arXiv:2302.03187v2 [math.NT] 2 Jun 2023

舒尔多重ζ值的求和公式

HENRIK BACHMANN、SHIN-YA KADOTA、YUTASUZUKI、SHUJI YAMAMOTO 和 YOSHINORI YAMASAKI

Abstract. 本文研究舒尔多重ζ值的求和公式，并给出多重ζ（星）值求和公式的一种推广。我们证明，对于某些类型的带状图，对该形状的所有可容许杨表对应的舒尔多重ζ值求和，结果是黎曼ζ值的有理数倍。对于具有 n 个角的任意带状图，我们证明，这样的和总能表示为深度为 $\leq n$ 的多重ζ值之和。特别地，当 $n=2$ 时，我们给出这些带状图的显式求和公式，并称之为有界型求和公式。最后，我们说明如何计算对应杨图恰有一个角时的这一求和，并证明它们的有界型求和公式。这也将导出不同形状的所有可容许杨表对应的舒尔多重ζ值之和之间的关系。

1. Introduction

本文旨在介绍几类舒尔多重ζ值的求和公式，它们可视为多重ζ（星）值经典求和公式的推广。舒尔多重ζ值是在 [7],中引入的实数，可视为多重ζ值（MZVs）和多重ζ星值（MZSVs）的统一推广。多重ζ值和多重ζ星值定义在指标 $\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_d)\in\mathbb{Z}_{\geq 1}^d$ 上，其中 $k_d\geq 2$，定义如下：

$$\zeta(\boldsymbol{k}) \coloneqq \sum_{0<m_1<\cdots<m_d} \frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_d^{k_d}}, \qquad \zeta^\star(\boldsymbol{k}) \coloneqq \sum_{0<m_1\leq\cdots\leq m_d} \frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_d^{k_d}}.$$

这里，条件 $k_d\geq 2$ 保证上述求和收敛，此时称指标 $\boldsymbol{k}$ 为可容许指标。对于指标 $\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_d)$，记 $\mathrm{wt}(\boldsymbol{k})=k_1+\cdots+k_d$表示其权，记 $\mathrm{dep}(\boldsymbol{k})=d$ 表示其深度。经典结果（[2],[3]）表明，对固定的权 w 和深度 d，对所有可容许指标对应的多重ζ（星）值求和，结果为（某个整数倍的）$\zeta(w)$；也就是说，对于 $d\geq 1$ 和 $w\geq d+1$

$$\sum_{\substack{\boldsymbol{k}\text{ admissible}\\ \mathrm{wt}(\boldsymbol{k})=w\\ \mathrm{dep}(\boldsymbol{k})=d}} \zeta(\boldsymbol{k})=\zeta(w), \qquad \sum_{\substack{\boldsymbol{k}\text{ admissible}\\ \mathrm{wt}(\boldsymbol{k})=w\\ \mathrm{dep}(\boldsymbol{k})=d}} \zeta^\star(\boldsymbol{k})=\binom{w-1}{d-1}\zeta(w). \tag{1.1}$$

舒尔多重ζ值通过将指标 $\boldsymbol{k}$ 替换为斜杨表来推广 MZ(S)V（确切定义见定义 1.1）。例如，若有斜杨图$\lambda/\mu=(2,2)/(1)$ 且 $k_1,k_3\geq 1, k_2\geq 2$，则形状为 λ/μ 的杨



日期：2023年6月5日。2020年数学主题分类。主要分类：11M32；次要分类：05E05。关键词和短语：Schur 多重值、求和公式、与2-偏序集相关的积分、雅可比-特鲁迪公式。

表 $\boldsymbol{k} = \begin{array}{|c|c|}\hline k_1 \\ \hline k_3 & k_2 \\ \hline \end{array} \in \overline{\mathrm{YT}}(\lambda/\mu)$ 定义为

$$\zeta(\boldsymbol{k}) = \zeta\left(\begin{array}{|c|c|}\hline k_1 \\ \hline k_3 & k_2 \\ \hline \end{array}\right) = \sum_{\substack{m_1 \\ m_3 \le m_2}} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} m_3^{k_3}},$$

其中求和遍及 m_1、m_2、$m_3 \ge 1$。舒尔多重ζ值推广了多重ζ值和多重ζ星值，因为当杨图分别取为 $(1,\dots,1)$ 和 (d) 时，可将它们恢复为特殊情形，即

$$\zeta(k_1,\dots,k_d) = \zeta\left(\begin{array}{|c|}\hline k_1 \\ \hline \vdots \\ \hline k_d \\ \hline \end{array}\right) \quad \text{and} \quad \zeta^\star(k_1,\dots,k_d) = \zeta\left(\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline k_1 & \cdots & k_d \\ \hline \end{array}\right).$$

经典求和公式 (1.1) 表明，对于形状 $\lambda = (1,\dots,1)$ 或 $\lambda = (d)$，对所有形状为 λ、权为 $w \ge d+1$ 的可容许杨表求和，其舒尔多重ζ值等于 $\zeta(w)$ 的（一个倍数）。因此，自然会问，对于一般形状 λ/μ，情况如何？也就是说，是否存在对

$$S_w(\lambda/\mu) \coloneqq \sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in \mathrm{YT}(\lambda/\mu) \\ \boldsymbol{k} \text{ admissible} \\ \mathrm{wt}(\boldsymbol{k})=w}} \zeta(\boldsymbol{k}). \tag{1.2}$$

猜想 $S_w(\lambda/\mu)$ 总是 $\zeta(w)$ 的有理数倍，这一乐观猜测似乎并不成立，因为我们将看到，例如，对于 $\lambda = (2,2)$，$=$ 和 $\mu = \varnothing$，有 $w \ge 5$ $\boxplus$

$$\begin{aligned} S_w\left(\begin{array}{|c|c|}\hline \multicolumn{2}{|c|}{} \\ \hline \multicolumn{2}{|c|}{} \\ \hline \end{array}\right) &= -(w-2)\zeta(1,w-1) + (w-4)\zeta(2,w-2) + 2\zeta(3,w-3) \\ &\quad - 2\zeta(3)\zeta(w-3) + (w-2)\zeta(2)\zeta(w-2), \end{aligned} \tag{1.3}$$

根据计算机实验，任意 w 下，它似乎无法求值为 $\zeta(w)$ 的有理数倍。尽管如此，我们看到，(1.3) 给出了一个表示，将其写成多重ζ值的乘积之和，其中项数不依赖于 w。这种表达式的存在并非显而易见，因为先验地，(1.2) 中的项数会随权w增加。因此，将 (1.3) 称为求和公式也是合理的。由于它与多重ζ值的求和公式属于不同类型，我们为形状 λ/μ 引入以下几类求和公式：

> 单一型：$S_w(\lambda/\mu)$ 可求值为 $\zeta(w)$ 的有理数倍。多项式型：$S_w(\lambda/\mu)$ 可求值为关于 $\zeta(m)$ 的多项式，其系数为 $m \le w$。有界型：$S_w(\lambda/\mu)$ 可表示为多重ζ值的 $\mathbb{Q}$-线性组合，其中项数不依赖[1] 于 w，而仅取决于 λ/μ。

按照这一术语，经典求和公式属于单一型，而公式 (1.3) 属于有界型。这个列表并非详尽无遗，也就是说，我们并未声称任何形状 λ/μ 都具有这三种类型之一的求和公式。这个列表也并非互斥，例如，单一型公式也同时属于多项式型和有界型。

在本文中，我们将重点讨论这样的情形：λ/μ只有一个角（角的定义见第 1.1 节），或者 λ/μ 是一个带状图，即一个连通且不含 λ/μ方格块的（斜）杨图

[1]我们的意思是，对于固定的 λ/μ，可以找到 $a(\boldsymbol{k},w) \in \mathbb{Q}$，使得对于可容许指标 $\boldsymbol{k}$ 和 $w \ge 1$，有$S_w(\lambda/\mu) = \sum_{\boldsymbol{k}} a(\boldsymbol{k},w)\zeta(\boldsymbol{k})$，并且存在一个正实数 C，使得对于所有 $w \ge 1$，都有 $|\{\boldsymbol{k} \mid a(\boldsymbol{k},w) \ne 0\}| < C$。

。例如，若 λ 只是一个列或一行，我们就得到单类型求和公式 (1.1)。作为推广，我们将证明（定理 3.8），对于 $\lambda/\mu = (\underbrace{d\ \ldots\ d}_{r}, \underbrace{)/(d-1,\ \ldots,\ d-1}_{r-1})$，即，当 λ/μ是一个反钩时，我们有

$$S_w(\lambda/\mu) = S_w\left(\begin{array}{ccc} & & \square \\ & & \vdots \\ \square & \cdots & \square \end{array}\right) = \binom{w-1}{d-1}\zeta(w)\,.$$

这可以看作是两个经典求和公式 (1.1) 的统一。在定理3.9中，我们将证明“踏面为一的阶梯”（其中每个阶梯的高度都相同）也会产生单类型求和公式。例如，作为特殊情形，对于所有 $w \geq 8$，我们得到以下公式

(1.4)

$$S_w\left(\begin{array}{cc} & \square \\ & \square \\ & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{array}\right) = \frac{(w-8)(w-1)}{2}\zeta(w)\,, \quad S_w\left(\begin{array}{cc} & \square \\ & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{array}\right) = \frac{(w-9)(w-8)(w-1)}{6}\zeta(w)\,.$$

对于具有任意 n 个角的带状图，我们将在推论3.5中看到，相应的S_w 总可以用深度为 $\leq n$的多重ζ值表示。特别地，在定理 3.13 中，我们将给出一个显式的有界类型求和公式，用双重ζ值表示任意具有两个角的带状图。

在最后一节中，我们考察恰好具有一个角、但不一定是带状图的形状。我们将证明，任意具有一个角的形状总能导出有界型的求和公式（定理 4.2），类似于（1.3）。这还将导出不同形状的 λ/μ之间的 $S_w(\lambda/\mu)$ 关系。例如，作为定理 4.8 的一个特例，我们将看到，对于任意 $w \geq 1$

$$2S_w\left(\begin{array}{cc} & \square \\ & \square \\ \square & \square \end{array}\right) - S_w\left(\begin{array}{cc} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{array}\right) - 4S_w\left(\begin{array}{cc} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{array}\right) = (w-7)S_w\left(\begin{array}{cc} & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{array}\right)\,.$$

注意，左侧的图形是通过向右侧的图形添加一个方格（灰色方格）得到的。

本文的结构如下：在第 2 节中，我们给出某些多重ζ值的加权和的递归公式，该公式将在后面的各节中使用。为此，我们将回顾 2-偏序集及其关联积分的概念。在第3节中，我们考察 $S_w(\lambda/\mu)$，其中 λ/μ 是带状图。第4节将专门讨论恰好具有一个角的形状。

