arXiv:2302.03160v1 [math.RT] 6 Feb 2023

# 张量的拉伸映射

Vyacheslav Futorny、Mikhail Neklyudov、Kaiming Zhao

摘要

我们考虑偶数阶方形张量的代数，并引入一种拉伸映射（定义2.1），使我们能够将张量表示为矩阵。拉伸映射可以理解为一种广义矩阵化。它保留张量的代数性质（定理 3.2）。与此同时，我们不一定假设拉伸映射具有单射性。去除单射性条件后，我们可以构造具有额外对称性质的拉伸映射示例（第5节）。此外，非单射性会导致张量的平均化，并且可能可用于压缩数据。

## 1 引言

与张量的分类、分解和实现相关的问题，广泛出现在纯科学和应用科学的众多领域中，例如代数和线性代数（[7],[3], [13],[14],[10], [23]）、量子物理（[22]）、数值分析（[2],[8],[9]）、信号处理（[6],[15],[18]）、化学计量学（[5]）、数据挖掘（[16], [20], [21]）等。

许多算法中张量分析的一个主要步骤是对张量进行矩阵化（也称为张量的重塑或展开 [12]），将给定张量转换为矩阵。随后便可使用整套线性代数工具。本文旨在更好地理解这一过程及其推广。我们考虑一种矩阵张量代数，并引入一种拉伸映射（定义 2.1），用于将张量表示为矩阵。拉伸映射可视为广义矩阵化。它保留张量的代数性质（定理 3.2）。同时，我们不必要求拉伸映射具有单射性。去掉单射性条件后，我们便能构造具有额外对称性的拉伸映射实例（第 5 节）。此外，非单射性会使张量得到平均化，也可能用于压缩数据。

本文考虑偶数阶方形张量构成的结合代数，即类型为 $(l, l)$ $l \in \mathbb{N}$ 的张量。该代数配备了一种乘积运算（见定义 3.1），它是爱因斯坦乘积（[17]）的推广。这种推广使我们能够研究某类可能非忠实的表示。我们证明，这些表示可以表示为平均算子与类似于张量积映射的映射的复合（定理 5.1）。平均算子（见定义 5.4）会破坏表示的某些代数性质，例如其对幺正变换的不变性。同时，第 5 节中讨论的例 5.6、5.8、5.10 表明，非平凡的平均算子会使表示具有某些额外对称性。

我们首先介绍一些记号。用 Mat($n$) 表示所有 $n \times n$ ($n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) 矩阵构成的空间。令 $l \in \mathbb{N}$ 和 $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{Z}^l$。用 Mat($\mathbb{A}$) 表示行和列均由 $\mathbb{A}$ 索引的矩阵（可能是无限矩阵）构成的空间。

本文的组织结构如下。在第2节中，对于任意函数 $F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{Z}$，我们定义拉伸映射 $\rho_F$ : 矩阵空间($\mathbb{A}$) $\to$ 矩阵空间 ($\infty$)，以及置换算子 $R_\sigma$ : 矩阵空间 ($\infty$) $\to$

矩阵空间(∞)。在第3节中，对于任意函数 $F\colon \mathbb{A}\to\mathbb{Z}$，我们在矩阵空间(𝔸)上定义卷积运算，使其成为结合代数，并给出卷积乘积的一些性质。在第4节中，我们利用拉伸映射建立一种算法，用于计算张量矩阵 $C_1\otimes C_2\otimes\ldots\otimes C_n$ 在相似意义下的规范形。在第5节中，我们证明，当𝔸是有限矩形集合时，对于任意映射 $F\colon\mathbb{A}\to\mathbb{Z}$，矩阵空间(𝔸)上的表示 $\rho_F^{\mathbb{A}}$ 是平均映射 $\Psi$ 与一个酉等价于张量积映射 $\rho_F$的映射的复合。若 $\mathbb{A}=\mathbb{Z}^l$，则表示 $\rho_F$ 是平均映射 $\Psi$ 与一个酉等价于泛张量积映射 $\rho_{F_{en}}$ 的映射的复合（5.1）。此外，我们还给出了若干拉伸映射的例子，其中矩形集合 $\mathbb{A}$ 及 $F$非单射。

作者希望，本文所定义的表示类能够应用于编码理论和图像处理。特别是，平均算子可用于根据某些规格压缩图像。

在全文中，我们分别用 $\mathbb{Z}$、$\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{C}$ 表示所有整数、正整数和复数的集合。所有矩阵和向量空间均假定定义在 $\mathbb{C}$ 上。

# 2 拉伸映射

用 Mat($n$) 表示具有标准矩阵单位基 $E_{ij}^n$、$0\le i$、$j\le n-1$ 的 $n\times n$ ($n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$) 矩阵的结合代数。如果 $n=\infty$，我们将省略 $n$，直接写作 $E_{ij}$。用 $e_i^n$、$0\le i\le n-1$ 表示 $\mathbb{C}^n$ 的标准基元素。

设 $l\in\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{A}\subset\mathbb{Z}^l$。用 Mat(𝔸) 表示行和列均由集合 $\mathbb{A}$ 索引的（可能是无限）矩阵空间；我们将此类矩阵视为作用于 $\mathbb{C}^{|\mathbb{A}|}$ 上的算子。

设 $T\in$ 矩阵空间(𝔸)。对于每个 $\overline{i},\overline{j}\in\mathbb{A}$，用 $T_{\overline{i},\overline{j}}=T_{i_1,j_1,\ldots,i_l,j_l}$ 表示 $T$的第 $\overline{i}$行第 $\overline{j}$列元素。

固定一个函数 $F\colon\mathbb{A}\to\mathbb{Z}$。如果 $\overline{i}\in\mathbb{A}$ 与 $\overline{j}\in\mathbb{A}$ 等价，记作 $\overline{i}\backsim_F\overline{j}$（简记为 $\overline{i}\backsim\overline{j}$），则

$$F(\overline{i})=F(\overline{j}).$$

特别地，令 $\overline{i}=(i_1,\ldots,i_l)$、$\overline{j}=(j_1,\ldots,j_l)$ 和 $\overline{k}=(k_1,\ldots,k_l)$。用 $\overline{i}\cdot\overline{j}:=\sum i_sj_s{}_{s=1}$表示 $\mathbb{C}^l$ 中的通常点积，并用 $F_{\overline{k}}$ 表示函数

$$F_{\overline{k}}(\overline{i})=\overline{k}\cdot\overline{i}.$$

那么，如果 $\overline{i}-\overline{j}$ 与 $\overline{k}$正交，则 $\overline{i}\backsim_{F_k}\overline{j}$。

用 $\mathbb{C}^{\mathbb{A}}$ 表示以 $\mathbb{A}$ 为指标集、具有标准基 $\{e_{\overline{i}}\colon\overline{i}\in\mathbb{A}\}$的复元组空间。定义2.1。对于任意 $T\in$ 矩阵空间 (𝔸)，定义矩阵 $\rho_F(T)\in$ 矩阵空间 (∞) 如下

$$\rho_F(T):=\sum_{\overline{i},\overline{j}\in\mathbb{A}}T_{i_1,j_1,\ldots,i_l,j_l}E_{F(\overline{i}),F(\overline{j})}.$$

