arXiv:2302.03179v1 [math.DS] 7 Feb 2023

具有高阶耦合的 Winfree 系综中涌现的渐近模式

DONGNAM KO、SEUNG-YEAL HA 和 JAEYOUNG YOON

Abstract. Winfree 模型是一种相位耦合同步模型，它简化了诸如起搏细胞上的 Peskin模型这类脉冲耦合模型。众所周知，具有一阶耦合的 Winfree 系综会根据耦合强度和自然频率的方差，呈现非相干、锁定和死亡态等离散渐近模式。本文进一步研究高阶耦合，使其动力学更接近 Peskin模型的行为。为此，我们针对渐近模式提出了若干相较于一阶耦合模型的充分框架。我们提出的关于耦合强度、自然频率和初始数据的条件与振子数量无关，因此可应用于相应的平均场模型。我们还提供了若干数值模拟，并将其与解析结果进行比较。

1. Introduction

同步是指振荡复杂系统中节律的调节。自Arthur Winfree和Yoshiki Kuramoto在近半个世纪前提出新颖的方法以来，同步现象已在应用数学、生物学、控制理论和统计物理学等诸多科学领域得到广泛研究。

在相关文献中，耦合振子有两类同步模型。第一类称为“相位耦合模型”。该模型假设振子状态的振幅变化可以忽略，只关注相位的变化。Winfree和Kuramoto提出的模型属于这一类。相比之下，还有脉冲耦合模型，例如积分发放模型、用于起搏细胞的Peskin模型等。后一类模型或许能够解释真实神经元中的同步现象，但要进行严格的数学分析却非常困难。这就是相位耦合模型在同步研究中得到更广泛应用的原因。Peskin模型 [22, 26] 要求动力学中存在离散跳跃，而其渐近性质最近已在某些特殊情形下被发现 [3, 35]。另一个著名例子是FitzHugh–Nagumo振子的网络，其同步行为已受到数学、生物学和物理学研究者的广泛研究 [4, 23,28, 29]。

关于同步的分析研究，已通过对具有光滑相互作用的 $\mathbb{T}^N$ [1, 13, 21, 27, 30] 振子的研究得到深入补充，以避免混沌动力学模式。对于正耦合强度，一个振子的放电现象会影响其他振子的相位。

Date: 2023年2月8日。*Key words and phrases.* 同步、脉冲耦合振子、Winfree 模型、奇异相互作用。* 通讯作者。**致谢**。 D. Ko 的工作得到韩国天主教大学2022年研究基金以及韩国国家研究基金会（NRF-2021R1G1A1008559）的支持；S.-Y. Ha 的工作得到韩国国家研究基金会（NRF-2020R1A2C3A01003881）的支持。此外，J. Yoon 感谢 DFG-NRF 国际研究培训组 IRTG 2235 对比勒费尔德—首尔研究生交流项目的支持。

然而，当耦合强度足够小时，即使存在耦合，每个相位的动力学基本上仍由相应的自然频率决定（称为非相干态涌现）。在另一极端情形下，耦合强度足够大，整个相位系综趋于一个平衡态，振子不再旋转。我们将这种涌现模式称为死亡态。剩下的情况是中间情形：耦合强度既不太小也不太大，因此所有振子具有相同的旋转数。这种模式称为锁定。

为使讨论有一个恰当的背景，我们先介绍 Winfree 模型。设 $\theta_i = \theta_i(t)$ 为第 i 个 Winfree振子的相位。在脉冲耦合的情形下，人们通常认为，当某个个体的相位达到某个特定值（即零）时，该个体便会“放电”。因此，一个振子对其他振子的影响应集中在零值附近。为了描述这种动力学，我们采用一个平滑但尖锐的隆起状函数，并称之为具有 n 阶的“影响函数” I_n。在相位耦合模型中，Winfree 模型 [34] 从一开始便旨在利用平滑近似的影响函数 I_n ，来近似狄拉克δ函数常数倍所产生的脉冲耦合同步：

$$2\pi\delta(\theta) \approx a_n(1+\cos\theta)^n =: I_n, \quad n \gg 1, \quad |\theta| \ll 1. \tag{1.1}$$

这里， n 是三角耦合的阶数，为正整数；系数 a_n 是一个正的归一化常数，选取它是为了满足

$$\int_{-\pi}^{\pi} I_n(\theta)d\theta = 2\pi.$$

在这种设定下，影响函数为 (1.1) 的 Winfree 模型可写为

$$\dot{\theta}_i = \nu_i + \frac{\kappa}{N}\sum_{j=1}^{N} I_n(\theta_j)S(\theta_i), \quad i \in [N] := \{1, \cdots, N\}, \tag{1.2}$$

其中， ν_i 是第 i 个振子的自然频率，而 $(I_n,\ S)$ 是阶数为 $n \in \mathbb{Z}_+$ 的一对影响-敏感度函数：

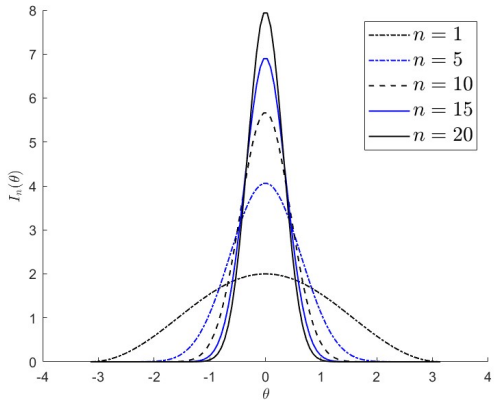
$$\begin{cases} I_n(\theta) := a_n(1+\cos\theta)^n = 2^n a_n \cos^{2n}\dfrac{\theta}{2}, \quad S(\theta) := -\sin\theta, \\ a_n = \dfrac{2n(2n-2)\cdots 2}{2^n(2n-1)(2n-3)\cdots 1} = \dfrac{(2n)!!}{2^n(2n-1)!!}. \end{cases} \tag{1.3}$$

从现在起，我们将 (1.2)–(1.3) 称为“阶数为 n 的 *Winfree* 模型”。如图 1(A) 所示， I_n 的最大高度随着 $\mathcal{O}$ 的阶数 $\sqrt{n}$ 增大而增大（详见引理 3.1），而 I_n^{-} 支撑集的有效大小则随着 n 增大而减小。当 $n \to \infty$ 时，阶数为 n 的影响函数逼近狄拉克δ函数，因此所得动力学可能表现得与脉冲耦合情形相同。图 1(B) 展示了相位随时间的演化；为了清晰地观察脉冲状行为，我们从相位图像中减去了某种群速度。

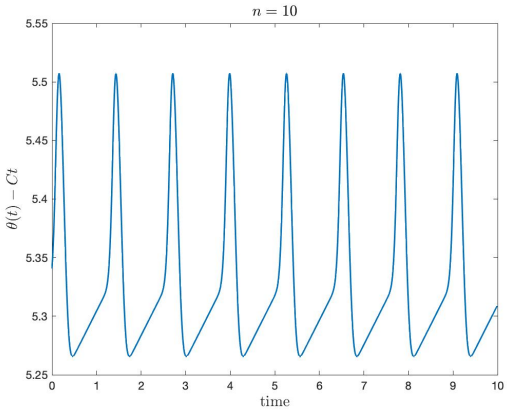
在先前文献中， [5, 22], 一阶对（$I_1,\ S$）：

$$I_1(\theta) = 1+\cos\theta \quad \text{and} \quad S(\theta) = -\sin\theta$$

已被广泛用于 Winfree 集合涌现动力学的数学分析。为了引入渐近模式的定义，我们采用一个经典概念，即旋转数，它常见于相位耦合动力学的文献中。设



(A) I_n 的图像，具有不同的 n



(B) $n = 10$的调整后相位动力学

$n = 10$的单振子动力学

$\Theta = \{\theta_i\}_{i\in[N]}$ 为一组相位。对于每个 $i \in [N]$，我们将旋转数 ρ_i 定义为渐近频率（[20]）：

$$\rho_i := \lim_{t\to\infty} \frac{\theta_i(t)}{t}.$$

如果右端存在。借助旋转数，我们可以对 Winfree 模型中的渐近模式进行如下分类。

定义 1.1. [5] 设 $\Theta = \Theta(t)$ 为一个时变振子集合。

(1) 集合 $\Theta(t)$ 渐近地表现为死亡态，如果所有旋转数均为零：

$$\rho_i = 0, \quad \forall\ i \in [N].$$

(2) 集合 $\Theta(t)$ 渐近地表现为锁定，如果所有旋转数都等于某个非零常数：

$$\rho_i = \rho \neq 0, \quad \forall\ i \in [N],$$

(3) 如果具有不同自然频率的振子的所有旋转数均不相同，则集合 $\Theta(t)$ 表现为非相干：

$$\rho_i \neq \rho_j, \quad \forall\ (i,j) \in [N]\times[N]\ \textit{such that}\ \nu_i \neq \nu_j.$$

本文旨在研究（1.2）–（1.3）的涌现动力学随阶数 n 的变化。[5] 中关于 S 和 I_n 在 $n = 10$ 下的分岔模拟，在定性上呈现出与 $n = 1$情况下相似的图像。然而，对于非相干性而言，其 κ 的临界值要小得多。这一现象可能表明，原始 Winfree 模型（1.2）的集体动力学分岔在极限 $n \to \infty$ 下可能无法保持，因为分岔所需的临界耦合强度可能趋于 0。这引出了以下问题：

“对于相互作用核 I_n 和 S，什么样的归一化因子才合适，使我们仍能看到非相干、锁定和死亡态之间的分岔图，如$n \to \infty$所示？”

接下来，我们简要讨论主要结果。首先，我们从自然频率和耦合强度的角度，提出一个关于非相干的充分框架：

$$\nu_i \neq \nu_j, \quad 0 \le \kappa < \kappa_{\rm inc}^{ij} := \frac{|\nu_i - \nu_j|}{2^n a_n} \sim \mathcal{O}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big).$$

在这些条件下，对于每一对 i 和 j，存在一个正常数 ω_{ij}^{∞}，使得

$$\inf_{0\le t<\infty} |\dot{\theta}_i(t) - \dot{\theta}_j(t)| \ge \omega_{ij}^{\infty} > 0.$$

注意，$\kappa^{ij}{}_{\rm inc}$ 不依赖于 N。详情请参见定理 3.1 和注 3.2。

其次，我们给出一个导向死亡态的充分框架。令 β_n 为稍后由关系式 (4.6) 确定的 SI_n 在 $(0,\pi)$ 中的最小点，并假设参数 α_n, κ 和初始数据满足

$$\beta_n < \alpha_n < \pi, \quad |\theta_i^0| < \alpha_n, \quad \kappa > \frac{\max_i |\nu_i|}{|(SI_n)(\alpha_n)|} = \kappa_{d,n}(\alpha_n).$$

于是，所有旋转数均为零（见定理 4.1）：

$$\rho_i = 0, \quad i \in [N].$$

这里，临界耦合强度 $\kappa_{d,n}(\beta_n)$ 中，β_n 是 $|SI_n|$ 的最大值点，而其阶数为 $\mathcal{O}(1)$。这与 [5] 中的相图一致：$\kappa_{d,n}(\beta_n)$ 不会受到 n 的太大影响。

第三，我们讨论齐次 Winfree 系综中锁定的一个充分条件，其中所有振子具有相同的自然频率 $\nu > 0$。对于某些受限的初始相位构型，若耦合强度足够小

$$0 < \kappa < \frac{\nu}{2^{n+1} a_n} \sim \mathcal{O}\Big(\frac{\nu}{\sqrt{n}}\Big),$$

那么所有旋转数都等于 ν：

$$\rho_i = \nu, \quad i \in [N].$$

详情请参见定理 5.1。当 κ 变大时，根据定理 4.1，它趋于死亡态。

本文其余部分安排如下。第 2 节简要回顾相互作用对（I_n, S）的基本结构，并回顾关于一阶 Winfree 模型涌现动力学的已有结果。第 3 节和第 4 节分别对非相干态涌现和死亡态进行严格分析。第 5 节给出导致齐次 Winfree 系综完全相位锁定和部分相位锁定的充分框架。第 6 节提供若干数值示例，并将其与后续各节中的解析结果进行比较。最后，第 7 节简要总结我们的主要结果，并讨论一些尚待解决的问题。

记号：为简便起见，我们采用以下便捷记号：

$$\Theta := \{\theta_i\}, \quad \mathcal{V} := \{\nu_i\}, \quad \|\Theta\|_p := \Big(\sum_{i=1}^N |\theta_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty \quad \|\Theta\|_\infty := \max_{1\le i\le N} |\theta_i|,$$
$$\mathcal{D}(\Theta) := \max_{1\le i,j\le N} |\theta_i - \theta_j|, \quad \mathcal{D}(\mathcal{V}) := \max_{1\le i,j\le N} |\nu_i - \nu_j|.$$