1.1. 舒尔多重ζ值的记号与定义。本文采用以下记号。元组 $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^d$ 称为指标，并在 $d = 0$ 时记作 $\boldsymbol{k} = \varnothing$。若 $k_d \geq 2$ 或 $\boldsymbol{k} = \varnothing$，则称 $\boldsymbol{k}$ 为可容许。对于 $n \geq 1$ 和 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，我们用通常记号 $\{k\}^n = k, \ldots, k\underbrace{\qquad}_{n}$ 表示 k 的 n 次重复

自然数 n 的一个分拆是由正整数 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_h \geq 1$ 组成的元组 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_h)$，其中 $n = |\lambda| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_h$。我们也使用记号 $\lambda = (n^{m_n}, \ldots, 2^{m_2}, 1^{m_1})$，其中 $m_i = m_i(\lambda)$ 是 λ 中 i 的重数。对于另一个分拆 $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_r)$，若 $r \leq h$ 且对于 $i = 1, \ldots, r$ 有 $\mu_i \leq \lambda_i$，我们记作 $\mu \subset \lambda$，并且我们

定义 λ/μ 的斜杨图 $D(\lambda/\mu)$ 如下：

$$D(\lambda/\mu) = \left\{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \le i \le h\,, \mu_i < j \le \lambda_i\right\},$$

其中 $\mu_i = 0$ 对于 $i > r$。当 $\mu = \varnothing$ 是空分拆（即零的唯一分拆）时，我们简写为 $\lambda/\mu = \lambda$。

形状为 λ/μ 的杨表 $\boldsymbol{k} = (k_{i,\,j})_{(i,j)\in D(\lambda/\mu)}$，是通过将 $k_{i,\,j} \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$ 填入 $D(\lambda/\mu)$ 的第 (i,j) 个位置而得到的。为简洁起见，如果形状 λ/μ 可从上下文中明确得知，以下也将简写为 $(k_{i,\,j})$。若 $m_{i,\,j} < m_{i+1,\,j}$ 且 $m_{i,\,j} \le m_{i,\,j+1}$ 对所有可能的 i 和 j均成立，则称杨表 $(m_{i,\,j})$ 为半标准杨表。形状为 λ/μ 的所有杨表和半标准杨表的集合分别记为 $\mathrm{YT}(\lambda/\mu)$ 和 $\mathrm{SSYT}(\lambda/\mu)$。

称条目 $(i,j) \in D(\lambda/\mu)$ 为 λ/μ 的（外）角，当且仅当 $(i,j+1) \notin D(\lambda/\mu)$ 且 $(i+1,j) \notin D(\lambda/\mu)$。我们用 $C(\lambda/\mu)$ 表示 λ/μ 的所有角构成的集合。对于杨氏表 $\boldsymbol{k} = (k_{i,j}) \in \mathrm{YT}(\lambda/\mu)$，定义其权为 $\mathrm{wt}(\boldsymbol{k}) = \sum_{(i,j)\in D(\lambda/\mu)} k_{i,j}$；若对于所有 $(i,j) \in C(\lambda/\mu)$，均有 $k_{i,j} \ge 2$，则称其为可容许的。

定义 1.1. 对于可容许的 $\boldsymbol{k} = (k_{i,j}) \in \mathrm{YT}(\lambda/\mu)$，舒尔多重ζ值（Schur MZV）定义为

$$\zeta(\boldsymbol{k}) := \sum_{(m_{i,j})\in \mathrm{SSYT}(\lambda/\mu)} \prod_{(i,j)\in D(\lambda/\mu)} \frac{1}{m_{i,j}^{k_{i,j}}}\,. \tag{1.5}$$

注意，$\boldsymbol{k}$ 的可容许性保证了 (1.5) 的收敛性（[7, 引理 2.1]）。对于空杨表 $\boldsymbol{k} = \varnothing$，有 $\zeta(\varnothing) = 1$。

最后，我们说明本文采用的二项式系数约定：对于 $n, k \in \mathbb{Z}$，定义为

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{k!} & \text{if } k > 0, \\ 1 & \text{if } k = 0, \\ 0 & \text{if } k < 0. \end{cases}$$

致谢。作者感谢审稿人认真审阅稿件并提出宝贵意见，这些意见提升了稿件的质量。第一作者获得了日本学术振兴会科学研究费助成事业资助，项目编号为 JP19K14499、JP21K13771。第三作者获得了日本学术振兴会科学研究费助成事业资助，项目编号为 JP19K23402、JP21K13772。第四作者获得了日本学术振兴会科学研究费助成事业资助，项目编号为 JP18H05233、JP18K03221、JP21K03185。第五作者获得了日本学术振兴会科学研究费助成事业资助，项目编号为 JP21K03206。

2. 加权和公式

计算舒尔多重ζ值的和时，我们常会遇到多重ζ值的加权和，本节将对此进行讨论。对于指标 $\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_d)$、$\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d)$以及整数 $l \ge 0$，定义

$$P_l(\boldsymbol{n}; \boldsymbol{k}) := \sum_{\substack{\boldsymbol{w}=(w_1,\ldots,w_d)\text{: adm.} \\ w_i \ge n_i \ (i=1,\ldots,d) \\ \mathrm{wt}(\boldsymbol{w}) = \mathrm{wt}(\boldsymbol{k}) + l}} \prod_{i=1}^{d} \binom{w_i - n_i}{k_i - 1} \cdot \zeta(w_1, \ldots, w_d).$$

注意，根据定义，$P_l(\varnothing; \varnothing) = 1$ 当且仅当 $l = 0$，否则为 0。特别地，我们记$P_l(\boldsymbol{k}) := P_l((1, \ldots, 1); \boldsymbol{k})$，并记 $Q_l(\boldsymbol{k}) := P_l((1, \ldots, 1, 2); \boldsymbol{k})$。本节旨在求出 $P_l(\boldsymbol{k})$ 和 $Q_l(\boldsymbol{k})$ 的显式有界表达式，它们发挥着重要作用

贯穿本文。这里，若 $P_l(\boldsymbol{k})$ 或 $Q_l(\boldsymbol{k})$ 的表达式中所出现的项数不依赖于 l ，而仅依赖于 $\boldsymbol{k}$，则称该表达式为有界的。注意，由于 $\binom{w-2}{k-1}=\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{w-1}{k-j-1}$，我们有

$$Q_l(\boldsymbol{k})=\sum_{j=0}^{k_d-1}(-1)^j P_{l+j}(k_1,\dots,k_{d-1},k_d-j) \tag{2.1}$$

尤其是，当 $\boldsymbol{k}$ 为非可容许时， $Q_l(\boldsymbol{k})=P_l(\boldsymbol{k})$。根据 (2.1)，只需研究 $P_l(\boldsymbol{k})$。此外，我们可以假设 $l>0$ ，因为 $l=0$ 的情形显然成立：若 $\boldsymbol{k}$ 可容许，则 $P_0(\boldsymbol{k})=\zeta(\boldsymbol{k})$；否则为 0；而对于任意指标 $\boldsymbol{k}$， $Q_0(\boldsymbol{k})=0$ 。此外，当 $d=1$ 时，对于 $k\geq 1$ 和 $l>0$，有

$$P_l(k)=\binom{l+k-1}{k-1}\zeta(l+k)\,,\quad Q_l(k)=\binom{l+k-2}{k-1}\zeta(l+k)$$

因此也可以假设 $d\geq 2$。

下一个命题断言， $P_l(\boldsymbol{k})$ 关于 l 满足递归公式，这些公式可用反钩形舒尔多重ζ值来描述

$$\begin{aligned}\zeta\binom{\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{k}}&=\zeta\binom{l_1,\dots,l_s}{k_1,\dots,k_r}\\ &\coloneqq\zeta\left(\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline l_1&\cdots&l_s&k_r\\\hline\end{array}\!\!\begin{array}{|c|}\hline k_1\\\hline\vdots\\\hline\end{array}\right)=\sum_{0<a_1<\cdots<a_r\geq b_s\geq\cdots\geq b_1>0}\frac{1}{a_1^{k_1}\cdots a_r^{k_r}b_1^{l_1}\cdots b_s^{l_s}}\end{aligned} \tag{2.2}$$

其中 $\boldsymbol{l}=(l_1,\dots,l_s)$ 是一个指标，而 $\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_r)$ 是一个非空的可容许指标。命题 2.1. 设 $d\geq 2$ 且 $l>0$。

(i) 若 $\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_d)$ 是可容许的，则有

$$P_l(\boldsymbol{k})=\sum_{i=1}^{d}\sum_{a_i=0}^{k_i-1}(-1)^{k_1+\cdots+k_{i-1}+a_i}P_{k_i-1-a_i}(k_{i-1},\dots,k_1,l+1)\,P_{a_i}(k_{i+1},\dots,k_d)\,. \tag{2.3}$$

(ii) 若 $\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_d)$ 是不可容许的（即 $k_d=1$），则有

$$\begin{aligned}P_l(\boldsymbol{k})&=\sum_{i=1}^{d}\sum_{a_i=0}^{k_i-1}(-1)^{k_1+\cdots+k_{i-1}+a_i}P_{k_i-1-a_i}(k_{i-1},\dots,k_1,l+1)P_{a_i}(k_{i+1},\dots,k_{d-1},1)\\ &+\sum_{i=1}^{d-1}(-1)^{l+d+k_i}\sum_{\substack{(b_0,\dots,b_{d-1})\in\mathbb{Z}_{\geq 1}^d\\ b_i=2\\ b_0+\cdots+b_{d-1}=\mathrm{wt}(\boldsymbol{k})+l+1}}(-1)^{b_0+b_1+\cdots+b_{i-1}}\binom{b_0-1}{l}\left\{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{d-1}\binom{b_j-1}{k_j-1}\right\}\\ &\times\sum_{j=i}^{d-1}\sum_{c_j=1}^{b_j-1}(-1)^{c_j+j+b_{j+1}+\cdots+b_{d-1}}\zeta\binom{c_j,b_{j+1},\dots,b_{d-1}}{b_{i-1},\dots,b_1,b_0}\zeta(b_{i+1},\dots,b_{j-1},b_j-c_j+1)\,.\end{aligned} \tag{2.4}$$

