丘曲面上一类受限圆柱的计数与环面曲面单次爆破上的计数联系起来。这个闭式公式与散射图方法形成对照。

目录

1. 引言 1 2. 记号与约定 4 2.1. 几何设置。4 2.2. 非阿基米德稳定映射 5 3. 热带曲线 9 3.1. 热带曲线空间 9 3.2. 热带圆柱 14 4. 本原全纯圆柱 15 4.1. 主要结果 16 4.2. 初始数据与记号 16 4.3. 热带变形 19 4.4. 解析变形 21 4.5. 枚举不变量与退化 25 参考文献 32

1. 引言

镜像对称 SYZ 图景的一些代数几何实现方式，是显式构造一个反映初始簇计数

几何的镜像代数。这些计数数据进入镜像代数定义的方式，可以广义地理解为瞬子修正。

时至今日，在对数 Calabi–Yau 情形中，我们基本上有两种构造方法：一种使用带标记点的对数葛罗莫夫–威滕不变量 [2, 3, 9, 10]„ 另一种则依赖于非阿基米德计数几何 [13, 16, 17, 18,19, 20, 21]。已知在某些受限情形下，这两种构造是等价的[11], ，尽管目前尚未得到带标记点的葛罗莫夫–威滕理论与非阿基米德格罗莫夫-维滕理论之间的一般比较结果。在这两种构造中，瞬子修正都作为镜像代数的结构常数出现。结构常数可以用初始簇中的解析圆柱计数来表示 [5, 13]。在非阿基米德情形下，这些解析圆柱对应于 [5] 的断线。

本文旨在计算对数 Calabi–Yau 曲面的非阿基米德圆柱计数（$\mathcal{Y},\mathcal{D}$）。我们假设（$\mathcal{Y},\mathcal{D}$）是一个环面曲面的吹起：这一假设并不严格，因为每个对数 Calabi–Yau 曲面都有一个环面模型 [6, 命题 1.3]。接下来，我们的思路是将吹起簇中的计数与沿环面模型例外轨迹中的一条（-1）曲线吹下后得到的计数联系起来。我们借助由热带数据参数化的变形过程来实现这一点，并利用解析几何从非阿基米德稳定映射的模空间中切出适当的连通分支。随后，利用作用于稳定映射导出解析堆栈的虚基本类这一强大形式体系，定义变形不变计数 [17]。由此可见，导出模空间的几何完美体现了 Gromov-Witten 理论的公理，因此我们可以轻松处理定义域的退化。我们通过光滑性论证，将这些虚计数与镜像构造的朴素计数联系起来[13] ，从而得到一个仅涉及圆柱计数的公式。

这种方法的优点在于，它能为定义镜像结构常数的计数给出显式的闭式公式。据我们所知，这是一个新结果，与散射图方法形成对比：后者 [8], 提供了一种算法方法，可将结构常数计算到有限阶。闭式公式值得关注，因为它们能够用于计算镜像代数，给出各种不变量之间的非平凡关系，并出现在墙穿越函数的系数中，而这些函数的表达式在大多数情况下仍是猜想性的 [7]。

为了陈述本文的主要结果，设 $(\mathcal{Y},\mathcal{D})$ 是一个带有环面模型 π 的对数卡拉比-丘曲面：$(\mathcal{Y},\mathcal{D}) \to (\mathcal{Y}_t,\mathcal{D}_t)$。映射 π 是对环面边界中非托里克不动点 x_{ij} 的爆破，其中 i 指标指的是环面边界

分量，而 j 指标则枚举 i分量中的点。我们将 $\mathcal{E}_{ij}$ 记作位于 p_{ij} 上方的不可约除子，将 $\mathcal{E}_i$ 记作位于某个固定环面边界除子上方的例外除子的并，并将 $\mathcal{E}$ 记作完整的例外轨迹。

这些公式涉及对本原（无穷小）柱的计数（§3.2）。柱是一条热带曲线，它参数化满足以下条件的非阿基米德稳定映射：(i) 以给定重数，在边界的两个指定分支处各自仅交于一个未指定的点；(ii) 与每个 $\mathcal{E}_i$具有规定的交数。我们研究本原柱，即参数化与每个 $\mathcal{E}_i$的交数至多为 1 的稳定映射的柱。对于一个柱 V和一个曲线类 β，我们关联一个柱计数 $N(V,\beta)$。我们的柱计数细化了 [13], 中定义的柱脊计数，因为将我们的计数对上述条件 (ii) 中所有可能的规定求和，就得到柱脊计数。给定一个本原柱 V，我们将参数化与例外除子相交部分的热带曲线称为枝条，并将交数编码为由权重向量组成的元组，称为枝类型。该元组的长度等于相关稳定映射所相交的 $\mathcal{E}$ 的不可约分支数。特别地，长度为 1 的枝类型——例如出现在我们公式右侧的柱所对应的枝类型——参数化了在单个点与 $\mathcal{E}$ 相交的稳定映射。

定理 1.1 (定理 4.1)。设 V 是一个枝类型为 $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_s)_{1\le s\le t}$的原始无穷小热带圆柱，令 $\beta \in \mathrm{NE}(Y)$。那么

$$N(V,\beta) = \sum_{\beta_1+\cdots+\beta_t=\beta} \prod_{s=1}^{t} N(V_s,\beta_s),$$

其中 V_s 是一个枝类型为 $\mathbf{w}_s$ 的无穷小圆柱（见构造 *4.4*）。

对于每个环面边界分支，令 ℓ_i 表示 $\mathcal{E}_i$的不可约分支数。对曲线类的简单考察得出以下精细结果：

推论 1.2 (推论 4.3)。设 V 是一个枝类型为 $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_s)_{1\le s\le t}$的原始无穷小圆柱。对于每个 s，令 $E^{\mathrm{trop}}_{i\ s}()$ 表示相应枝条的方向。

那么满足 $N(V,\beta) \neq 0$的曲线类至多有 $\prod_{1\le s\le t} \ell_{i(s)}$ 个。这样的曲线类 β 由对所有 s选择一个不可约分支 $E_{i(s)j}$ 来确定，并且我们有

$$N(V,\beta) = \prod_{s=1}^{t} N(V_s,\beta_s),$$

其中 β_s 是曲线类，它与 E 的每个不可约分支的交数均为0，但 $E_{i(s)j}$除外。

这一结果是迈向将一般圆柱计数（与例外除子的多个不可约分支相交）表示为以下计数的第一步：

仅接触例外除子的一个不可约分支的圆柱。换言之，它将任意对数 Calabi–Yau 曲面的本原圆柱计数表示为在环面边界上一点处经吹起的环面曲面上的圆柱计数。

圆柱计数确实取决于对数 Calabi–Yau（$\mathcal{Y},\mathcal{D}$）的内部。对于单次爆破，内部为 $\mathbb{G}_m^2 \cup (\mathcal{E} \setminus \mathcal{D})$，其中 $\mathcal{E}$ 是一条（-1）曲线，而 $\mathcal{D}$ 是一个简单正规交反典范除子，是取环面模型后环面边界的严格变换。实际上，我们可以选择任何由环面模型得到的内部的简单正规交紧化来计算这些计数。

本文的方法只适用于本原柱，它们参数化的是与例外除子相交简单的稳定映射。这是因为，仅凭热带方法，我们无法控制由较高交数引起的虚贡献。具体而言，在较高重数的情况下，定义域曲线可能出现映射到例外除子的“泡”，而热带图景无法体现这些泡。由于这一现象，我们用于在模空间中选取连通分支的论证——这是证明计数具有变形不变性的关键——不再成立。

本文结构如下：第 2 节介绍几何设定，并回顾非阿基米德格罗莫夫-维滕理论。第 3 节约定热带曲线的记号，并定义圆柱计数。第 4 节是本文的主体：首先定义一种热带变形，然后将其提升为解析稳定映射的变形，最后考察该变形的退化。我们归纳地应用这一变形过程，每一步都将爆破的数量减少一个。

2. 记号与约定

设 $(\mathcal{Y},\mathcal{D})$ 是特征为 0 的非阿基米德域 k 上的对数卡拉比-丘曲面。本节中，我们固定一个环面模型，并定义相应的热带化映射。之后，我们定义相关的非阿基米德解析稳定映射模空间。尽管我们在第 4 节使用了强大的导出形式体系，但重要的引理 2.5 使我们能够将虚计数与 [13] 中定义的朴素计数对应起来。

2.1. **几何设置**。

2.1.1. 环面曲面的爆破。 不妨进行一次环面爆破，从而假设 $(\mathcal{Y},\mathcal{D})$ 存在一个环面模型 [6, 命题 1.3]。在之后考虑的稳定映射计数中，进行环面爆破不会改变计数。

所谓环面模型，是指 $(\mathcal{Y},\mathcal{D})$ 是由完备光滑环面曲面 $\mathcal{Y}_t$ 的环面边界点经过一系列非环面爆破得到的。

我们为环面边界的不可约分支$\mathcal{D}_t = \sum_{i\in I_{\mathcal{D}_t}} \mathcal{D}_{t,\ i}$选择一种循环排序，并将 $\pi\colon (\mathcal{Y},\mathcal{D}) \to (\mathcal{Y}_t,\mathcal{D}_t)$ 记为该环面模型。我们将 $T_M = \mathcal{Y}_t \setminus \mathcal{D}_t$ 记为余特征格为 M 的大环面。

更准确地说，$(\mathcal{Y},\mathcal{D})$由$(\mathcal{Y}_t,\mathcal{D}_t)$按如下方式得到：固定一个整数元组$(\ell_1,\dots,\ell_m)$，并在每个除子$\mathcal{D}_{t,\ i}$ 上选取 ℓ_i 个互不相同的点x_{ij}，这些点均不属于 $\mathcal{D}_t$的任何零维分层。令 $\pi\colon \mathcal{Y}\to\mathcal{Y}_t$ 为在这些点处的爆破。我们将$\mathcal{D}_{i,\ t}$的严格变换记为$\mathcal{D}_i$，并将位于x_{ij}上方的例外除子记为 $\mathcal{E}_{ij}$。我们还设 $\mathcal{D} = \sum_i \mathcal{D}_i$ 和$\mathcal{E} = \sum_{i,\ j} \mathcal{E}_{ij}$。由此得到关系

$$c_1(T_{\mathcal{Y}}) = \pi^* c_1(T_{\mathcal{Y}_t}) - \mathcal{E} = \mathcal{D} - \mathcal{E}.$$

我们将与 $\mathcal{Y}_t$关联的扇记为 Σ。

2.1.2. 经由环面模型的热带化。从现在起，我们采用 Berkovich 解析化，并用正体字母表示它们：$Y = \mathcal{Y}^{\mathrm{an}}$、 $D = \mathcal{D}^{\mathrm{an}}$、$Y_t = \mathcal{Y}_t^{\mathrm{an}}$、 $D_t = \mathcal{D}_t^{\mathrm{an}}$，等等。

由于 $U = Y\setminus D$是对数 Calabi–Yau，我们可以考虑其本质骨架 Sk(U)，它带有整仿射结构。该结构是利用 Temkin Kähler 半范数，根据 U 上的对数 Calabi–Yau 体积形式构造的。类似地，我们考虑带有典范整仿射结构的骨架 Sk(T_M)。存在一个同构 Sk(T_M) $\simeq M_{\mathbb{R}} = M\otimes\mathbb{R}$，它与整仿射结构相容，也就是说，Sk($T_M,\mathbb{Z}$) $\simeq$ M。通过应用此同构，不妨假设 Sk(T_M) $= M_{\mathbb{R}}$。

注2.1。骨架 Sk(U)自然包含在 (Y,D) 的 Clemens 多面体中，从而诱导出一个嵌入 Sk(U) $\hookrightarrow \mathbb{R}^m_{\geq 0}$，其中 m是 D的分支数。在此嵌入下，骨架的整点坐标属于 $\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$；利用识别 $M \simeq$ Sk($U,\mathbb{Z}$)，向量$v\in M$ 的范数定义为其在嵌入 $M\hookrightarrow\mathbb{Z}^m$ 下各坐标绝对值之和。

我们将由 $\mathbb{G}_m^2 \hookrightarrow Y_t$ 诱导的本质骨架的自然紧化记为 $\overline{M}_{\mathbb{R}}$（参见 图 1 中的 $\mathbb{G}_m^2\hookrightarrow\mathbb{P}^2$）。我们考虑经由环面模型 π 对 U 进行热带化，并将其延拓至紧化 Y

$$\tau\colon Y \xrightarrow{\pi} Y_t \xrightarrow{\tau_t} \overline{M}_{\mathbb{R}}.$$

我们将 τ 称为热带化映射。

2.2. **非阿基米德稳定映射**。本文研究非阿基米德稳定映射和非阿基米德格罗莫夫-威滕不变量。鉴于 Y 是真 [15]，我们总能利用非阿基米德解析叠的 GAGA 定理恢复代数陈述。

关于非阿基米德几何中稳定映射的一般理论，请参见 [16, 17]。下面我们回顾主要定义和结果。

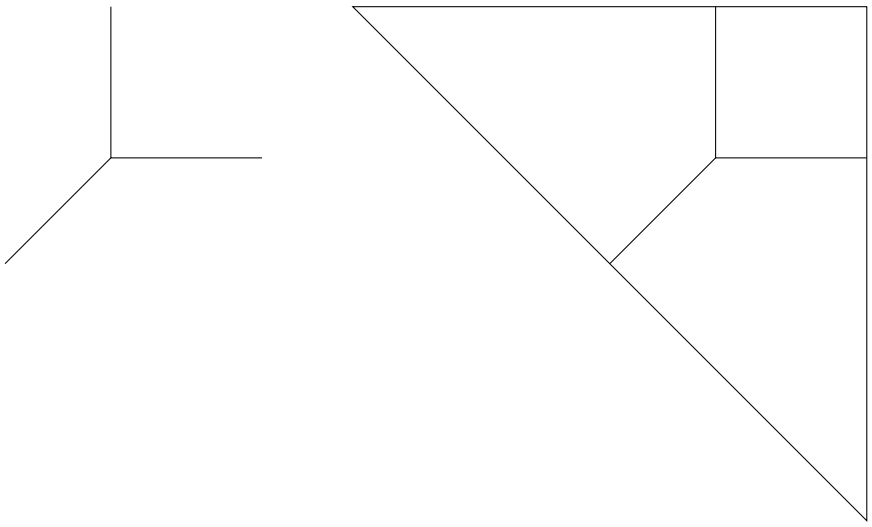


图 1. $\mathbb{P}^2$ 在 $\mathsf{Sk}(\mathbb{G}_m^2)$ 中绘制的扇，以及其自然紧化 $\mathsf{Sk}(\mathbb{G}_m^2)$。