我们称 $\rho_F$ 为与函数 $F$ 相关联的拉伸映射。同样，对于任意 $x\in\mathbb{C}^{\mathbb{A}}$，我们定义向量 $\rho_F^0(x)\in\mathbb{C}^\infty$ 如下:

$$\rho_F^0(x)=\sum_{\overline{i}\in\mathbb{A}}x_{i_1,i_2,\ldots,i_l}e_{F(\overline{i})}.$$

我们将 $\rho_F^0$ 称为向量拉伸映射。此外，我们定义矩阵空间 Mat(𝔸) 在 $\mathbb{C}^{\mathbb{A}}$ 上的作用 $*$ 如下：对于 $T\in$ Mat(𝔸)，$x\in\mathbb{C}^{\mathbb{A}}$，且对于每个 $\overline{i}\in\mathbb{A}$，有

$$(T*x)_{\overline{i}}:=\sum_{\overline{j},\overline{l}:\overline{j}\backsim\overline{l}}T_{\overline{i},\overline{j}}x_{\overline{l}},$$

为了使 $\rho_F(T)$ 和 $\rho_F^0(x)$ 有明确定义，我们可能需要对 $F$ 或 $T$ 加上一些限制。本文中出现 $\rho_F(T)$ 和 $\rho_F^0(x)$ 时，均表示它们有明确定义。

注 2.2. 如果 $\mathbb{A}$ 是一个有限集，且函数 $F$ 是单射的，那么拉伸映射 $\rho_F$ 是偶阶方张量的矩阵化概念（也称为重塑、展开或扁平化，第 459–460 页*[12]*）的推广。注意，与 *[11],* 第 10 页中矩阵化的定义相比，我们允许通过选择 $F$对张量元素进行任意置换。

令 $S_l$ 表示对称群。对于 $\sigma \in S_l$ 和 $\overline{i} = (i_1, \ldots, i_l)$，记 $\in \mathbb{Z}^l$，$\sigma(\overline{i}) := (i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(l)})$。

定义 2.3. 对于每个满足 $\sigma(\mathbb{A}) \subset \mathbb{A}$ 的 $\sigma \in S_l$，定义置换算子 $R_\sigma$ :$\rho_F$(矩阵空间($\mathbb{A}$)) $\to \rho_F$(矩阵空间($\mathbb{A}$)) 如下

$$R_\sigma(\rho_F(T)) := \rho_{F\circ\sigma}(T).$$

特别地，当 $\sigma = r$ 为反转置换时，即 $r(\{1, 2, \ldots, l\}) := \{l, \ldots, 2, 1\}$，$we$ 将 $R_r$ 称为反转算子。

容易验证，上述映射 $R_\sigma$ 定义良好，即它不依赖于 $T$的不同选择。若 $\rho_F$ 是满射，则 $R_\sigma$ 在 Math($\infty$) 上给出一个向量空间同构。

命题 2.4. 假设 $\sigma_1$、$\sigma_2 \in S_l$ 和 $\sigma_p(\mathbb{A}) \subset \mathbb{A}$、$p = 1$，2。则

$$R_{\sigma_1} R_{\sigma_2} = R_{\sigma_2\sigma_1}, R_{\sigma_1}^{-1} = R_{\sigma_1^{-1}}.$$

根据映射 $\rho_F$ 的定义，我们立即得到以下结论。

命题 2.5. 如果 $F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{Z}$ 是单射，则拉伸映射 $\rho_F$ 是单射。

# 3 卷积运算

Not注意到，矩阵空间 Mat($\mathbb{A}$) 在通常的矩阵乘积下通常不封闭。尽管如此，我们 can 在矩阵空间 Mat($\mathbb{A}$) 上定义如下卷积运算。

定义 3.1。固定一个函数 $F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{Z}$，令 $T^1, T^2 \in$ Mat($\mathbb{A}$)。定义

$$(T^1 * T^2)_{\overline{i},\overline{j}} := \sum_{\overline{m}\backsim\overline{n}} T^1_{\overline{i},\overline{m}} T^2_{\overline{n},\overline{j}}$$

若 $\mathbb{A}$ 是无限集，我们可能需要对 $T_1$ 和 $T_2$ 加上一些限制，才能使 $T^1 * T^2$ 定义良好。从现在起，遇到此类记号时，我们都假设 $T^1 * T^2$ 定义良好。

下面的结果说明拉伸映射 $\rho_F$ 在卷积运算下的性质。

定理 3.2。设 $F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{Z}$ 是任意函数，$\mathbb{A} \subset \mathbb{Z}^l$, $T^1, T^2 \in$ Mat($\mathbb{A}$)。则有

$$\rho_F(T^1 * T^2) = \rho_F(T^1)\rho_F(T^2).$$

此外，对于任意 $x \in \mathbb{C}^{\mathbb{A}}$ 和 $T \in$ 矩阵空间($\mathbb{A}$)，我们有

$$\rho_F^0(T * x) = \rho_F(T)\rho_F^0(x).$$

证明。第一个等式可直接由标准基 $E_{ij}$ 的乘积规则得出。事实上，我们有

$$\begin{aligned}\rho_F(T^1)\rho_F(T^2) &= \sum_{\overline{n}_1,\overline{n}_2} T^1_{\overline{n}_1,\overline{n}_2} E_{F(\overline{n}_1),F(\overline{n}_2)} \sum_{\overline{n}_3,\overline{n}_4} T^2_{\overline{n}_3,\overline{n}_4} E_{F(\overline{n}_3),F(\overline{n}_4)} \\ &= \sum_{\overline{n}_1,\overline{n}_4} \sum_{\overline{n}_2,\overline{n}_3:F(\overline{n}_2)=F(\overline{n}_3)} T^1_{\overline{n}_1,\overline{n}_2} T^2_{\overline{n}_3,\overline{n}_4} E_{F(\overline{n}_1),F(\overline{n}_4)} \\ &= \rho_F(T^1 * T^2). \end{aligned} \tag{3.1}$$

对于第二个等式，同理可得：

$$\begin{aligned}\rho_F(T)\rho^0_F(x) &= \sum_{\overline{n}_1} \sum_{\overline{n}_2} T_{\overline{n}_1,\overline{n}_2} E_{F(\overline{n}_1),F(\overline{n}_2)} \sum_{\overline{l}} x_{\overline{l}} e_{F(\overline{l})} \\ &= \sum_{\overline{n}_1} \left[ \sum_{\overline{l} \backsim \overline{n}_2} T_{\overline{n}_1,\overline{n}_2} x_{\overline{l}} \right] e_{F(\overline{n}_1)} = \rho_F(Tx). \end{aligned} \tag{3.2}$$

□

如下定义 Id ∈矩阵空间(𝔸)：

$$\mathrm{Id}_{\overline{i},\overline{j}} := \prod_{m=1}^{l} \delta_{i_m,j_m}.$$

命题 3.3（卷积乘积 $*$ 的性质）。(a) 卷积运算 $*$ 具有结合性。

*(b)*

$$(T * \mathrm{Id})_{\overline{i},\overline{j}} = \sum_{\overline{m} \backsim \overline{j}} T_{\overline{i},\overline{m}}, \quad (\mathrm{Id} * T)_{\overline{i},\overline{j}} = \sum_{\overline{m} \backsim \overline{i}} T_{\overline{m},\overline{j}}.$$