注 2.2. 表达式 (2.4) 中的项数实际上有一个仅依赖于 $\boldsymbol{k}$ 、而不依赖于 l 的常数上界，原因如下：由于二项式系数 $\binom{b_0-1}{l}$ 非零，求和变量 b_0 可以限制在 $b_0\geq l+1$ 范围内，而其他求和变量则有与 l 无关的界。此外，将公式 (4.1) 应用于反钩，可以将每一项展开

$$\zeta\binom{c_j,b_{j+1},\dots,b_{d-1}}{b_{i-1},\dots,b_1,b_0}$$

为多重ζ值之和。出现的多重ζ值的数量与 b_0、...、b_{d-1} 和 c_j 无关。最后，利用调和积公式，我们可以将多重ζ值的乘积改写为多重ζ值之和。应用调和积公式后得到的项数仅取决于上述出现的多重ζ值的项数，因此与 l 无关。

为证明命题 2.1，我们首先回顾第四位作者在 [9] 中引入的 2-偏序集及其相关积分的概念。

定义 2.3（[9, 定义 2.1]）。

(i) 2-偏序集是一个二元组（X, δ_X），其中 $X = (X, \leq)$ 是一个有限偏序集（简称偏序集），而 δ_X 是一个从 X 到 $\{0,1\}$ 的映射（称为 X 的标记映射）。我们通常省略 δ_X，直接称“一个 2-偏序集 X”。此外，如果对于所有极大元 x 都有 $\delta_X(x) = 0$，并且对于所有极小元 x 都有 $\delta_X(x) = 1$，则称 2-偏序集 X 是可容许的。

(ii) 对于可容许的 2-偏序集 X，其关联积分 $I(X)$ 定义为

$$I(X) = \int_{\Delta_X} \prod_{x \in X} \omega_{\delta_X(x)}(t_x)\,, \tag{2.5}$$

where $\Delta_X = \left\{ (t_x)_x \in [0,1]^X \;\middle|\; t_x < t_y \text{ if } x < y \right\}$ and $\omega_0(t) = \frac{dt}{t}$ and $\omega_1(t) = \frac{dt}{1-t}$.

我们将 2-偏序集表示为一个哈斯图，其中带有 $\delta_X(x) = 0$（分别为 $\delta_X(x) = 1$）的元素 x 表示为 ∘（分别为 •）。例如，图形

(2.6)

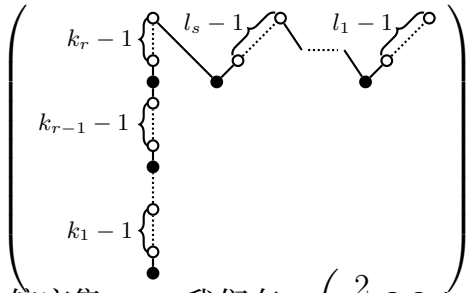


表示具有序关系 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 > x_6 < x_7 < x_8 > x_9 < x_{10}$ 且标记为 $(\delta_X(x_1), \ldots, \delta_X(x_{10})) = (1,0,1,1,0,1,0,0,1,0)$ 的 2-偏序集 $X = \{x_1, \ldots, x_{10}\}$。

在 [5], 中，表明反钩形的舒尔多重ζ值可以通过一个 2-偏序集的关联积分表示为如下形式。这可以视为对多重ζ值和多重ζ星值积分表达式的同时推广。

定理 2.4（[5, 定理 4.1]）。对于指标 $\boldsymbol{l} = (l_1, \ldots, l_s)$ 和非空可容许指标 $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_r)$，我们有

$$\zeta\binom{\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{k}} = I\left(\quad\right).$$



例如，对于由 (2.6) 给出的 2-偏序集 X，我们有 $\zeta\left(\begin{smallmatrix} 2, 3\,2\,1, , 2 \end{smallmatrix}\right) = I(X)$。

在命题 2.1 的证明中，我们考虑将积分 $I(X)$ 扩展到非容许 2-偏序集 X 的一种方式。此扩展通过使用我们在下文定义的“容许部分”这一概念给出。

令 $\mathscr{X}$ 为 2-偏序集的同构类集合，并令 $\mathbb{Q}\mathscr{X}$ 表示由该集合自由生成的 $\mathbb{Q}$-向量空间。通过规定以下运算，我们赋予 $\mathbb{Q}\mathscr{X}$ 一个 $\mathbb{Q}$-代数结构

$[X]\cdot[Y]:=[X\sqcup Y]$。若令 $\mathscr{X}^0\subset\mathscr{X}$ 为由可容许 2-偏序集组成的子集，则其 $\mathbb{Q}$-张成空间 $\mathbb{Q}\mathscr{X}^0$ 成为 $\mathbb{Q}\mathscr{X}$ 的一个 $\mathbb{Q}$- 子代数，而积分 (2.5) 定义了一个 $\mathbb{Q}$- 代数同态 $I\colon\ \mathbb{Q}\mathscr{X}^0\to\mathbb{R}$。

令 $\mathscr{T}\subset\mathscr{X}$ 为全序2-偏序集的子集。则定义一个 $\mathbb{Q}$-线性映射 $\mathbb{Q}\mathscr{X}\to\mathbb{Q}\mathscr{T}$，称为全序展开：

$$[X]=[X,\leq,\delta]\longmapsto[X]^{\mathrm{tot}}:=\sum_{\leq'}[X,\leq',\delta],$$

其中，$[X]=[X,\leq,\delta]$ 是任意2-偏序集 X 的同构类，$\leq'$ 遍历集合 X 上的全序，这些全序都是原偏序 $\leq$的细化。对于任意2-偏序集 X 以及不可比较的元素 a、$b\in X$，我们有 $[X]^{\mathrm{tot}}=[X_a^b]^{\mathrm{tot}}+[X_b^a]^{\mathrm{tot}}$，其中$X_a^b$ 表示通过添加关系 $a<b$由 X 得到的2-偏序集。另请注意，积分映射 $I\colon\ \mathbb{Q}\mathscr{X}^0\to\mathbb{R}$ 可通过全序展开进行分解，即对于任意 $[X]\in\mathscr{X}^0$，我们有 $I([X])=I([X]^{\mathrm{tot}})$。

对于任意一个 2-偏序集 X，我们将其容许部分 $[X]^{\mathrm{adm}}$ 定义为全序展开 $[X]^{\mathrm{tot}}$ 中由容许项组成的部分和。例如，若 $X=$  ，则有

$$[X]^{\mathrm{tot}}=\left[\ \right]+2\left[\ \right]\quad\text{and}\quad[X]^{\mathrm{adm}}=\left[\ \right].$$

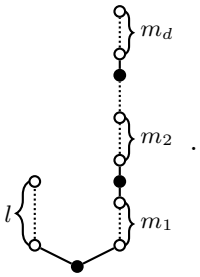
于是，$\mathbb{Q}$-线性映射

$$\mathbb{Q}\mathscr{X}\longrightarrow\mathbb{R};\ [X]\longmapsto I([X]^{\mathrm{adm}})$$

是 I 的延拓：$\mathbb{Q}\mathscr{X}^0\to\mathbb{R}$。注意，与利用洗牌正则化定义的映射（见 [9] 第 §2 节末尾的注记）不同，该映射不是代数同态（例如，$[\circ]\cdot[\bullet]\longmapsto I\left(\left[\begin{smallmatrix}\circ\\\bullet\end{smallmatrix}\right]\right)$ 但 $[\circ],[\bullet]\longmapsto 0$）。

在下面的计算中，我们省略符号“tot”；例如，我们写作 $[X]=[X_a^b]+[X_b^a]$，而不是 $[X]^{\mathrm{tot}}=[X_a^b]^{\mathrm{tot}}+[X_b^a]^{\mathrm{tot}}$。换言之，我们在商空间 $\mathbb{Q}\mathscr{X}/\mathrm{Ker}([X]\mapsto[X]^{\mathrm{tot}})$ 中进行计算。

命题 2.1 的证明。令 $m_i=k_i-1$ for $1\leq i\leq d$。定义

$X=X_l(\boldsymbol{k})=$ 

.

于是我们有

$$P_l(\boldsymbol{k})=I([X]^{\mathrm{adm}})\,,\tag{2.7}$$

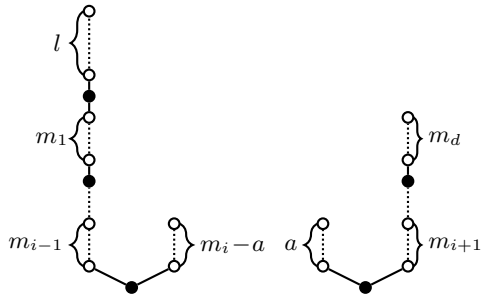
这是证明的关键要素。另一方面，我们看到

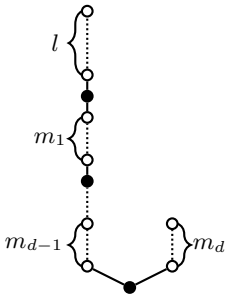
$$[X]=\sum_{a=0}^{m_1}(-1)^a\left[\ \right]+(-1)^{k_1}\left[\ \right].$$

通过重复类似的计算，我们得到

$$[X] = \sum_{i=1}^{d-1} \sum_{a_i=0}^{k_i-1} (-1)^{k_1+\cdots+k_{i-1}+a_i} [X_{i,a_i}] + (-1)^{k_1+\cdots+k_{d-1}} [X_{d,0}] \,,$$

其中

$X_{i,a} =$ 

，
$X_{d,0} =$ 

，

也就是说，

$$\begin{aligned} X_{i,a} &= X_{k_i-1-a}(k_{i-1}, \ldots, k_1, l+1) \sqcup X_a(k_{i+1}, \ldots, k_d) \,, \\ X_{d,0} &= X_{k_d-1}(k_{d-1}, \ldots, k_1, l+1) \,. \end{aligned}$$

注意，$X_{d,0}$ 总是可容许的，因为 $l > 0$。取其容许部分，并构造与这些 2-偏序集相关的积分，可得

$$\begin{aligned} P_l(\boldsymbol{k}) = &\sum_{i=1}^{d-1} \sum_{a_i=0}^{k_i-1} (-1)^{k_1+\cdots+k_{i-1}+a_i} I([X_{i,a_i}]^{\mathrm{adm}}) \\ &+ (-1)^{k_1+\cdots+k_{d-1}} P_{k_d-1}(k_{d-1}, \ldots, k_1, l+1) \,. \end{aligned} \tag{2.8}$$

若 $m_d > 0$ （即， $\boldsymbol{k}$ 可容许），由于 $X_{i,a}$ 也可容许，因此可由 (2.7) 和 (2.8) 立即得到公式 (2.3)。

若 $m_d = 0$ （即， $\boldsymbol{k}$ 不可容许），注意到$X_{i,a}$ 可容许当且仅当$i = d-1$ 且 $a > 0$，由 (2.8) 可得[2]