2.2.1. 导出非阿基米德稳定映射。

定义 2.2. 设 S 是一个刚性 k-解析空间，$X \to S$ 是 S 上的光滑刚性 k-解析空间。我们用 $\overline{M}(X/S, \tau, \beta)$ 表示 (τ, β)-稳定映射的模空间。

在 τ 是一个 n-价顶点且 β 的亏格为 0 的特殊情形下，我们用 $\overline{M}_{0,\, n}(X/S, \beta)$ 表示这个模空间。

定理 2.3 ([17, 定理 1.1, 1.2])。设 S 是一个刚性 k-解析空间，且 $X \to S$ 是 S 上的光滑刚性 k-解析空间。设 (τ, β) 是一个 A-图。那么：

(1) (τ, β)-稳定映射的模堆栈 $\overline{M}(X, \tau, \beta)$ 具有导出增强 $\mathbb{R}\overline{M}(X/S, \tau, \beta)$，它是一个导出 k-解析堆栈，局部有限表示，且在 S 上是导出局部完全交。(2) 若 S 是一个代数簇，且 X 是 S 上的代数簇，则

$$\mathbb{R}\overline{M}(X/S, \tau, \beta)^{\mathrm{an}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\overline{M}(X^{\mathrm{an}}/S^{\mathrm{an}}, \tau, \beta).$$

(3) 导出模叠 $\mathbb{R}\overline{M}(X/S,\ \tau,\ \beta)$ 满足一系列几何关系，反映了 *Gromov-Witten* 理论的 *Behrend-Manin* 公理。

我们用 t_0 表示截断函子，因此 $\overline{M}(X, \tau, \beta) = \mathsf{t}_0\, \mathbb{R}\overline{M}(X/S, \tau, \beta)$。

2.2.2. 相对导出非阿基米德稳定映射。可以在导出理论中考虑第 i 个标记点处的高阶相切条件，方法是沿截面 [16, §9, 17, §8] 对定义域曲线进行无穷小加厚。给定一个接触

阶 $m_i \in \mathbb{N}_{>0}$，可以构造具有重数的求值映射

$$\mathrm{ev}_i^{m_i} \colon \mathbb{R}\overline{M}(X,\tau,\beta) \to X_{i,\tau}^{m_i}.$$

利用此映射，可以通过考虑由纤维积给出的子叠，对沿局部完全交闭解析子空间 ι具有接触阶 m_i 、位于第 i 个标记点 $Z_i \hookrightarrow Y$ 处的稳定映射进行参数化

$$\mathbb{R}\overline{M}(Y,\tau,\beta) \times_{X_{i,\tau}^{m_i}} Z_{i,\tau}^{m_i},$$

其中 $Z_i^{m_i}$，τ 通过沿第 i 个截面进行加厚的相同步骤，从 Z_i 得到。

我们利用这些带重数的求值映射，构造 [13] 中所考虑模空间的导出版本。设 J 为基数为 n 的有限集，并令 $\mathbf{P} = (\mathbf{P}_j)_{j\in J}$ 为 $\mathsf{Sk}(U,\mathbb{Z})$ 中的点元组。回顾一下，$\mathsf{Sk}(U,\mathbb{Z})$ 中的点是 $k(U)$ 上的赋值，并且在 $k^0(U^0)$ 上取整数值。定义

$$B = \{j \in J \mid \mathbf{P}_j \neq 0\} \text{ and } I = \{j \in J \mid \mathbf{P}_j = 0\}.$$

对于 $j \in B$，记作 $\mathbf{P}_j = m_j\nu_j$ ，其中 ν_j 是具有除子中心 $D_j \subset D$ 和 $m_j \in \mathbb{N}_{>0}$ 的除子赋值。给定 $\beta \in \mathsf{NE}(\mathcal{Y})$，我们定义一列导出模空间：

$$\mathbb{R}M^{\mathrm{sm}}(U,\mathbf{P},\beta) \subset \mathbb{R}M^{\mathrm{sd}}(U,\mathbf{P},\beta) \subset \mathbb{R}M(U,\mathbf{P},\beta) \subset \mathbb{R}\overline{M}(Y,\mathbf{P},\beta) \subset \mathbb{R}\overline{M}(Y,\beta).$$

这些模空间定义如下：

- $\mathbb{R}\overline{M}(Y,\mathbf{P},\beta)$ 对应于稳定映射 $[C,(p_j)_{j\in J},f\colon C \to Y]$ 使得对于每个 $j \in B$，p_j 都以至少 m_j 的重数映射到 D_j。
- $\mathbb{R}M(U,\mathbf{P},\beta)$ 对应于稳定映射的子叠 $[C,(p_j)_{j\in J},f\colon C \to Y]$ 使得对于所有 $j \in B$，p_j 都映射到开层 D_j°，且 $f^{-1}(D) = \sum_{j\in B} m_j p_j$。
- $\mathbb{R}M_{\mathrm{sd}}(U,\mathbf{P},\beta)$ 对应于定义域曲线稳定的稳定映射子叠。
- $\mathbb{R}M_{\mathrm{sm}}(U,\mathbf{P},\beta)$ 对应于稳定映射的子叠 $[C,(p_j)_{j\in J},f\colon C \to Y]$ 满足：(1) $f^*(T_Y(-\log D))$ 是 C 上的平凡向量丛。(2) $f(C) \cap (D \cap E) = \emptyset$。(3) $f^{-1}(E)$ 是一个不带重数的点有限集，与 C 的节点和标记点不相交。

我们还考虑非导出模空间

$$\overline{M}(Y,\mathbf{P},\beta) = \mathrm{t}_0\,\mathbb{R}\overline{M}(Y,\mathbf{P},\beta),$$

等等，这与 [13, §3] 中定义的模空间一致。请注意，所有这些堆栈都是相应代数版本的解析化，最左侧的三个包含映射是（扎里斯基）开映射，并且 $M^{\mathrm{sd}}(U,\mathbf{P}\ \beta)$ 和 $M^{\mathrm{sm}}(U,\mathbf{P}\ \beta)$ 是簇，因为我们只考虑有理曲线。

2.2.3. 非阿基米德格罗莫夫-威滕不变量。 定义数值格罗莫夫–威滕不变量需要满足两个条件：模空间是真，以便能够推前到一点；并且存在虚基本类，可与模空间上的循环作帽积。在非阿基米德理论中，使用刚性动机博雷尔-摩尔同调，并且对任意导出解析堆栈 $\varphi\colon X \to S$ 上虚维数为 d [16, 的导出局部完全交态射，都关联一个虚基本类 $[X/S] \in \mathrm{H}_d^{\mathrm{BM}}(X/S, \mathbb{Q}_S(2d))$，定义见 4.4]。

定理 2.4 ([16, 定理 1。1])。 设 S 是一个刚性 k-解析空间，且 $X \to S$是一个在 S 上光滑的刚性 k-解析空间。设 (τ, β) 是一个 A-图。

(1) 存在一个虚基本类

$$[\mathbb{R}\overline{M}(X/S, \tau, \beta)] \in \mathrm{H}_d^{\mathrm{BM}}(\mathbb{R}\overline{M}(X/S, \tau, \beta)/S, \mathbb{Q}_S(2d)),$$

其中 d 是虚维数。

(2) 虚基本类系满足 *Gromov-Witten* 理论的 *Behrend-Manin* 公理。

取 $S = \mathrm{Spf}\ k$，并假设 k 具有特征零。给定一个 A-图（τ, β）、虚基本类、具有接触阶$m_i \in \mathbb{N}_{>0}$ 的局部完全交闭子簇 $Z_i \subset X$ 以及相关图表

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}\overline{M}(X, \tau, \beta) & \xrightarrow{\mathrm{ev}_i^{m_i}} & X_{i,\tau}^{m_i} & \longleftarrow & Z_{i,\tau}^{m_i} \\ \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{st}} & & & & \\ \overline{M}_\tau & & & & \end{array}$$

可以使用通常的步骤 [16, 定义 8.1] 来定义数值格罗莫夫-威滕类及其相关数值不变量。子簇 Z_i 为局部完全交（lci）这一点至关重要，因为只有这样才能定义虚基本类。由导出模空间满足格罗莫夫–威滕理论的 Behrend-Manin 公理，以及虚基本类的函子性，这些类也满足 Behrend-Manin 公理。

我们需要以下引理，以便稍后定义相关的数值格罗莫夫-威滕不变量。

引理 2.5。 导出模堆栈 $\mathbb{R}M^{\mathrm{sm}}(U, \mathbf{P}\ \beta)$ 是非导出的，也就是说，存在一个典范等价

$$M^{\mathrm{sm}}(U, \mathbf{P}, \beta) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}M^{\mathrm{sm}}(U, \mathbf{P}, \beta).$$

特别地，它在 $\overline{M}_{0,n}$ 上是光滑的。

证明。 由 [13, 引理 3.6],，模空间 $M^{\mathrm{sm}}(U, \mathbf{P}\ \beta)$ 在 $\overline{M}_{0,\ n}$上是光滑的，因此其维数等于 $\mathbb{R}M^{\mathrm{sm}}(U, \mathbf{P}\ \beta)$ 的虚维数。由 [16, 命题 2.14], 我们推出，典范闭浸入

$$M^{\mathrm{sm}}(U, \mathbf{P}, \beta) \hookrightarrow \mathbb{R}M^{\mathrm{sm}}(U, \mathbf{P}, \beta)$$

是一个等价关系。 □

3. 热带曲线

本节回顾仿射流形 $M_{\mathbb{R}}$ 中脊、热带曲线和枝条的概念。在构造 3.7 中，我们为热带曲线空间定义一种显式拓扑。随后定义热带圆柱，它们是我们要计数的解析圆柱的热带化，并定义相应的计数。这些计数细化了 [13] 中定义的脊计数。为追踪组合结构，我们定义与圆柱相关联的枝类型概念。

3.1. 热带曲线空间。 我们将考虑 $\mathbb{Z}$-仿射流形 $M_{\mathbb{R}}$ 中的热带曲线，并将其称为热带底空间。这些热带曲线将用于参数化 $M^{\mathrm{sm}}(U, \mathrm{P}\ \beta)$ 中的解析稳定映射，因此我们在定义中要求它们满足比通常平衡条件更多的条件。我们不提供精确定义（详见 $[13, §4], $），而是通过具体例子来说明二维情形中的相关概念。

例 3.1. 我们以对数卡拉比-丘曲面 (Y, D) 作为贯穿全文的例子，该曲面由 $\mathbb{P}^2$ 在三个环面除子上各取 2 个点进行爆破得到。我们将 D 的不可约分支记为 D_1、D_2 和 D_3，并将例外除子记为 E_{11}、E_{12}、E_{21}、E_{22}、E_{31} 和 E_{32}。

3.1.1. 典范墙结构。 热带底空间带有一个典范墙结构，记作 $\mathsf{Wall} = \bigcup_{n\geq 0} \mathsf{Wall}^n$。它本质上是由一组余维 1 的整锥构成，并附有以组合方式归纳构造的墙穿越函数。具体而言，在二维情形下，墙是从 $M_{\mathbb{R}}$ 的原点出发的射线。本文不考虑墙穿越函数，因此在以下构造概述中将其省略（见 $[13, \text{构造 } 4.16]$）：

- 初始墙 Wall^0：令 $E_{\text{热带化}\,ij} := \tau(E_{ij})$ 表示例外除子 E_{ij} 的热带化。它是 $\partial\overline{M}_{\mathbb{R}}$ 中的一个点，位于与 D_i 对应的射线末端。我们还用 $E_{\text{热带化}}$ 表示 $E_{\text{热带化}\,ij}$ 的并集，因此 Wall^0 对应于 Y_t 的扇中包含 $E_{\text{热带化}}$ 中点的射线。
- 由 Wall^n 得到的墙 Wall^{n+1}：将 Wall^n 中各墙内两个向量之和所生成的射线加入 Wall^n。

例 3.2。 对于我们的贯穿示例 (Y, D)，图 2 展示了 Wall^3。

墙结构是我们定义热带曲线时不可或缺的组成部分。更重要的是，它承载着大量几何信息，因为通过分析热带圆柱与墙之间的相互作用，可以得到镜像代数的结构常数。我们注意到，根据构造，在环面情形中不存在墙。

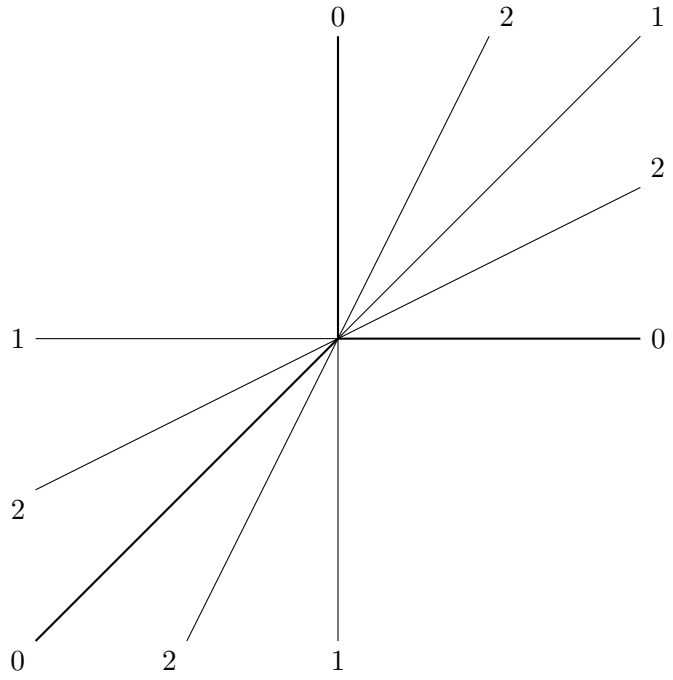


图 2. 例 3.1 中墙结构的墙[3] 部分（分三步构造）。射线上的数字表示该射线是在构造的哪一步添加的，粗射线为初始墙。

3.1.2. 节点度量树。 度量树是一个有限抽象树 Γ，并将每条边 e 与 $[0$中的一个闭区间等同起来；$\ell]$ 其中 $\ell \in]0;\ +\infty]$。关于度量树中无限顶点和有限顶点、腿、节点、不可约性及稳定性的概念，参见 [13] 。