证明。a) 确实，我们有

$$\left[T^1 * (T^2 * T^3)\right]_{\overline{i},\overline{j}} = \sum_{\overline{k} \backsim \overline{l}} \sum_{\overline{m} \backsim \overline{n}} T^1_{\overline{i},\overline{l}} T^2_{\overline{k},\overline{m}} T^3_{\overline{n},\overline{j}} = \left[(T^1 * T^2) * T^3\right]_{\overline{i},\overline{j}}.$$

b) 由 $*$ 的定义立即可得。

□

定义 3.4。定义伴随算子 $\star$：矩阵空间(𝔸) $\mapsto$ 矩阵空间(𝔸)，其定义为

$$(\star T)_{\overline{i},\overline{j}} := T_{\overline{j},\overline{i}}.$$

我们有以下关于伴随算子的性质。

引理 3.5。对于 $T^1$、$T^2 \in$ Mat(𝔸)，我们有

$$\left[\rho_F(T^2 * T^1)\right]^{\mathrm{t}} = \rho_F((\star T^1) * (\star T^2)),$$

其中 $^{\mathrm{t}}$ 表示矩阵通常的转置。

证明。直接计算。 □

现在假设集合 $\mathbb{A}$ 是有限的。如果 $T \in$ 属于 $\mathbb{A}$ 的矩阵空间，那么 $\rho_F(T)$ 是一个无限矩阵。令 $\rho_F^{\mathbb{A}}(T)$ 为 $\rho_F(T)$ 的子矩阵，其行和列对应于集合 $F(\mathbb{A})$。因此，对于任意 $T \in$ 属于 $\mathbb{A}$ 的矩阵空间，矩阵 $\rho_F^{\mathbb{A}}(T)$ 都是一个有限方阵。

**Co推论 3.6.** 假设 $\mathbb{A}$ 是有限集。定义映射 $\kappa$ : 矩阵空间$(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$，使得 $\kappa(T) = \det \rho_F^{\mathbb{A}}(T)$，其中 $T \in$ 属于矩阵空间$(\mathbb{A})$。那么

$$\kappa(T^1 * T^2) = \kappa(T^1)\kappa(T^2),\ T^1, T^2 \in \mathrm{Mat}(\mathbb{A}). \tag{3.3}$$

例 3.7（张量积映射）。假设集合 $\mathbb{A}$ 具有“矩形”形状，即

$$\mathbb{A} = \prod_{i=1}^{l} \mathbb{A}_i,$$

其中 $\mathbb{A}_i = \{0, 1, \dots, n_i - 1\}$、$i = 1$、…、$l$。固定 $\overline{k} \in \mathbb{A}$，使得 $\overline{k} =$(k1、k2、…、kl)，其中 $k_1 =$1、$k_2 = n_1$、$k_3 = n_1 n_2$、…、$k_l = n_1 n_2 \dots n_{l-1}$，并考虑函数 $F_{\overline{k}}$: $F_{\overline{k}}(\overline{i}) = \overline{k} \cdot \overline{i}$、$\overline{i} \in \mathbb{A}$。由带余除法的唯一性，$\overline{m} \backsim \overline{n}$ 等价于等式 $\overline{m} = \overline{n}$。因此，这种情况对应于张量积映射，我们将在下一节中进一步详细讨论。

若 $\overline{k}$ 满足例 3.7 中的条件，则将映射$F_{\overline{k}}$ 记为 $F_{\mathrm{TP}}$。注意，$F_{\mathrm{TP}}(\mathbb{A}) = \{0, \dots, n_1 n_2 \dots n_l - 1\}$。

注 3.8. 若关系 $\backsim$下的每个等价类都是单元素集（如例 3.7），则元素 Id 是乘积 $*$的单位元。

# 4 张量积映射

本节讨论张量积映射。设 $n_1, \dots, n_l$ 为正整数，$\mathbb{A}$为相应的矩形集合:

$$\mathbb{A} = \prod_{i=1}^{l} \{0, \dots, n_i - 1\} \subset \mathbb{Z}^l.$$

对于任意矩阵 $A_k = (A_{ij}^k) \in$矩阵空间$(n_k)$，$0 \le i, j \le n_k - 1$, $k = 1, \dots, l$，考虑一个$l$-张量 $T = A_1 \otimes A_2 \otimes \dots \otimes A_l \in \bigotimes_{s=1}$矩阵空间$(n_s)$。那么 $T$可视为矩阵空间$(\mathbb{A})$中的一个矩阵：

$$T_{\mathbf{i},\mathbf{j}} = T_{i_1, j_1, i_2, j_2, \dots, i_l, j_l} = A^1_{i_1, j_1} A^2_{i_2, j_2} \dots A^l_{i_l, j_l},$$

其中 $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_l)$, $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_l)$, $0 \le i_s, j_s \le n_s - 1$, $s = 1, \dots, l$。

那么，张量积映射

$$\rho_{n_1, \dots, n_l} : \bigotimes_{s=1}^{l} \mathrm{Mat}(n_s) \to \mathrm{Mat}(n_1 n_2 \dots n_l)$$

显式定义如下:

$$\rho_{n_1,\ldots,n_l}(T)=\sum_{i_1,j_1=0}^{n_1-1}\sum_{i_2,j_2=0}^{n_2-1}\cdots\sum_{i_l,j_l=0}^{n_l-1}T_{i_1,j_1,i_2,j_2,\ldots,i_l,j_l}E_{I,J}^{N},$$

其中 $N=n_1n_2\ldots n_l$，$I=i_1+n_1i_2+n_1n_2i_3+\ldots+n_1\ldots n_{l-1}i_l$，$J=j_1+n_1j_2+n_1n_2j_3+\ldots+n_1\ldots n_{l-1}j_l$。

考虑拉伸映射 $\rho_{\mathrm{TP}}=\rho_{F_{\mathrm{TP}}}$ 及其诱导映射

$$\rho_{\mathrm{TP}}^{f}:\mathrm{Mat}(\mathbb{A})\to\mathrm{Mat}(n_1\ldots n_l).$$

将 $l$ 阶张量 $T$ 视为矩阵 $(T_{\mathbf{i},\mathbf{j}})_{\mathbf{i},\mathbf{j}\in\mathbb{A}}$后，我们可以将 $\bigotimes_{s=1}^{l}\mathrm{Mat}(n_s)$ 看作 $\mathrm{Mat}(\mathbb{A})$ 的一个子空间。我们有 $\rho^{f}{}_{\mathrm{TP}}(T)=\rho_{n_1,\ldots,n_l}(T)$。因此，张量积映射 $\rho_{n_1,\ldots,n_l}$ 是将 $\rho^{f}{}_{\mathrm{TP}}$ 限制在 $\bigotimes_{s=1}^{l}\mathrm{Mat}(n_s)$ 上所诱导的映射。

类似地，我们有向量拉伸映射的如下局部形式。设 $x\in\bigotimes_{s=1}^{l}\mathbb{C}^{n_s}$ 是一个 $l$ 阶张量。若 $\mathbf{i}=(i_1,\ldots,i_l)$，则令 $x_{\mathbf{i}}=\{x_{i_1,i_2,\ldots,i_l}\}$, $0\le i_s\le n_s-1$, $s=1,\ldots,l$。那么对应关系 $x\mapsto(x_{\mathbf{i}})$ 定义了映射

$$\rho_{n_1,\ldots,n_l}^{0}:\bigotimes_{s=1}^{l}\mathbb{C}^{n_s}\to\mathbb{C}^{n_1n_2\ldots n_l},$$