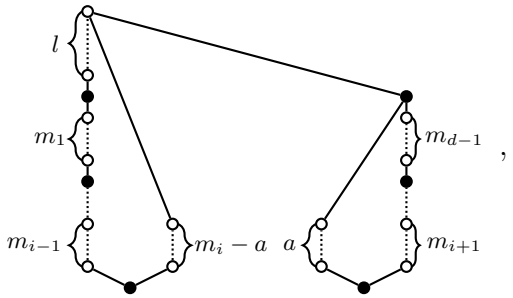
$$\begin{aligned} P_l(\boldsymbol{k}) = &\sum_{i=1}^{d-1} \sum_{a_i=0}^{k_i-1} \overline{\mathbb{I}}^{i=d-1}_{a_i\neq 0} (-1)^{k_1+\cdots+k_{i-1}+a_i} I([X_{i,a_i}]^{\mathrm{adm}}) \\ &+ \sum_{i=d-1}^{d} \sum_{a_i=0}^{k_i-1} \overline{\mathbb{I}}^{i=d-1}_{a_i=0} (-1)^{k_1+\cdots+k_{i-1}+a_i} P_{k_i-1-a_i}(k_{i-1}, \ldots, k_1, l+1) P_{a_i}(k_{i+1}, \ldots, k_{d-1}, 1) \,. \end{aligned}$$

现在，我们计算 $I([X_{i,a}]^{\mathrm{adm}})$。注意到

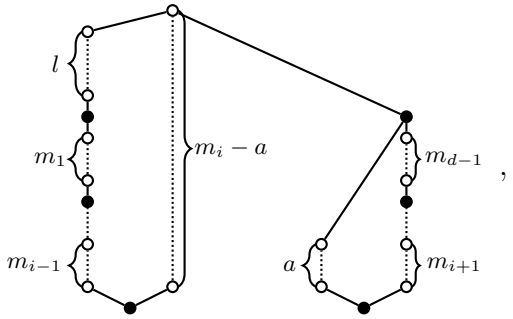
$$[X_{i,a}]^{\mathrm{adm}} = [X_{i,a}^{(1)}] + [X_{i,a}^{(2)}] + [X_{i,a}^{(3)}] \,,$$

[2]对于条件 P，我们用 $\mathbb{I}^P$表示 P上的示性函数，即若满足 P，则为 $\mathbb{I}^P = 1$，否则为 0。我们还令 $\overline{\mathbb{I}}^P = 1 - \mathbb{I}^P$。多行条件表示所有行的合取。

其中

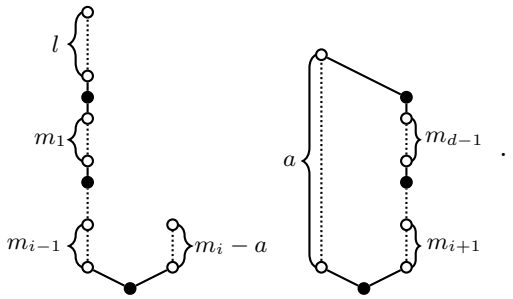
$X_{i,a}^{(1)} =$ 

,

$X_{i,a}^{(2)} =$ 

,

and

$X_{i,a}^{(3)} =$ 

.

这里我们认为 $X_i^{(2)}{}_{,\ m_i} = X_i^{(3)}{}_{,\ 0} = 0$。

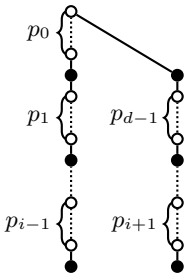
再次由 (2.7) 可容易看出

$$I([X_{i,a}^{(3)}]) = P_{k_i-1-a}(k_{i-1},\dots,k_1,l+1)\,P_a(k_{i+1},\dots,k_{d-1},1)$$

因此

$$\begin{aligned} P_l(\boldsymbol{k}) &= \sum_{i=1}^{d-1}\sum_{a_i=0}^{k_i-1} \overline{\mathbb{I}}^{\,i=d-1}_{a_i\neq 0}(-1)^{k_1+\cdots+k_{i-1}+a_i} I([X_{i,a_i}^{(1)}]+[X_{i,a_i}^{(2)}]) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{d}\sum_{a_i=0}^{k_i-1}(-1)^{k_1+\cdots+k_{i-1}+a_i} P_{k_i-1-a_i}(k_{i-1},\dots,k_1,l+1)P_{a_i}(k_{i+1},\dots,k_{d-1},1)\,. \end{aligned} \tag{2.9}$$

此外，我们看到，$[X_{i,a}^{(1)}]+[X_{i,a}^{(2)}]$ 可以用 2-偏序集表示 s

$Y_i(p_0,\dots,\check{p}_i,\dots,p_{d-1}) =$ 

对于各种取值 p_0、……、$\check{p}_i$、……、p_{d-1}（$\check{p}_i$ 表示跳过了 p_i）。实际上，令$m_0 = l$，我们有

$$[X_{i,a}^{(1)}] = \sum_{\substack{\boldsymbol{b}_i=(b_0,\dots,\check{b}_i,\dots,b_{d-1})\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{d-1}\\ \mathrm{wt}(b_0,\dots,b_{i-1})=m_i-a_i\\ \mathrm{wt}(b_{i+1},\dots,b_{d-1})=a_i}} \binom{m_0+b_0-1}{m_0-1} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{d-1} \binom{m_j+b_j}{m_j} [Y_i(\boldsymbol{b}_i+\boldsymbol{m}_i)]\,,$$

$$[X_{i,a}^{(2)}] = \sum_{\substack{\boldsymbol{b}_i=(b_0,\dots,\check{b}_i,\dots,b_{d-1})\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{d-1}\\ \mathrm{wt}(b_0,\dots,b_{i-1})=m_i-a_i\\ \mathrm{wt}(b_{i+1},\dots,b_{d-1})=a_i}} \binom{m_0+b_0-1}{m_0} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{d-1} \binom{m_j+b_j}{m_j} [Y_i(\boldsymbol{b}_i+\boldsymbol{m}_i)]\,,$$

其中 $\boldsymbol{m}_i = (m_0, \dots, \check{m}_i, \dots, m_{d-1})$。因此，利用 $\binom{s-1}{t-1} + \binom{s-1}{t} = \binom{s}{t}$ 关于s、$t \geq 0$的恒等式，可得

$$[X_{i,a}^{(1)}] + [X_{i,a}^{(2)}] = \sum_{\substack{\boldsymbol{b}_i=(b_0,\dots,\check{b}_i,\dots,b_{d-1})\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{d-1}\\ \mathrm{wt}(b_0,\dots,b_{i-1})=m_i-a_i\\ \mathrm{wt}(b_{i+1},\dots,b_{d-1})=a_i}} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{d-1} \binom{m_j+b_j}{m_j} [Y_i(\boldsymbol{b}_i+\boldsymbol{m}_i)]\,.$$

将其代入 (2.9) 并改变求和顺序，可得

$$\begin{aligned} P_l(\boldsymbol{k}) = \sum_{i=1}^{d-1}(-1)^{l+k_i} \sum_{\substack{\boldsymbol{b}_i=(b_0,\dots,\check{b}_i,\dots,b_{d-1})\in\mathbb{Z}_{\geq 1}^{d-1}\\ \mathrm{wt}(\boldsymbol{b}_i)=\mathrm{wt}(\boldsymbol{k})+l-1}} (-1)^{b_0+\cdots+b_{i-1}} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{d-1} \binom{b_j-1}{m_j} I[Y_i(\boldsymbol{b}_i-\{1\}^{d-1})] \\ + \sum_{i=1}^{d}\sum_{a_i=0}^{k_i-1}(-1)^{k_1+\cdots+k_{i-1}+a_i} P_{k_i-1-a_i}(k_{i-1},\dots,k_1,l+1) P_{a_i}(k_{i+1},\dots,k_{d-1},1)\,. \end{aligned}$$

因此，利用下文引理 2.5 中给出的 $I([Y_i(\boldsymbol{b}_i - \{1\}^{d-1})])$ 的表达式，即可得到 (2.4)。证明完毕。□

引理 2.5. 对于 $1 \leq i \leq d-1$ 和 $\boldsymbol{p} = (p_0, \dots, \check{p}_i, \dots, p_{d-1}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{d-1}$，其中 $p_0 > 0$，有

$$\begin{aligned} I([Y_i(\boldsymbol{p})]) = \sum_{j=i}^{d-1}\sum_{c_j=0}^{p_j-1}(-1)^{c_j+p_{j+1}+\cdots+p_{d-1}} \zeta\begin{pmatrix} c_j+1, p_{j+1}+1, \cdots, p_{d-1}+1 \\ p_{i-1}+1, \cdots, p_1+1, p_0+1 \end{pmatrix} \\ \times \zeta(p_{i+1}+1, \dots, p_{j-1}+1, p_j-c_j+1)\,, \end{aligned}$$

其中我们令 $p_i = 1$。

证明。当 $i = d-1$ 时，该公式可写为

$$I\left(\begin{array}{c} p_0 \\ \\ p_1 \\ \\ \\ p_{d-2} \end{array}\right) = \zeta\begin{pmatrix} 1 \\ p_{d-2}+1, \dots, p_1+1, p_0+1 \end{pmatrix},$$

这是定理 2.4 的一个特例。当 $i < d-1$ 时，我们计算得

$$[Y_i(\boldsymbol{p})] = \sum_{c_{d-1}=0}^{p_{d-1}-1} (-1)^{c_{d-1}} \left[\begin{array}{l} p_0 \\ p_1 \\ \\ p_{i-1} \end{array} \right. \begin{array}{l} c_{d-1} \\ \\ p_{d-1}-c_{d-1} \\ \\ p_{i+1} \end{array} \left. \right] + (-1)^{p_{d-1}} \left[\begin{array}{l} p_0 \\ p_1 \\ \\ p_{i-1} \end{array} \right. \begin{array}{l} p_{d-1} \\ \\ p_{d-2} \\ \\ p_{i+1} \end{array} \left. \right]$$

$$= \cdots$$

$$= \sum_{j=i+1}^{d-1} \sum_{c_j=0}^{p_j-1} (-1)^{c_j+p_{j+1}+\cdots+p_{d-1}} \left[\begin{array}{l} p_0 \\ p_1 \\ \\ p_{i-1} \end{array} \right. \begin{array}{l} p_{d-1} \quad p_{j+1} \quad c_j \\ \\ p_j - c_j \\ \\ p_{i+1} \end{array} \left. \right]$$

$$+ (-1)^{p_{i+1}+\cdots+p_{d-1}} \left[\begin{array}{l} p_0 \\ p_1 \\ \\ p_{i-1} \end{array} \right. \begin{array}{l} p_{d-1} \quad p_{i+1} \\ \\ \\ \\ \end{array} \left. \right].$$