设 J 为一个基数为 n 的有限集，带有 n 条腿 $[\Gamma,\ (v_j)_{j\in J}]$ 的度量树是一个节点度量树 Γ，其有 1价顶点（v_j），且没有其他 1价顶点。若每个 v_j 都是无限的，则称其为扩展的 。若不存在有限的 2 价顶点，则称其为简单的 。我们用 $F \subset J$ 表示对应于有限腿的指标子集。给定带标记点的树 $[\Gamma,\ (v_j)_{j\in J}]$，我们常用 P_{ij} 表示 Γ 中连接标记点 v_i 和 v_j 的路径，其中 i、$j \in J$。

节点度量树将用作热带曲线、脊或枝条到 $M_{\mathbb{R}}$的定义域；这些概念将在下文定义。

3.1.3. 热带曲线、脊和枝条。 以下概念的示意图请参见图 3。

令 J 为如上所述的指标集。我们将始终固定一个划分 $I \coprod B = J$ 和一个子集 $F \subset J$。特别地，我们允许 $F = \emptyset$，并在这种情况下系统地省略它

在记号中。在以下定义中，当 $F=\emptyset$ 时，我们称这些对象为扩展的。

给定从节点度量树到 $\overline{M}_{\mathbb{R}}$ 的 $\mathbb{Z}$-仿射浸入 $h\colon \Gamma\to\overline{M}_{\mathbb{R}}$，$h$ 在 Γ 的一个顶点 v 处沿着一条边 $e\in\Gamma$ 的斜率是一个整数向量，我们称其为 h 在 v 沿方向 e 的权重向量，记作 $w_{(v,e)}$。h 在 v 沿边 e 的次数是 $w_{(v,e)}$ 的范数，其含义见注 2.1。

注 3.3。如果 v 是与扇 Σ_t 的一条射线方向平行的向量，那么 v 的范数就是 v 在 M 中的指标（即其坐标的最小公倍数）。

$M_{\mathbb{R}}$ 中的热带曲线是从扩展稳定简单节点度量树到 $\overline{M}_{\mathbb{R}}$ 的 $\mathbb{Z}$-仿射浸入 $T=[\Gamma,(v_j)_{j\in J},h\colon \Gamma\to\overline{M}_{\mathbb{R}}]$，其在每个价数大于 1 的顶点处都是平衡的，对每个 $i\in I$ 在 v_i-腿上为常值；当 $j\in B$ 时，在每条 v_j-腿上具有沿扇的一条射线方向的权重向量；并且每条未标记标记点的无限腿都映射到 E^{trop}。

我们将 $\mathbf{P}=(\mathbf{P}_j)_{j\in J}$ 表示为沿标记腿的 h 斜率所给出的向量元组，并称 T 为一条类型为 $\mathbf{P}$ 的热带曲线。注意，按照定义，当且仅当 $j\in B$ 时，$\mathbf{P}_j$ 非零。这些热带曲线参数化了 $M^{\mathrm{sm}}(U,\mathbf{P}\ \beta)$ 中的稳定映射，其空间记为 $\mathrm{TC}(M_{\mathbb{R}},\mathbf{P})$。

$M_{\mathbb{R}}$ 中的脊是 </style}一条 $\mathbb{Z}$-仿射浸入 $S=[\Gamma,(v_j)_{j\in J},h\colon \Gamma\to\overline{M}_{\mathbb{R}}]$，它从一个稳定的节点度量树映射到 $\overline{M}_{\mathbb{R}}$，其腿由 J索引；该映射的像恰好在由 B 索引的标记点处与 $\partial\overline{M}_{\mathbb{R}}$相交，并且在每个价数大于 1 的顶点 v 处，权重向量之和要么为 0（h 在v处是平衡的），要么包含于一面墙中（v 是弯折顶点）。此外，由 F 索引的标记点对应于有限腿。

若我们将沿着各条腿的 h 的权重向量元组记为 $\mathbf{P}=(\mathbf{P}_j)_{j\in J}$，则称 S 为 $\mathbf{P}^F$ 型的脊。脊用于参数化解析稳定映射在定义域曲线中限制到标记点凸包上的情形。特别是，固定一条脊并不能确定相应的解析稳定映射如何与例外除子相交。$\mathbf{P}^F$ 型脊的空间记为 $\mathrm{SP}(M_{\mathbb{R}},\mathbf{P}^F)$。

A 在 $M_{\mathbb{R}}$ 中的枝条是一个 $\mathbb{Z}$-仿射浸入 $[\Gamma,(r,u_1,\dots,u_t)\ h\colon \Gamma\to\overline{M}_{\mathbb{R}}]$ 其中 Γ 是一棵节点度量树，所有腿均有标记，且只有 r-腿是有限的，Γ 的像包含于 Wall 中，每个 u_i 都映射到 E^{trop}，并且 h 在每个价数大于 1 的顶点处都是平衡的。我们将 r 称为枝条的 根，将u_i 称为叶。

h 处 r 的权重向量是枝条的方向，而 h处每个叶的（有序）权重元组称为枝条的组合类型 。

注记 3.4。这些概念可以很好地结合起来，即给定一条 $[\Gamma,(v_j)_{j\in J},\ h\colon \Gamma\to\overline{M}_{\mathbb{R}}]\mathbf{P}$ 型热带曲线，若我们将 Γ^s 记作 Γ 中标记点的凸包，则：

(1) $[\Gamma^s,(v_j)_{j\in J},\ h_{|\Gamma^s}]$ 是 P 型脊，见引理 4.23]。(2) 将 h 限制在 $\Gamma\setminus\Gamma^s$ 的连通分支闭包上所得的是枝条。

特别地，我们有脊映射

$$\mathrm{Sp}\colon \mathsf{TC}(M_{\mathbb{R}},\mathbf{P})\to \mathsf{SP}(M_{\mathbb{R}},\mathbf{P}).$$

例 3.5. 图 3 在骨架中绘制了若干条热带曲线。它们展示了一个普遍事实：许多枝条都与给定的脊相容，而且与同一脊关联的不同枝条，其叶的数量可能各不相同。此外，我们往往可以改变叶的次数，使枝条的“形状”保持不变，而叶的次数变得非常大。例如，右下角枝条的形状可由枝类型 $\{(2+n,0),(1+n,0)\ -(n,n)\}$ 实现，其中每个 $n\in\mathbb{N}$ 都成立，且次数分别为 $2+n$、$1+n$ 和 n。

实际上，要定义一条脊，只需指定它在顶点附近的行为。随后，我们可以利用 $M_{\mathbb{R}}$ 的 $\mathbb{Z}$-仿射结构延拓映射，从而恢复一条扩展脊。以下构造对此作了精确说明；我们详细给出它，主要是为了建立有关曲线类的记号。

构造 3.6。 给定一个 $S=[\Gamma,(v_j)_{j\in J},h]$ P 型未扩展脊^F，$\widehat{\ }\quad\widehat{\ }\quad\widehat{\ }$，相应的扩展脊 $S=[\Gamma,(\widehat{v}_j)_{j\in J},h]$ 是对每个 $j\in F$应用以下步骤后得到的脊：

(1) 在 v_j 处粘接一份 $\ell_j:=[0;+\infty]$，并将标记点 v_j 替换为$\widehat{v}_j=\infty$ 的无穷端点 ℓ_j。(2) 在 ℓ_j 上以斜率 Pj对 h 进行仿射扩展。

对于每条新腿，我们都可以利用分段线性函数 φ: $M_{\mathbb{R}}\to N_1(Y_t,\mathbb{R})$关联一个曲线类 $\delta_j\in\mathsf{NE}(Y)$。从$\prec\qquad\qquad\qquad\prec S$到 S的扩张所对应的曲线类定义为 $\delta=\sum_{j\in F}\delta_j$。给定 $\beta\in\mathsf{NE}(Y)$，相应的扩展$\widehat{\ }\qquad\widehat{\ }$曲线类为 $\beta:=\beta+\delta$。

3.1.4. *TC()*上的拓扑。为了在热带层面参数化变形过程，我们还需要的最后一个要素是 TC($M_{\mathbb{R}}$, P) 上的拓扑。我们通过给出开邻域的一个基来明确定义它，并将在 §4.3 中利用该基证明：我们在相关的热带曲线空间中选取的是连通分支。[13], 的第一版曾考虑过这一拓扑，其中证明了它是豪斯多夫的，并证明自然的热带化映射 M^{sm}(U, P β) $\to$TC($M_{\mathbb{R}}$, P) 是连续的。该拓扑本质上由热带曲线的定义域和像的变形给出。

构造 3.7. 令 $T=[\Gamma,(v_j)_{j\in J},h]\ \in$TC($M_{\mathbb{R}}$, P)，令 $\varepsilon>0$，并令$\mathcal{W}=(W_k)_{k\in K}$ 为 $\overline{M}_{\mathbb{R}}$的一个开覆盖。定义 T的一个基本开邻域$U(T,\varepsilon,\mathcal{W})$，该邻域由满足以下条件的热带曲线 $[\Gamma',(v'_j)_{j\in J},h']$构成：

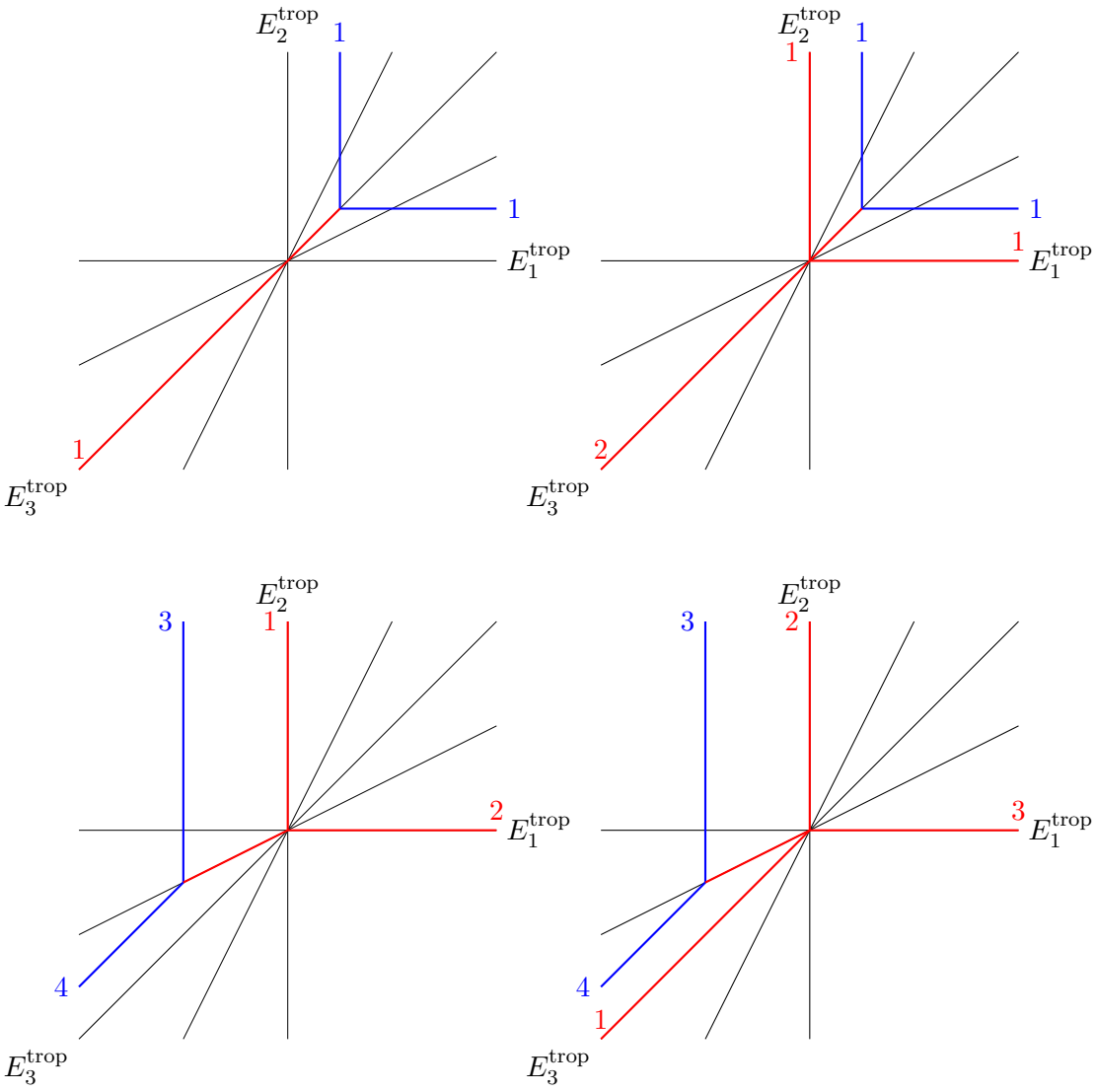


图 3. 例 3.1 中 $M_{\mathbb{R}}$ 的热带曲线。脊以蓝色绘制，枝条以红色绘制。数字表示沿各腿的 $\mathbb{Z}$-仿射浸入次数。

(1) 存在一个连续映射 $c\colon \Gamma' \to \Gamma$，它收缩 Γ'的一部分拓扑边，将每个 v'_j 映射到v_j，并将 Γ' 的每个节点映射到 Γ的一个节点。(2) 被 c 收缩的所有边的长度之和小于 ε。(3) 对于 Γ的每条边 e，令 e' 为 Γ' 中满足 $c(e')$ $= e$的边。若 e的长度有限，则 e 与 e' 的长度之差小于 ε。若 e的长度有限，则 e' 的长度大于 $1/\varepsilon$。