它可以显式地写成如下形式：

$$\rho_{n_1,\ldots,n_l}^{0}(x)=\sum_{i_1=0}^{n_1-1}\sum_{i_2=0}^{n_2-1}\cdots\sum_{i_l=0}^{n_l-1}x_{i_1,i_2,\ldots,i_l}e_{I}^{N},$$

其中 $N=n_1n_2\ldots n_l$, $I=i_1+n_1i_2+n_1n_2i_3+\ldots+n_1\ldots n_{l-1}i_l$。将 $\bigotimes_{s=1}^{l}\mathbb{C}^{n_s}$ 与 $\mathbb{C}^{\mathbb{A}}$,对应起来，我们看到映射 $\rho_{n_1,\ldots,n_l}^{0}$ 与 $\rho_{F_{\mathrm{TP}}}^{0}$ 一致。

矩阵空间 $\bigotimes_{s=1}^{l}\mathrm{Mat}(n_s)$ 上的卷积运算具有以下形式：

$$(T^1*T^2)_{\mathbf{i},\mathbf{j}}=\sum_{\mathbf{m}}T^1_{\mathbf{i},\mathbf{m}}T^2_{\mathbf{m},\mathbf{j}},\ T^1,T^2\in\bigotimes_{s=1}^{l}\mathrm{Mat}(n_s).$$

由定理 3.2 可立即得到

推论 4.1。

(a) 对任意 $T^1,T^2\in\bigotimes_{s=1}^{l}$ 矩阵空间 $(n_s)$，有

$$\rho_{n_1,\ldots,n_l}(T^1*T^2)=\rho_{n_1,\ldots,n_l}(T^1)\rho_{n_1,\ldots,n_l}(T^2).$$

(b) 对于任意的 $x\in\bigotimes_{s=1}^{l}\mathbb{C}^{n_s}$ 和 $T\in\bigotimes_{s=1}^{l}$ 矩阵空间$(n_s)$，我们有

$$\rho_{n_1,\ldots,n_l}^{0}(T*x)=\rho_{n_1,\ldots,n_l}(T)\rho_{n_1,\ldots,n_l}^{0}(x).$$

(c) 设 $\kappa:\bigotimes_{s=1}^{l}$矩阵空间$(n_s)\to\mathbb{C}$, $\kappa(T)$ =行列式 $\rho_{n_1,\ldots,n_l}(T)$。那么

$$\kappa(T^1 * T^2)=\kappa(T^1)\kappa(T^2),\ T^1,T^2\in\bigotimes_{s=1}^{l}\mathrm{Mat}(n_s). \tag{4.1}$$

因此，我们得到映射 $\rho_{n_1,\ldots,n_l}$ 的以下性质。

推论 4.2。(a) 设 $A_s,B_s\in$矩阵空间$(n_s)$, $s=1,\ \ldots,\ l$。则

$$\rho_{n_1,\ldots,n_l}(A_1B_1\otimes A_2B_2\otimes\ldots\otimes A_lB_l)=\rho_{n_1,\ldots,n_l}(A_1\otimes A_2\otimes\ldots\otimes A_l)\rho_{n_1,\ldots,n_l}(B_1\otimes B_2\otimes\ldots\otimes B_l)。$$

(b) 令 $I_k$ 表示 $k\times k$ 阶单位矩阵。则

$$\rho_{n_1,\ldots,n_l}(I_{n_1}\otimes I_{n_2}\otimes\ldots\otimes I_{n_l})=I_{n_1n_2\ldots n_l}.$$

(c) 映射 $\rho_{n_1,\ldots,n_l}:\bigotimes_{s=1}$矩阵空间$(n_s)\to$矩阵空间$(n_1n_2\ldots n_l)$ 是一个结合代数同构。

证明。(a) 和 (b) 的结论由推论 4.1 得出，而 (c) 则由以下事实得出：给定 $i_1,\ \ldots,\ i_l$ 使得 $0\le i_s\le n_s-1, s=1,\ \ldots,\ l$，任意介于 0 和 $n_1n_2\ldots n_l-1$ 之间的 $n\in\mathbb{Z}$ 都可以唯一表示为

$$n=i_1+n_1i_2+n_1n_2i_3+\ldots+n_1\ldots n_{l-1}i_l.$$

□

提醒读者，张量代数上的伴随算子

$$\star:\bigotimes_{s=1}^{l}\mathrm{Mat}(n_s)\mapsto\bigotimes_{s=1}^{l}\mathrm{Mat}(n_s)$$

具有如下形式：

$$(\star T)_{\mathbf{i},\mathbf{j}}:=T_{\mathbf{j},\mathbf{i}},\ T\in\bigotimes_{s=1}^{l}\mathrm{Mat}(n_s).$$

将 $\rho^*_{n_1,\ldots,n_l}(T)$ 记为代数 Mat$(n_1n_2\ldots n_l)$ 中 $\rho_{n_1,\ldots,n_l}(T)$ 的伴随元素。映射 $\star$ 具有以下性质。

设对于某个 $n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$，有 $C,D\in$Mat$(n)$。回忆一下，这些矩阵相似，记作$C\backsim D$，如果存在一个可逆矩阵 $U\in$Mat$(n)$，使得 $D=UCU^{-1}$。我们有以下推论。

推论 4.3.(a) 对任意 $T\in\bigotimes$Mat$(n_s)_{s=1}$

$$(\rho_{n_1,\ldots,n_l}(T))^{\mathrm{t}}=\rho_{n_l,\ldots,n_1}(\star T).$$

(b) 设 $C_i,D_i\in$矩阵空间$(n_i)$，$i=1,\ldots,l$，使得对于所有 $i$， $C_i$ 都与 $D_i$ 相似。那么 $\rho_{n_1,\ldots,n_l}(C_1\otimes\ldots\otimes C_l)$ 和 $\rho_{n_1,\ldots,n_l}(D_1\otimes\ldots\otimes D_l)$ 相似。

证明。结论 (a) 由 $\star$ 算子的定义立即得出。下面证明 (b)。我们有 $D_i = U_i C_i U_i^*$, $i = 1, \ldots, l$, 其中 $U_i \in$ 矩阵空间($k_i$) 是一个酉矩阵。于是由 (a) 部分和推论 4.3 的 (a) 可得

$$\rho_{n_1,\ldots,n_l}(D_1 \otimes D_2 \otimes \ldots \otimes D_l) =$$

$$\prod_{i=1}^{l} \rho_{n_1,\ldots,n_l}(I \otimes \ldots \otimes U_i \otimes \ldots I) \rho_{n_1,\ldots,n_l}(C_1 \otimes C_2 \otimes \ldots \otimes C_l) \left[ \prod_{i=1}^{l} \rho_{n_1,\ldots,n_l}(I \otimes \ldots \otimes U_i \otimes \ldots I) \right]^{-1}.$$

Hence, the result follows. □

例 4.4. 设 $l = 2$。则经简单计算可知，该映射

$$\mathrm{Mat}(n) \ni A \mapsto \rho_{k,n}(\mathrm{Id}_{\mathrm{Mat}(k)} \otimes A) \in \mathrm{Mat}(kn)$$

是一个代数同态，其像沿对角线和垂直对角线方向都具有 $A$ 个 $k$ 倍的“拉伸”。这个例子说明了为何称其为拉伸映射。

我们有如下结论。

命题 4.5. 设 $B_i \in$ 矩阵空间($n_i$), $i = 1, \ldots, l$。则

*(a)*

$$R_\sigma(\rho_{n_1,\ldots,n_l}(B_1 \otimes B_2 \otimes \ldots \otimes B_l)) = \rho_{n_{\sigma(1)},\ldots,n_{\sigma(l)}}(B_{\sigma(1)} \otimes B_{\sigma(2)} \otimes \ldots \otimes B_{\sigma(l)}).$$