结合定理 2.4，即可得到所需结果。 □

下面给出 $P_l(\boldsymbol{k})$ 在 $d = 2$ 和 $d = 3$情况下的显式表达式，无论 $\boldsymbol{k}$ 是否可容许，该表达式均成立。

推论 2.6。对于 k_1、$k_2 \geq 1$ 和 $l > 0$，有

$$P_l(k_1,k_2) = (-1)^{k_2} \sum_{\substack{w_1,w_2\geq 2 \\ w_1+w_2=k_1+k_2+l}} (-1)^{w_1} \binom{w_1-1}{k_2-1}\binom{w_2-1}{l}\zeta(w_1)\zeta(w_2)$$

$$+ (-1)^{k_1} \sum_{\substack{w_1\geq 1,w_2\geq 2 \\ w_1+w_2=k_1+k_2+l}} \binom{w_1-1}{k_1-1}\binom{w_2-1}{l}\zeta(w_1,w_2) + \mathbb{I}^{k_2=1}\binom{l+k_1-1}{k_1-1}\zeta\binom{1}{l+k_1}.$$

推论 2.7. 对于 k_1、k_2、$k_3 \geq 1$ 和 $l > 0$，我们有

$$P_l(k_1,k_2,k_3) = (-1)^{k_1+k_2} \sum_{\substack{w_1,w_2\geq 1,w_3\geq 2 \\ w_1+w_2+w_3=k_1+k_2+k_3+l}} \binom{w_1-1}{k_2-1}\binom{w_2-1}{k_1-1}\binom{w_3-1}{l}\zeta(w_1,w_2,w_3)$$

$$+ (-1)^{k_2+k_3} \sum_{\substack{w_1\geq 1,w_2\geq 2,w_3\geq 2 \\ w_1+w_2+w_3=k_1+k_2+k_3+l}} (-1)^{w_1+w_2} \binom{w_1-1}{k_2-1}\binom{w_2-1}{k_3-1}\binom{w_3-1}{l}\zeta(w_1,w_2)\zeta(w_3)$$

$$+ (-1)^{k_1+k_3} \sum_{\substack{w_1\geq 2,w_2\geq 1,w_3\geq 2 \\ w_1+w_2+w_3=k_1+k_2+k_3+l}} (-1)^{w_1} \binom{w_1-1}{k_3-1}\binom{w_2-1}{k_1-1}\binom{w_3-1}{l}\zeta(w_1)\zeta(w_2,w_3)$$

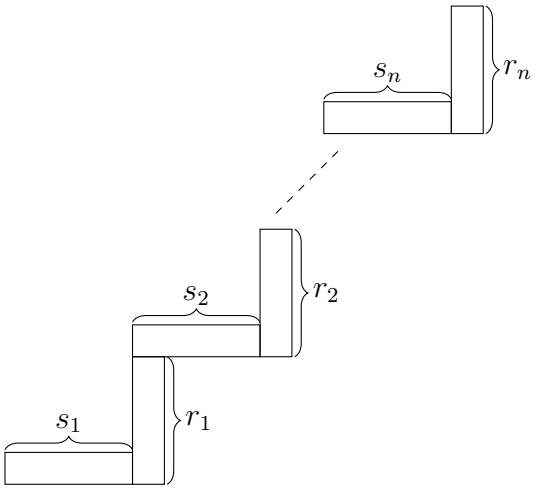
$$+ \mathbb{I}^{k_3=1}(-1)^{k_2+1} \sum_{\substack{b_0\geq 2, b_2\geq 1\\ b_0+b_2=k_1+k_2+l}} (-1)^{b_2}\binom{b_0-1}{l}\binom{b_2-1}{k_2-1} \times\left\{(-1)^{b_2}\zeta\binom{1,b_2}{b_0}+\sum_{c_2=1}^{b_2-1}(-1)^{c_2}\zeta\binom{c_2}{b_0}\zeta(b_2-c_2+1)\right\}$$

$$+ \mathbb{I}^{k_3=1}(-1)^{k_1} \sum_{\substack{b_0\geq 2, b_1\geq 1\\ b_0+b_1=k_1+k_2+l}} \binom{b_0-1}{l}\binom{b_1-1}{k_1-1}\zeta\binom{1}{b_1,b_0}.$$

3. Ribbons

3.1. 预备知识。本节研究带状图的舒尔多重ζ值之和。回顾一下，若一个斜杨图是连通的，且不包含2×2方格块，则称其为带状图。具体而言，这样的图可以画成

(3.1)



其中，整数 $s_1\geq 0$、s_2、…、s_n、r_1、…、$r_n>0$ 表示方格的数量。

定义 3.1。对于整数 w、s_1、…、$s_n\geq 0$ 和 r_1、…、$r_n>0$，记作

$$S_w\binom{s_1,\dots,s_n}{r_1,\dots,r_n} := \sum_{\substack{\boldsymbol{l}_1,\dots,\boldsymbol{l}_n\\ \operatorname{dep}(\boldsymbol{l}_i)=s_i\\ \boldsymbol{k}_1,\dots,\boldsymbol{k}_n\text{: adm.}\\ \operatorname{dep}(\boldsymbol{k}_i)=r_i\\ \sum_i \operatorname{wt}(\boldsymbol{k}_i)+\sum_i \operatorname{wt}(\boldsymbol{l}_i)=w}} \zeta\binom{\boldsymbol{l}_1,\dots,\boldsymbol{l}_n}{\boldsymbol{k}_1,\dots,\boldsymbol{k}_n},$$

其中，我们将其定义为（2.2）的推广

$$\zeta\binom{\boldsymbol{l}_1,\dots,\boldsymbol{l}_n}{\boldsymbol{k}_1,\dots,\boldsymbol{k}_n} := \sum_{\substack{0<b_{i,1}\leq\cdots\leq b_{i,s_i+1}\\ 0<a_{i,1}<\cdots<a_{i,r_i}\\ b_{i,s_i+1}=a_{i,r_i}\ (i=1,\dots,n)\\ b_{i+1,1}<a_{i,1}\ (i=1,\dots,n-1)}} \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{a_{i,1}^{k_{i,1}}\cdots a_{i,r_i}^{k_{i,r_i}}b_{i,1}^{l_{i,1}}\cdots b_{i,s_i}^{l_{i,s_i}}} \tag{3.2}$$

深度为 s_i 的指标 $\boldsymbol{l}_i=(l_{i,1},\dots,l_{i,s_i})$，以及深度为 r_i 的 $\boldsymbol{k}_i=(k_{i,1},\dots,k_{i,r_i})$。注意，即使某些 s_i 为零，级数 (3.2) 仍有意义，即 $\boldsymbol{l}_i=\varnothing$。

注 3.2。注意，只有当 $s_2, \dots, s_n > 0$ 时，$S_w\left(\begin{smallmatrix} s_1, \dots, & & s_n \\ r_1 & \dots & , r_n \end{smallmatrix}\right)$ 才给出形状为 (3.1) 的所有可容许杨表之和，如 (1.2) 所示。例如，我们有

$$S_w\binom{2}{2} = \sum_{\substack{a,b,d\ge 1,\, c\ge 2\\ a+b+c+d=w}} \zeta\left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline \multicolumn{2}{c}{} & d \\ \hline a & b & c \\ \hline \end{array}\right) = S_w\left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline \multicolumn{3}{c}{} & \\ \hline \multicolumn{3}{c}{} & \\ \hline \end{array}\right)$$

but

$$S_w\binom{2,0}{1,1} = \sum_{\substack{a,b\ge 1,\, c,d\ge 2\\ a+b+c+d=w}} \zeta\left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline \multicolumn{2}{c}{} & d \\ \hline a & b & c \\ \hline \end{array}\right) \ne S_w\left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline \multicolumn{2}{c}{} & \\ \hline \multicolumn{3}{c}{} & \\ \hline \end{array}\right).$$

在后一种情况下，要求指标 (d) 是可容许的，即 $d \ge 2$。

注意，$S_w\left(\begin{smallmatrix} s_1, & & \\ r_1 & \cdots & , , r_n \end{smallmatrix}\right)$ 仅在以下情形下非零

$$w \ge s_1 + \cdots + s_n + r_1 + \cdots + r_n + n.$$

我们计算带状图上这些和的基本策略是使用以下公式来减少角的数量 n：

命题 3.3。设 $s_1, \dots, s_n \ge 0$ 和 $r_1, \dots, r_n > 0$ 为整数。对于满足 $r_i \ge 2$ 的 $1 \le i \le n-1$，有

$$\begin{aligned} (3.3)\qquad & S_w\binom{s_1, \dots, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n}{r_1, \dots, r_i, r_{i+1}, \dots, r_n} + S_w\binom{s_1, \dots, \quad s_i, \quad s_{i+1}+1, \dots, s_n}{r_1, \dots, r_i - 1, \quad r_{i+1}, \quad \dots, r_n} \\ &= \sum_{\substack{w_1+w_2=w\\ w_1\ge s_1+\cdots+s_i+r_1+\cdots+r_i+i\\ w_2\ge s_{i+1}+\cdots+s_n+r_{i+1}+\cdots+r_n+n-i}} S_{w_1}\binom{s_1, \dots, s_i}{r_1, \dots, r_i} \cdot S_{w_2}\binom{s_{i+1}, \dots, s_n}{r_{i+1}, \dots, r_n}. \end{aligned}$$

证明。将 (3.2) 中的不等式 $b_{i+1,1} < a_{i,1}$ （对于给定的 i）反向为 $a_{i,1} \le b_{i+1,1}$，并将相应的舒尔多重ζ值相加，可得

$$\begin{aligned} (3.4)\quad & \zeta\binom{\boldsymbol{l}_1, \dots, \boldsymbol{l}_i, \boldsymbol{l}_{i+1}, \dots, \boldsymbol{l}_n}{\boldsymbol{k}_1, \dots, \boldsymbol{k}_i, \boldsymbol{k}_{i+1}, \dots, \boldsymbol{k}_n} + \zeta\binom{\boldsymbol{l}_1, \dots, \boldsymbol{l}_i, \boldsymbol{l}'_{i+1}, \dots, \boldsymbol{l}_n}{\boldsymbol{k}_1, \dots, \boldsymbol{k}'_i, \boldsymbol{k}_{i+1}, \dots, \boldsymbol{k}_n} \\ &\qquad = \zeta\binom{\boldsymbol{l}_1, \dots, \boldsymbol{l}_i}{\boldsymbol{k}_1, \dots, \boldsymbol{k}_i} \cdot \zeta\binom{\boldsymbol{l}_{i+1}, \dots, \boldsymbol{l}_n}{\boldsymbol{k}_{i+1}, \dots, \boldsymbol{k}_n}, \end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{k}'_i = (k_{i,\,2},\ \dots\dots,\ k_{i,\,r_i})$ 和 $\boldsymbol{l}'_{i+1} = (k_{i,\,1},\ l_{i+1,\,1},\ \dots\dots,\ l_{i+1,\,s_{i+1}})$。于是可得（3.3）。 □