(4) 对于 Γ'的每个顶点 v'，若 $h(c(v')) \in W_k$，则 $h'(v') \in W_k$。(5) 对于 Γ' 中未被 c收缩的每条边 e'， h 在 $c(e')$上的导数等于 h' 在 e'上的导数。

3.2. **热带圆柱**。在本小节中，我们根据枝条的组合结构细化 [13] 的无穷小圆柱计数。

定义 3.8。设 $\mathbf{P} = (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$ 为一个权重向量，使得 $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$ 平行于墙的方向。

(1) P 型的一个（无穷小）圆柱骨架是一个 P 型的脊 $S = [[-\varepsilon; \varepsilon], (v_1, v_2) \ h]$，其中 0 是唯一的弯折顶点，并且选择 $\varepsilon > 0$ 使得 S 的像与单面墙相交。(2) P 型的一个（无穷小）热带圆柱是 $M_{\mathbb{R}}$ 中的一棵平衡带标记树，由 P 型的无穷小圆柱骨架添加一根枝条，并将一条无限常值腿粘接到脊上一个与弯折顶点不同的点得到。

根据构造，无穷小热带圆柱只有一根枝条。我们将这根枝条的类型称为圆柱的枝类型。如果一根热带圆柱是本原的，则其枝条的每条腿的次数都等于 1，且所有腿的方向各不相同。

给定一个无穷小圆柱 V，我们将对 $\mathrm{Sp}(V)$ 应用构造 3.6 中的扩张过程后得到的热带曲线定义为其关联的扩展热带圆柱 $\widehat{V}$。

例 3.9。图 3 中的所有热带曲线都是扩展热带圆柱。如果我们将脊限制在定义域的某个区域，使得像仅在弯折顶点处与墙相交，就会得到无穷小圆柱。只有右上方的热带圆柱是本原的。

定义 3.10。给定 $\beta \in \mathrm{NE}(Y)$ 和一条 P 型^{F}脊 S，计数 $N(S, \beta)\widehat{\ }$ 是某个子集 $F_w(S_w, \beta) \subset M_{0,\ n}(U, \mathbf{P}\ \beta)$ 的长度，其中 S_w 是通过将一条内部腿粘接到 S 上一个不同于弯折顶点的点而由 S 得到的。该子集分三步构造：

(1) 将脊延伸至 $S_w\widehat{\ }$。(2) 考察 $M_{0\,n,}^{\mathrm{sm}}(U, \mathbf{P}\ \widehat{\beta}) \cap \mathrm{Sp}^{-1}(\widehat{S}_w)$ 中的 $\mathrm{ev}_w^{-1}(h(w))$。(3) 考虑满足环面尾部条件 [13,Construction 9.3] 的稳定映射子集。

[13, Proposition 9.5] 证明了此计数与w的选择无关，方法是证明它等于 $(\mathrm{st}, \mathrm{ev}_w)$ 在目标的某个闭子集上的限制的次数。特别地，对于圆柱骨架，该计数就是求值映射在 w 处某个限制的次数。

现在我们定义与无穷小热带圆柱相关的计数，它们细化了圆柱脊计数。

定义 3.11。设 V 为一个热带圆柱（无穷小或扩展的），且$\beta \in \mathrm{NE}(Y)$。令 $S = \mathrm{Sp}(V)$ 为其关联的圆柱骨架，并令 S_w 如定义 3.10 中所述。与 V 相关的热带圆柱计数为

$$N(V,\beta) \coloneqq \operatorname{length}\left(F_w(S_w,\beta) \cap \operatorname{Trop}^{-1}(\widehat{V})\right).$$

注记 3.12。如果 V 是扩展的，那么 $V = V$ 和 $\beta = \beta$。如果 V 不是扩展的，那么 $N(V,\beta) = N(V,\beta)$。

注记 3.13。给定圆柱骨架 S 和一个标记 w，我们有

$$N(S,\beta) = \sum_{V \in \mathrm{Sp}^{-1}(S_w)} N(V,\beta).$$

或者，由于圆柱骨架只有一条枝条，这个和可以按枝条类型来索引。给定一个曲线类 β，只有有限种枝条类型能由曲线类为 β的稳定映射实现。

4. 本原全纯圆柱

本节证明主要定理 4.1 及其推论 4.3。我们通过一个由热带曲线参数化的变形过程来证明该定理。借鉴 Kontsevich 的平面有理曲线公式中的类似思想，我们在解析稳定映射的一个模空间中定义一个子空间，并通过考察该子空间中定义域曲线的不同退化，得到计数之间的等式。该子空间由热带数据定义。为了证明这些计数是变形不变量，我们将它们表示为一个映射的次数；该映射在解析变形上是真且平坦的。

在 §4.2 中，我们为将用于参数化变形的热带曲线设定了记号，并在 §4.3 中定义了热带变形。在 §4.4 中，我们将热带变形拉回到解析模空间。关键结果是命题 4.11，它证明热带变形在热带曲线空间中切出连通分支；以及命题 4.15，它证明将定义域曲线加以限制后，这些连通分支会拉回到解析模空间光滑轨迹的连通分支。这个真性论证依赖于 4.13，而 4.13 是对[13, 命题 10.1]的一个小推广。

最后，在 §4.5 中，我们考察定义域曲线的不同退化，并将计数表示为少一根枝条的圆柱计数与一些环面计数之和，而后者可以显式求出。关键结果是命题 4.19，它将移除一根枝条前后的计数与热带圆柱联系起来。归纳地应用这一公式，我们很容易得出定理 4.1。

4.1. **主要结果**。

定理 4.1。 设 V 是一个枝类型为$\mathbf{w} = (\mathbf{w}_s)_{1\le s\le t}$的原始无穷小热带圆柱，令 $\beta \in \mathrm{NE}(Y)$。则

$$N(V,\beta) = \sum_{\beta_1+\cdots+\beta_t=\beta} \prod_{s=1}^{t} N(V_s,\beta_s),$$

其中， V_s 是一个枝类型为$\mathbf{w}_s$ 的无穷小圆柱（见构造 ***4.4***）。

下一个引理通过确定对非零不变量有贡献的曲线类，可以简化该求和。

引理 4.2。 设 V 是一个类型为$\mathbf{P} = (\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2)$的原始无穷小圆柱，其枝在 E_i^{trop} 的方向上有一个类型为$\mathbf{w} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$ 的单叶。则至多存在 ℓ_i 个曲线类 β，使得 $N(V_s, \beta) \neq 0$。

证明。由于扩张曲线类是唯一确定的，因此问题等价于确定满足 $M^{\mathrm{sm}}_{0\,3,}(U, \mathrm{P}\ \beta) \cap \mathrm{Trop}^{-1}(\widehat{V}_w)$ 非空的 β。

使 $M^{\mathrm{sm}}(U, \mathrm{P}\ \beta)$ 非空的一个必要条件是，曲线类 β必须与 P [13, 注记 3.5] 相容。这确定了交数$\beta \cdot D_i$，因此选择 β时唯一的自由度在于交数 $\beta \cdot E_{ij}$。

根据构造，如果稳定映射 η属于 $M^{\mathrm{sm}}(U, \mathrm{P}\ \beta)$，且与例外除子$E_{kj}$ 相交的交数为 m，那么 $\mathrm{Trop}(\eta)$ 在方向 E_k^{trop} 上有一条次数为m的枝条。因此， $M^{\mathrm{sm}}(U, \mathrm{P}\ \beta) \cap \mathrm{Trop}^{-1}(\widehat{V}_w)$ 的元素只与 E_i 的一个不可约分支相交，且交数为 1。这样的分支有 ℓ_i 个，每个分支对应不同的曲线类，因为交数诱导了同构$N_1(Y) \simeq N_1(Y_t) \oplus \mathbb{Z}^E$。□

由此直接得到：

推论 4.3。令 V 为枝类型$\mathbf{w} = (\mathbf{w}_s)_{1\le s\le t}$的本原无穷小圆柱。对于每个 s，令 $E_{i\,s}^{\mathrm{trop}}\,()$ 表示相应枝条的方向。

因此，至多有 $\prod_{1\le s\le t} \ell_{i(s)}$ 个曲线类满足 $N(V<style\ id='6',\ \beta) \neq 0$。这样的曲线类 β 由对所有 s 选取一个不可约分支 $E_{i(s)j}$ 确定，因而我们有

$$N(V,\beta) = \prod_{s=1}^{t} N(V_s,\beta_s),$$

其中 β_s 是这样一个曲线类：它与 E 的每个不可约分支的交数均为 0 ，但与 $E_{i(s)j}$ 的交数除外。

4.2. **初始数据和记号**。 我们固定一个与圆柱骨架相关联的热带圆柱$V = [\Gamma^0, (v_1^0, v_2^0, v_w^0)\ h^0]$。令 $\widehat{V}$表示与 V相关联的扩展热带圆柱。假设 V 是类型为 $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_s)_{1\le s\le t}$的本原对象。这意味着每个 $\mathbf{w}_s$ 都是本原整向量，并且 V 只有一根枝条，其上有 t 片叶。

令 r 和 $(u_1,\dots,u_t)$分别表示这根枝条的根和叶。我们用 $\mathsf{w}_0=\sum_s \mathsf{w}_s$表示，并令 σ 为方向为 $-\mathsf{w}_0$的墙。

我们的假设意味着，该枝条是一棵树，只有一个映射到原点的（$t+1$）顶点。第 k 个叶是一段区间 $[0,+\infty]$，其中 0 映射到原点，而 h^0 是到射线 $\mathbb{R}_{\geq 0}\mathsf{w}_k$ 的双射。对于每个 k，我们固定 $x_{t^k}\neq O$ 和 $x_{g^k}\in]O;$ $x_{t^k}[$ 位于 $\mathbb{R}_{\geq 0}\mathsf{w}_k$ 中。我们还固定了不位于墙内的点 x_w 和 $x_{w'}$。

构造 4.4。对于每个 $1\leq k\leq t$，我们定义一个具有枝类型 w_k 的无穷小圆柱 V_k，也就是说，其枝条有一个次数为 1、方向为 w_k 的叶。我们令弯折顶点映射到 $]0$ 中的一个点；$x_g^k[,$，并选择两个边界腿的接触阶，使得 V_k 平衡。

我们现在定义以下热带曲线（图 4）：

(1) L_1 由 V 添加两个连接到枝条每个方向的内部点得到。更确切地说，对于第 i个叶，我们用$\overline{v}_{g^i}$（分别用$\overline{v}_{t^i}$）表示映射到x_{g^i}（分别映射到 x_{t^i}）的唯一点，并将常值腿 $[0,+\infty=v_{g^i}]$（分别将 $[0,+\infty=v_{t^i}]$）粘接到该点上。(2) 对于 $2\leq k\leq t+1$，L_k 由 L_{k-1} 遗忘枝条的第 k个叶得到，并将映射沿 t^k 腿的权重指定为 w_k。(3) M_k 是平衡脊，由扩展热带圆柱 V_k替换枝条的叶为边界标记点 $v_{t'}^M$，并添加一个映射到x_{g^k} 的新腿的内部腿 $v_{g'}^M$得到。(4) N_k 由扩展热带圆柱 V_k 添加两条连接到枝条的内部腿得到，新的标记点 $v_{t'}^N$（分别为 $v_{g'}^N$）映射到 x_{t^k}（分别映射到x_{g^k}）。

曲线 L_k 有 $2t+3$ 个标记点，由集合

$$J^L=\left\{1,2,w,g^1,t^1,\dots,g^t,t^t\right\}.$$

令 $B_0^L=\{1,2\}$和 $I_0^L=J^L\backslash B_0^L$分别表示 L_0的边界标记点和内部标记点。对于 $1\leq k\leq t+1$，我们设 $B_k^L=B_{k-1}^L\cup\left\{t^{k-1}\right\}$ 和 $I_k^L=I_{k-1}^L\setminus\left\{t^{k-1}\right\}$。这些集合分别对 L_k的边界标记点和内部标记点进行编号。

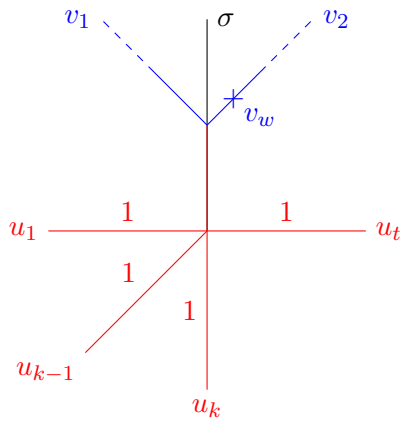
热带曲线 M_k 和 N_k 有 5 个标记点，由集合$J^M=J^N=\{1',2',w',g',t'\}$ 进行编号。对于 M-序列，内部点由 $I^M=\{w',g'\}$ 编号，边界点由 $B^M=\{1',2',t'\}$编号；而对于N-序列，内部点由 $I^N=\{w',g',t'\}$ 编号，边界点由 $B^N=\{1',2'\}$编号。

最后，我们引入

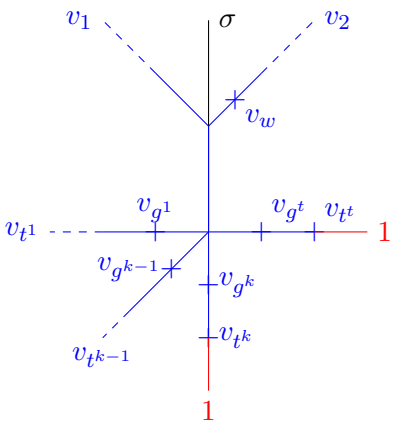
$$J^g=\left\{1,2,1',2',w,w',g^1,t^1\dots,g^t,t^t,t'\right\}=J^L\cup J^M\setminus\left\{g'\right\},$$