特别地，

$$R_r(\rho_{n_1,\ldots,n_l}(B_1 \otimes B_2 \otimes \ldots \otimes B_l)) = \rho_{n_l,\ldots,n_1}(B_l \otimes B_{l-1} \otimes \ldots \otimes B_1).$$

(b) 对任意 $\sigma \in S_l$，算子 $R_\sigma$ 都是等距映射。

证明。由定义可直接得出结论 (a)。等距性质可由以下观察得出： $R_\sigma$ 将矩阵空间 Mat($n_1 n_2 \ldots n_l$) 的基中的元素重新排列。事实上，正如我们在推论 4.1 中所注意到的，任何满足 $0 \leq m \leq n_1 n_2 \ldots n_l - 1$ 的 $m \in \mathbb{Z}$ 都可以唯一地表示为 $m = \overline{k} \cdot \overline{i}$ 的形式，其中 $\overline{k} = (1, n_1, n_1 n_2, \ldots, n_1 n_2 \ldots n_{l-1})$, $\overline{i} = (i_1, \ldots, i_l)$, $0 \leq i_s \leq n_s - 1$, $s = 1, \ldots, l$。因此，算子 $R_\sigma$ 是一个双射，它将矩阵单位 $E_{ml}^{n_1 n_2 \ldots n_l}$, $0 \leq m, l \leq n_1 n_2 \ldots n_l - 1$ 映射为矩阵单位。 □

注 4.6。反转算子 $R_r$ 为推论 4.3 的 (b) 部分提供了另一种推导方法。我们仅考虑 $l = 2$ 的情形。一般情形可类似处理。我们有

$$\rho_{n_1,n_2}(C_1 \otimes C_2) \backsim \rho_{n_1,n_2}(D_1 \otimes C_2)$$

$\Rightarrow$

$$\rho_{n_2,n_1}(C_2 \otimes C_1) \backsim \rho_{n_2,n_1}(C_2 \otimes D_1) = R_r(\rho_{n_1,n_2}(D_1 \otimes C_2))$$
$$\backsim R_r(\rho_{n_1,n_2}(D_1 \otimes D_2)) = \rho_{n_1,n_2}(D_2 \otimes D_1).$$

再次应用反转算子 $R_r$，我们便得到结果。

推论 4.3 的 (b) 部分使我们能够在相似意义下对 $\rho_{n_1,\ldots,n_l}(C_1 \otimes \ldots \otimes C_l)$ 进行分类。实际上，只需计算直和约当块的张量积的 $\rho_{n_1,\ldots,n_l}$。这里我们将计算两个约当块之和的张量积的 $\rho_{n_1,\ldots,n_l}$。一般情形更为繁琐，可以用类似的方法得到。我们将使用以下公式

引理 4.7。设 $C_i \in$ 矩阵空间$(\mu_i)$、 $D_i \in$ 矩阵空间$(\nu_i)$，其中 $i = 1,\ 2$。（

*a).*

$$\rho_{\mu_1,\nu_1}(C_1 \otimes D_1) \backsim \rho_{\nu_1,\mu_1}(D_1 \otimes C_1).$$

*(b).*

$$\rho_{\mu_1+\mu_2,\nu_1+\nu_2}((C_1 \oplus C_2) \otimes (D_1 \oplus D_2))$$
$$\backsim \rho_{\mu_1,\nu_1}(C_1 \otimes D_1) \oplus \rho_{\mu_1,\nu_2}(C_1 \otimes D_2) \oplus \rho_{\mu_2,\nu_1}(C_2 \otimes D_1) \oplus \rho_{\mu_2,\nu_2}(C_2 \otimes D_2).$$

证明。按照相同的模式同时重新排列行和列。 □

我们还有以下关于 $\rho_{n_1,\dots,n_l}$ 的像（相似意义下）的公式。

定理 4.8。用 $J_\mu(a)$ 表示大小为 $\mu$ 、特征值为 $a$ 的 Jordan 胞腔。令

$$C := \bigoplus_{i=1}^{m} J_{\mu_i}(a_i),\ D := \bigoplus_{j=1}^{n} J_{\nu_j}(b_j),$$

其中

$$\overline{\mu}_l := \sum_{k=0}^{l} \mu_k,\ \overline{\nu}_s := \sum_{k=0}^{s} \nu_k, l = 0, \dots, m;\ s = 0, \dots, n\,(\mu_0 = \nu_0 = 0).$$

然后 $\rho_{\overline{\mu}_m,\ \overline{\nu}_n}(C \otimes D) =$

$$\begin{aligned} &= \sum_{l,s=0}^{m,n} a_l b_s \sum_{i=\overline{\mu}_l}^{\overline{\mu}_{l+1}-1} \sum_{j=\overline{\nu}_s}^{\overline{\nu}_{s+1}-1} E_{i+\overline{\mu}_m j, i+\overline{\mu}_m j} + \sum_{l,s=0}^{m,n} b_s \sum_{i=\overline{\mu}_l}^{\overline{\mu}_{l+1}-2} \sum_{j=\overline{\nu}_s}^{\overline{\nu}_{s+1}-1} E_{i+\overline{\mu}_m j, i+\overline{\mu}_m j+1} \\ &+ \sum_{l,s=0}^{m,n} a_l \sum_{i=\overline{\mu}_l}^{\overline{\mu}_{l+1}-1} \sum_{j=\overline{\nu}_s}^{\overline{\nu}_{s+1}-2} E_{i+\overline{\mu}_m j, i+\overline{\mu}_m j+\overline{\mu}_m} + \sum_{l,s=0}^{m,n} \sum_{i=\overline{\mu}_l}^{\overline{\mu}_{l+1}-2} \sum_{j=\overline{\nu}_s}^{\overline{\nu}_{s+1}-2} E_{i+\overline{\mu}_m j, i+\overline{\mu}_m j+\overline{\mu}_m+1}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

注记 4.9。定理 4.8 可用于在酉等价意义下对 $\rho_{n_1,\dots,n_l}$ 的像进行分类。

注记 4.10。请注意，上述定理表明

$$\rho_{\mu,\nu}(J_\mu(a) \otimes J_\nu(b)) \neq \rho_{\nu.\mu}(J_\nu(b) \otimes J_\mu(a))$$

即使在 $\mu = \nu > 1$ 和 $a \neq b$ 的情况下也是如此。事实上，我们有

$$\begin{aligned} \rho_{\mu,\nu}(J_\mu(a) \otimes J_\nu(b)) \quad &= ab \sum_{i=0}^{\mu-1} \sum_{k=0}^{\nu-1} E_{i+\mu k, i+\mu k} + b \sum_{i=0}^{\mu-2} \sum_{k=0}^{\nu-1} E_{i+\mu k, i+\mu k+1} \\ &+ a \sum_{i=0}^{\mu-1} \sum_{k=0}^{\nu-2} E_{i+\mu k, i+\mu k+\mu} + \sum_{i=0}^{\mu-2} \sum_{k=0}^{\nu-2} E_{i+\mu k, i+\mu k+\mu+1}. \end{aligned}$$

我们有以下结果。

定理 4.11。设 $p$、 $q \in \mathbb{N}$、 $a$、 $b \in \mathbb{C}$.