反复应用命题 3.3，可将一般带状图上的和表示为类型为 $S_w\left(\begin{smallmatrix} s, & 0 & \dots & 0, , , , , \\ r_1 & r_2 & \dots & & & r_n \end{smallmatrix}\right)$ 的值。例如，我们有

$$S_w\binom{s,\ 1}{r_1, r_2} = \sum_{\substack{w_1+w_2=w\\ w_1\ge s+r_1+2\\ w_2\ge r_2+1}} S_{w_1}\binom{s}{r_1+1} S_{w_2}\binom{0}{r_2} - S_w\binom{s,\ 0}{r_1+1, r_2},$$

$$\begin{aligned} S_w\binom{s,\ 2}{r_1, r_2} &= \sum_{\substack{w_1+w_2=w\\ w_1\ge s+r_1+2\\ w_2\ge r_2+2}} S_{w_1}\binom{s}{r_1+1} S_{w_2}\binom{1}{r_2} - S_w\binom{s,\ 1}{r_1+1, r_2} \\ &= \sum_{\substack{w_1+w_2=w\\ w_1\ge s+r_1+2\\ w_2\ge r_2+2}} S_{w_1}\binom{s}{r_1+1} S_{w_2}\binom{1}{r_2} \end{aligned}$$

$$- \sum_{\substack{w_1+w_2=w \\ w_1 \geq s+r_1+e \\ w_2 \geq r_2+1}} S_{w_1}\binom{s}{r_1+2} S_{w_2}\binom{0}{r_2} + S_w\binom{s,\ 0}{r_1+2, r_2}$$

依此类推（参见引理 3.11）。对于后一类求和，以下公式成立：

定理 3.4. 对于 $w \geq 0, s \geq 0$ 和 $r_1, \ldots, r_n > 0$，有

$$S_w\binom{s,\ 0,\ \ldots,\ 0}{r_1, r_2, \ldots, r_n} = \sum_{\substack{t_1,\ldots,t_n \geq 0 \\ t_1+\cdots+t_n=s}} \sum_{\substack{w_i \geq r_i+t_i+1 \\ w_1+\cdots+w_n=w}} \prod_{i=1}^{n} \binom{w_i-1}{t_i} \zeta(w_1, \ldots, w_n). \tag{3.5}$$

证明. 令 $r := r_1 + \cdots + r_n$。那么左边是以下级数之和

$$\zeta\left(\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & & k_1 \\ \hline & & & \vdots \\ \hline l_1 & \cdots & l_s & k_r \\ \hline \end{array}\right) = \sum_{0<a_1<\cdots<a_r \geq b_s \geq \cdots \geq b_1>0} \frac{1}{a_1^{k_1} \cdots a_r^{k_r} b_1^{l_1} \cdots b_s^{l_s}}, \tag{3.6}$$

其中 $(l_1, \ldots, l_s)$ 遍历深度为 s 的指标，而 $(k_1, \ldots, k_r)$ 遍历深度为 r 的指标，满足 $k_u \geq 2$（对 $u \in \{r_n, r_n+r_{n-1}, \ldots, r\}$），且 $l_1+\cdots+l_s+k_1+\cdots+k_r = w$。通过“stuffling”，即将 a_p's 和 b_q's 的所有可能排列分类，该级数展开为某个多重ζ值之和 $\zeta(x_1, \ldots, x_{r+u})$，其权为 w，且 $0 \leq u \leq s$。这里，$(x_1, \ldots, x_{r+u})$ 的每个分量均具有以下形式

$$k_p + l_q + \cdots + l_{q'} \text{ or } l_q + \cdots + l_{q'}, \tag{3.7}$$

其中，l_q、……、$l_{q'}$是 l_1、……、l_s中的一些连续成员；前一种情形中可能没有成员，后一种情形中至少有一个成员。

固定一个权为 w的指标（x_1，……，x_{r+u}），满足 $0 \leq u \leq s$，并统计当所有级数（3.6）按上述方式展开时，ζ（x_1，……，x_{r+u}）在 $S_w\binom{s\text{、}\quad 0\ \ldots\ 0\text{、……、}\ r_n}{r_1\ r_2\ \ldots}$ 中出现的次数。首先，给定满足 $u_1 + \cdots + u_n = u$的 u_1，……，$u_n \geq 0$，考虑$x_{r_n+u_n+\cdots+r_i+u_i}$包含 $k_{r_n+\cdots+r_i}$作为 $i = 1$，……，n的被加数的情形。其他 k_p出现位置的可能数为 $\prod_{i=1}^{n}\binom{r_i-1+u_i}{u_i}$。此外，（$x_1$，……，$x_{r+u}$）的每一项都分解为（3.7）型的和，且加号“+”的总数为 $s-u$。此类分解的可能数为

$$\binom{\sum_{i=1}^{n}\{(x_{h_{i+1}+1}-1)+\cdots+(x_{h_i-1}-1)+(x_{h_i}-2)\}}{s-u} = \binom{w-n-r-u}{s-u},$$

其中 我们令 $h_i = r_n + u_n + \cdots + r_i + u_i$ 和 $h_{n+1} = 0$。因此可得

$$S_w\binom{s,\ 0,\ \ldots,\ 0}{r_1, r_2, \ldots, r_n} = \sum_{\substack{u_1,\ldots,u_n \geq 0 \\ u:=u_1+\cdots+u_n \leq s}} \binom{w-n-r-u}{s-u} \prod_{i=1}^{n} \binom{r_i+u_i-1}{u_i} \times \sum_{\substack{w_1,\ldots,w_{r+u} \geq 1 \\ w_p \geq 2\ (p=r_n+u_n+\cdots+r_i+u_i) \\ w_1+\cdots+w_{r+u}=w}} \zeta(w_1, \ldots, w_{r+u}).$$

将大野关系应用于最后一个求和式，可知其等于

$$S_w\binom{s,\ 0,\ \ldots,\ 0}{r_1, r_2, \ldots, r_n} = \sum_{\substack{u_1,\ldots,u_n\geq 0\\ u:=u_1+\cdots+u_n\leq s}} \binom{w-n-r-u}{s-u} \prod_{i=1}^{n}\binom{r_i+u_i-1}{u_i} \times \sum_{\substack{w_i\geq r_i+u_i+1\\ w_1+\cdots+w_n=w}} \zeta(w_1,\ldots,w_n). \tag{3.8}$$

利用恒等式

$$\binom{w-n-r-u}{s-u} = \sum_{\substack{v_1,\ldots,v_n\geq 0\\ v_1+\cdots+v_n=s-u}} \prod_{i=1}^{n}\binom{w_i-1-r_i-u_i}{v_i},$$

可以将表达式（3.8）改写为

$$\sum_{\substack{u_1,\ldots,u_n\geq 0\\ v_1,\ldots,v_n\geq 0\\ u_1+v_1+\cdots+u_n+v_n=s}} \sum_{\substack{w_i\geq r_i+u_i+1\\ w_1+\cdots+w_n=w}} \prod_{i=1}^{n}\binom{w_i-1-r_i-u_i}{v_i}\binom{r_i+u_i-1}{u_i}\zeta(w_1,\ldots,w_n)$$

$$= \sum_{\substack{t_1,\ldots,t_n\geq 0\\ t_1+\cdots+t_n=s}} \sum_{\substack{w_i\geq r_i+t_i+1\\ w_1+\cdots+w_n=w}} \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{u_i=0}^{t_i}\binom{w_i-1-r_i-u_i}{t_i-u_i}\binom{r_i+u_i-1}{u_i}\right)\zeta(w_1,\ldots,w_n).$$

在此令 $t_i = u_i + v_i$ 并利用

$$\binom{w_i-1-r_i-u_i}{t_i-u_i} = 0 \quad \text{when } t_i > u_i \text{ and } r_i+u_i+1 \leq w_i \leq r_i+t_i.$$

因此，由恒等式可得该定理

$$\sum_{u_i=0}^{t_i}\binom{w_i-1-r_i-u_i}{t_i-u_i}\binom{r_i+u_i-1}{u_i} = \binom{w_i-1}{t_i}. \qquad \square$$

推论3.5。对于 $n \geq 1$ 和整数 s_1、...、$s_n \geq 0$ 以及 r_1、...、$r_n > 0$，求和 $S_w\binom{s_1,\ldots,s_n}{r_1\ \ldots\ ,r_n}$ 可以写成权为 w、深度为 $\leq n$ 的多重ζ值的 $\mathbb{Q}$-线性组合。

证明。由命题 3.3 和定理 3.4 可直接推出 . $\square$

推论3.6。对于任意的 $s \geq 0$ 和 $r_1, \ldots, r_n > 0$，对称和

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} S_w\begin{pmatrix} s, & 0, & \ldots, & 0\\ r_{\sigma(1)}, & r_{\sigma(2)}, & \ldots, & r_{\sigma(n)}\end{pmatrix}$$

是单个ζ值的多项式。特别地，$S_w\begin{pmatrix} s, & 0 & \ldots & 0, & , & , & , & r\\ r & r & \ldots & & & & & \end{pmatrix}$ 是单个ζ值的多项式。

证明。由 (3.5)，这个对称和等于

$$\sum_{\substack{t_1,\ldots,t_n\geq 0\\ t_1+\cdots+t_n=s}} \sum_{\substack{w_i\geq r_i+t_i+1\\ w_1+\cdots+w_n=w}} \prod_{i=1}^{n}\binom{w_i-1}{t_i}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\zeta(w_{\sigma(1)},\ldots,w_{\sigma(n)}).$$