对于函数 $F:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$，我们将 F 的 $L^p(\mathbb{R}_+)$-范数记为

$$\|F\|_{L^p(\mathbb{R}_+)}:=\begin{cases}\Big(\int_0^\infty |F(t)|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}}, & 1\le p<\infty,\\ \sup_{0\le t<\infty}|F(t)|, & p=\infty.\end{cases}$$

2. Preliminaries

在本节中，我们将讨论如何将 (1.2) 重新解释为广义 Adler 方程，并回顾影响-敏感度函数对 (I_n, S) 的一些结构条件。我们还将介绍关于阶数为 1 的 Winfree 模型 (1.2) 的涌现动力学的已有结果。

2.1. 阶数为 n 的 Winfree 模型。 在本小节中，我们简要讨论如何将阶数为 n 的 Winfree 模型和 Kuramoto 模型视为广义 Adler 方程。正如 [8], 中所注意到的，Adler 方程:

$$\dot\theta=\nu-\kappa\sin\theta,\quad t>0, \tag{2.1}$$

在同步动力学中发挥着关键作用。更准确地说，我们考虑双振子的 Kuramoto 模型:

$$\dot\theta_1=\nu_1+\frac{\kappa}{2}\sin(\theta_2-\theta_1),\quad \dot\theta_2=\nu_2+\frac{\kappa}{2}\sin(\theta_1-\theta_2).$$

在这种情况下，相位差 $\theta=\theta_1-\theta_2$ 满足 (2.1)。另一方面，具有 $N\ge 3$ 的 Kuramoto 模型:

$$\dot\theta_i=\nu_i+\frac{\kappa}{N}\sum_{j=1}^N\sin(\theta_j-\theta_i)$$

当相位构型的几何形状被限制在半圆内时，也可以写成具有状态依赖耦合强度 $\kappa=\kappa(\Theta)$ 的广义 Adler 方程（见 [8]）:

$$\dot\theta_{ij}=\nu_{ij}-\kappa\Big(\sum_{l\neq i,j}C_{ij}^l(\Theta)\Big)\sin\theta_{ij},$$

其中，差值 θ_{ij}, ν_{ij} 和平均场因子 C_{ij}^l 定义如下。

$$\theta_{ij}:=\theta_i-\theta_j,\quad \nu_{ij}:=\nu_i-\nu_j,\quad C_{ij}^l(\Theta):=1-\frac{\cos(\frac{\theta_{li}}{2}+\frac{\theta_{lj}}{2})}{\cos(\frac{\theta_{ji}}{2})}.$$

类似地，(1.2) 可以写成 Adler 型方程。为此，我们将 $I_{n,c}(\Theta)$ 设为$\{I(\theta_i)\}$的平均值:

$$I_{n,c}(\Theta):=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N I_n(\theta_k).$$

于是，Winfree 模型 (1.2)–(1.3) 可改写如下:

$$\dot\theta_i=\nu_i-\kappa I_{n,c}(\Theta)\sin(\theta_i),\quad i\in[N].$$

由此，阶数为 n 的 Kuramoto 模型和 Winfree 模型都是广义 Adler 方程的特例，二者唯一的区别在于耦合强度关于 Θ 的泛函形式:

$$\text{Kuramoto oscillator}:\ \kappa\sum_{l\neq i,j}C_{ij}^l(\Theta),\qquad \text{Winfree oscillator}:\ \frac{\kappa}{N}\sum_{k=1}^N I(\theta_k),$$

这使得这两个模型的渐近动力学呈现出显著差异。

2.2. **关于 (I_n, S) 的结构条件**。 接下来，我们列出相互作用核 (I_n, S) 的充分条件。受具体例子 **(1.3)** 的启发， [17] 中提出了以下条件：

- **(*A*1)**（周期性与奇偶性条件）： 对于 $\theta \in \mathbb{R}$,

$$S(\theta + 2\pi) = S(\theta), \quad S(-\theta) = -S(\theta), \quad I_n(\theta + 2\pi) = I_n(\theta), \quad I_n(-\theta) = I_n(\theta). \tag{2.2}$$

- **(*A*2)**（几何形状）： 存在正常数 θ_* 和 θ^* ，满足

$$0 < \theta_* < \theta^* \leq \pi$$

使得

$$\begin{cases} S \leq 0 \quad \text{on} \quad [0, \theta^*] \quad \text{and} \quad S' \leq 0, \quad S'' \geq 0 \quad \text{on} \quad [0, \theta_*], \\ I_n \geq 0, \quad I_n' \leq 0 \quad \text{on} \quad [0, \theta^*] \quad \text{and} \quad I_n'' \leq 0 \quad \text{on} \quad [0, \theta_*], \\ (SI_n)' < 0 \quad \text{on} \quad (0, \theta_*) \quad \text{and} \quad (SI_n)' > 0 \quad \text{on} \quad (\theta_*, \theta^*). \end{cases} \tag{2.3}$$

注 2.1。 我们选取的 (1.3) 满足 *(A1)–(A2)*，其中

$$\theta_* = \cos^{-1}\Big(\frac{n}{n+1}\Big), \quad \theta^* = \pi.$$

2.3. **前人结果**。 本小节简要回顾 [17] 中关于一阶 Winfree 模型涌现模式的前人结果。首先，我们回顾一个充分条件框架，在该框架下会出现完全振子死亡，且所有旋转数均为零。

定理 2.1. (死亡态的涌现 [17]) 假设参数和初始数据满足

$$0 < \alpha < \pi, \qquad \kappa > -\frac{\|\mathcal{V}\|_\infty}{S(\alpha) I_1(\alpha)}, \qquad \max_{i \in [N]} |\theta_i^0| \leq \alpha, \tag{2.4}$$

并设 $\Theta = \Theta(t)$ 是 (1.2)–(1.3) 的一个解。则完全振子死亡会涌现：

$$\rho_i = 0, \quad i \in [N].$$

注 2.2. 在设定 (2.4) 下，可以证明存在一个平衡态 Θ^∞ ，使得

$$\lim_{t \to \infty} \|\Theta(t) - \Theta^\infty\|_\infty = 0.$$

显然，这比仅仅说明该振子群呈现死亡态要强得多。

在下一个定理中，我们讨论完全相位锁定。

定理 2.2。 （锁定的出现 [15]）以下断言成立。

(*1*) （相同系综）： 如果参数和初始数据满足

$$\begin{cases} \nu_i = \nu, \quad \forall\, i \in [N], \quad 0 < \kappa < \dfrac{\pi}{8}\nu, \quad 0 < \alpha < \Big(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{2\kappa}{\nu}\Big), \\ \mathcal{D}(\Theta^0) \leq \alpha \exp\Big[-\dfrac{\kappa}{\nu - 2\kappa}\Big(1 + \alpha - \dfrac{\pi}{2}\Big)\Big], \end{cases}$$

并设 $\Theta(t)$ 是 (1.2)-(1.3) 的一个解。那么，存在正常数 β_i 和 Λ_i ，使得

$$\beta_1 \mathcal{D}(\Theta^0) e^{-\Lambda_1 t} \leq \mathcal{D}(\Theta(t)) \leq \beta_2 \mathcal{D}(\Theta^0) e^{-\Lambda_2 t} \leq \alpha, \quad t \geq 0.$$

(2)（非同质系综）：若参数和初始数据满足

$$\nu > 0, \quad \kappa > 0, \quad \mathcal{D}(\Theta^0) < \alpha, \quad 0 < \alpha < \Big(\frac{\pi}{8} - \frac{\kappa}{\nu}\Big),$$
$$0 < \delta_\nu < \nu - 6\kappa, \quad \nu - \delta_\nu \le \nu_i \le \nu + \delta_\nu, \quad \forall\, i \in [N].$$

那么，对于方程(t) (1.2)–(1.3)的解 Θ，有

$$\sup_{0\le t<\infty} \mathcal{D}(\Theta(t)) \le 3\alpha.$$

注 2.3. *(1)* β_i 和 Λ_i 的显式函数关系以及部分相位锁定可见文献 [15]。

(2) 关于 *Winfree* 模型，我们还可参阅其他相关结果 [24, 25] 。*(3)* 文献中对 *Kuramoto* 振子的相位锁定已有广泛研究，以下仅列举几篇： [2, 6, 7, 9, 10, 13, 12, 14, 16, 18, 19, 31, 32, 33]。

在接下来的三节中，我们将证明定义 1.1 中讨论的、具有高阶耦合的渐近模式的涌现，这些模式对应于定理 2.1 和定理 2.2。

3. Emergence of incoherence

本节提出一个导出非相干态的充分框架。为此，我们证明 存在一对指标 $(i_0, j_0) \in [N] \times [N]$，使得频率差 $|\theta_{i_0} - \theta_{j_0}|$ 有一个正的下界，这表明这两个振子无法被牵引同步。首先，我们在以下引理中估计相互作用函数的界。

引理 3.1。以下断言成立。

(1) (1.3) 中的归一化常数 a_n 渐近地具有 $\sqrt{n}$ 的阶数，其中 $n \gg 1$:

$$a_n \frac{2^n}{\sqrt{n\pi}} \searrow 1 \qquad as \quad n \to \infty.$$

(2) 相互作用函数对(I_n, S) 满足

$$(a)\ \|I_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 2^n a_n \sim \mathcal{O}(\sqrt{n}), \quad \|S\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 1,$$
$$(b)\ \|SI_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = a_n \frac{\sqrt{2n+1}}{n+1}\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^n \sim \mathcal{O}(1),$$
$$(c)\ \|I'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = a_n \Big(\frac{2n-1}{n}\Big)^{n-1}\sqrt{2n-1} \sim \mathcal{O}(n),$$

当 $n \to \infty$时。

证明。令

$$b_n := \frac{a_n 2^n}{\sqrt{n\pi}}.$$

（i）首先，我们证明

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 1.$$

为此，我们使用（1.3）和斯特林公式：

$$2^n a_n = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{((2n)!!)^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n}((n)!)^2}{(2n)!} \quad \text{and} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n = 1 \tag{3.1}$$

从而得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\frac{2^{2n}((n)!)^2}{(2n)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\frac{2^{2n}\cdot 2\pi n\cdot n^{2n}e^{-2n}}{\sqrt{4\pi n}\cdot 2^{2n}n^{2n}e^{-2n}}=1.$$

因此，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n a_n}{\sqrt{n\pi}}=1.$$

其次，我们证明数列 (b_n) 严格递减：由 (3.1)，我们有

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{(2n+2)!!}{(2n+1)!!}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=\frac{2n+2}{2n+1}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+1}\sqrt{n}}{n+1/2}<1,\quad\forall\ n\geq 1.$$

(ii) 回忆

$$I_n(\theta)=a_n(1+\cos\theta)^n=2^n a_n\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2n}\quad\text{and}\quad S(\theta)=-\sin\theta. \tag{3.2}$$

(a) 由 (3.2) 和 a_n 的估计可直接得出 I_n 和 S 的界。

(b) 我们定义一个以 a 2π 为周期的函数 f，如下:

$$f(\theta)=I_n(\theta)S(\theta)=-a_n(1+\cos\theta)^n\sin\theta.$$

直接计算可得

$$f'(\theta)=a_n(1+\cos\theta)^n\Big[n-(n+1)\cos\theta\Big].$$

我们将 θ_* 设为 $[-\pi,\pi]$ 中 f 的最小值点，即

$$\cos\theta_*=\frac{n}{n+1}\quad\text{and}\quad\sin\theta_*=\sqrt{1-\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^2}=\frac{\sqrt{2n+1}}{n+1}.$$

由 $|f|$ 的图像可知，它在 $[-\pi,\pi]$ 的定义域内的 θ_* 和 $-\theta_*$ 处取得最大值。其最大值为

$$\|SI_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})}=a_n\Big(1+\cos\theta_*\Big)^n\sin\theta_*=a_n\Big(1+\frac{n}{n+1}\Big)^n\frac{\sqrt{2n+1}}{n+1}=a_n\Big(\frac{2n+1}{n+1}\Big)^n\frac{\sqrt{2n+1}}{n+1}.$$

(c) 我们将使用与 (b) 中相同的论证。更确切地说，我们设

$$g(\theta)=I_n'(\theta)=-a_n n(1+\cos\theta)^{n-1}\sin\theta.$$

直接计算可得,

$$g'(\theta)=a_n n(1+\cos\theta)^{n-1}\Big[(n-1)-n\cos\theta\Big].$$

˜因此， $|g|$ 在值 θ_* 处取得最大值，其中

$$\cos\tilde{\theta}_*=\frac{n-1}{n},\quad\sin\tilde{\theta}_*=\frac{\sqrt{2n-1}}{n},$$