(1) 当 $ab \neq 0$ 时，

$$\rho_{p,q}(J_p(a) \otimes J_q(b)) \backsim \oplus_{k=1}^{\min\{p,q\}} J_{p+q-2k+1}(ab).$$

(2) 当 $a \neq 0$ 时,

$$\rho_{p,q}(J_p(a) \otimes J_q(0)) \backsim \oplus_{k=1}^{p} J_q(a).$$

(3) 当 $b \neq 0$ 时,

$$\rho_{p,q}(J_p(0) \otimes J_q(b)) \backsim \oplus_{k=1}^{q} J_p(b).$$

*(4)*

$$\rho_{p,q}(J_p(0) \otimes J_q(0)) \backsim \oplus_{k=1}^{\min\{p,q\}-1}(J_k(0) \oplus J_k(0)) \oplus_{k=1}^{|p-q|+1} J_{\min\{p,q\}}(0).$$

证明。该结果可由 Aitken 和 Roth 的定理推出（参见 [4, 定理 4.6],[1], [19]）。

□

现在，我们可以利用引理 4.7 和定理 4.10，计算矩阵 $\rho_{\mu_1,\ \mu_2.....,\ \mu_n}(C_1 \otimes C_2 \otimes \ldots \otimes C_n)$ 的 Jordan标准形，其中 $C_i \in$Mat($\mu_i$)。

# 5 矩形集合的拉伸映射

设 $n_1$，.....，$n_l$ 为正整数。若集合 $\mathbb{A} \subset \mathbb{Z}^l$ 满足

$$\mathbb{A} = \prod_{s=1}^{l} [0, n_s - 1] \cap \mathbb{Z}^l.$$

定理 5.1。设 $\mathbb{A} \subset \mathbb{Z}^l$ 是一个有限矩形集合，且 $F:\ \mathbb{A} \to \mathbb{Z}$ 是一个单射。则拉伸映射 $\rho_F^{\mathbb{A}}$ 与张量积映射 $\rho^f$ TP 相似。

证明。设 $\mathbb{A} = \prod_{s=1}^{l} [0, n_s - 1] \cap \mathbb{Z}^l$。不失一般性，我们可以假设集合 $\mathbb{A}$ 的像为

$$F(\mathbb{A}) = \{0, \ldots, n_1 n_2 \ldots n_l - 1\} = F_{\mathrm{TP}}(\mathbb{A}).$$

设 $F_{\mathrm{TP}}$ 是例 3.7 中与张量积对应的函数。由于 $\mathbb{A}$ 是有限集，因此，从 $\mathbb{A}$ 到 $F_{\mathrm{TP}}(\mathbb{A})$ 的任意其他单射都是集合 $F_{TP}(\mathbb{A})$ 的某个置换与函数 $F_{\mathrm{TP}}$ 的复合。因此，对于某个置换 $\sigma$，有 $F = \sigma \circ F_{\mathrm{TP}}$。于是，我们有

$$\rho_F^{\mathbb{A}}(T) = \sum_{\overline{i},\overline{j} \in \mathbb{A}} T_{\overline{i},\overline{j}} E_{\sigma(F_{\mathrm{TP}}(\overline{i})),\sigma(F_{\mathrm{TP}}(\overline{j}))} = U_\sigma \rho_{\mathrm{TP}}^f(T) U_\sigma^{-1},$$

其中 $U_\sigma$ 是与置换 $\sigma$ 对应的 $\rho_{F_{\mathrm{TP}}}$ 的行列变换矩阵。

□

接下来，我们考虑情形 $\mathbb{A} = \mathbb{Z}^l$，并定义通用张量映射。设 $F_{en}:\ \mathbb{Z}^l \to \mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{Z}^l$ 的一个枚举（双射）。相应的通用张量映射 $\rho_{F_{en}}$ 定义如下：对于任意 $T \in \mathbb{Z}^l$

$$\rho_{F_{en}}(T) := \sum_{\overline{i},\overline{j} \in \mathbb{Z}^l} T_{\overline{i},\overline{j}} E_{F_{en}(\overline{i}),F_{en}(\overline{j})}. \tag{5.1}$$

注 5.2。设 $\mathbb{A} = \mathbb{Z}^l$，且 $F_{en}:\ \mathbb{Z}^l \to \mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{Z}^l$ 的一个枚举。则通用张量映射 $\rho_{F_{en}}$ 在有限支撑矩阵 $T$ 上的限制（即，如果 $T$ 在某个固定有限“矩形”之外的元素均为零）与张量积映射相似。注意，整体上并非如此。

注 5.3. 根据定理 5.1 证明中的相同推理，通用张量映射 $\rho_{F_{en}}$ 在相似意义下是唯一的。

定义 5.4. 固定一个函数 $F:\ \mathbb{A}\to\mathbb{Z}$。定义平均映射 $\Psi$ : 矩阵空间(𝔸) $\to$ 矩阵空间(𝔸) 如下

$$\Psi(T):=\mathrm{Id}*(T*\mathrm{Id}),T\in\mathrm{Mat}(\mathbb{A}).$$

注意，如果 $F$ 是单射，那么 $\Psi$ 就是单位映射。

定理 5.5. 如果 $\mathbb{A}$ 是有限矩形集合，那么拉伸映射 $\rho_F$ 是由平均映射 $\Psi$ 和一个与张量积映射相似的映射复合而成。如果 $\mathbb{A}=\mathbb{Z}^l$，那么拉伸映射 $\rho_F$ 是由平均映射 $\Psi$ 和泛张量积映射 $\rho_{F_{en}}$ 复合而成。

证明。我们有

$$\rho_F(\Psi(T))=\rho_F(T),T\in\mathrm{Mat}(\mathbb{A}),$$

根据定理 3.2。将 $\rho_F$ 限制在像 $\Psi$(矩阵空间(𝔸)) 上后，它将是单射。因此，在有限 $\mathbb{A}$ 的情况下，根据定理 5.1，它与张量积映射相似。如果 $\mathbb{A}=\mathbb{Z}^l$，它将与泛张量积映射 $\rho_{F_{en}}$ 相似。 □

现在我们考虑一些矩形集合 $\mathbb{A}$ 对应的拉伸映射示例，其中 $F$ 非单射。

例 5.6. 设 $\mathbb{A}=\prod_{i=1}\mathbb{A}_i$, $\mathbb{A}_1=\mathbb{A}_2=\{0,1\}$, $F(\overline{i})=\overline{k}\cdot\overline{i}$，且 $\overline{k}=(1,1)$。那么

$$\rho_F^{\mathbb{A}}:\mathrm{Mat}(2)\otimes\mathrm{Mat}(2)\to\mathrm{Mat}(3),\rho_F^{\mathbb{A}}(T)=\sum_{\overline{i},\overline{j}\in\{0,1\}^2}T_{i_1,j_1,i_2,j_2}E_{i_1+i_2,j_1+j_2}.$$

特别是，如果

$$A=\begin{pmatrix}a_{00}&a_{01}\\a_{10}&a_{11}\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}b_{00}&b_{01}\\b_{10}&b_{11}\end{pmatrix}$$