因此，该结论由Hoffman对称和公式 [3, 定理 2.2] 得出。 $\square$

例3.7。 $n=1$ 的情形将在定理 3.8 中讨论。这里我们来考虑 $n=2$ 和 $r_1=r_2=r$的情形。我们有

$$\begin{aligned} S_w\binom{s,0}{r,r} &= \sum_{\substack{t_1,t_2\geq 0\\ t_1+t_2=s}} \sum_{\substack{w_i\geq r+t_i+1\\ w_1+w_2=w}} \binom{w_1-1}{t_1}\binom{w_2-1}{t_2}\zeta(w_1,w_2) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\substack{t_1,t_2\geq 0\\ t_1+t_2=s}} \sum_{\substack{w_i\geq r+t_i+1\\ w_1+w_2=w}} \binom{w_1-1}{t_1}\binom{w_2-1}{t_2}\big(\zeta(w_1,w_2)+\zeta(w_2,w_1)\big) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\substack{t_1,t_2\geq 0\\ t_1+t_2=s}} \sum_{\substack{w_i\geq r+t_i+1\\ w_1+w_2=w}} \binom{w_1-1}{t_1}\binom{w_2-1}{t_2}\big(\zeta(w_1)\zeta(w_2)-\zeta(w)\big). \end{aligned}$$

这是一种多项式型求和公式。关于有界型求和公式，请参见 §3.3（例如，钩形情形见例 3.16）。

3.2. 单一型求和公式。本小节介绍两种特殊带状图的单一型求和公式。第一种是对式 (1.1) 中所述 MZVs 和 MZSVs 的经典求和公式的同时推广。

定理 3.8. 对任意整数 $r\geq 1$、 $s\geq 0$ 和 $w\geq s+r+1$，有

$$S_w\binom{s}{r} = \binom{w-1}{s}\zeta(w). \tag{3.9}$$

证明. 这直接由定理 3.4 得出。 □

第二个公式对应于“步幅为一的阶梯”形状。其证明是命题 3.3 和定理 3.4 的一个应用。

定理3.9. 对任意整数 $r\geq 1$、 $n\geq 1$ 和 $w\geq (r+2)n+1$，有

$$S_w\binom{\{1\}^{n-1},\ 1}{\{r\}^{n-1},r+1} = c_{w,r}(n)\zeta(w), \tag{3.10}$$

其中

$$c_{w,r}(n) \coloneqq \frac{w-1}{n}\binom{w-(r+1)n-2}{n-1}.$$

关于 $r=n=2$ 和 $r=1$、 $n=3$ 情形的示例，见引言中的 (1.4)。

注3.10. 系数 $c_{w,r}(n)$ 是一个正整数。事实上，

$$c_{w,r}(n) = (r+1)\binom{w-(r+1)n-2}{n-1} + \binom{w-(r+1)n-1}{n}.$$

定理3.9的证明。我们通过对 n 使用归纳法来证明 (3.10)。当 $n=1$ 时，这是 (3.9) 的一个特例。设 $n>1$，且当 $1\leq i\leq n$ 时，令

$$S_{w,r}(n,i) \coloneqq S_w\binom{\{1\}^{i-1},\ 1,\ \{0\}^{n-i}}{\{r\}^{i-1},r+1,\{r+1\}^{n-i}}, \qquad T_{w,r}(n) \coloneqq S_w\binom{\{0\}^n}{\{r+1\}^n}.$$

那么，对于 $1\leq i\leq n-1$，命题 3.3 表明

$$S_{w,r}(n,i)+S_{w,r}(n,i+1) = \sum_{\substack{w_1\geq (r+2)i+1\\ w_2\geq (r+2)(n-i)}} S_{w_1,r}(i,i)\cdot T_{w_2,r}(n-i)$$

（这里及下文中，我们省略“总权 $=w$”这一条件，例如 $w_1+w_2=w$）。归纳假设给出 $S_{w_1,r}(i,i)=c_{w_1,r}(i)\zeta(w_1)$，其中 $1\le i\le n-1$；而定理 3.4 表明

$$T_{w_2,r}(n-i)=\sum_{\substack{w_1',\dots,w_{n-i}'\ge r+2\\ w_1'+\cdots+w_{n-i}'=w_2}}\zeta(w_1',\dots,w_{n-i}').$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}S_{w,r}(n,i)+S_{w,r}(n,i+1)&=\sum_{\substack{w_1\ge(r+2)i+1\\ w_1',\dots,w_{n-i}'\ge r+2}}c_{w_1,r}(i)\zeta(w_1)\zeta(w_1',\dots,w_{n-i}')\\&=A_i+B_i,\end{aligned}\tag{3.11}$$

其中 A_i 和 B_i 定义为

$$\begin{aligned}A_i&\coloneqq\sum_{\substack{w_1\ge(r+2)i+1\\ w_1',\dots,w_{n-i}'\ge r+2}}c_{w_1,r}(i)\big\{\zeta(w_1,w_1',\dots,w_{n-i}')+\cdots+\zeta(w_1',\dots,w_{n-i}',w_1)\big\}\\&=\sum_{j=1}^{n-i+1}\sum_{\substack{w_1,\dots,w_{n-i+1}\ge r+2\\ w_j\ge(r+2)i+1}}c_{w_j,r}(i)\zeta(w_1,\dots,w_{n-i+1})\end{aligned}\tag{3.12}$$

and

$$\begin{aligned}B_i&\coloneqq\sum_{\substack{w_1\ge(r+2)i+1\\ w_1',\dots,w_{n-i}'\ge r+2}}c_{w_1,r}(i)\big\{\zeta(w_1+w_1',\dots,w_{n-i}')+\cdots+\zeta(w_1',\dots,w_1+w_{n-i}')\big\}\\&=\sum_{j=1}^{n-i}\sum_{\substack{w_1,\dots,w_{n-i}\ge r+2\\ w_j\ge(r+2)(i+1)+1}}\sum_{a=(r+2)i+1}^{w_j-(r+2)}c_{a,r}(i)\zeta(w_1,\dots,w_{n-i}).\end{aligned}$$

注意，A_i 的定义适用于 $i=n$，并且给出$A_n=c_{w,\,r}(n)\zeta(w)$。

对于 $1\le i\le n-1$，我们有 $A_{i+1}=B_i$，因为

$$\begin{aligned}\sum_{a=(r+2)i+1}^{w_j-(r+2)}c_{a,r}(i)&=\sum_{b=0}^{k}\frac{(r+2)i+b}{i}\binom{b+i-1}{i-1}\qquad(k\coloneqq w_j-(r+2)(i+1)-1)\\&=(r+1)\sum_{b=0}^{k}\binom{b+i-1}{i-1}+\sum_{b=0}^{k}\binom{b+i}{i}\\&=(r+1)\binom{k+i}{i}+\binom{k+i+1}{i+1}=c_{w_j,r}(i+1).\end{aligned}$$

因此，(3.11)表明

$$S_{w,r}(n,i)+S_{w,r}(n,i+1)=A_i+A_{i+1}.$$

这便可归纳推出 $S_{w,\,r}(n,i)=A_i$，起始于

$$S_{w,r}(n,1)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{w_1,\dots,w_n\ge r+2\\ w_j\ge r+3}}(w_j-1)\zeta(w_1,\dots,w_n)=A_1,$$

这是由 (3.5) 和 (3.12) 推得的。最终的恒等式 $S_{w,r}(n,n)=A_n=c_{w,r}(n)\zeta(w)$ 正是所需的公式。□

3.3. 两个角。接下来，我们研究具有两个角、可给出有界类型求和公式的带形。关键要素是由二项式系数加权的求和公式（命题 2.1）。对于具有两个角的带形，我们只使用 $d=2$ 这一情形。为便于计算，我们将推论 2.6 改写为如下形式，其中 $m_1=k_1-1$和 $m_2=k_2-1$：对于整数 m_1、 $m_2\geq 0$ 和 $w\geq m_1+m_2+3$，有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{w_1\geq 1,w_2\geq 2\\ w_1+w_2=w}}\binom{w_1-1}{m_1}\binom{w_2-1}{m_2}\zeta(w_1,w_2)\\
&=(-1)^{m_2+1}\sum_{\substack{w_1,w_2\geq 2\\ w_1+w_2=w}}(-1)^{w_1}\binom{w_1-1}{m_2}\binom{w_2-1}{m_1+m_2+1-w_1}\zeta(w_1)\zeta(w_2)\\
&\quad+(-1)^{m_1+1}\sum_{\substack{w_1\geq 1,w_2\geq 2\\ w_1+w_2=w}}\binom{w_1-1}{m_1}\binom{w_2-1}{m_1+m_2+1-w_1}\zeta(w_1,w_2)\\
&\quad+\mathbb{I}^{m_2=0}\binom{w-2}{m_1}\big(\zeta(w)+\zeta(1,w-1)\big).
\end{aligned}\tag{3.13}$$

接下来，我们先进行一项预备计算：

Lem命题 3.11。对于 s_1、 $s_2\geq 0$、 r_1、 $r_2>0$ 和 $w\geq s_1+s_2+r_1+r_2+2$，有 e

$$\begin{aligned}
S_w\binom{s_1,s_2}{r_1,r_2}&=\sum_{i=0}^{s_2-1}(-1)^{s_2-i-1}\sum_{\substack{w_1\geq s_1+s_2+r_1-i+1\\ w_2\geq r_2+i+1\\ w_1+w_2=w}}\binom{w_1-1}{s_1}\binom{w_2-1}{i}\zeta(w_1)\zeta(w_2)\\
&\quad+(-1)^{s_2}\sum_{\substack{t_1,t_2\geq 0\\ t_1+t_2=s_1}}\sum_{\substack{w_1\geq s_2+r_1+t_1+1\\ w_2\geq r_2+t_2+1\\ w_1+w_2=w}}\binom{w_1-1}{t_1}\binom{w_2-1}{t_2}\zeta(w_1,w_2).
\end{aligned}$$

证明。反复应用命题 3.3，可得

$$\begin{aligned}
S_w\binom{s_1,s_2}{r_1,r_2}&=\sum_{w_1+w_2=w}S_{w_1}\binom{s_1}{r_1+1}S_{w_2}\binom{s_2-1}{r_2}-S_w\binom{s_1,\ s_2-1}{r_1+1,\ r_2}\\
&=\cdots\\
&=\sum_{i=1}^{s_2}(-1)^{i-1}\sum_{w_1+w_2=w}S_{w_1}\binom{s_1}{r_1+i}S_{w_2}\binom{s_2-i}{r_2}+(-1)^{s_2}S_w\binom{s_1,\ 0}{s_2+r_1,r_2}\\
&=\sum_{i=0}^{s_2-1}(-1)^{s_2-i-1}\sum_{w_1+w_2=w}S_{w_1}\binom{s_1}{s_2+r_1-i}S_{w_2}\binom{i}{r_2}+(-1)^{s_2}S_w\binom{s_1,\ 0}{s_2+r_1,r_2}.
\end{aligned}$$