集合 J^g 的基数为 $2t+7$。对于 $0\leq k\leq t$，我们定义由边界指标

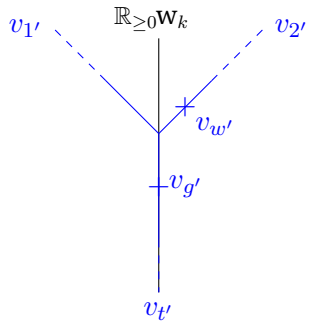
$$B_k^g=\left\{1,2,1',2',t^1,\dots,t^{k-1},t'\right\}=B_k^L\cup B^M,$$



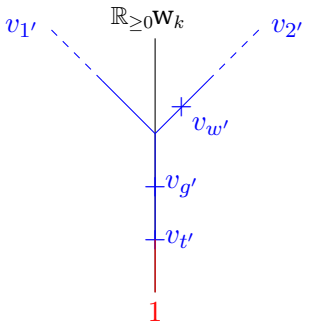
$\widehat{V}$



L_k



M_k



N_k

图 4. 初始热带圆柱 V、热带曲线族 L_k、M_k 和 N_k。

和内部指标给出的划分

$$I_k^g = \left\{w, w', g^1, \dots, g^{k-1}, g^k, t^k, \dots, g^t, t^t\right\} = I_k^L \cup I_k^M \setminus \{g'\}.$$

给定一个标记点指标集 J 以及一个内部指标子集 $I \subset J$，我们用 $\mathbf{ev}_I$ 表示由对 I的标记点进行同时求值所给出的映射。

对于 $i \in \{L, M, N, g\}$和 $1 \leq k \leq t$，用 $\mathbf{P}_k^i$表示一个长度为n_i 的权重元组：$= \left|J^i\right|$。在解析模空间层面，我们定义以下映射：

(1) $\Phi_k^L = (\mathrm{st}, \mathrm{ev}_{I_k^L})\colon \overline{M}(Y^{\mathrm{an}}, \mathbf{P}_k^L, \beta) \to \overline{M}_{0,2t+3}^{\mathrm{an}} \times (Y^{\mathrm{an}})^{2t-k+2}$.

(2) $\Phi_k^M = (\mathrm{st}, \mathrm{ev}_{I^M})\colon \overline{M}(Y^{\mathrm{an}}, \mathbf{P}_k^M, \beta) \to \overline{M}_{0,5}^{\mathrm{an}} \times (Y^{\mathrm{an}})^2$.

(3) $\Phi_k^N=(\mathrm{st},\mathrm{ev}_{I^N})\colon \overline{M}(Y^{\mathrm{an}},\mathbf{P}_k^N,\beta)\to \overline{M}_{0,5}^{\mathrm{an}}\times (Y^{\mathrm{an}})^3$.
(4) $\Phi_k^g=(\mathrm{st},\mathrm{ev}_{I_k^g})\colon \overline{M}(Y^{\mathrm{an}},\mathbf{P}_k^g,\beta)\to \overline{M}_{0,2t+7}^{\mathrm{an}}\times (Y^{\mathrm{an}})^{2t-k+3}$.
这些映射热带化为各空间热带化之间的映射，我们将其记为

$$\Phi_k^i\colon \mathsf{TC}(M_{\mathbb{R}},\mathbf{P}_k^i)\to \overline{\mathsf{M}}_{0,n_i}\times M_{\mathbb{R}}^{I_k^i},$$

其中 $\overline{\mathsf{M}}_{0,n_i}$ 表示带标记点的热带曲线 [1]的模空间。

4.3. **热带变形。**

构造 4.5. 对于 $1\le k\le t$，固定一个本原向量 w_k'，使得 $(\mathsf{w}_k,\mathsf{w}_k')$ 的混合体积等于 1。考虑一条经过 x^{g^k}、方向为 w_k' 的直线 H_k^g，以及一条经过 x_k^t、方向为 w_k' 的直线 H_k^t。它们的方程由 $M_{\mathbb{R}}$上的整仿射函数给出，我们将其拉回，得到定义 Y上卡蒂埃除子 H_k^g 和 H_k^t 的方程。根据热带交公式[12], ，有 $H_k^g\cdot D_k=H_k^t\cdot D_k=1$。

构造 4.6. 对于 $1\le k\le t+1$，定义：
(1) $\mathsf{V}_k^L=\mathsf{st}(L_k)\times x_w\times x_{g^1}\times\cdots x_{g^{k-1}}\times \mathsf{H}_k^g\times \mathsf{H}_k^t\times\cdots\times \mathsf{H}_k^t\times \mathsf{H}_k^g$。
(2) $\mathsf{V}_k^M=\mathsf{st}(M_k)\times x_{w'}\times x_{g^k}$。(3) $\mathsf{V}_k^N=\mathsf{st}(N_k)\times x_{w'}\times \mathsf{H}_k^g\times \mathsf{H}_k^t$。

并将 $i\in\{L,M,N\}$ 记作 $\mathsf{TC}_k^i=\left(\Phi_k^i\right)^{-1}(\mathsf{V}_k^i)$。

命题 4.7. 点 $L_k\in\mathsf{TC}_k^L$ 是孤立的。同理，$M_k\in\mathsf{TC}_k^M$ 和 $N_k\in\mathsf{TC}_k^N$ 也是孤立的。

证明。我们需要证明 L_k 在 TC_k^L 中不可变形。设 $U=U(L_k,\varepsilon,\mathcal{W})$ 是 $\mathsf{TC}(M_{\mathbb{R}},\mathsf{P}_k^L)$ 中 L_k 的一个基本开邻域。

首先注意，在 $\mathsf{TC}(M_{\mathbb{R}},\mathsf{P}_k^L)$ 中，L_k 的定义域 Γ_k^L 唯一可能发生的变形包括改变有限边的长度（特别是移动枝条的根的位置），以及将唯一的 $(t+1)$-顶点变形为价数更低的顶点。在选取覆盖 $\mathcal{W}$，使得 L_k 的枝条映射到 $\overline{M}_{\mathbb{R}}$ 中互不相交的区域之后，我们可以假设，在 U 中的每次变形过程中，枝条始终是区间，且其像不包含原点。

现在令 $K=[\Gamma,(v_j)^{j\in J_k^L},h]\in U\cap\mathsf{TC}_k^L$，根据定义，我们有一个收缩$c$: $\Gamma\to\Gamma_k^L$。首先我们断言，关于 K定义域的条件确保 $(t+1)$价顶点不会裂变成多个价数较低的顶点。否则，由于与该顶点相连的每条边都位于脊上，这些多个顶点会出现在 $\mathsf{st}(K)$ 中，而这就不等于 $\mathsf{st}(L_k)$。因此，K 和 L_k 的定义域作为组合树（不带度量结构）是相同的。h 在每条边上的权重都是固定的，所以 K 完全由有限边的长度和单个点的像确定。令 v_0 为 K中的 $(t+1)$价顶点。

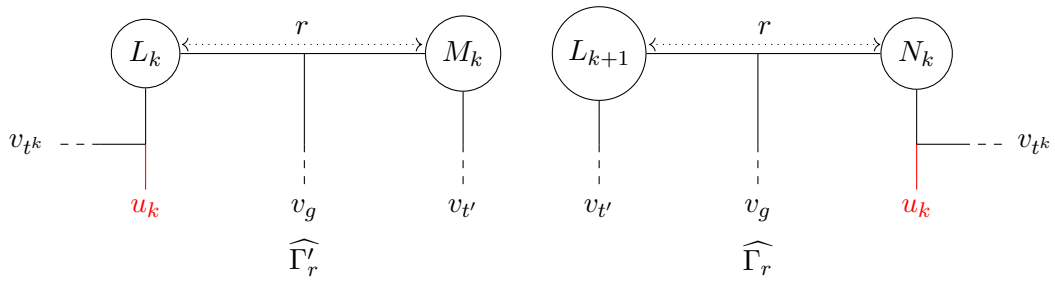


图 5。在 $\mathsf{M}_{0,\ 2t+7}$ 中热带曲线的路径；我们只将 t^k-腿连同第 k 根枝条与 t'-腿交换。L_k 的其他枝条（$k+1$ 至 t）保持不变。

对于 $i \geq k$，L_k 中第 i 条枝条的根是一个三价顶点。因此它不会变形，并且来自 Γ中的一个三价顶点 r'_i。由于带有一价无穷远顶点的区间也不会变形，与 r'_i 相连的两条边是固定的：一条是第 i 条枝条，另一条是第 t^i 条腿。于是 r'_i 位于 $\mathsf{H}^t_i \cap \mathbb{R}_{\geq 0} w_i = \{x_{t^i}\}$ 中，因此枝条的根不会变形。关于 v_{g^i} 的条件固定了构成从 v_0 到 r'_i路径的两条有限边的长度。

对于 $i < k$，连接 v_0 与 g^i-腿的边的长度由 v_{g^i} 映射到 x_{g^i} 这一条件确定。同样，关于 v_w 的像的条件确定了连接 v_w 与 v_0 的路径上各边的长度。最后，我们注意到 v_0 映射到原点，因为有多条边与 v_0 相接，且这些边分别映射到不同的墙，所以 Γ 中每条有限边的长度都等于 Γ^L_k 中相应顶点的长度。

综合以上观察可知 $K = L_k$，从而证明了该断言。对于 M_k 和 N_k，证明过程类似，但更简单。□

我们令 $\mathsf{T}^L_k = \{L_k\}$、$\mathsf{T}^M_k = \{M_k\}$ 和 $\mathsf{T}^N_k = \{N_k\}$。该命题表明，$\mathsf{T}^i_k \subset \mathsf{TC}^i_k$ 是一个连通分支。

构造 4.8。令 $r \in [0; +\infty]$。对于 $1 \leq k \leq t$，考虑元素$\Gamma_{k,r}$（分别为 $\Gamma_{k,r'}$），它属于 $\mathsf{M}_{0,2t+7}$，如图 5 所示。该元素由 L_k 和 M_k（分别为 L_{k+1} 和 N_k）的定义域稳定化沿顶点 v_{g^k} 和 $v_{g'}$粘合而成，并改变水平边的长度，使其等于参数 r。当 $r = 0$ 两个抽象图相同时，我们便得到一条路径 $\Delta \subset \mathsf{M}_{0,n+7}$，以 $r \in [-\infty; +\infty]$为参数，其标记点由 J^g索引，并按 $J^g = I^g_k \cup B^g_k$ 划分为内部标记点和边界标记点。

构造 4.9。对于 $1 \leq k \leq t$，我们设：

$$\mathsf{V}^g_k = \Delta \times x_w \times x_{w'} \times x_{g^1} \times \cdots \times x_{g^{k-1}} \times \mathsf{H}^g_k \times \mathsf{H}^t_k \times \cdots \times \mathsf{H}^g_t \times \mathsf{H}^t_t,$$

并定义 $\mathsf{TC}^g_k := \left(\Phi^g_k\right)^{-1}(\mathsf{V}^g_k)$。

我们将在 TC_k^g 中研究热带曲线。然而，在 TC_k^g 中有许多与我们无关的热带曲线，因为我们只对定义域热带曲线和内部点施加条件，而不对枝条施加条件。在接下来的构造中，我们选取 TC_k^g 中包含与计数相关的热带曲线的连通分支。

构造 4.10. 对于 $K=[\Gamma,(v_j)\ h]\in\mathsf{TC}_k^g$，我们将 P_{ij} 记为 Γ中从该顶点 v_i 到 K 的脊上的顶点 v_j 的路径。
令 T_k^g 为 TC^g 中由满足以下条件的热带曲线 $K=[\Gamma,(v_j)\ h]\in\mathsf{TC}^g$组成的子集：

(1) $P_{wt^k}\cap P_{w't^k}$ 上附着一条次数为 1、方向为 w_k的枝条。(2) 对于 $k+1\le i\le t$，$P_{wt^i}\cap P_{g^it^i}$上附着一条次数为 1、方向为 w_i的枝条。

命题 4.11. 对于 $1\le k\le t$，子集 $\mathsf{T}_k^g\subset\mathsf{TC}_k^g$ 是若干连通分支的并。

证明。 我们先证明 T_k^g是开集。令 $K=[\Gamma,(v_j)\ h]\in\mathsf{T}_k^g$。令 $\varepsilon>0$，设 $\mathcal{W}$为 $\overline{M}_{\mathbb{R}}$的有限开覆盖，并考虑 $U=U(K,\varepsilon,\mathcal{W})\cap\mathsf{TC}_k^g$。根据定义，若 $K'=[\Gamma',(v_j')\ h']\in U$，则存在连续映射 $c\colon\Gamma'\to\Gamma$，它收缩一部分拓扑边，将 v_j' 映到 v_j，并将节点映到节点。
令 $P_k=P_{wt^k}\cap P_{w't^k}$ 属于 Γ' 的定义域，并对 $i\ge k+1$，令 $P_i=P_{wt^i}\cap P_{g^it^i}$ 属于 Γ'。对于 $i\ge k$，第 i 条枝条的根 r_i 不会变形，因为它是一个三价顶点。因此，$r_i'=c^{-1}(r_i)$ 在 Γ' 中仍是一个三价顶点。此外，由于带有无限一价顶点的区间也不会变形，与 r_i' 相连的两条边是固定的。其中一条是 t^i-腿，另一条是第 i 条枝条。特别地，r_i' 是 K' 中第 i 条枝条的根，同时也是 t^i- 腿的端点。因此 $r_i'\in P_i$，从而证明构造 4.10 的条件 (1) 和 (2)。