即,

$$|g(\tilde{\theta}_*)|=na_n\Big(1+\frac{n-1}{n}\Big)^{n-1}\frac{\sqrt{2n-1}}{n}=na_n\Big(\frac{2n-1}{n}\Big)^{n-1}\frac{\sqrt{2n-1}}{n}=\mathcal{O}(n).$$

□

注 3.1。由引理 *3.1* 可得

$$1 \le b_n \le b_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} a_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \quad \forall\ n \ge 1$$

这等价于

$$\frac{\sqrt{n\pi}}{2^n} \le a_n \le \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}, \quad n \ge 1. \tag{3.3}$$

现在，我们给出关于非相干态涌现的第一个主要结果。若耦合强度消失（$\kappa = 0$），振子将按照其自然频率分散。类似地，当耦合强度较小时（ $\kappa \ll 1$），具有不同自然频率的振子也会分散。我们假设所有自然频率互不相同，并设

$$\kappa_{\rm inc}^{ij} := \frac{|\nu_i - \nu_j|}{2^{n+1} a_n}, \quad i, j \in [N], \quad \kappa_{\rm inc} := \frac{\min_{i \ne j} |\nu_i - \nu_j|}{2^{n+1} a_n},$$
$$\omega_{ij}^{\infty} := |\nu_i - \nu_j| - \kappa 2^{n+1} a_n, \quad \omega_m^{\infty} := \min_{i \ne j} \omega_{ij}^{\infty}.$$

定理 3.1. **(**非相干态涌现**)** 假设系统参数满足

$$\nu_i > \nu_j, \quad 0 \le \kappa < \kappa_{\rm inc} \tag{3.4}$$

并令 Θ 为 (1.2)–(1.3) 的一个全局解。则有

$$\inf_{0 \le t < \infty} |\dot\theta_i(t) - \dot\theta_j(t)| \ge \omega_{ij}^{\infty} > 0.$$

证明。 回顾一下一个泛函形式（I_n， S）：

$$I_n(\theta) = 2^n a_n \cos^{2n} \frac{\theta}{2} \quad \text{and} \quad S(\theta) = -\sin\theta, \tag{3.5}$$

其中它们的 L^∞-范数满足 **(3.4)**。由 **(1.2)** 可知

$$|\dot\theta_i - \nu_i| \le \frac{\kappa}{N} |S(\theta_i)| \sum_{j=1}^{N} |I_n(\theta_j)| \le \kappa 2^n a_n. \tag{3.6}$$

因此，我们有

$$\dot\theta_i(t) \in (\nu_i - \kappa 2^n a_n,\ \nu_i + \kappa 2^n a_n), \quad i \in [N],\ t > 0. \tag{3.7}$$

假设

$$\nu_i > \nu_j.$$

那么，由 **(3.7)** 可知

$$|\dot\theta_i(t) - \dot\theta_j(t)| \ge |\nu_i - \nu_j| - \kappa 2^{n+1} a_n = \omega_{ij}^{\infty} > 0, \quad t \ge 0.$$

我们对 t 取下确界，从而得到所需的估计。 □

注 3.2。 下面，我们简要评论定理 *3.1* 的结果。

（*1*）假设所有自然频率均匀分布：

$$i \ne j \quad \Longrightarrow \quad \nu_i \ne \nu_j.$$

如果耦合强度满足

$$0 \le \kappa < \kappa_{\rm inc},$$

那么我们有

$$\inf_{0\le t<\infty}\min_{i\neq j}|\dot\theta_i(t)-\dot\theta_j(t)|\ge\min_{i\neq j}|\nu_i-\nu_j|-\kappa 2^{n+1}a_n>0.$$

(2) 根据引理 *3.1*，我们有

$$2^{n+1}a_n=\mathcal{O}(\sqrt{n}),\quad n\gg 1.$$

因此，对于 $n\gg 1$， κ 的上界满足

$$\kappa_{\rm inc}^{ij}=\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)|\nu_i-\nu_j|,\quad n\gg 1.$$

(3) 对于具有 $\nu_i=\nu$ 的相同系综，(3.6) 意味着

$$|\dot\theta_i-\nu|\le\kappa 2^n a_n\sim\kappa\mathcal{O}(\sqrt{n}),\quad n\gg 1.$$

同样，这得出

$$|\rho_i-\nu|\le\mathcal{O}(\kappa\sqrt{n}),$$

如果 ρ_i 存在。

在所有 情形下，耦合强度 $\kappa_{\rm inc}$ 与振子的数量无关。

4. Emergence of death

本节中，我们研究导致振子死亡态涌现的充分框架。我们的策略是寻找一个有界的相位不变集，使得如果该集合存在，相应的旋转数便为零。

4.1. 完全振子死亡。对于 $\alpha_n\in(0,\pi)$，我们在自然数集 $\mathbb{R}^N$ 中定义正方形盒 $B(\alpha_n)$ 如下。

$$B(\alpha_n):=\Big\{\Theta\in\mathbb{R}^N:\ |\theta_i|<\alpha_n\ \text{ for all }\ i\in[N]\Big\}.\tag{4.1}$$

在下一个引理中，我们研究 $B(\alpha_n)$ 的正向不变性。

引理 4.1。（正不变集的存在性）假设参数满足

$$0<\alpha_n<\pi\quad and\quad \kappa>\frac{\|\mathcal{V}\|_\infty}{|(SI_n)(\alpha_n)|}=:\kappa_{d,n}(\alpha_n).\tag{4.2}$$

那么， $B(\alpha_n)$ 在(4.1)中对于(1.2)和(1.3)是正向不变的。

证明。 设 $\Theta=\Theta(t)$ 是满足以下条件的方程 (1.2) 的一个解，其初始数据为 Θ^0

$$\Theta^0\in B(\alpha_n).\tag{4.3}$$

那么，只需验证

$$\Theta(t)\in B(\alpha_n),\quad t>0.\tag{4.4}$$

证明 (4.4)：我们采用连续性论证。为此，我们定义集合 $\mathcal{T}$ 及其上确界：

$$\mathcal{T}:=\{t\in(0,\infty):\Theta(s)\in B(\alpha_n)\ \text{ for }\ s\in(0,t)\}\quad\text{and}\quad t^\infty:=\sup\mathcal{T}.$$

由 (4.3) 并且根据解的连续性， $\mathcal{T}$包含一个非平凡区间。因此，我们有 e

$$0<t^\infty\le\infty.$$

我们断言 $t^\infty=\infty$。反设 $t^\infty<\infty$ 成立。那么，存在一个满足下式的指标 $i_0\in[N]$

$$|\theta_{i_0}(t^\infty)|=\alpha_n,\quad \frac{d}{dt}|\theta_{i_0}|\Big|_{t=t^\infty}\ge 0.\tag{4.5}$$

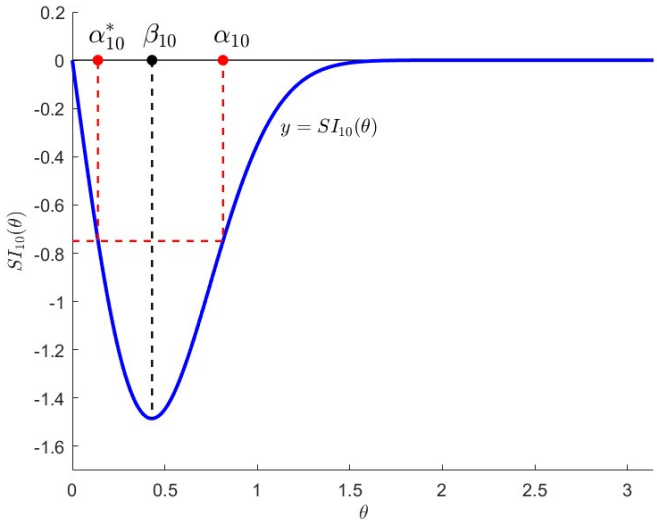


FIGURE 2. SI_n 的示意图，其中包含 $n = 10$

此外，我们有

$$|\theta_j(t^\infty)| \le \alpha_n, \quad \forall j \neq i_0.$$

对于此类 i_0，我们使用结构性假设 (2.2)、(2.3) 和 (4.2) 得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|\theta_{i_0}|\Big|_{t=t^\infty} &= \nu_{i_0}\ \mathrm{sgn}\left(\theta_{i_0}(t^\infty)\right) + \frac{\kappa}{N} S(|\theta_{i_0}(t^\infty)|) \sum_{j=1}^{N} I_n(\theta_j(t^\infty)) \\ &\le \|\mathcal{V}\|_\infty + \kappa(SI_n)(\alpha_n) < 0.\end{aligned}$$

这与 (4.5)$_2$ 矛盾。因此 $t^\infty = \infty$ ，我们得到了所需的估计。 □

注 4.1. 引理 *4.1* 已经给出

$$\rho_i = 0, \quad i \in [N],$$

当 $\Theta(t)$ 在 $B(\alpha_n)$ 中出现一次时。这意味着完全振子死亡的涌现。

图 2 展示了在 $n = 10$ 情况下 SI_n 的形状，由此根据（4.2）确定 $\kappa_{d,\ n}(\alpha_n)$。令 β_n 为函数 SI_n 在 $\theta \in (0,\ \pi)$ 上的最小点:

$$\beta_n := \mathrm{argmin}_{0<\theta<\pi}(SI_n)(\theta). \tag{4.6}$$

通过直接计算，我们得到

$$\beta_n = \cos^{-1}\left(\frac{n}{n+1}\right).$$

然后，很容易看出

$$(SI_n)(\beta_n) \le (SI_n)(\theta) \le 0, \quad \theta \in [0, \pi].$$

注 4.2. 最小值 $(SI_n)(\beta_n)$ 已在引理 *3.1* 中计算，其关于 n 的阶数为 $\mathcal{O}(1)$ 。因此，值 $\kappa_{d,n}(\alpha_n)$ 可设为与 $\mathcal{O}(1)$ 同阶:

$$\kappa_{d,n}(\alpha_n) \ge \kappa_{d,n}(\beta_n) \sim \mathcal{O}(1)\|\mathcal{V}\|_\infty, \quad n \gg 1.$$

对于 $\alpha_n \in (\beta_n, \pi)$，令 $\alpha_n^* \in (0, \pi)$ 为满足以下条件的唯一点

$$\alpha_n^* \le \beta_n \le \alpha_n, \quad (SI_n)(\alpha_n^*) = (SI_n)(\alpha_n).$$

在引理 4.1 中，我们已经证明集合 $B(\alpha_n)$ 是正向不变的。接下来，我们证明集合 $B(\alpha_n^*)(\subset B(\alpha_n))$ 会在有限时间内进一步吸引从 $B(\alpha_n)$ 出发的所有轨迹。

定理 4.1。(完全振子死亡)设 $\beta_n \in (0, \pi)$ 是由(4.6) 确定的最小点，并假设参数 α_n, κ 及初始数据满足

$$\beta_n < \alpha_n < \pi, \quad \Theta^0 \in B(\alpha_n), \quad \kappa > \frac{\|\mathcal{V}\|_\infty}{|(SI_n)(\alpha_n)|} = \kappa_{d,n}(\alpha_n),$$

并设 $\Theta(t)$ 是 (1.2) 的一个全局解。那么集合 $B(\alpha_n^*)$ 会在有限时间内吸引轨迹 $\{\Theta(t)\}$，也就是说，存在一个非负常数 t_*，使得

$$\Theta(t) \in B(\alpha_n^*), \quad t \ge t_*.$$

证明。根据引理 4.1，我们有

$$|\theta_j(t)| < \alpha_n \quad \text{for all} \quad t \ge 0.$$

那么，w 利用 S 的结构条件可知，对于任意满足 $|\theta_i(t)| \in (\alpha_n^*, \alpha_n)$ 的 i，

$$\begin{aligned}\frac{d|\theta_i(t)|}{dt} &= \nu_i \, \mathrm{sgn}\,(\theta_i(t)) + \frac{\kappa}{N} S(|\theta_i(t)|) \sum_{j=1}^N I_n(\theta_j(t)) \\ &\le \|\mathcal{V}\|_\infty + \kappa S(|\theta_i(t)|) I_n(\alpha_n) \\ &\le \kappa \Big(- S(\alpha_n) + S(|\theta_i(t)|) \Big) I_n(\alpha_n) < 0.\end{aligned}$$

这意味着 $|\theta_i(t)|$ 应在有限时间 $t_* \ge 0$ 后进入区间 $[0, \alpha_n^*)$. □

注 4.3. 下面我们评述定理 *4.1* 的结果。

(1) 注意，耦合条件 $\kappa > \kappa_{d,\ n}(\alpha_n)$ 不仅是使 $B(\alpha_n)$ 和 $B(\alpha_n^*)$ 均成为正向不变集的充分条件，也是必要条件。相空间中正不变集的存在性在技术上可能涉及复杂的条件，这些条件会随自然频率的分布和初始数据而变化。然而，对于自然频率高度聚集的一般初始相位数据，可以预期，死亡态的条件主要遵循 $\kappa > \kappa_{d,\ n}(\beta_n) \sim \mathcal{O}(1)\|\mathcal{V}\|_\infty$。这也与下文的定理 *4.2* 和注 *4.4* 有关。