*then*

$$\rho_F^{\mathbb{A}}(A\otimes B)=\begin{pmatrix}a_{00}b_{00}&a_{01}b_{00}+a_{00}b_{01}&a_{01}b_{01}\\a_{00}b_{10}+a_{10}b_{00}&a_{00}b_{11}+a_{11}b_{00}+a_{01}b_{10}+a_{10}b_{01}&a_{01}b_{11}+a_{11}b_{01}\\a_{10}b_{10}&a_{10}b_{11}+a_{11}b_{10}&a_{11}b_{11}\end{pmatrix}.$$

这个公式可以改写如下

$$\rho_F^{\mathbb{A}}(A\otimes B)=b_{00}\begin{pmatrix}A&0\\0&0\end{pmatrix}+b_{11}\begin{pmatrix}0&0\\0&A\end{pmatrix}+b_{10}\begin{pmatrix}0&0\\A&0\end{pmatrix}+b_{01}\begin{pmatrix}0&A\\0&0\end{pmatrix}.$$

请注意，在这种情况下，$\rho(A\otimes B)=\rho(B\otimes A)$。我们可以计算

$$\rho_F^{\mathbb{A}}\left(\begin{pmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}\mu&1\\0&\mu\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\lambda\mu&\lambda+\mu&1\\0&2\lambda\mu&\lambda+\mu\\0&0&\lambda\mu\end{pmatrix},$$

$$\rho_F^{\mathbb{A}}\left(\begin{pmatrix}a_{00}&a_{01}\\a_{10}&a_{11}\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}a_{00}&a_{01}&0\\a_{10}&a_{00}+a_{11}&a_{01}\\0&a_{10}&a_{11}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&A\end{pmatrix}.$$

等价关系的非平凡部分 $\backsim$ 具有形式 (0,1) $\backsim$ (1,0)，即 $\overline{m}\backsim\overline{n}$ 当且仅当 $\overline{m}=\overline{n}$ 或$\overline{m}=\overline{n}^t$（其中 $(m_1,m_2)^t=(m_2,m_1)$）。因此，

$$\begin{aligned}(T^1*T^2)_{\overline{i},\overline{j}}&=\sum_{\overline{m}}T^1_{\overline{i},\overline{m}}T^2_{\overline{m},\overline{j}}+\sum_{\overline{m}\neq\overline{m}^t}T^1_{\overline{i},\overline{m}}T^2_{\overline{m}^t,\overline{j}}\\&=\sum_{\overline{m}}T^1_{\overline{i},\overline{m}}T^2_{\overline{m},\overline{j}}+T^1_{\overline{i},(0,1)}T^2_{(1,0),\overline{j}}+T^1_{\overline{i},(1,0)}T^2_{(0,1),\overline{j}}.\end{aligned}\tag{5.2}$$

特别是,

$$[(A\otimes B)*(C\otimes D)]_{\overline{i},\overline{j}}=[AC\otimes BD]_{\overline{i},\overline{j}}+...$$

注记 5.7. 若能找到一个显式公式，用张量积 $A,B,C,D$ 表示 $(A\otimes B)*(C\otimes D)$，将会很有意思。

例 5.8. 设 $\mathbb{A}=\prod_{i=1}^{2}\mathbb{A}_i$, $\mathbb{A}_1=\mathbb{A}_2=\{0,1\}$, $F(\overline{i})=\overline{k}\cdot\overline{i}$，其中 $\overline{k}=(1,-1)$。我们将简写为 $\rho_F^{\mathbb{A}}$，记作 $\rho$. 那么

$$\rho:\mathrm{Mat}(2)\otimes\mathrm{Mat}(2)\to\mathrm{Mat}(3),\ \rho(T)=\sum_{\overline{i},\overline{j}\in\{0,1\}^2}T_{i_1,j_1,i_2,j_2}E_{i_1-i_2,j_1-j_2}.$$

特别地，如果

$$A=\begin{pmatrix}a_{00}&a_{01}\\a_{10}&a_{11}\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}b_{00}&b_{01}\\b_{10}&b_{11}\end{pmatrix}$$

*then*

$$\rho(A\otimes B)=\begin{pmatrix}a_{00}b_{11}&a_{00}b_{10}+a_{01}b_{11}&a_{01}b_{10}\\a_{00}b_{01}+a_{10}b_{11}&a_{00}b_{00}+a_{11}b_{11}+a_{01}b_{01}+a_{10}b_{10}&a_{01}b_{00}+a_{11}b_{10}\\a_{10}b_{01}&a_{10}b_{00}+a_{11}b_{01}&a_{11}b_{00}\end{pmatrix}.$$

记作

$$B'=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{10}\\b_{01}&b_{00}\end{pmatrix}$$

即 $B$ 关于主对角线和副对角线都进行了反射。那么， $\rho(A\otimes B)$ 的公式可改写如下

$$\rho(A\otimes B)=a_{00}\begin{pmatrix}B'&0\\0&0\end{pmatrix}+a_{11}\begin{pmatrix}0&0\\0&B'\end{pmatrix}+a_{10}\begin{pmatrix}0&0\\B'&0\end{pmatrix}+a_{01}\begin{pmatrix}0&B'\\0&0\end{pmatrix}.$$

注意，在这种情况下， $\rho'(A\otimes B)=\rho(B\otimes A)$（其中 $'$ 关于主对角线和副对角线都进行了反射）。特别地,

$$\rho\left(\begin{pmatrix}a_{00}&a_{01}\\a_{10}&a_{11}\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}a_{00}&a_{01}&0\\a_{10}&a_{00}+a_{11}&a_{01}\\0&a_{10}&a_{11}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&A\end{pmatrix}$$

同时,

$$\rho\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}a_{00}&a_{01}\\a_{10}&a_{11}\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}A'&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&A'\end{pmatrix}$$

$$\rho\left(\begin{pmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}\mu&1\\0&\mu\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\lambda\mu&\mu&0\\\lambda&2\lambda\mu+1&\mu\\0&\lambda&\lambda\mu\end{pmatrix},$$

等价关系的非平凡部分 $\backsim$ 具有形式 $(0,0)\backsim(1,1)$。因此,

$$(T^1*T^2)_{\overline{i},\overline{j}}=\sum_{\overline{m}}T^1_{\overline{i},\overline{m}}T^2_{\overline{m},\overline{j}}+T^1_{\overline{i},(0,0)}T^2_{(1,1),\overline{j}}+T^1_{\overline{i},(1,1)}T^2_{(0,0),\overline{j}}.\tag{5.3}$$

2例5.9. 设 $\mathbb{A}=\prod_{i=1}\mathbb{A}_i$, $\mathbb{A}_1=\{0,1\}$, $\mathbb{A}_2=\{0,1,2\}$, $F(\overline{i})=\overline{k}\cdot\overline{i}$ 且 $\overline{k}=(1,1)$。那么

$$\rho_F^{\mathbb{A}}:\mathrm{Mat}(2)\otimes\mathrm{Mat}(3)\to\mathrm{Mat}(4),\rho_F^{\mathbb{A}}(T)=\sum_{i_1,j_1=0}^{1}\sum_{i_2,j_2=0}^{2}T_{i_1,j_1,i_2,j_2}E_{i_1+i_2,j_1+j_2}.$$

特别是，如果

$$A=\begin{pmatrix}a_{00}&a_{01}\\a_{10}&a_{11}\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}b_{00}&b_{01}&b_{02}\\b_{10}&b_{11}&b_{12}\\b_{20}&b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}$$