现在证明 T_k^g 是闭的。设 $(K_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 是 T_k^g 中一个收敛到 TC_k^g 中 $K_\infty=[\Gamma_\infty,(v_j^\infty)\ h_\infty]$ 的网。令 K_∞ 在 TC_k^g 中的一个基本邻域为 U，如开性证明中所述。根据定义，存在 $\lambda_0\in\Lambda$ 使得 $K_{\lambda_0}=[\Gamma_{\lambda_0},(v_j^{\lambda_0})\ h_{\lambda_0}]\in U$。因此，我们有一个连续映射 $c\colon\Gamma_{\lambda_0}\to\Gamma$，它收缩了边的一个子集。收缩若干条边后，构造 4.10 的条件 (1) 和 (2) 仍然成立，因此 $K_\infty\in\mathsf{T}_k^g$。□

4.4. 解析变形。接下来，我们将定义位于热带空间之上的相关解析曲线空间。为此，回顾一下带有热带化映射的交换图：

$$\begin{array}{ccccc} M^{\mathrm{sm}}(U,\mathbf{P}_k^i,\beta) & \hookrightarrow & \overline{M}(Y,\mathbf{P}_k^i,\beta) & \xrightarrow{\Phi_k^i} & \overline{M}_{0,n_i}\times Y^{I_k^i} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Trop}^i} & & & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Trop}^i} \\ \mathsf{TC}(M_{\mathbb{R}},\mathbf{P}_k^i) & & \xrightarrow{\qquad\Phi_k^i\qquad} & & \overline{\mathsf{M}}_{0,n_i}\times\overline{M}_{\mathbb{R}}^{I_k^i} \end{array}$$

在定义域曲线层面，热带化映射对应于取标记点的凸包。对于稳定映射，由于我们对热带曲线的定义，热带化映射仅在光滑轨迹上给出一个到 $\mathsf{TC}(M_{\mathbb{R}}, \mathbf{P}^i_k)$ 的良定义映射。

构造 4.12。给定一个子叠 $M \subset \overline{M}(Y, \mathbf{P}^i_k, \beta)$，我们将其在 $M^{\mathrm{sd}}(U, \mathbf{P}^i_k, \beta)$ 上的限制记为 M^{sd}（分别将其在 $M_{\mathrm{sm}}(U, \mathbf{P}^i_k, \beta)$ 上的限制记为 M_{sm}）。对于 $i \in \{L, M, N, g\}$ 和 $1 \leq k \leq t+1$，定义以下子叠：

(1) $V^i_k := \left(\mathsf{Trop}^i\right)^{-1}(\mathbf{V}^i_k)$ 位于 $\overline{M}_{0,\ n_i} \times Y^{I^i_k}$ 中。
(2) $\overline{M}(V^i_k, \beta) = \left(\Phi^i_k\right)^{-1}\left(V^i_k\right)$ 位于 $\overline{M}(Y, \mathbf{P}^i_k, \beta)$ 中。
(3) $M(T^i_k, \beta) = \left(\mathsf{Trop}^i\right)^{-1}(\mathbf{T}^i_k) \cap M_{\mathrm{sm}}(U, \mathbf{P}^i_k, \beta)$。

根据构造，我们有 $M(T^i_k, \beta) \subset \overline{M}(V^i_k, \beta)^{\mathrm{sm}}$。我们继续用 $\Phi^i_k : M(T^i_k, \beta) \to V^i_k$ 表示该限制。

我们有由遗忘标记点所诱导的自然映射

$$V^g_k \longrightarrow V^i_k,\ i \in \{L, M, N\}\,,\ \text{and}\ V^g_k \longrightarrow V^L_{k+1}.$$

这些映射是真且平坦的，特别是开映射，因为它们由遗忘标记点和投影 $Y^{I^g_k} \to Y^{I^i_k}$ 给出。

下述命题表明，$M(T^i_k, \beta)$ 离紧致性并不太远。

命题 4.13。设 $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 是 $M(T^i_k, \beta)$ 中的一个网，使得 $(\mathrm{Trop}^i(f_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ 在 TC^i_k 中收敛。那么 $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 有一个子网在 $\overline{M}(V^i_k, \beta)^{\mathrm{sd}}$ 中收敛。

证明。由 $\overline{M}(Y, \mathbf{P}^i_k, \beta)$ 的真性，经过取一个子网后，不妨设 (f_λ) 收敛到某个 $f_\infty = [C_\infty, (p_{j,\infty})_{j\in J}, C_\infty \to Y] \in \overline{M}(Y, \mathbf{P}^i_k, \beta)$。

我们按照 [13, 命题 10.1] 的做法，将定义域曲线切分为主体和帽。通过在每个边界点处选取一个以该点为中心的闭圆盘平凡族，即可得到这种分解。对于 $\lambda \in \Lambda \cup \{\infty\}$，用 $\mathbb{D}_{i,\ \lambda}$ 表示与 f_λ 的第 i个边界标记点对应的（闭）帽，用 $\mathbb{B}_\lambda$ 表示相应的主体。

证明分三步进行：

(1) 帽的边界映射到环面内的一个紧子集[13, 断言 10.3]。(2) $f_\infty(\mathbb{B}_\infty) \cap D = \emptyset$ [13, 断言 10.4]。(3) 极限帽 $\mathbb{D}_{\infty,\ i}$ 没有泡 [13, 断言 10.5]。

前两个断言也适用于我们的情形，但第三个断言的证明不成立，因为我们所考虑的脊在无穷远处非横截。在曲面情形下，我们仍然可以证明 $\mathbb{D}_{i,\lambda}$ 没有泡。令 $i \in B$对应于一个无穷远处非横截的边界点。对于 $\lambda \in \Lambda \cup \{\infty\}$，令 $v_{i,\lambda}$表示热带化的定义域曲线上第 i 个标记点的像，并令 $b_{i,\lambda}$ 表示 $\partial\mathbb{D}_{i,\lambda}$的像。令 V 为一个紧多面体子集

包含所有 $\lambda \in \Lambda$ 对应的 $h_\lambda([b_{i,\lambda}; v_{i,\lambda}])$，因此它也包含 $h_\infty([b_{i,\infty}; v_{i,\infty}])$。令 $\widetilde{V} = (\pi \circ \tau_t)^{-1}(V)$。我们可以缩小 V，使其成为仿射刚性域，且只与 D的不可约分支 D_i 相交。除这个仿射刚性域外，V 还包含例外除子 E 的若干不可约分支的并。由于对所有 $\lambda \neq \infty$，$f_\lambda(\mathbb{D}_{i,\lambda}) \subset \widetilde{V}$，由 V 的紧致性以及泛稳定映射的连续性可知，这一包含关系对 $\lambda = \infty$ 也成立。

令 C_i 表示 C_∞ 中同时与 $\mathbb{B}_\infty$和$\mathbb{D}_{i,\infty}$相交的唯一不可约分支，它满足$f_{\infty,*}[C_i] \cdot D_i > 0$。令 C_b 为$\mathbb{D}_{i,\infty} \setminus C_i$的一个连通分支，它是由 $\mathbb{P}^1$构成的一棵树。注意，每个未被 f_∞ 收缩的不可约分支 $C' \subset C_b$，其像都等于 E的一个不可约分支，因此对交数 $\beta \cdot D_i$贡献$f_{\infty,*}[C'] \cdot D = \deg f_{\infty|C'} > 0$。若$C' \subset C_b$ 是这样的一个分支，则有

$$1 = \beta \cdot D_i \geq f_{\infty,*}[C_i] \cdot D_i + \deg f_{\infty|C'} \geq 2.$$

这就产生了矛盾，因此 C_b 中的每个分支都被收缩为一点。反过来，这与 f_∞ 的稳定性矛盾，所以必有 $C_b = \emptyset$。于是 f_∞ 具有稳定定义域。

□

我们将利用下一个引理，将计数几何计算约化到模空间的光滑部分。以这种方式定义不变量，可以将简单不变量解释为朴素计数。其思路是：如果子空间 $M^{\mathrm{sm}}(U, \mathbf{P}\ \beta)$中的族退化后至多成为定义域稳定的稳定映射，那么通过移除定义域曲线源自退化的稳定映射，我们就能在 $M^{\mathrm{sm}}(U, \mathbf{P}\ \beta)$中得到一个闭子空间。

引理 4.14. 设 $V \subset \overline{M}_{0,n} \times Y^I$，设 $M_V = \Phi^{-1}(V) \subset \overline{M}(Y, \mathbf{P}\ \beta)$，其中$\Phi = (\mathrm{st}, \mathrm{ev}_I)$。设 $M' \subset M_V$，并假设：

- M'是 $M_{\mathrm{sm}V}$中的若干连通分支之并。
- M'在 M_V中的扎里斯基闭包包含于 $M_{\mathrm{sd}V}$。

那么存在一个扎里斯基开集 $W \subset V$，使得 $M_W := \Phi^{-1}(W)$ 满足：

(1) $M'_W :=\ M' \cap M_W$是 M_W中的一个连通分支的并集。特别地，$M'_W \subset M_V^{\mathrm{sm}}$。(2) $\Phi :\ M'_W \to W$的限制是真映射。(3) W 与第一投影的每个纤维都有交集。

证明。设 $W = V \setminus \Phi(\overline{M'} \setminus M_{\mathrm{sm}V})$，由 Φ的真性可知，它是扎里斯基开集。设 $M_W := \Phi^{-1}(W)$。

根据构造，$\overline{M'} \cap M_W \subset M_{\mathrm{sm}V}$，因此 M'_W在 M_W中的扎里斯基闭包包含于$M_{\mathrm{sm}W}$中。由于 $M' \subset M_V^{\mathrm{sm}}$是连通分支的并，$M'_W$是 M_W^{sm}中连通分支的并。特别地，它等于其在 M_W中的扎里斯基闭包，从而 $M'_W \subset M_W$ 是连通分支的并，证明了(1)。

由于 $\Phi\colon\ M_V \to V$ 是真态的，通过基变换以及限制到连通分支的并，我们推出将 Φ 限制到 M'_W 所得映射的真性，从而证明(2)。

(3) 由 [13, 引理 3.12]，得出：该引理指出，固定定义域曲线上的纤维在求值映射下具有稠密像。□

我们将前一个引理应用于子空间 $M(T_k^i,\beta)$。为使退化论证成立，我们对所选扎里斯基开集额外施加一个相容条件。

命题 4.15. 存在扎里斯基开集 $W_k^i \subset V_k^i$，使得：

(1) $M(T_k^i,\ \beta)^{W_k^i}$ 包含于 $\overline{M}(V_k^i,\ \beta)^{\mathrm{sm}}$。(2) 限制 $\Phi_k^i\colon\ M(T_k^i,\ \beta)_{W_k^i} \to W_k^i$ 是真映射。(3) W_k^i 与第一投影映射的每个纤维都相交。(4) 遗忘映射 $W_k^g \to W_k^i$ 和 $W_k^g \to W_{k+1}^L$ 是满射

.

证明。由命题 4.11 和 4.13，我们可以将引理 4.14 应用于 $V = V_k^i$ 和 $M' = M(T_k^i,\beta)$。由此得到满足 (1)、(2) 和 (3) 的扎里斯基开集 $\widetilde{W}_k^g$、$\widetilde{W}_k^i$ 和 $\widetilde{W}_{k+1}^L$。

于是我们令

$$W_k^g = \widetilde{W}_k^g \cap \mathrm{Fgt}^{-1}\widetilde{W}_k^L \cap \mathrm{Fgt}^{-1}\widetilde{W}_k^M \cap \mathrm{Fgt}^{-1}\widetilde{W}_k^N \cap \mathrm{Fgt}^{-1}\widetilde{W}_{k+1}^L.$$

这是一个开子集。注意到遗忘映射是真且平坦的，因此也是开映射，我们定义开子集

$$W_k^i = \mathrm{Fgt}(W_k^g) \subset \widetilde{W}_k^i \text{ and } W_{k+1}^L = \mathrm{Fgt}(W_k^g) \subset \widetilde{W}_{k+1}^L.$$

条件 (1) 和 (2) 由拉回成立，条件 (3) 由 [13, 引理 3.12]成立，而条件 (4) 按构造成立。□

我们将 $M(T_k^i,\beta)_W$ 记为纤维积 $M(T_k^i,\beta) \times_{V_k^i} W_k^i$。以下推论正是我们在下一小节中定义变形不变计数所需的结果。

推论 4.16. 设：

(1) $\mathrm{Fgt}_k^L\colon \overline{M}_{0,2t+3} \times Y^{2t-k+2} \to Y^{2t-k+2}$ 表示遗忘除 w, g^k, t^k 以外所有标记点的映射。*(2)* $\mathrm{Fgt}_k^M\colon \overline{M}_{0,5} \times Y^2 \to Y^2$ 表示遗忘除 w', g', t' 以外所有标记点的映射。*(3)* $\mathrm{Fgt}_k^N\colon \overline{M}_{0,5} \times Y^3 \to Y^3$ 表示遗忘除 w', g', t' 以外所有标记点的映射。*(4)* $\mathrm{Fgt}_k^g\colon \overline{M}_{0,2t+7} \times Y^{2t-k+3} \to \overline{\mathcal{M}}_{0,5} \times Y^{2t-k+3}$ 表示遗忘除 w, w', g^k, t^k, t' 以外所有标记点的映射。

复合映射 $\Psi_k^i\colon = \mathrm{Fgt}_k^i \circ \Phi_k^i$ 限制在 $M(T_k^i,\ \beta)^{W_k^i}$ 上是真且平坦的。

证明。 由命题 4.15，映射 Φ_k^i 是真映射。根据引理 3.6]，它也是光滑的。稳定曲线模空间之间的遗忘映射对应于万有族。因此，它们是真且平坦的，所以 Fgt_k^i 是真且平坦的。由此可得，复合映射 Ψ_k^i 是真且平坦的。□

4.5. **枚举不变量与退化**。 现在我们定义与所构造的各个空间相关联的枚举不变量。由于我们成功地将范围限制在模空间的光滑轨迹上，这些定义无需借助基本类。

回顾一下，对于全切触n标记稳定映射，模空间 $M^{\mathrm{sm}}(U, \mathrm{P}\ \beta)$ 的维数为 $n-3+\dim Y=n-1$，其中指的是曲面情形。我们将结构态射记为 $q^i\colon M(T_k^i,\beta)\to \mathrm{pt}$；它是真态射。