（*2*）也可以设定一个固定界限 α，使 $B(\alpha)$ 正向不变。在这种情况下，$\alpha_n \equiv \alpha$ 对所有 n均成立。由于 $\alpha > 0$,

$$|(SI_n)(\alpha)| = a_n \sin\alpha (1 + \cos\alpha)^n \sim \mathcal{O}\left(\sin^n \frac{\alpha}{2}\right)$$

这将导出

$$\kappa_{n,d}(\alpha) \sim \mathcal{O}(\gamma^n)\|\mathcal{V}\|_\infty \quad \textit{for some } \gamma > 1.$$

4.2. **部分振子死亡**。 本小节讨论部分振子死亡的充分条件。对于正整数 $2 \le p \le N$，我们将柱集定义为

$$B_p(\alpha) := \Big\{ \Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N) \in \mathbb{R}^N : \ |\theta_i(t)| < \alpha_n, \quad \forall\, i \in [p] \Big\}.$$

对于 $p = N$，该圆柱与 (4.1) 中定义的 $B(\alpha)$ 重合。

定理 4.2。 假设参数和初始数据满足

$$0 < \alpha_n < \pi, \quad \max_{1\le i\le p} |\theta_i^0| < \alpha_n, \quad \kappa > -\frac{N}{p}\frac{\|\mathcal{V}\|_\infty}{(SI_n)(\alpha_n)}, \tag{4.7}$$

并且令 Θ 为方程 (1.2)–(1.3) 的一个全局解。则有以下结论。

(1) $B_p(\alpha)$ 是正向不变的。

(2) 对于 $i \in [N] \setminus [p]$，若存在 $t_* \geq 0$ 使得 $|\theta_i(t_*)| < \alpha_n$，则我们有 e

$$|\theta_i(t)| < \alpha_n \quad \textit{for all } t \geq t_*.$$

证明。 由于第二个结论可以用与第一个结论相同的论证加以验证，下面我们先关注第一个结论。为此，我们再次使用连续性论证。令

$$\mathcal{T} := \left\{\tau \in [0,\infty) : |\theta_j(t)| \leq \alpha_n \quad \forall\, j \in [p], \quad \forall\, t \in [0,\tau)\right\} \quad \text{and} \quad \tau^\infty := \sup \mathcal{T},$$

根据初始条件和解的连续性，我们有非空的 $\mathcal{T}$ 和 $0 < \tau^\infty \leq \infty$ 。现在我们断言:

$$\tau^\infty = \infty.$$

假设相反的情况成立， $\tau^\infty < \infty$。这意味着存在一个指标 i_0 ，满足

$$|\theta_{i_0}(\tau^\infty)| = \alpha_n \quad \text{and} \quad \frac{d|\theta_{i_0}(t)|}{dt}\Big|_{t=\tau^\infty} \geq 0. \tag{4.8}$$

对于 $t \in [0,\tau^\infty]$，有

$$\begin{aligned}
\frac{d|\theta_{i_0}(t)|}{dt} &= \nu_{i_0}\ \mathrm{sgn}\,(\theta_{i_0}(t)) + \frac{\kappa}{N} S(|\theta_{i_0}(t)|)\sum_{j=1}^{N} I_n(\theta_j(t)) \\
&\leq \nu_{i_0}\ \mathrm{sgn}\,(\theta_{i_0}(t)) + \frac{\kappa}{N} S(|\theta_{i_0}(t)|)\sum_{j=1}^{p} I_n(\theta_j(t)) \\
&\leq \|\mathcal{V}\|_\infty + \frac{\kappa p}{N} S(|\theta_{i_0}(t)|) I_n(\alpha_n).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

最后，我们利用 (4.7)$_3$ 和 (4.9) 得到

$$\frac{d|\theta_{i_0}(t)|}{dt}\Big|_{t=\tau^\infty} \leq \|\mathcal{V}\|_\infty + \frac{\kappa p}{N} S(\alpha_n) I_n(\alpha_n) < 0,$$

这与 (4.8)$_2$ 矛盾。因此，我们有

$$\tau^\infty = \infty \quad \text{and} \quad |\theta_i(t)| < \alpha_n, \quad \forall\, i \in [p].$$

□

注 4.4. 注意到，定理 *4.2* 似乎与定理 *4.1* 相似。然而，它隐含地说明了如何从更一般的初始数据中涌现出收敛性，如下所示。

(1) 如果振子最初均匀分布在 $(-\pi,\pi)$ 上，那么一半的振子将共同位于一个半圆内，$(-\pi/2,\pi/2)$。

我们设

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2}, \quad (SI_n)(\alpha_n) = -a_n.$$

因此，由定理 *4.2* 可知

$$\kappa > \frac{2\|\mathcal{V}\|_\infty}{a_n} \sim \mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{n}}{2^n}\right)\|\mathcal{V}\|_\infty \quad \Longrightarrow \quad |\theta_i(t)| < \frac{\pi}{2}, \quad \forall i \in [N].$$

一旦存在不变集，那么 $\Theta(t)$ 就是有界的。

(2) 如定理 *4.1* 所示，一旦振子被困在不变集 $[-\alpha_n, \alpha_n]$ 中，它们将在有限时间内被吸引到集合 $[-\alpha_n^*, \alpha_n^*]$ 。

5. Emergence of locking

本节中，我们研究具有相同自然频率的 Winfree 系综中相位锁定的涌现。这里我们主要沿用 [15] 中的方法，并将其谨慎地推广到具有高阶耦合的情形。

设 $\Theta = \Theta(t)$ 是方程 (1.2)–(1.3) 的一个全局解。则对于 $t \geq 0$，我们定义随时间变化的极值指标 M_t, m_t 以及泛函 $A(t)$ $R(t)$:

$$\begin{cases} M_t := \mathrm{argmax}_i \theta_i(t), \quad m_t := \mathrm{argmin}_i \theta_i(t), \\ A(t) := \dfrac{\theta_{M_t}(t) + \theta_{m_t}(t)}{2}, \quad R(t) := \dfrac{\theta_{M_t}(t) - \theta_{m_t}(t)}{2}. \end{cases}$$

在本节中，我们始终假设所有振子具有相同的自然频率:

$$\nu_i = \nu, \quad \forall\, i \in [N].$$

正如对具有非相同自然频率的情形在 [15] 中所得结果所示，这一条件可以放宽。

首先，由于自然频率相同且解具有唯一性，振子的排列顺序不会随时间改变:

$$\theta_i^0 \leq \theta_j^0, \quad \Longrightarrow \quad \theta_i(t) \leq \theta_j(t), \quad \forall\, t \geq 0.$$

因此，最大振子和最小振子 θ_M 以及 θ_m 由初始相位振子的排列决定。下文中，我们考虑所有振子在几何上均局限于一个半圆内的情形:

$$|\theta_M(t) - \theta_m(t)| < \pi,$$

从而

$$R(t) < \frac{\pi}{2}.$$

当然，这一先验条件稍后将得到证明。此外，我们还考虑一个充分条件，以确保 $A(t)$ 严格递增。一旦函数 A 严格递增，就存在一个递增的时间序列 $\{t_l^{\pm}\}$ ，使得

$$A(t_l^-) = 2l\pi - \frac{\pi}{2}, \quad A(t_l^+) = 2l\pi + \frac{\pi}{2}, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

不失一般性，令 N_* 为满足下列关系的最小正整数:

$$0 \leq t_{N_*}^- < t_{N_*}^+ < t_{N_*+1}^- < t_{N_*+1}^+ < \cdots. \tag{5.1}$$

那么， $t_{N_*-1}^+$ 的值可以为正或负，但 $t_{N_*-1}^- \leq 0$。

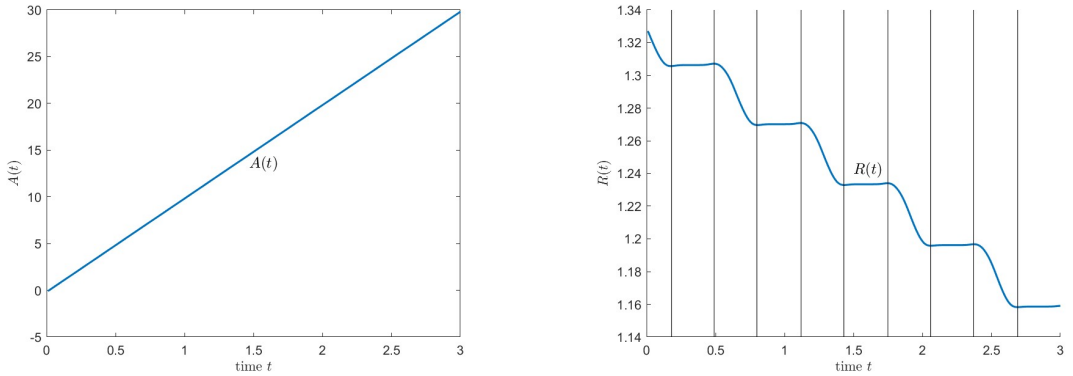
5.1. 预备 引理。

下面，我们给出关于 A 和 R的一系列基本估计。

引理 5.1. 假设系统参数满足

$$\nu_i = \nu > 0, \ \forall\, i \in [N] \quad and \quad 0 < \kappa < \frac{\nu}{2^n a_n}, \tag{5.2}$$

并且， $\Theta = (\theta_1, \cdots, \theta_N)$ 是方程(1.2)–(1.3)的一个全局解。则泛函 A和 R满足以下三个断言:



(A) A_t的时间演化 (B) R_t的时间演化

FIGURE 3. A_t 和 R_t 在定理 5 框架下的示意图。 1

(1) $A(t)$ 随时间严格递增。*(2)* 若 $t \in (t_l^-, t_l^+)$ 且 $0 < R(t) \leq \pi/2$，则 R 随时间严格递减。*(3)* 若 $t \in (t_l^+, t_{l+1}^-)$ 且 $0 < R(t) \leq \pi/2$，则 R 随时间严格递增。

证明。 (i) 我们使用 (1.3)$_2$ 中 S 的显式形式:

$$\dot{\theta}_i = \nu + \frac{\kappa}{N}\sum_{j=1}^{N} S(\theta_i) I_n(\theta_j) = \nu - \frac{\kappa}{N}\sum_{j=1}^{N} \sin\theta_i I_n(\theta_j), \quad i \in [N].$$

然后，由 (5.2)$_{2'}$，我们得到 A所需的递增性质:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \frac{1}{2}(\dot{\theta}_M + \dot{\theta}_m) = \nu - \frac{\kappa}{2N}(\sin(\theta_M) + \sin(\theta_m))\sum_{j=1}^{N} I_n(\theta_j) \\ &= \nu - \kappa I_{n,c} \sin A \cos R \geq \nu - \kappa 2^n a_n > 0. \end{aligned} \tag{5.3}$$

这里我们使用了简化记号 $I_{n,\ c} := \sum_{j=1}^{N} I_n(\theta_j)$ 和 $\|I_n\|_{L^\infty} \leq 2^n a_n$，它们来自 (3.5)。

(ii) 和 (iii): 根据 $R(t)$ 的定义，有

$$\begin{aligned} \dot{R}(t) &= \frac{1}{2}(\dot{\theta}_M(t) - \dot{\theta}_m(t)) = \left(\frac{\kappa}{2N}\sum_{j=1}^{N} I_n(\theta_j(t))\right)(S(\theta_M(t)) - S(\theta_m(t))) \\ &= -\kappa I_{n,c}(t) \cos A(t) \sin R(t). \end{aligned} \tag{5.4}$$

如果 $t \in (t_l^-,\ t_l^+)$ 和 $0 < R(t) \leq \pi/2$，则有

$$\cos A(t) > 0 \quad \text{and} \quad \sin R(t) > 0.$$

于是，(5.4) 推出

$$\dot{R}(t) < 0, \quad \text{i.e.,} \quad R \text{ is strictly decreasing over time.}$$

剩余情形 $t \in (t_l^+,\ t_{l+1}^-)$ 和 $0 < R(t) \leq \pi/2$，可以用类似的方法处理。 □

注意，引理 5.1 允许我们对 R 关于 A 求导。给定一个 $\alpha > 0$，我们定义泛函 $L_1(A)$ 和 $L_2(A)$:

$$\begin{cases} L_1(A) := \dfrac{-\kappa \cos A}{\nu - \kappa 2^n a_n} \left(\alpha a_n \sqrt{2n-1} \left(\dfrac{2n-1}{n} \right)^{n-1} + I_n(A) \right), \\ L_2(A) := \dfrac{\kappa \cos A}{\nu + \kappa 2^n a_n} \left(\alpha a_n \sqrt{2n-1} \left(\dfrac{2n-1}{n} \right)^{n-1} - I_n(A) \right). \end{cases}$$