*then*

$$\rho_F^{\mathbb{A}}(A\otimes B)=a_{00}\begin{pmatrix}B&0\\0&0\end{pmatrix}+a_{11}\begin{pmatrix}0&0\\0&B\end{pmatrix}+a_{10}\begin{pmatrix}0&0\\B&0\end{pmatrix}+a_{01}\begin{pmatrix}0&B\\0&0\end{pmatrix}.$$

2例5.10. 设 $\mathbb{A}=\prod_{i=1}\mathbb{A}_i$, $\mathbb{A}_1=\mathbb{A}_2=\{0,1\}$, $F(\overline{i})=$ 的最大值为 $\overline{i}$。
那么

$$\rho_F^{\mathbb{A}}:\mathrm{Mat}(2)\otimes\mathrm{Mat}(2)\to\mathrm{Mat}(2),\rho_F^{\mathbb{A}}(T)=\sum_{i_1,j_1=0}^{1}\sum_{i_2,j_2=0}^{1}T_{i_1,j_1,i_2,j_2}E_{\max(i_1,i_2),\max(j_1,j_2)}.$$

特别是，如果

$$A=\begin{pmatrix}a_{00}&a_{01}\\a_{10}&a_{11}\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}b_{00}&b_{01}\\b_{10}&b_{11}\end{pmatrix}$$

*then*

$$\rho_F^{\mathbb{A}}(A\otimes B)=a_{00}B+a_{01}\begin{pmatrix}0&b_{00}+b_{01}\\0&b_{10}+b_{11}\end{pmatrix}+a_{10}\begin{pmatrix}0&0\\b_{00}+b_{10}&b_{01}+b_{11}\end{pmatrix}$$
$$+a_{11}\begin{pmatrix}0&0\\0&b_{00}+b_{10}+b_{01}+b_{11}\end{pmatrix}.$$

注意，$\rho_F^{\mathbb{A}}(A\otimes B)=\rho_F^{\mathbb{A}}(B\otimes A)$，且 $\rho_F^{\mathbb{A}}$ 保持以下形式的 $*$-乘积:

$$(T^1*T^2)_{\overline{i},\overline{j}}:=T^1_{\overline{i},(0,0)}T^2_{(0,0),\overline{j}}+(T^1_{\overline{i},(0,1)}+T^1_{\overline{i},(1,0)}+T^1_{\overline{i},(1,1)})(T^2_{(0,1),\overline{j}}+T^2_{(1,0),\overline{j}}+T^2_{(1,1),\overline{j}}).$$

**Acknowledgments**

V. F. 的研究部分由 CNPq（402449/2021-5，302884/2021-1）和 Fapesp（2018/23690-6）资助。K. Z. 衷心感谢 NNSF（11871190）和 NSERC（311907-2015）提供的部分经费支持。

# 参考文献

[1] A. C. Aitken, 《复合矩阵与诱导矩阵的标准形》, Proc. London Math. Soc., 第38卷, 第354–376页（1934年）。[2] G. Beylkin, M. J.Mohlenkamp, 《高维数值分析算法》, SIAM J. Sci. Comput., 第26卷, 第2133–2159页（2005年）。[3] P. Brooksbank, J. Maglione, J. Wilson, 《李代数亏格为2的群的快速同构检验》, J. Algebra, 第473卷, 第545–590页（2017年）。

[4] R. Brualdi, 《张量积初等因子的组合验证》, Lin- ear Algebra and its Applications, 第71卷, 第31–47页（1985年）。[5] A. Smilde, R. Bro, P. Geladi, 《多元分析: 化学科学中的应用》, Wiley, 西萨塞克斯, 英格兰, 2004年。[6] P. Comon, 《张量分解: 现状与应用》, 载于《信号处理中的数学 V》, J. G. McWhirter 和 I. K. Proudler 编, 牛津大学出版社, 2001年, 第1–24页。[7] V. Futorny, J. Grochow, V. Sergeichuk, 《张量的野性》, Linear Algebra Appl., 第566卷, 第212–244页（2019年）。[8] W. Hackbusch, B. N. Khoromskij, 《高维算子与函数的张量积近似》, 复杂性杂志, 第23卷, 第697–714页（2007年）。[9]W. Hackbusch, B. N. Khoromskij, E. E. Tyrtyshnikov, 《分层克罗内克张量积近似》, 数值数学杂志, 第13卷, 第119–156页（2005年）。[10] T. Kolda, 《正交张量分解》, SIAM 矩阵分析与应用杂志, 第23卷, 第243–255页（2001年）。[11] T. Kolda, 《高阶分解的多线性算子》, 技术报告 SAND2006-2081, 桑迪亚国家实验室, 阿尔伯克基, 新墨西哥州, 利弗莫尔, 加利福尼亚州, 2006年。[12] T. Kolda, B. Bader, 《张量分解及其应用》, SI AM Rev. 51, 第3期, 第455–500页（2009年）。[13] L. De Lathauwer, B. De Moor, J. Vandewalle, 《多线性奇异值分解》, SIAM 矩阵分析与应用杂志, 第21卷, 第1253–1278页（2000年）。[14] L. De Lathauwer, B. De Moor, J. Vandewalle, 《通过同时广义舒尔分解计算典范分解》, SIAM 矩阵分析与应用杂志, 第26卷, 第295–327页（2004年）。[15] L. De Lathauwer, J. Vandewalle, 《高阶信号处理中的降维及多线性代数中的秩-(R1 ,R2 ,.. .,RN )降维》, Linear Algebra Appl., 第391卷, 第31–55页（2004年）。[16] N. Liu, B. Zhang, J. Yan, Z. Chen, W. Liu, F. Bai, L. Chien, 《文本表示: 从向量到张量》, 载于 ICDM 2005: 《第五届 IEEE 国际数据挖掘会议论文集》, IEEE 计算机学会出版社, 第725–728页（2005年）。[17] M. Liang, B. Zheng, R. Zhao, 《张量求逆及其在爱因斯坦乘积张量方程中的应用》, Linear Multilinear Algebra 67, 第4期, 第843–870页（2019年）。[18] D. Muti, S. Bourennane, 《基于张量方法的多维滤波》, Signal Pro- cess., 第85卷, 第2338–2353页（2005年）。[19] W. E. Roth, 《关于直积矩阵》, 美国数学会通报, 第40卷, 第461–468页（1934年）。[20] B. Savas, L. Eld´en, 《使用高阶奇异值分解进行手写数字分类》, Pattern Recog., 第40卷, 第993–1003页（2007年）。

[21] J. Sun、D. Tao、C. Faloutsos，《超越流与图：动态张量分析》，载于 KDD '06：第 12 届 ACM SIGKDD国际知识发现与数据挖掘大会论文集，ACM出版社，第 374–383 页（2006年）。

[22] M. Walter、D. Gross、J. Eisert，《多体纠缠》（入门书籍章节的扩展版本），见：arXiv:1612.02437，2016年。[23] T. Zhang、G. H. Golub，《高阶张量的秩一近似》，SIAM 矩阵分析与应用杂志，第 23 卷，第 534–550 页（2001年）。

（V. Futorny） SUSTech, Shenzhen, China 和 University of São Paulo, Brasil*E-mail address*: vfutorny@gmail.com（M.Neklyudov） Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matematica, UFAM, Manaus, CEP69077-000, Brasil*E-mail address*: misha.neklyudov@gmail.com（K.Zhao） Wilfrid Laurier University, Waterloo, N2L3C5 Canada*E-mail address*: kzhao@wlu.ca