给定一点 $q\colon X\to \mathrm{pt}$ 上的一个（导出） k-解析空间，动机上同调群 $H^{2r}(X,\mathbb{Q}(r))$ 定义为恒等态射 $\mathrm{id}_X\colon X\to X$ 的博雷尔-摩尔同调。下文中，当 q 是真导出局部完全交且$\gamma\in H^*(X,\mathbb{Q}(*))$ 时，我们使用虚基本类 $[X]$ 来定义

$$\int_X \gamma := q_*(\gamma\cap[X])\in\mathbb{Q}.$$

将 $\mathrm{pt}\in H^4(Y,\mathbb{Q}(2))$ 和 $\mathrm{pt}_\mu\in H^{2(n-3)}(\overline{M}_{0,n},\mathbb{Q}(n-3))$ 记为点类，并令 $\delta_s^\ell=[H_s^\ell]\in H^2(Y,\mathbb{Q}(1))$，其中 $1\le s\le t$ 和 $\ell\in\{g,t\}$。

定义 4.17. 令 $\beta\in \mathrm{NE}(Y)$，定义：
(1) $N(T_k^g,\beta):=\int_{M(T_k^g,\beta)_W}\left(\Psi_k^g\right)^*\Big(\text{点}_\mu\boxtimes_{I_k^g\setminus\{g^s,t^s\}_{s\ge k}}\text{点}\ \boxtimes_{k\le s\le t}(\delta_s^g\boxtimes\delta_s^t)\Big)$。 (2) $N(L_k,\beta)=\int_{M(T_k^L,\beta)_W}\left(\Psi_k^L\right)^*\Big(\boxtimes_{i\in I_k^l\setminus\{g^s,t^s\}_{s\ge k}}\text{点}\ \boxtimes_{k\le s\le t}(\delta_s^g\boxtimes\delta_s^t)\Big)$。 (3) $N(M_k,\beta)=\int_{M(T_k^M,\beta)_W}\left(\Psi_k^M\right)^*(\text{点}\ \boxtimes\text{点})$。 (4) $N(N_k,\beta)=\int_{M(T_k^N,\beta)_W}\left(\Psi_k^N\right)^*(\ \text{点}\ \boxtimes\delta_k^g\boxtimes\delta_k^t)$。

我们通过计算定义域曲线在不同退化情形下的 $N(T_k^g,\beta)$，来关联这些不变量（图6）。要刻画这些退化情形，我们只需记住定义域曲线的形状。这就是我们引入遗忘映射，并通过映射 Ψ_k^i 定义不变量的原因。

我们需要追踪扩张曲线类，因此引入以下记号：

- $\widehat{\delta}_V$ 是与从 $\widehat{V}$ 到 V 的扩张相对应的扩张曲线类。
- 设 V_k 为构造 4.4 的枝类型 w_k 无穷小圆柱，其扩张为 N_k。我们将 δ_k 记为扩张曲线类。根据构造，若将 M_k 的 $1'$ 腿和 $2'$ 腿截短为像至多与一面墙相交的有限腿，则相应的扩张曲线类$\widehat{\ }$恰为 δ_k。

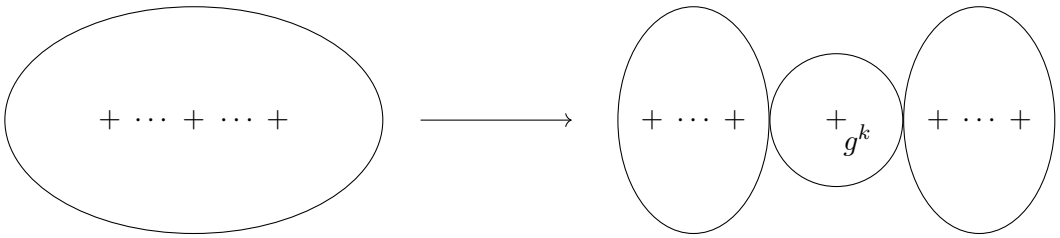


图6. 定义域曲线的退化。中间分支被收缩到 H_k^g 中的一个点。

- 考虑将 L_{t+1} 的每条边界腿截短为像至多与一面墙相交的有限腿后得到的无穷小脊。相应的扩张曲线类为 $\widehat{\delta}_V + \sum_{s=1}^t \delta_s$，其中 δ_s 与 t^s腿相关联。

下一个引理计算命题 4.19 的归纳公式中出现的环面计数。

引理 4.18. 对于 $1 \leq k \leq t$ 和 $\beta \in \mathrm{NE}(Y)$，我们有

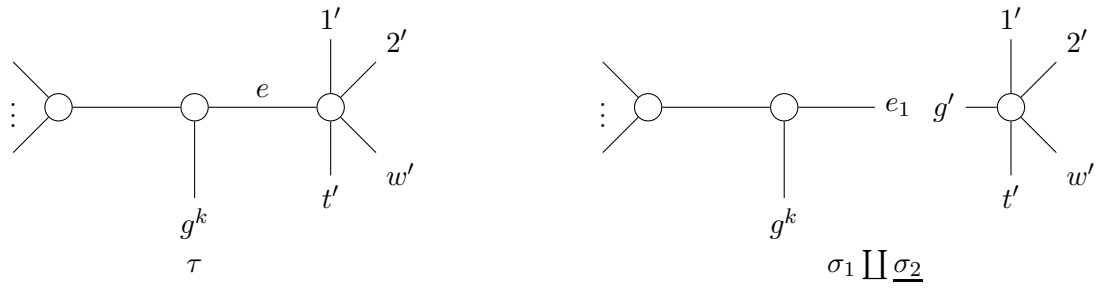
$$N(M_k, \beta) = \begin{cases} 1 & if \quad \beta = \widehat{\delta}_k, \\ 0 & else. \end{cases}$$

证明。 根据 W_k^M 的构造，模空间 $M(T_k^M, \beta)$ 包含于光滑轨迹 $M^{\mathrm{sm}}(U, \mathrm{P}_k^M, \beta)$ 中。因此，求值映射 $\mathrm{ev}_{w'}$ 和 $\mathrm{ev}_{g'}$ 是 étale 的（引理 3.6], ），且该不变量等于这两个映射在任意点上对应的纤维的交集基数。

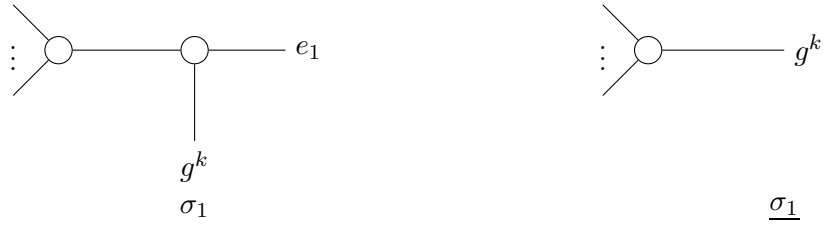
令 F 表示 $(\mathrm{ev}_{w'}, \mathrm{ev}_{g'})$ 在点 $(x_{w'}, x_{g^k}) \in M_{\mathbb{R}} \subset U$ 上的纤维（回忆一下，本质骨架自然包含于 Y）。根据定理 8.18], 任何 $f \in F$ 都是骨架性的，也就是说，它的像包含于 $\overline{M}_{\mathbb{R}}$。

令 Γ_k^M表示 $\mathrm{st}(M_k)$，我们断言 $F \subset \mathrm{st}^{-1}(\Gamma_k^M)$。事实上，对于 $f \in F$，稳定化 $\mathrm{st}(f)$ 是通过取标记点的凸包得到的。这里， f 的像是固定的，等于 M_k的像，而 f 的定义域没有任何节点。这确定了组合类型，以及 f 在 f的定义域的每条边上的斜率。于是，$\mathrm{st}(f)$ 完全由两条有限边的长度的选取所确定。这些长度可以从两个内部标记点的像以及 f的斜率中唯一恢复。

前面的观察表明，F 包含于 $(\mathrm{st}, \mathrm{ev}_{w'})^{-1}(\Gamma_k^M, x_{w'}) \cap \mathrm{Sp}^{-1}(M_k)$ 中。该集合中的稳定映射不会与例外轨迹 E 相交，因此它们唯一对应于 $M^{\mathrm{sm}}(U_t, \mathrm{P}_k^M, \pi_*\beta)$ 中的稳定映射。在环面情形下，映射 $(\mathrm{st}, \mathrm{ev}_{w'})$ 是一个开浸入，其像为 $M_{0,5} \times U$ [13, 命题 6.2]。因此， F 的基数至多为$\widehat{\ }1$，且当且仅当 $\beta = \delta_k$ 时它非空，从而证明了该引理。□



(a) 切开边 e of τ 以得到 σ。



(b) 遗忘尾部 e_1 以得到 σ'。

图7. 组合类型的退化。

命题 4.19。 沿用引理 *4.18* 中的记号。对于 $\beta \in \mathrm{NE}(Y)$ 和$1 \le k \le t$，有

$$N(L_k, \beta - \widehat{\delta}_k) = N(T_k^g, \beta) = \sum_{\beta=\beta_1+\beta_2} N(L_{k+1}, \beta_1) N(N_k, \beta_2).$$

证明。 我们来证明第一个等式。固定由划分 $(w, t^k|g^k|w', t')$ 给出的 $\mu \in \overline{M}_{0,5}$，并令 $M(T_k^g, \beta)_{W,\mu}$表示 μ 上稳定映射的子叠。对于 $i \in I_k^g$，我们将由 Y 的光滑子簇 Z_i 表示的循环记为 $\gamma_i \in H^*(X, \mathbb{Q}(*))$。假设 $Z_{g^k} = H_k^g$。

我们将使用带有 (τ, β) 标记的稳定映射来追踪退化 [4, 16, 17] 的组合结构。根据构造， $M(T_k^g, \beta)_{W,\mu}$ 中的稳定映射具有固定的图类型 τ。固定 β 到有效曲线类 $\beta = \beta_1 + \beta_2$ 的一个分解。将相应的 A-图记为 $\underline{\tau} = (\tau, (\beta_1, 0, \beta_2))$。

考虑模空间

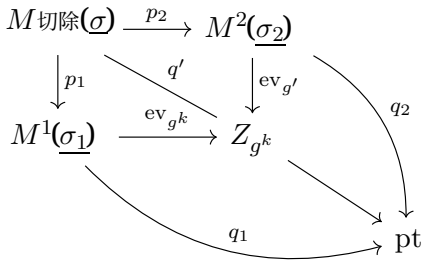
$$M^g(\underline{\tau}) := M(T_k^g, \beta)_{W,\mu} \bigcap_{i \in I_k^g} \mathrm{ev}_i^{-1}(Z_i) \cap \overline{M}(Y, \underline{\tau}),$$

用 q 表示其结构态射：$M^g(\underline{\tau}) \to \mathrm{pt}$。令 $\underline{\sigma} = \underline{\sigma_1} \coprod \underline{\sigma_2}$ 表示通过切断连接中间顶点与最右侧顶点的边，并遗忘新尾部而得到的新 A-图（图7）。考虑模空间

$$M^1(\underline{\sigma_1}) := M(T_k^L, \beta_1)_W \bigcap_{i \in I_k^L} \mathrm{ev}_i^{-1}(Z_i) \cap \overline{M}(Y, \underline{\sigma_1}),$$

$$M^2(\underline{\sigma_2}) := M(T_k^M, \beta_2)_W \bigcap_{i \in I_k^M} \mathrm{ev}_i^{-1}(Z_i) \cap \overline{M}(Y, \underline{\sigma_2}).$$

令 $M^{\mathrm{cut}}(\underline{\sigma})$ 为由以下导出拉回图定义的模空间：



令 c: $M^g(\underline{\tau}) \to M^1(\underline{\sigma_1}) \times M^2(\underline{\sigma_2})$ 表示切除边 e并遗忘新尾部 e_1的态射的复合映射。注意，在这种情况下，在定义域曲线层面，遗忘尾部 e_1 的映射是一个同构。由命题 4.15.(4) 可得，映射 c 诱导出一个同构 $M^g(\underline{\tau}) \xrightarrow{\sim} M^{\mathrm{cut}}(\underline{\sigma})$。

映射 c是一个切除边的态射与一个遗忘尾部的态射的复合映射，因此根据 [17, 定理 1.1]，它与虚基本类相容。结合引理 4.22 可得

$$q_*[M^g(\underline{\tau})] = q'_*[M^{\mathrm{cut}}(\underline{\sigma})] = q_{1*}[M^1(\underline{\sigma_1})] \cdot q_{2*}[M^2(\underline{\sigma_2})/Z_{g^k}].$$

现在我们将 Z_i 特化为 $i \in \{w, w', g^1, \cdots, g^{k-1}\}$、$Z_{g^\ell} = H_\ell^g$ 处的光滑点，并将 $Z_{t^\ell} = H_\ell^t$ 特化为 $k \leq \ell \leq t$。

根据引理 4.21 和引理 4.20

$$\begin{aligned} q_{2*}[M^2(\underline{\sigma_2})/H_k^g] &= q_*^M \left((\mathrm{ev}_{w'}^*[\mathrm{pt}] \cup \mathrm{ev}_{g'}^*[\mathrm{pt}] \cup \mathrm{ev}_{t'}^*[H_k^t]) \cap [M(T_k^M, \beta_2)_W] \right) \\ &= N(M_k, \beta_2). \end{aligned}$$

类似地，引理 4.20 给出

$$q_{1*}[M^1(\underline{\sigma_1})] = N(L_k, \beta_1).$$

由于所有与有效类分解 $\beta = \beta_1 + 0 + \beta_2$ 对应的 A-图 $\underline{\tau}$ 的并集，等于负责计数 $N(T_k^g, \beta)$ 的模空间，我们得出第一个等式

$$N(T_k^g, \beta) = \sum_{\beta_1 + \beta_2 = \beta} N(L_k, \beta_1) N(M_k, \beta_2) = N(L_k, \beta - \widehat{\delta}_k).$$