引理 5.2。 假设参数满足

$$\nu_i = \nu > 0, \ \forall \ i \in [N], \quad l \geq N_*, \quad \alpha \in (0, \pi/2], \quad 0 < \kappa < \frac{\nu}{2^n a_n},$$

并设 $\Theta = (\theta_1, \cdots, \theta_N)$ 是方程 (1.2)–(1.3)的一个全局解。那么，以下断言成立。

(1) 若 $t \in (t_l^-, t_l^+)$ 且 $0 < R(t) \leq \alpha$，则有

$$L_1(A) \leq \frac{1}{\sin R} \frac{dR}{dA} \leq L_2(A).$$

(2) 若 $t \in (t_l^+, t_{l+1}^-)$ 且 $0 < R(t) \leq \alpha$，则有

$$L_2(A) \leq \frac{1}{\sin R} \frac{dR}{dA} \leq L_1(A).$$

证明。 由 (5.3) 和 (5.4) 可得

$$\dot{A} = \nu - \kappa I_{n,c} \sin A \cos R \quad \text{and} \quad \dot{R} = -\kappa I_{n,c} \cos A \sin R.$$

由此得到

$$\frac{1}{\sin R} \frac{dR}{dA} = \frac{-\kappa I_{n,c} \cos A}{\nu - \kappa I_{n,c} \sin A \cos R}. \tag{5.5}$$

注意，由于我们假设 $R(t) \in (0, \pi/2]$，因此 $\sin R$ 始终为正。

(i) 假设 $t \in (t_l^-, t_l^+)$ 且 $0 < R(t) \leq \alpha$。那么，我们有

$$2l\pi - \frac{\pi}{2} < A(t) < 2l\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \text{i.e.,} \quad \cos A > 0.$$

由 $|I_{n,c}| \leq 2^n a_n$ 可知

$$0 < \nu - \kappa 2^n a_n < \nu - \kappa I_{n,c} \sin A \cos R < \nu + \kappa 2^n a_n. \tag{5.6}$$

接下来，我们用 $I_n(A)$ 估计平均影响 $I_{n,c}$。首先，注意到

$$|I_n(\theta_j) - I_n(A)| \leq \|I_n'\|_\infty |\theta_j - A| \leq a_n \sqrt{2n-1} \left(\frac{2n-1}{n} \right)^{n-1} |\theta_j - A|.$$

在假设 $0 < R(t) \leq \alpha$ 下，由上述估计可得

$$|\theta_j - A| \leq \frac{1}{2} \Big(|\theta_j - \theta_M| + |\theta_j - \theta_m| \Big) \leq R(t)$$

如下估计:

$$
\begin{aligned}
|I_{n,c}(\Theta)-I_n(A)| &\le \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|I_n(\theta_j)-I_n(A)| \le a_n\sqrt{2n-1}\left(\frac{2n-1}{n}\right)^{n-1}R(t)\\
&\le \alpha a_n\sqrt{2n-1}\left(\frac{2n-1}{n}\right)^{n-1}.
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

在（5.5）中，我们结合（5.6）和（5.7）得到

$$
L_1(A)\le \frac{1}{\sin R}\frac{dR}{dA}\le L_2(A).
$$

（ii）假设 $t\in(t_l^-,t_{l+1}^+)$ 且 $0<R(t)\le\alpha$。那么，我们有

$$
2l\pi+\frac{\pi}{2}<A(t)<2(l+1)\pi-\frac{\pi}{2},\quad \text{i.e.,}\quad \cos A<0.
$$

因此，由于 $\cos A$ 的符号，相反的不等式成立。 □

接下来，我们证明泛函 $R(t)$ 有界。事实上，对于相同系综，我们最终可以证明 $R(t)$ 随着 $t\to\infty$ 趋于零。由于 $n=1$ 的情形已在 [15], 中研究过，我们假设 $n\ge 2$。引理 5.1 表明，对于 $t\in(t_l^+,t_{l+1}^-)$， $R(t)$ 递增；对于$t\in(t_l^-,t_l^+)$，则递减。根据引理 5.2，我们首先需要通过计算 $L_2(A)$ 的积分来估计 $R(t)$ 增长得有多小；其次，需要根据 $L_1(A)$ 的积分来估计 $R(t)$ 下降得有多深。为进行这一比较，需要如下计算。

引理 5.3. 对于 $n\ge 2$, 以下估计成立。

$$
\begin{aligned}
&(i)\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(-\cos A)\cos^{2n}\frac{A}{2}dA\le\frac{1}{2^{n-1}}.\\
&(ii)\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos A\cos^{2n}\frac{A}{2}dA\ge\frac{n}{n+1}\frac{\pi+2}{2^n a_n}\sim\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).\\
&(iii)\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(-\cos A)\cos^{2n}\frac{A}{2}dA=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos A\cos^{2n}\frac{A}{2}dA-\frac{\pi}{2^n a_n}\frac{2n}{n+1}.
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

证明。 (i) 第一个估计来自 $\cos^{2n}\frac{A}{2}$ 的最大值:

$$
\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(-\cos A)\cos^{2n}\frac{A}{2}dA\le\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(-\cos A)\frac{1}{2^n}dA=\frac{1}{2^{n-1}}.
$$

（ii）对于任意 $n\ge 2$, 我们递归地使用一个众所周知的三角公式

$$
\int\cos^n\theta d\theta=\frac{1}{n}\cos^{n-1}\theta\sin\theta+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}\theta d\theta
$$

来观察

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n}\theta d\theta = \frac{1}{n}\left(\cos^{2n-1}\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}\right) + \frac{2n-1}{2n}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2}\theta d\theta \\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{k=1}^{n-1}\Big[\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-(2k-1)))}{(2n)(2n-2)\cdots(2n-(2k-2)))}\cdot\frac{1}{n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\Big] \\
&+ \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-(2n-1))}{(2n)(2n-2)\cdots(2n-(2n-2))}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^0\theta d\theta, \\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{k=1}^{n-1}\Big[\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-(2k-1)))}{(2n)(2n-2)\cdots(2n-(2k-2)))}\cdot\frac{1}{n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\Big] + \frac{\pi}{2^{n+1}a_n}.
\end{aligned} \tag{5.9}
$$

注意到

$$
\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos A\cos^{2n}\frac{A}{2}dA &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\right)\left(\cos^{2n}\frac{\theta}{2}\right)d\theta \\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(2\cos^2\theta-1)(\cos^{2n}\theta)d\theta = 4\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^{2n+2}\theta - 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^{2n}\theta d\theta.
\end{aligned}
$$

另一方面，我们利用 (5.9) 得到

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos A\cos^{2n}\frac{A}{2}dA = 4\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^{2n+2}\theta d\theta - 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^{2n}\theta d\theta \\
&= 4\left[\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(2n+1)(2n-1)\cdots(2n-2k+3)}{(2n+2)(2n)\cdots(2n-2k+4)}\cdot\frac{1}{n+1-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-k} + \frac{\pi}{2^{n+2}a_{n+1}}\right] \\
&\quad - 2\left[\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-(2k-1))}{(2n)(2n-2)\cdots(2n-(2k-2))}\cdot\frac{1}{n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} + \frac{\pi}{2^{n+1}a_n}\right] \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n\left[\frac{2}{n+1} - \frac{2}{n} + \frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{4}{n}\right] + \frac{\pi}{2^n a_n}\left[\frac{2n+1}{n+1} - 1\right] \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n-1}\left[4\cdot\frac{2n+1}{2n+2} - 2\right]\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots(2(k+1)-1)}{(2n)(2n-2)\cdots(2(k+1))}\cdot\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n\left[\frac{4}{n+1}\right] + \frac{\pi}{2^n a_n}\left[\frac{n}{n+1}\right] + \sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{2n}{n+1}\right]\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots(2(k+1)-1)}{(2n)(2n-2)\cdots(2(k+1))}\cdot\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k.
\end{aligned}
$$

其中我们用到了以下关系：

$$
\frac{\pi}{2^n a_{n+1}} = \frac{2\pi}{2^n a_n}\Big(\frac{2n+1}{2n+2}\Big).
$$

通过用 $k=1$ 选取第二项和第三项，我们得到积分的下界：

$$
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos A\cos^{2n}\frac{A}{2}dA \geq \frac{n}{n+1}\frac{\pi}{2^n a_n} + \frac{2n}{n+1}\frac{2}{2^n a_n}\frac{1}{2} = \frac{n}{n+1}\frac{\pi+2}{2^n a_n}.
$$

(iii) 对于整数 $n \geq 2$，我们使用

$$\int \sin^n \theta d\theta = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}\theta\cos\theta + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}\theta d\theta$$

以便观察

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^{2n}\theta d\theta = -\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(2n-1)\cdots(2(k+1)-1)}{(2n)\cdots(2(k+1))}\cdot\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{(2n-1)\cdots 1}{(2n)\cdots 2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} -\cos A\cos^{2n}\frac{A}{2}dA &= 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sin^{2n}\theta d\theta - 4\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sin^{2n+2}\theta d\theta \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{4}{n+1} - \frac{\pi}{2^n a_n}\frac{n}{n+1} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{2n}{n+1}\frac{(2n-1)\cdots(2(k+1)-1)}{(2n)\cdots(2(k+1))}\cdot\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k,\end{aligned}$$

将其与 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos A\cos^{2n}\frac{A}{2}dA$ 的估计进行比较，即可得到所需的估计。 □

接下来，我们结合引理 5.2 和引理 5.3，推导出保证 $R(t)$ 有界的、关于 κ 和 α 的充分条件。

引理 5.4。 假设系统参数满足

$$\begin{aligned}&n \geq 2, \qquad 0 < \kappa \leq \frac{\nu}{2^{n+1}a_n} \sim \mathcal{O}\left(\frac{\nu}{\sqrt{n}}\right) \quad and \\ &\alpha < \left(\frac{\pi}{2^{n+1}a_n}\frac{n}{n+1} - \frac{1}{2^n}\right)\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{n-1} \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

设 Θ 是满足先验条件的 (1.2)–(1.3) 的全局解：

$$\sup_{0\leq t<\infty} R(t) \leq \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

则以下估计成立。

$$\begin{aligned}&(i)\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} L_1(A)dA \leq \alpha\sqrt{2n-1}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}}. \\ &(ii)\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{1}{\sin R}\frac{dR}{dA}dA \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} L_2(A)dA + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} L_1(A)dA < 0.\end{aligned}$$

证明。 (i) 利用 $\cos A$ 的积分和引理 5.3，可得

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} L_1(A)dA &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{-\kappa\cos A}{\nu-\kappa 2^n a_n}\Big[\alpha 2^n a_n\frac{\sqrt{2n-1}}{2}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{n-1} + I_n(A)\Big]dA \\ &= \frac{\kappa 2^n a_n}{\nu-\kappa 2^n a_n}\Big[\alpha\sqrt{2n-1}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{n-1} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(-\cos A)\cos^{2n}\frac{A}{2}dA\Big] \\ &\leq \frac{\kappa 2^n a_n}{\nu-\kappa 2^n a_n}\Big[\alpha\sqrt{2n-1}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}}\Big],\end{aligned} \tag{5.10}$$

其中最后一个不等式由引理 5.3 中的 (5.8) (i) 得出。另一方面，由于关于 κ 的假设保证了

$$\frac{\kappa 2^n a_n}{\nu - \kappa 2^n a_n} \le 1,$$

我们有

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} L_1(A)dA \le \alpha\sqrt{2n-1}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

（ii）利用引理 5.2 可得

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{\sin R}\frac{dR}{dA}dA \le \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} L_2(A)dA + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} L_1(A)dA. \tag{5.11}$$

于是，（5.11）右端变为

$$\begin{aligned}
&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} L_2(A)dA + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} L_1(A)dA \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\kappa\cos A}{\nu + \kappa 2^n a_n}\left(\alpha 2^n a_n \frac{\sqrt{2n-1}}{2}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{n-1} - I_n(A)\right)dA + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} L_1(A)dA \\
&= \frac{\kappa 2^n a_n}{\nu + \kappa 2^n a_n}\left(\alpha\sqrt{2n-1}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{n-1} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos A\cos^{2n}\frac{A}{2}dA\right) \\
&\quad + \frac{\kappa 2^n a_n}{\nu - \kappa 2^n a_n}\left(\alpha\sqrt{2n-1}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{n-1} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-\cos A)\cos^{2n}\frac{A}{2}dA\right).
\end{aligned} \tag{5.12}$$

为了比较两个不同的系数，我们使用关于 κ的假设:

$$\kappa \le \frac{\nu}{2^{n+1}a_n} \quad \left(\text{hence, } \frac{\kappa 2^n a_n}{\nu - \kappa 2^n a_n} \le \frac{3\kappa 2^n a_n}{\nu + \kappa 2^n a_n}\right).$$

于是，积分（5.12）可估计为

$$\begin{aligned}
&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} L_2(A)dA + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} L_1(A)dA \\
&\le \frac{\kappa 2^n a_n}{\nu + \kappa 2^n a_n}\left[4\alpha\sqrt{2n-1}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{n-1} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos A\cos^{2n}\frac{A}{2}dA + 3\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-\cos A)\cos^{2n}\frac{A}{2}dA\right].
\end{aligned}$$

接下来，我们利用引理 5.3 的 (5.8)(iii) 消去第二项，并利用 (5.8)(i) 估计最后一项，得到

$$\begin{aligned}
&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} L_2(A)dA + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} L_1(A)dA \\
&= \frac{\kappa 2^n a_n}{\nu + \kappa 2^n a_n}\left[4\alpha\sqrt{2n-1}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{n-1} - \frac{\pi}{2^n a_n}\frac{2n}{n+1} + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-\cos A)\cos^{2n}\frac{A}{2}dA\right] \\
&< \frac{\kappa 2^n a_n}{\nu + \kappa 2^n a_n}\left[4\alpha\sqrt{2n-1}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{n-1} - \frac{2\pi}{2^n a_n}\frac{n}{n+1} + \frac{1}{2^{n-2}}\right].
\end{aligned}$$

因此，当.....时，它变为负值

$$\alpha < \left(\frac{\pi}{2^{n+1}a_n}\frac{n}{n+1} - \frac{1}{2^n}\right)\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{n-1}.$$

由注 3.1 中 a_n 的 (3.3) 式界可知， $a_n \le \sqrt{n}/2^{n-1}$，右端对于 $n \ge 2$始终为正。□

接下来，我们定义常数 C_1^+, C_1^-, C_2^+ 和 C_2^-如下：

$$-C_1^+ := \int_{2l\pi-\frac{\pi}{2}}^{2l\pi+\frac{\pi}{2}} L_1(A)dA, \quad C_1^- := \int_{2l\pi+\frac{\pi}{2}}^{2l\pi+\frac{3\pi}{2}} L_1(A)dA,$$
$$-C_2^+ := \int_{2l\pi-\frac{\pi}{2}}^{2l\pi+\frac{\pi}{2}} L_2(A)dA, \quad C_2^- := \int_{2l\pi+\frac{\pi}{2}}^{2l\pi+\frac{3\pi}{2}} L_2(A)dA.$$

引理 5.5。 假设参数满足

$$n \ge 2, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad 0 < \kappa < \frac{\nu}{2^{n+1}a_n} \sim \mathcal{O}\left(\frac{\nu}{\sqrt{n}}\right),$$
$$\alpha < \left(\frac{\pi}{2^{n+1}a_n}\frac{n}{n+1} - \frac{1}{2^n}\right)\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{n-1} \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right),$$

并设 Θ 是 (1.2)–(1.3) 的一个满足先验条件的全局解：

$$\sup_{0\le t<\infty} R(t) \le \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

那么， C_1^+、 C_1^-、 C_2^+ 和 C_2^-均为正，且以下估计成立：

$$(i) -C_1^+ < \ln\frac{R(t_l^+)}{R(t_l^-)} < -\frac{\sin\alpha}{\alpha}C_2^+ \quad and \quad \frac{\sin\alpha}{\alpha}C_2^- < \ln\frac{R(t_{l+1}^-)}{R(t_l^+)} < C_1^-,$$
$$(ii) \ln\frac{R(t_{l+1}^-)}{R(t_l^-)} < \frac{\sin\alpha}{\alpha}(C_1^- - C_2^+) < 0 \quad and \quad \ln\frac{R(t_{l+1}^+)}{R(t_l^+)} \ge -C_1^+ + C_2^-.$$

证明。 常数的正性可通过与引理 5.4 证明类似的论证得到，即在 α 足够小的条件下使用 (5.10) 和 (5.12)。其余估计的证明需要直接但冗长地运用引理 5.2 至 5.4 进行计算。由于这里在结构上采用了与 [15], 中引理 3.5 相同的论证，故略去证明。□

由引理 5.5 可得以下推论，其证明与 [15] 中推论 3.1 的证明相同。

推论 5.1。 假设正参数 l、 N_*、 α 满足

$$l \ge N_*, \quad \alpha \in (0, \alpha^\infty), \quad \sup_{0\le t<\infty} R(t) \le \alpha.$$

于是，我们得到以下估计：

$$(i)\ \ln\frac{R(t_l^-)}{R(t_{N_*}^-)} \le -\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\frac{(\Omega-2K)}{2\pi}|C_2^+ - C_1^-|\cdot|t_l^- - t_{N_*}^-|.$$
$$(ii)\ \ln\frac{R(t_l^+)}{R(t_{N_*}^+)} \ge -\frac{(\Omega+2K)}{2\pi}|C_1^+ - C_2^-|\cdot|t_l^+ - t_{N_*}^+|.$$

5.2. **相位直径的指数衰减**。 在本小节中，我们给出关于 R 指数衰减的最后一个主要结果。

定理 5.1. 假设系统参数和初始数据满足

$$0 < \kappa < \frac{\nu}{2^{n+1}a_n} \sim \mathcal{O}\left(\frac{\nu}{\sqrt{n}}\right), \quad R(0) < \alpha \exp\Big[-\alpha\sqrt{2n-1}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{n-1} - \frac{1}{2^{n-1}}\Big],$$
$$0 < \alpha < \left(\frac{\pi}{2^{n+1}a_n}\frac{n}{n+1} - \frac{1}{2^n}\right)\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{n-1} \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right),$$

~ ~并令 $\Theta(t)$ 为 (1.2) 的全局解。那么，存在正常数 β_i 和 Λ_i, $i = 1,2$使得

$$\tilde{\beta}_1 e^{-\tilde{\Lambda}_1 t} R(0) \le R(t) \le \tilde{\beta}_2 e^{-\tilde{\Lambda}_2 t} R(0) < \alpha, \quad t \ge 0.$$

证明。 首先，我们将证明

$$R(t) < \alpha, \quad \forall t \ge 0.$$

开始之前，令 N_* 为由 (5.1) 定义的正整数，其中 $t^-_{N_*} > 0$ 和 $t^-_{N_*-1} \le 0$ 按定义给出。定义一个集合

$$\mathcal{T} := \{T \ge 0 : R(t) < \alpha, \quad \forall t \in [0, T]\}$$

并令 T^*:= sup $\mathcal{T}$。由于 $0 \in \mathcal{T}$, T^*是一个正数。我们需要证明的内容等价于$T^* = \infty$。下面使用反证法。假设 $T^* < \infty$，这意味着 $R(T^*) = \alpha$。我们先证明 $T^* \ge t^-_{N_*}$。在假设条件下，我们分两种情况讨论

$$T^* \in (0, t^-_{N_*}).$$

• 情形 A ($t^+_{N_*-1} \le 0$)：由于 $A(0) \le 0$ 且 $L_1(A) \ge 0$，我们有

$$\frac{1}{\sin R(t)}\frac{dR}{dA} \le L_1(A(t)), \quad \forall t \in [0, t^-_{N_*}].$$

因此，有

$$\begin{aligned}\int_{A(0)}^{A(T^*)} \frac{1}{\sin R(t)}\frac{dR}{dA}dA &\le \int_{A(0)}^{A(T^*)} Ł_1(A(t))dA \\ &\le \int_{A(t^+_{N_*-1})}^{A(t^-_{N_*})} L_1(A(t))dA = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} L_1(A(t))dA = C_1^-,\end{aligned} \tag{5.13}$$

这里用到了如下事实 $t^+_{N_*-1} \le 0 \le T^* \le T^-_{N_*}$。另一方面，考虑由下式定义的函数 f

$$f(x) := -\ln\left(\frac{1+\cos x}{\sin x}\right), \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

因此，

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x} > 0.$$

然后，通过简单计算可得

$$\frac{\sin y}{y}(f(y) - f(x)) < \ln\frac{y}{x} < f(y) - f(x). \tag{5.14}$$

回到我们的论述，根据（5.13）和（5.14），可推导出

$$\ln\left(\frac{R(T^*)}{R(0)}\right) < f(R(T^*)) - f(R(0)) \le C_1^-,$$

这意味着 $\frac{R(T^*)}{R(0)} \le e^{C_1^-}$，也就是说，

$$R(T^*) \le R(0)e^{C_1^-} \le R(0)e^{\alpha\sqrt{2n-1}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{n-1}+\frac{1}{2^{n-1}}} < \alpha.$$

这与假设 $R(T^*) = \alpha$ 矛盾。

- 情形 B ($0 \le t^+_{N_*-1}$)：由于 R 在 $[0, t^+_{N_*-1}]$ 上递减，在 $[t^+_{N_*-1}, t^-_{N_*}]$ 上递增，

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(R(0)) = f(R(T^*)) - f(R(0)) &\le f(R(T^*)) - f(R(t^+_{N_*-1}) = \int_{A(t_{N_*-1})}^{A(T^*)} \frac{1}{\sin R}\frac{dR}{dA}dA \\ &= \int_{2(N_*-1)+\frac{\pi}{2}}^{A(T^*)} \frac{1}{\sin R}\frac{dR}{dA}dA \le \int_{2(N_*-1)+\frac{\pi}{2}}^{A(T^*)} L_1(A)dA < \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} L_1(A)dA, \end{aligned}$$

由此可推出与情形 A 中相同的矛盾。

由上述两种情况，我们得到 $T^* \ge t^-_{N_*}$。由于假设 $T^* < \infty$，存在 $l \in \mathbb{N}$使得

$$t_l^- \le T^* \le t_{l+1}^-.$$

由于 $R(t)$ 在 $[t_l^-, t_l^+]$上递减，因此有 $T^* > t_l^+$，由此可得

$$\begin{aligned} f(R(T^*)) - f(R(t_l^-)) &= \left[f(R(t_l^+)) - f(R(t_l^-))\right] + \left[f(R(T^*)) - f(R(t_l^-))\right] \\ &\le \int_{A(t_l^-)}^{A(t_l^+)} L_2(A)dA + \int_{A(t_l^+)}^{A(T^*)} L_1(A)dA \\ &\le \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} L_2(A)dA + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} L_1(A)dA < 0. \end{aligned}$$

由此，我们推出矛盾

$$R(T^*) < R(t_l^-) < \alpha.$$

因此，

$$R(t) < \alpha, \quad \forall t \ge 0.$$

Now, 我们可以利用上述引理完成证明。根据引理 5.5 (ii)，

$$R(t) \le R(t_l^-), \quad \text{for } t \in [t_l^-, t_{l+1}^-].$$

因此，定义一个新的阶梯函数 g 为

$$g(t) := R(t_l^-) \quad t \in (t_l^-, t_{l+1}^-],$$

满足

$$R(t) \le g(t), \quad \forall t \ge 0.$$

此外，可以推导出

$$g(t) \le g(t_l^-), \quad \forall t \ge t_l^-.$$

因此，对于 $t \geq t_{N_*+1}^-$,

$$\begin{aligned}\ln \frac{R(t)}{R(t_{N_*}^-)} &\leq \ln \frac{g(t)}{R(t_{N_*}^-)} \leq \ln \frac{R(t_{N_*+1}^-)}{R(t_{N_*}^-)} \\ &\leq -\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\frac{\Omega-2K}{2\pi}|C_2^+ - C_1^-|\cdot|t_{N_*+1}^- - t_{N_*}^-| \\ &\leq -\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\frac{\Omega-2K}{2\pi}|C_2^+ - C_1^-|\cdot(t - t_{N_*}^-),\end{aligned}$$

这意味着所需的结果成立。 □

6. Numerical simulations

本节给出若干数值模拟，并将其与前文的解析结果进行比较。数值模拟采用一阶前向欧拉格式，时间步长为 $\Delta t = 10^{-2}$。

6.1. 相位动力学的时间演化。在本小节中，我们针对单个振子和具有高阶耦合的耦合振子的相位动力学进行了若干模拟，以观察不同阶数 n下的动力学模式。为便于比较，我们采用了三种不同的阶数，并保持其他系统参数相同：

$$n = 1, 10, 30, \quad (\nu, N, \kappa) = (5, 10, 1).$$

6.1.1. *Dec*耦合振子。 我们首先考虑单个振子的动力学，其中 $\nu = 5$ ：

$$\begin{cases}\dot\theta = 5 - \Big(a_n\,(1+\cos\theta)^n\Big)\sin\theta, \\ a_n = \dfrac{2n(2n-2)\cdots 2}{2^n(2n-1)\cdots 1}.\end{cases}$$