最后一个等式由引理 4.18 得出。基于划分 $(w, t'|g^k|w', t^k)$ 给出的定义域 $\mu' \in \overline{M}_{0,5}$ 进行类似推理，可证明第二个等式。□

前一个证明依赖于以下引理。这些引理是直接计算的结果，利用了导出解析空间的解析 Borel–Moore 动机上同调极佳的函子性。引理 4.20 表述了虚基本类限制到导出局部完全交子空间时的相容性。引理 4.21 将相对虚基本类与绝对虚基本类联系起来，而引理 4.22 则给出了导出纤维积的虚基本类的分解公式。

L引理 4.20. 考虑一点上的导出 k-解析空间的一个拉回方块

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{i} & X \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow{j} & Z \end{array}$$

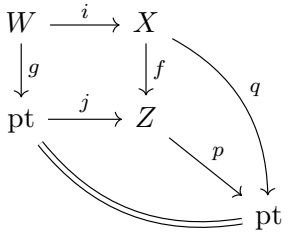
假设 j 是导出局部完全交，且 Z 是光滑的。那么 $\left(f^* \operatorname{PD}^{-1} j_*[Y]\right) \cap [X] = i_*[W]$。

证明。 首先注意，由于 Z 是光滑的，对于所有循环γ [14, , 根据定理 2.26], 我们有 $\gamma \cap [Z] = \mathbf{PD}(\gamma)$。特别地，我们得到 $\mathbf{PD}^{-1} j_*[Y] \cap [Z] = j_*[Y]$。于是

$$\begin{aligned} (f^* \operatorname{PD}^{-1} j_*[Y]) \cap [X] &= (f^* \operatorname{PD}^{-1} j_*[Y]) \cap f^![Z] \\ &= f^!(\operatorname{PD}^{-1} j_*[Y] \cap [Z]) && \text{by [17, Proposition 4.10.(1)]} \\ &= f^! j_*[Y] \\ &= i_* g^![Y] && \text{by [17, Proposition 4.11]} \\ &= i_*[W]. \end{aligned}$$

□

引理 4.21. 考虑点上的导出 k-解析空间的一个拉回方块



假设 j 是 Z 的光滑点，且 f 和 p 是真映射。令 $\gamma \in H^*(X, \mathcal{F})$，则

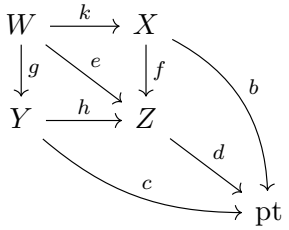
$$g_*(i^*\gamma \cap [W]) = q_*(\gamma \cap [X/Z]).$$

证明。 这是投影公式的推论

$$\begin{aligned} g_*(i^*\gamma \cap [W]) &= q_* i_*(i^*\gamma \cap [W]) \\ &= q_*(\gamma \cap i_*[W]) && \text{by the projection formula} \\ &= q_*(\gamma \cap i_* i^*[X/Z]) && \text{by base change [17, Proposition 4.7]} \\ &= q_*(\gamma \cap [X/Z]) && \text{because } i \text{ is an immersion.} \end{aligned}$$

□

L引理 4.22. 考虑一点上的导出 k-解析空间的一个拉回方块



设 $a = d \circ e$。假设 d, f 和 h 是真且为导出局部完全交。那么在 $\mathrm{H}_0^{\mathrm{BM}}(\mathrm{pt}\ \mathcal{F})$

$$a_*[W] = b_*[X] c_*[Y/Z].$$

证明。回顾推前与复合积之间的相容性[14, §2.3.4] 对于一点上的导出 k-解析空间之间的真映射 $f\colon X \to Y$，对所有 $\alpha \in \mathrm{H}_s^{\mathrm{BM}}(X/Y, \mathcal{F}(r))$ 和 $\beta \in \mathrm{H}_{s'}^{\mathrm{BM}}(Y/S, \mathcal{F}(r'))$，都有 $f_*(\alpha \circ \beta) = f_*(\alpha) \circ \beta$。

我们还回顾，对于导出 k-解析空间 X，在 $\mathrm{H}_*^{\mathrm{BM}}(X/X, \mathcal{F}(*))$ 中，右复合积、左复合积和外积 $\boxtimes$彼此相同。此外，在与动机上同调 $\mathrm{H}_s^{\mathrm{BM}}(X/X, \mathcal{F}(r)) = H^{-s}(X, \mathcal{F}(-r))$ 的识别下，它们与博雷尔-摩尔同调上动机上同调的杯积，以及动机上同调的帽积相同。特别地，此时复合积变为交换的。

现在我们来计算

$$\begin{aligned} a_*[W] &= a_*\left([W/Z] \circ [Z]\right) && \text{by [17, Proposition 4.6]} \\ &= d_* e_*\left(([X/Z] \boxtimes [Y/Z]) \circ [Z]\right) && \text{by [17, Propositions 4.6, 4.7 and 4.10.(4)]} \\ &= d_*\left(e_*\left([X/Z] \boxtimes [Y/Z]\right) \circ [Z]\right) && \text{since } e_*(\alpha \circ \beta) = e_*(\alpha) \circ \beta \\ &= d_*\left((f_*[X/Z] \boxtimes h_*[Y/Z]) \circ [Z]\right) && \text{by [17, Proposition 4.10.(6)]} \\ &= d_*\left(f_*[X/Z] \circ h_*[Y/Z] \circ [Z]\right) && \text{since } \boxtimes = \circ \\ &= d_*\left(f_*[X/Z] \circ [Z] \circ h_*[Y/Z]\right) && \text{by commutativity} \\ &= d_*\left(f_*\left([X/Z] \circ [Z]\right) \circ h_*[Y/Z]\right) && \text{since } f_*(\alpha \circ \beta) = f_*(\alpha) \circ \beta \\ &= d_*\left(f_*[X] \circ h_*[Y/Z]\right) && \text{by [17, Proposition 4.6]} \\ &= b_*[X] c_*[Y/Z] && \text{by [17, Proposition 4.10.(6)].} \end{aligned}$$

□

下一个命题给出了归纳枝条移除过程中初始步骤和最后几步出现的计数。

命题 4.23. 给定 $\beta \in \mathrm{NE}(Y)$，我们有：

(1) $N(L_1, \beta) = N(\widehat{V}, \beta)$, *the count of the extended initial cylinder.*
(2) $N(L_{t+1}, \beta) = 0$ *for* $\beta \neq \widehat{\delta}_V + \sum_{s=1}^{t} \delta_s$, *and* $N(L_{t+1}, \widehat{\delta}_V + \sum_{s=1}^{t} \delta_s) = 1$.

证明。对于 (1)，注意到计数 $N(L_1, \beta)$ 是通过在对应于指标 $I_1^L \setminus \{w\}$ 的标记点处施加除子条件得到的。根据构造，除子 H_k^g 和 H_k^t 与 β的交数为 1。因此，反复应用除子公理可知，$N(L_1, \beta)$ 等于对位于初始热带圆柱上方、具有两个边界标记点和一个内部标记点的三点标记曲线进行计数。由于我们在内部标记点处求值，根据定义，得到的就是初始圆柱的计数。

对于 (2)，注意到 $N(L_{t+1}, \beta)$ 计数的是不含任何枝条的曲线——即 不与例外除子 E相交的曲线。我们可以按照引理 4.18 的证明进行论证：将 $N(L_{t+1}, \beta)$ 求值为 $F = \mathsf{ev}_{I_{t+1}^g}^{-1}((x_i)^{i \in I_{t+1}^g})$ 的基数，该集合由骨架曲线组成；证明其中任一元素的定义域完全由内部点的像决定；然后使用环面脊计数的结果。□

现在我们可以证明主要结果了。

定理 *4.1* 的证明。归纳地应用命题 4.19，并利用命题 4.23，对于 $\beta \in \mathrm{NE}(Y)$，我们计算

$$
\begin{aligned}
N(V, \beta) &= N(\widehat{V}, \beta + \widehat{\delta}_V) \\
&= N(L_1, \beta + \widehat{\delta}_V) \\
&= \sum_{\gamma_1 + \cdots + \gamma_t + \gamma_{t+1} = \beta + \widehat{\delta}_V + \sum_{s=1}^{t} \delta_s} N\left(L_{t+1}, \gamma_{t+1} - \sum_{s=1}^{t} \widehat{\delta}_s\right) \prod_{s=1}^{t} N(N_s, \gamma_s) \\
&= \sum_{\gamma_1 + \cdots + \gamma_t = \beta + \sum_{s=1}^{t} \widehat{\delta}_s} \prod_{s=1}^{t} N(N_s, \gamma_s) \\
&= \sum_{\gamma_1 + \cdots + \gamma_t = \beta + \sum_{s=1}^{t} \widehat{\delta}_s} \prod_{s=1}^{t} N(V_s, \gamma_s - \widehat{\delta}_s) \\
&= \sum_{\beta_1 + \cdots + \beta_t = \beta} \prod_{s=1}^{t} N(V_s, \beta_s).
\end{aligned}
$$

□

参考文献

[1] Dan Abramovich、Lucia Caporaso 和 Sam Payne。“曲线模空间的热带化”。载于：高等师范学院科学年刊 *(4)* 48.4 (2015)，第 765–809 页。issn:0012-9593。doi: 10.24033/asens.2258。网址：https://doi.org/10.24033/asens。

[2] Dan Abramovich 等人。“带穿孔的对数映射”。载于：arXiv:2009.07720（2020）。[3] Hülya Argüz 和 Mark Gross。“高维热带顶点”。载于：几何与拓扑 26.5（2022），第 2135–2235 页。issn:1465-3060。doi: 10.2140/gt.2022.26.2135。url: https://doi.org/10.2140/gt.2022.26.2135。[4] K. Behrend 和 Yu. Manin。“稳定映射栈与格罗莫夫–威滕不变量”。载于：杜克数学杂志 85.1（1996）第 1–60 页。issn: 0012-7094。doi: 10.1215/S0012-7094-96-08501-4。url: https://doi.org/10.1215/S0012-7094-96-08501-4。[5] M. Gross 等人。“簇代数的典范基”。载于：arXiv:1411.1395（2017）。[6] Mark Gross、Paul Hacking 和 Sean Keel。“对数 Calabi-Yau 曲面的镜像对称 I”。载于：高等科学研究所数学出版物 122（2015），第 65–168 页。issn: 0073-8301。doi: 10.1007/s10240-015-0073-1。url: https://doi.org/10.1007/s10240-0

[7] Mark Gross 和 Rahul Pandharipande。《箭图、曲线与热带顶点》。载于：葡萄牙数学 67.2（2010），第 211–259 页。ISSN：0032-5155。DOI：10.4171/PM/1865。网址：https://doi.org/10.4171/PM/1865。[8] Mark Gross、Rahul Pandharipande 和 Bernd Siebert。《热带顶点》。载于：杜克数学杂志 153.2（2010），第 297–362 页。ISSN：0012-7094。DOI：10.1215/00127094-2010-025。网址：https://doi.org/10.1215/00127094-2010-025。[9] Mark Gross 和 Bernd Siebert。《内禀镜像对称》。载于：arXiv:1909.07649（2021）。[10] Mark Gross 和 Bernd Siebert。《典范墙结构与内禀镜像对称》。载于：数学发明229.3（2022），第 1101–1202 页。ISSN：0020-9910。DOI：10.1007/s00222-022-01126-9。网址：https://doi.org/10.1007/s00222-022-01126-9。[11] Sam Johnston。《通过弗罗贝尼乌斯结构定理比较非阿基米德与对数镜像构造》。载于：arXiv:2204.00940（2022）。[12] Eric Katz。《由环面簇得到的热带交理论》。载于：数学集刊63.1（2012），第 29–44 页。ISSN：0010-0757。DOI：10.1007/s13348-010-0014-8。网址：https://doi.org/10.1007/s13348-010-0014-8。[13] Sean Keel 和 Tony Yue Yu。《含有环面的仿射对数 Calabi-Yau 簇的弗罗贝尼乌斯结构定理》。载于：arXiv:1908.09861（2019）。[14] Adeel A. Khan。《导出栈的虚基本类 I》。载于：arXiv:1909.01332（2019）。[15] Mauro Porta 和 Tony Yue Yu。《高阶解析栈与 GAGA 定理》。载于：数学进展 302（2016），第 351–409 页。ISSN：0001-8708。DOI：10.1016/j.aim.2016.07.017。网址：https://doi.org/10.1016/j.aim.2016.07.017。

[16] Mauro Porta 和 Tony Yue Yu。《非阿基米德格罗莫夫–维滕不变量》。载于：arXiv:2209.13176（2022）。[17] Mauro Porta 和 Tony Yue Yu。《非阿基米德量子 K 不变量》。载于：arXiv:2001.05515（2022）。[18] Tony Yue Yu。《对数卡拉比–丘曲面中全纯圆柱的计数 I》。载于：*Math. Ann.*366.3-4（2016），第 1649–1675 页。ISSN：0025-5831。DOI：10.1007/s00208-016-1376-3。网址：https://doi.org/10.1007/s00208-016-1376-3。[19] Tony Yue Yu。《对数卡拉比–丘曲面中全纯圆柱的计数 II：正性、整性与粘合公式》。载于：几何与拓扑25.1（2021），第 1–46 页。ISSN：1465-3060。DOI：10.2140/gt.2021.25.1。网址：https://doi.org/10.2140/gt.2021.25.1。[20] Tony Yue Yu。《非阿基米德解析几何中的格罗莫夫紧致性》。载于：*J. Reine Angew. Math.* 741（2018），第 179–210 页。ISSN：0075-4102。DOI：10.1515/crelle-2015-0077。网址：https://doi.org/10.1515/crelle-2015-0077。[21] Tony Yue Yu。《稳定映射模空间的热带化》。载于：*Math.Z.* 281.3-4（2015），第 1035–1059 页。ISSN：0025-5874。DOI：10.1007/s00209-015-1519-3。网址：https://doi.org/10.1007/s00209-015-1519-3。