在图4中，我们绘制了经过适当频移后的修正相位 θ_{mo} 和 θ_{ad} 的时间演化：

$$\theta_{mo}(t) := \theta(t) - 5t, \quad \theta_{ad}(t) := \theta(t) - (5+\omega_\infty)t.$$

此处， ω_∞ 是在模拟之后选取的，以消除自耦合造成的漂移。当 n较大时，尖峰状现象更加显著，尖峰出现在 $\theta(t) = 0$附近。

6.1.2. 耦合 振子。 接下来，我们考虑十个振子的耦合动力学（$N = 10$ ）：

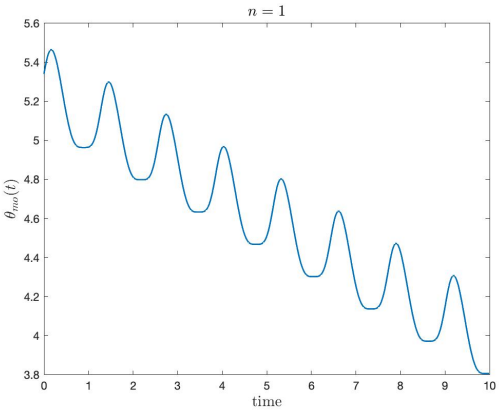
$$\begin{cases}\dot\theta_i = 5 - \dfrac{1}{10}\Big(a_n\displaystyle\sum_{j=1}^{10}(1+\cos\theta_j)^n\Big)\sin\theta_i, \quad i \in [10], \\ a_n = \dfrac{2n(2n-2)\cdots 2}{2^n(2n-1)\cdots 1}.\end{cases} \tag{6.1}$$

在图5中，我们对不同的 n 使用固定的初始数据：

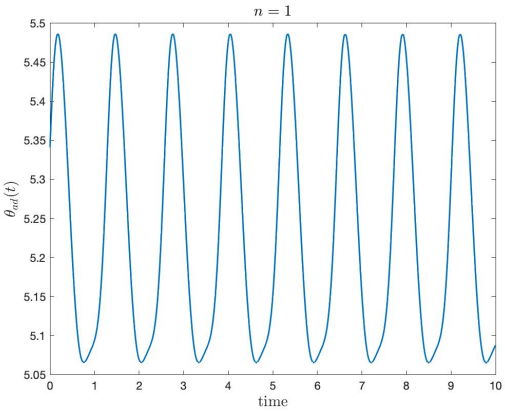
$$\{\theta_i^0\}_{i=1}^{10} = \Big\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{10}, \frac{4\pi}{3}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{7}, \frac{10\pi}{9}, \frac{12\pi}{11}\Big\}.$$

我们绘制了修正相位 $\theta_i - 5t$ 和相位直径 $\mathcal{D}(\Theta)$ 随时间的动力学，其中所有数值模拟最终都趋于锁定态。为观察（6.1）中相互作用项的影响，我们按照图4所示，通过从自然频率 $\nu = 5$ 中减去漂移，绘制以下修正相位：

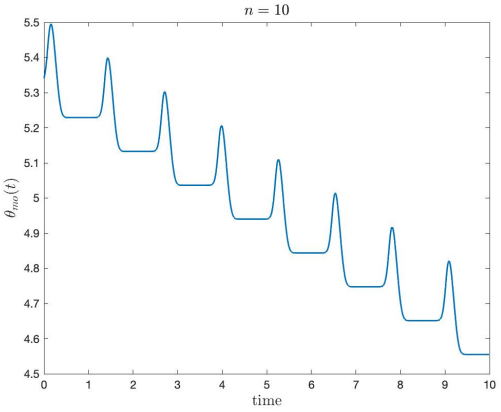
$$\theta_i(t) - 5t, \quad i \in [10].$$



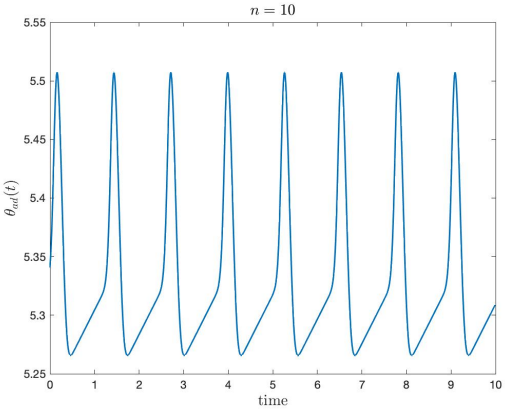
(A) θ_{mo} 的动力学（ $n = 1$）



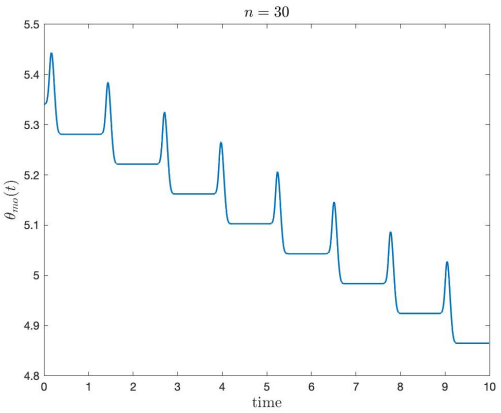
(B) θ_{ad} 与 $\omega_\infty = 0.1281$ 和 $n = 1$



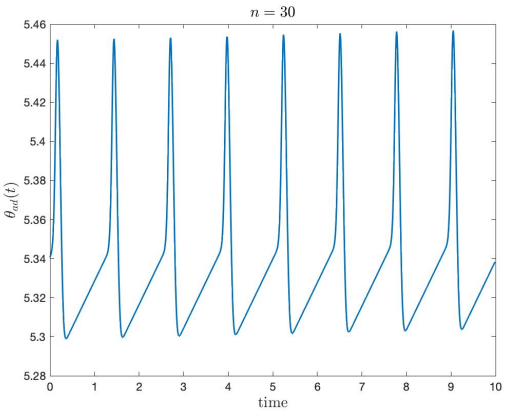
(C) θ_{mo} 的动力学（ $n = 10$）



(D) θ_{ad} 与 $\omega_\infty = 0.0075$ 和 $n = 10$



(E) θ_{mo} 的动力学（ $n = 30$）



(F) θ_{ad} 与 $\omega_\infty = 0.0474$ 及 $n = 30$

FIGURE 4. 单振子动力学

综合所有模拟结果，可以观察到周期振荡。具体而言，随着 n 增大，修正相位的运动会更加集中在尖峰（即振子“放电”）附近。对于$n = 1$，修正相位几乎在整个过程中都在振荡，而直径 $\mathcal{D}(\Theta)$则在 $n = 10$ 或 30 时呈现阶梯式骤降。这表明，随着 n 增大，该模型的行为越来越类似于脉冲耦合动力学。

6.2. 临界耦合强度。 在第 3 至第 5 节中，我们给出了耦合强度满足非相干、部分锁定、锁定和死亡态的充分条件。接下来，我们将通过数值方法研究这些集体行为之间耦合强度的未覆盖区间。

更具体地说，我们研究“经验临界耦合强度” κ_d， κ_p 和 κ_i ，它们分别对应于从死亡态到相位锁定、从相位锁定到部分锁定，以及从部分锁定到非相干时耦合强度的阈值。对于依赖于 n的 κ_d、κ_p 和 κ_i 的数值，我们针对每种情形选取满足 $N = 10$ 的固定初始数据。

首先，我们考虑两种非同一振子的情形，分别对应第 3 节和第 4 节中的情况。这里我们采用均匀分布的固有频率

$$\{\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_{10}\} = \{5.4, 5.8, \cdots, 9.0\}$$

以显著区分部分锁定与锁定。初始数据均匀随机选取，其中一组位于半圆上，另一组位于整个单位圆上。

图6展示了不同耦合强度 κ 和阶数 n 下的相图。通过观察 $t = 500$ （其中 $\Delta t = 0.01$）时的状态，并以不同颜色标示，来判断渐近行为。对于每个 n ，从 $n = 1$ 到 $n = 30$ ，以及每个从 0 到 8、步长为 $\Delta\kappa = 0.05$ 的 κ ，我们都进行了这些模拟。

可以观察到，渐近状态取决于初始数据，因此无法轻易断言 κ_d 是递增 还是递减。由于 $\kappa_{d,n}$ 过大，无法与数值相图中的取值进行比较，因此我们无法直接应用第 4 节的结果。不过，图中沿着 n 的趋势似乎相似，而我们预期 $\kappa_d \sim \mathcal{O}(1)$。另一方面， κ_i 以接近 $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 的速率衰减，其阶数已在第 3 节中给出。总的来说，数值模拟关于阶数 n 显示出与第 3 节和第 4 节解析结果相似的趋势。

其次，我们还考虑了同质振荡器的两种情形（见图7）， $\nu = 5$，对应于第 5 节，采用以下设置:

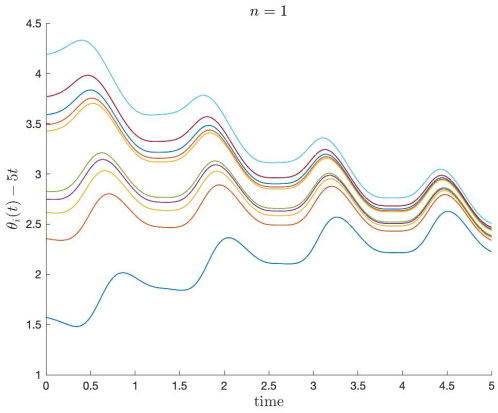
$$t \in [0, 500] \text{ with } \Delta t = 0.01, \quad n = 1, \cdots, 100, \quad \Delta\kappa = 0.01.$$

图 7(A)展示了半圆内初始数据对应的临界耦合 κ_d 。对于同质振荡器，动力学只表现为锁定或死亡态，因为整个振子群无需耦合作用的帮助，便会以共同频率运行。另一种情形是图7(B)，其初始数据对所有 n 均满足定理 5.1 中的条件，且 $\alpha = 3\pi/64$，因此 $\Theta(0) \in B(\pi/200)$。由于这些情形的初始状态具有累积相位，可以预期集体行为更容易出现。然而，图7表明，实测的临界耦合强度并不太依赖初始数据。正如我们在定理 5.1 中的估计所示， κ_d 在 n 中呈单调递减，其衰减速率与我们分析的 $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$相当相似。

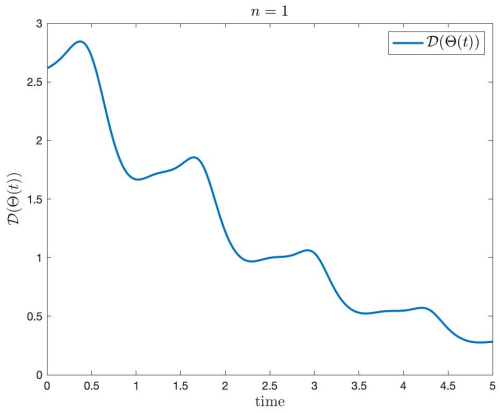
因此，我们预期，关于耦合强度的充分条件相对于阶数 n 具有正确的增长率。

7. Conclusion

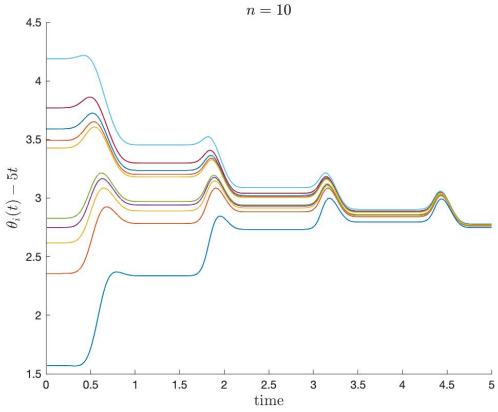
本文为具有高阶耦合的 Winfree 模型的涌现动力学提供了若干充分框架。对脉冲耦合同步的严格研究



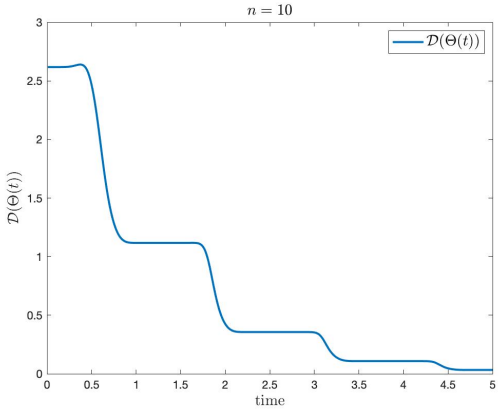
(A) $\theta_i - 5t$ 的动力学（针对 $n = 1$）



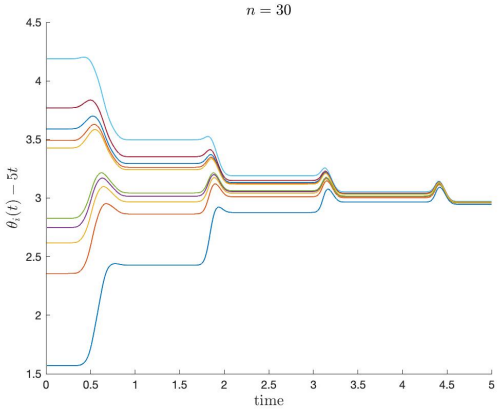
(B) $\mathcal{D}$（Θ）的动力学（针对 $n = 1$）



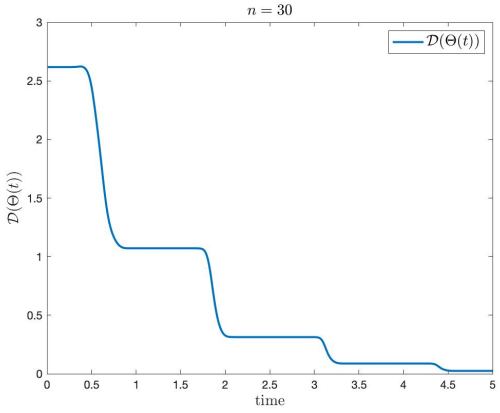
(C) $\theta_i - 5t$ 的动力学（针对 $n = 10$）



(D) $\mathcal{D}$（Θ）的动力学（针对 $n = 10$）

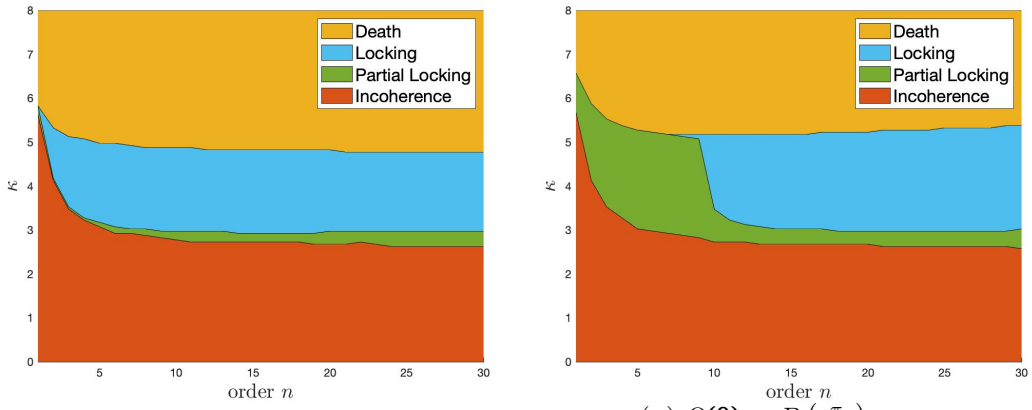


(E) $\theta_i - 5t$ 的动力学（针对 $n = 30$）



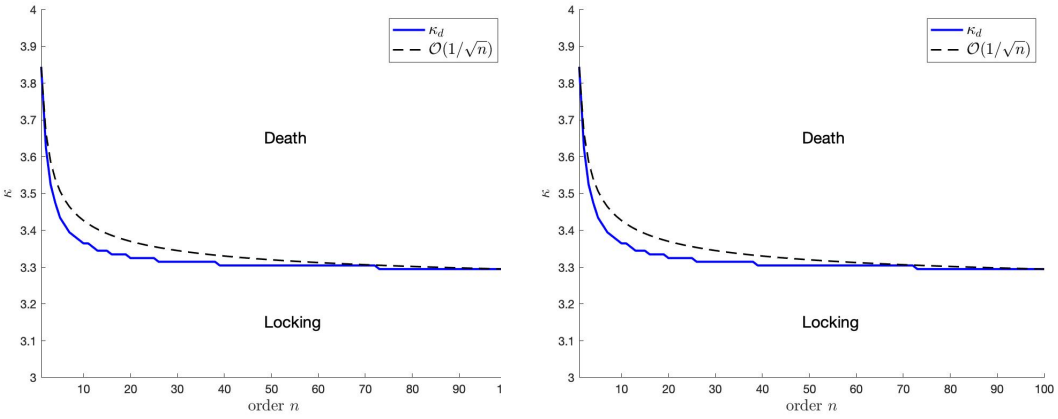
(F) $n = 30$的 $\mathcal{D}$(Θ)动力学

FIGURE 5. 耦合相位动力学



(A) $\Theta(0) \in B\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (B) $\Theta(0) \in B\left(\frac{\pi}{200}\right)$

FIGURE 6. 非同一振子的相图



(A) $\Theta(0) \in B\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (B) $\Theta(0) < B\left(\frac{\pi}{200}\right)$

FIGURE 7. 同一振子

动力学与 Kuramoto 模型和 Winfree 模型等相位耦合模型相比非常罕见。作为数学分析脉冲耦合模型的第一步，我们采用了具有高阶三角函数耦合的 Winfree 模型，并研究其关于耦合阶数 n 的涌现动力学。随着阶数 n 增大，影响函数趋近于狄拉克质量的常数倍。通过对相位直径的估计，我们分析了影响函数的阶数 n 如何影响各种集体模态的涌现。当然，我们提出的框架仅提供了充分条件，远非最优。在不同集体模态之间的转变过程中，推导出更精细且最优的耦合强度将会很有意义：

$$\text{Incoherence} \implies \text{locking} \implies \text{death}.$$

另一方面，与上一节的数值模拟相比，我们从定理 3.1 到定理 5.1 得出的耦合强度条件仅适用于受限的初始数据，而不适用于

图 6(A) 或图 7(A) 中的任意初始数据。根据这些模拟，可以预期，在类似的耦合强度范围内 κ 也会出现相同的渐近行为。我们将其留作未来的工作。

References

[1] Acebr ´ ´ *The Kuramoto model: A simple* on, J. A., *paradigm for synchronization phenomena.* **77** 2005 137 185 Bonilla, L. L., Perez Vicente, C. J. P., Ritort, F. 和 Spigler, R.: 《现代物理评论》 (), -。[2] Aeyels, D. 和 Rogge, J.: 《理论物理进展》 (), –。[3] Akhmet, M. U.: *Self-synchronization of the integrate-and-fire pacemaker model with continuous couplings*。《非线性分析: 混合系统》6（2012）, 730-740。[4] Albi, G., Bellomo, N., Fermo, L., Ha, S.-Y., Kim, J., Pareschi, L., Poyato, D. 和 Soler, J.: *Vehicular traffic,crowds and swarms: From kinetic theory and multiscale methods to applications and research perspectives* 。《数学模型与方法及其应用科学》29（2019）, 1901-2005。[5] Ariaratnam, J. T. 和 Strogatz, S. H.: *Phase diagram for the Winfree model of coupled nonlinear oscillators*。《物理评论快报》86（2001）, 4278-4281。[6] Benedetto, D., Caglioti, E. 和 Montemagno, U.: *On the complete phase synchronization for the Kuramoto model in the mean-field limit.* **13** 2015 1775 1786 《数学科学通讯》 (), –。

[7] Bronski, J., Deville, L. 和 Park, M. J.: *Fully synchronous solutions and the synchronization phase transition for the finite-N Kuramoto model.* **22** 2012 033133 《混沌》 (), 。[8] Choi, Y.-P., Ha, S.-Y., Jung, S. 和 Kim, Y.: *Asymptotic formation and orbital stability of phase-locked states for the Kuramoto model.* **241** 2012 735 754 《物理学 D》 (), -。

[9] Chopra, N. 和 Spong, M. W.: *On exponential synchronization of Kuramoto oscillators.*《IEEE 自动控制汇刊》54（2009）, 353–357。[10] Dong, J.-G. 和 Xue, X.: *Synchronization analysis of Kuramoto oscillators.*《数学科学通讯》11（2013）, 465–480。[11] D¨ orfler, F. 和 Bullo, F.: *On the critical coupling for Kuramoto oscillators.*《SIAM 动力系统应用杂志》10（2011）, 1070–1099。[12] D¨ orfler, F. 和 Bullo, F.: *Synchronization in complex networks of phase oscillators: A survey.*《自动化》50（2014）, 1539–1564。[13] D¨orfler, F. 和 Bullo, F.: *Synchronization in complex network of phase oscillators: A survey.*《自动化》50（2014）, 1539-1564。

[14] Ha, S.-Y., Kim, H. K. 和 Ryoo, S. W.: *Emergence of phase-locked states for the Kuramoto model in a large coupling regime.* **4** 2016 1073 1091 《数学科学通讯》 (), -。

[15] Ha, S.-Y., Ko, D., Park, J., Ryoo, S. W.: *Emergence of partial locking states from the ensemble of Winfree oscillators* **75** 2017 39 68 。《应用数学季刊》 (), -。

[16] Ha, S.-Y., Ko, D., Park, J. 和 Zhang, X.: *Collective synchronization of classical and quantum oscillators.*《EMS 数学科学综述》3（2016）, 209-267。[17] Ha, S.-Y., Park, J., Ryoo, S. W.: *Emergence of phase-locked states for the Winfree model in a large coupling regime* **35** 2015 3417 3436 。《离散与连续动力系统》 (), -。[18] Ha, S.-Y., Ryoo, S. W.: *Asymptotic phase-locking dynamics and critical coupling strength for the Kuramoto model* **377** 2020 811 857 。《数学物理通讯》 (), -。

[19] Jadbabaie, A., Motee, N. 和 Barahona, M.: *On the stability of the Kuramoto model of coupled nonlinear oscillators.* 2004 4296 4301 《美国控制会议论文集》 (), -。[20] Katok, A. 和 Hasselblatt, B.: *Introduction to the modern theory of dynamical systems*。剑桥大学出版社, 1995。[21] Kuramoto, Y.: 数学物理中的数学问题国际研讨会, *Lecture Notes in Theoretical Physics* **30** 1975 420 ()。[22] Mirollo, R. E. 和 Strogatz, S. H.: *Synchronization of pulse-coupled biological oscillators*。《SIAM 应用数学杂志》50（1990）, 1645-1662。[23] Nguyen, L. H. 和 Hong, K.-S.: *Synchronization of coupled chaotic FitzHugh-Nagumo neurons via Lyapunov functions* **82** 2011 590 603 。《数学与计算机模拟》 (), -。[24] Oukil, W., Thieullen, Ph. 和 Kessi, A.: *Invariant cone and synchronization state stability of the mean field models.* **34** 2019 422 433 《动力系统》 (), -。

[25] Oukil, W., Kessi, A. 和 Thieullen, Ph.: *Synchronization hypothesis in the Winfree model.*《动力系统》**32** （2017），326-339。[26] Peskin, C. S.: *Mathematical Aspects of Heart Physiology*，柯朗数学科学研究所，纽约大学，纽约，1975，268-278。[27] Pikovsky, A., Rosenblum, M. 和 Kurths, J.: *Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences.* 剑桥：剑桥大学出版社，2001。[28] Plotnikov, S. A. 和 Fradkov, A. L.: *On synchronization in heterogeneous FitzHugh-Nagumo networks*。《混沌、孤子与分形》**121** （2019），85-91。[29] Steur, E., Tyukin, I. 和 Nijmeijer, H.: *Semi-passivity and synchronization of diffusively coupled neuronal oscillators* **328** 2009 2119 2128 。《物理学 D》，（），-。[30] Strogatz, S. H.: *From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators* **143**, 1 20 2000 。《物理学 D -》（）。[31] Verwoerd, M. 和 Mason, O.: *A convergence result for the Kurmoto model with all-to-all couplings.*《SIAM 动力系统应用杂志》**10**（2011），906–920。[32] Verwoerd, M. 和 Mason, O.: *On computing the critical coupling coefficient for the Kuramoto model on a complete bipartite graph.* **8** 2009 417 453 《SIAM 动力系统应用杂志》（），–。[33] Verwoerd, M. 和 Mason, O.: *Global phase-locking in finite populations of phase-coupled oscillators.*《SIAM 动力系统应用杂志》**7** （2008），134–160。[34] Winfree, A. T.: *Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators*。《理论生物学杂志》**16** （1967），15-42。[35] Zong, Y., Dai, X., Gao, Z., Busawon, K. 和 Zhu, J.: *Modelling and synchronization of pulse-coupled non-identical oscillators for wireless sensor networks* 2018 16 。载于 IEEE 第届工业信息学国际会议（INDIN）（第101-107页）。IEEE。

Department of Mathematics The Catholic University of Korea Jibongro 43 Bucheon Gyeong- , , , , , , gido 14662 Republic of Korea dongnamko@catholic.ac.kr
Department of Mathematical Sciences and Research Institute of Mathematics Seoul National , , , University Seoul 08826 syha@snu.ac.kr
Department of Mathematical Sciences, Seoul National University, Seoul 08826, jyoung924@snu.ac.k

R