对第一个求和应用定理 3.8（注意可容许范围），并对第二个求和应用定理 3.4，即得引理。□

由上述表达式可直接得出，对于一类具有两个角的特定带状图，确实存在多项式型求和公式，即情形 $r_2=s_2+r_1$。

T定理 3.12。对于 s_1、 $s_2\geq 0$、 $r_1>0$ 和 $w\geq s_1+2s_2+2r_1+2$，我们有

$$S_w\binom{s_1,\ \ s_2}{r_1,s_2+r_1}$$

是单个ζ值的多项式。

证明。根据引理 3.11 和 $r_2 = s_2 + r_1$，只需证明

$$\sum_{\substack{t_1,t_2\geq 0\\ t_1+t_2=s_1}} \sum_{\substack{w_1\geq s_2+r_1+t_1+1\\ w_2\geq s_2+r_1+t_2+1\\ w_1+w_2=w}} \binom{w_1-1}{t_1}\binom{w_2-1}{t_2}\zeta(w_1,w_2)$$

可以写成单个ζ值的多项式。由对称性可知，这个和为

$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{t_1,t_2\geq 0\\ t_1+t_2=s_1}} \sum_{\substack{w_1\geq s_2+r_1+t_1+1\\ w_2\geq s_2+r_1+t_2+1\\ w_1+w_2=w}} \binom{w_1-1}{t_1}\binom{w_2-1}{t_2}\big(\zeta(w_1,w_2)+\zeta(w_2,w_1)\big).$$

于是，由调和积公式可得结论。 □

下一个定理是一个关于有两个角的一般带状图的求和公式，它属于有界型。尽管其显式公式本身相当复杂，但它可直接由 (3.13) 和引理 3.11 得出。

定理 引理 3.13. 对于 s_1、$s_2\geq 0$、r_1、$r_2>0$ 和 $w\geq s_1+s_2+r_1+r_2+2$，我们有

$$\begin{aligned} S_w\binom{s_1,s_2}{r_1,r_2} &= \binom{w-2}{s_1+s_2}\zeta(w) \\ &\quad + \sum_{\substack{w_1,w_2\geq 2\\ w_1+w_2=w}} A^{s_1,s_2,r_1,r_2}_{w_1,w_2}\zeta(w_1)\zeta(w_2) + \sum_{\substack{w_1\geq 1,w_2\geq 2\\ w_1+w_2=w}} B^{s_1,s_2,r_1,r_2}_{w_1,w_2}\zeta(w_1,w_2), \end{aligned} \tag{3.14}$$

其中整数 $A^{s_1,\ s_2\ r_1\ r_2}_{w_1\ w_2}$、、、和 $B^{s_1,\ s_2\ r_1\ r_2}_{w_1\ w_2}$、、、由下式给出

$$\begin{aligned} A^{s_1,s_2,r_1,r_2}_{w_1,w_2} &:= (-1)^{w_1}C^{s_1,s_2}_{w_1,w_2} \\ &\quad - \mathbb{I}^{w_1\leq s_1+r_1 \text{ or } w_2\leq s_2+r_2-1}\binom{w_1-1}{s_1}\binom{w_2-2}{s_2-1} \\ &\quad + \mathbb{I}^{w_1>s_1+r_1}(-1)^{s_1+r_1+w_1}\binom{w_1-1}{s_1}\binom{w_2-2}{s_1+s_2+r_1-w_1} \\ &\quad + \mathbb{I}^{r_2<w_2\leq s_2+r_2-1}(-1)^{s_2+r_2+w_2}\binom{w_1-1}{s_1}\binom{w_2-2}{r_2-1}, \\ B^{s_1,s_2,r_1,r_2}_{w_1,w_2} &:= C^{s_1,s_2}_{w_1,w_2} - (-1)^{s_2} \sum_{\substack{t_1,t_2\geq 0\\ t_1\geq w_1-(s_2+r_1) \text{ or } t_2\geq w_2-r_2\\ t_1+t_2=s_1}} \binom{w_1-1}{t_1}\binom{w_2-1}{t_2} \end{aligned}$$

with

$$C^{s_1,s_2}_{w_1,w_2} := (-1)^{s_2}\sum_{\substack{0\leq i\leq s_1\\ 1\leq j\leq s_2\\ i+j=w_1}}\binom{w_1-1}{i}\binom{w_2-1}{s_1-i} - (-1)^{s_1}\binom{w_1-1}{s_1}\binom{w_2-2}{s_1+s_2-w_1}.$$

注 3.14. 根据我们对二项式系数的约定，$A^{s_1,\ s_2\ r_1\ r_2}_{w_1\ \ \ w_2} = B^{s_1,\ s_2\ r_1\ r_2}_{w_1\ \ \ w_2} = 0$，除非

$$w_1\leq s_1+s_2+r_1 \quad \text{or} \quad w_2\leq \max(s_2+r_2-1, s_1+r_2)$$

因此，利用调和积公式展开乘积 $\zeta(w_1)\zeta(w_2)$ 后，(3.14) 就是一个有界类型求和公式。

定理 3.13 的证明。将引理 3.11 中的等式写成

$$S_w\binom{s_1, s_2}{r_1, r_2} = S_1 + S_2$$

with

$$S_1 := \sum_{i=0}^{s_2-1}(-1)^{s_2-i-1} \sum_{\substack{w_1\geq s_1+s_2+r_1-i+1\\ w_2\geq r_2+i+1\\ w_1+w_2=w}} \binom{w_1-1}{s_1}\binom{w_2-1}{i}\zeta(w_1)\zeta(w_2),$$

$$S_2 := (-1)^{s_2} \sum_{\substack{t_1,t_2\geq 0\\ t_1+t_2=s_1}} \sum_{\substack{w_1\geq s_2+r_1+t_1+1\\ w_2\geq r_2+t_2+1\\ w_1+w_2=w}} \binom{w_1-1}{t_1}\binom{w_2-1}{t_2}\zeta(w_1, w_2).$$

和 S_1 可改写为 $S_1 = S_{11} - S_{12} - S_{13}$ 其中

$$S_{11} := \sum_{i=0}^{s_2-1}(-1)^{s_2-i-1} \sum_{\substack{w_1,w_2\geq 2\\ w_1+w_2=w}} \binom{w_1-1}{s_1}\binom{w_2-1}{i}\zeta(w_1)\zeta(w_2)$$

$$S_{12} := \sum_{i=0}^{s_2-1}(-1)^{s_2-i-1} \sum_{\substack{2\leq w_1\leq s_1+s_2+r_1-i\\ w_1+w_2=w}} \binom{w_1-1}{s_1}\binom{w_2-1}{i}\zeta(w_1)\zeta(w_2)$$

$$S_{13} := \sum_{i=0}^{s_2-1}(-1)^{s_2-i-1} \sum_{\substack{2\leq w_2\leq r_2+i\\ w_1+w_2=w}} \binom{w_1-1}{s_1}\binom{w_2-1}{i}\zeta(w_1)\zeta(w_2).$$

根据调和积公式，我们有 $S_{11} = S_{111} + S_{112} + S_{113}$ wi th

$$S_{111} := \sum_{i=0}^{s_2-1}(-1)^{s_2-i-1} \sum_{\substack{w_1,w_2\geq 2\\ w_1+w_2=w}} \binom{w_1-1}{s_1}\binom{w_2-1}{i}\zeta(w_1, w_2),$$

$$S_{112} := \sum_{i=0}^{s_2-1}(-1)^{s_2-i-1} \sum_{\substack{w_1,w_2\geq 2\\ w_1+w_2=w}} \binom{w_1-1}{i}\binom{w_2-1}{s_1}\zeta(w_1, w_2),$$

$$S_{113} := \left\{\sum_{i=0}^{s_2-1}(-1)^{s_2-i-1} \sum_{\substack{w_1,w_2\geq 2\\ w_1+w_2=w}} \binom{w_1-1}{s_1}\binom{w_2-1}{i}\right\}\zeta(w).$$

对于 t 对求和 S_{111}补上项 $w_1 = 1$后，根据 (3.13)，我们得到

$$\begin{aligned} S_{111} = (-1)^{s_2} &\sum_{i=0}^{s_2-1} \sum_{\substack{w_1,w_2\geq 2\\ w_1+w_2=w}} (-1)^{w_1}\binom{w_1-1}{i}\binom{w_2-1}{s_1+i+1-w_1}\zeta(w_1)\zeta(w_2)\\ &+ \sum_{i=0}^{s_2-1}(-1)^{s_1+s_2-i} \sum_{\substack{w_1\geq 1,w_2\geq 2\\ w_1+w_2=w}} \binom{w_1-1}{s_1}\binom{w_2-1}{s_1+i+1-w_1}\zeta(w_1, w_2)\\ &+ \mathbb{I}^{s_2>0}(-1)^{s_2-1}\binom{w-2}{s_1}\big(\zeta(w) + \zeta(1, w-1)\big) \end{aligned}$$

$$- \mathbb{I}^{s_1=0} \sum_{i=0}^{s_2-1} (-1)^{s_2-i-1} \binom{w-2}{i} \zeta(1, w-1),$$

需要注意的是，当 $s_2 = 0$ 时，求和 S_{111} 为空；插入 $\mathbb{I}^{s_2>0}$ 以涵盖这种退化情形。交换求和顺序并通过 $i \rightsquigarrow w_1 - i - 1$作变量替换后，我们有

$$\begin{aligned}
&(-1)^{s_2} \sum_{i=0}^{s_2-1} \sum_{\substack{w_1,w_2\geq 2\\ w_1+w_2=w}} (-1)^{w_1} \binom{w_1-1}{i} \binom{w_2-1}{s_1+i+1-w_1} \zeta(w_1)\zeta(w_2) \\
&= (-1)^{s_2} \sum_{\substack{w_1,w_2\geq 2\\ w_1+w_2=w}} (-1)^{w_1} \zeta(w_1)\zeta(w_2) \sum_{\substack{0\leq i\leq s_1\\ 1\leq j\leq s_2\\ i+j=w_1}} \binom{w_1-1}{i} \binom{w_2-1}{s_1-i}.
\end{aligned}$$

由于 $\binom{w_2-1}{s_1+i+1-w_1} = 0$ 若 $i < w_1 - s_1 - 1$，通过变量代换 $i \rightsquigarrow i + w_1 - s_1 - 1$，我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{s_2-1} (-1)^{s_1+s_2-i} \sum_{\substack{w_1\geq 1,w_2\geq 2\\ w_1+w_2=w}} \binom{w_1-1}{s_1} \binom{w_2-1}{s_1+i+1-w_1} \zeta(w_1, w_2) \\
&= -(-1)^{s_1} \sum_{\substack{w_1\geq 1,w_2\geq 2\\ w_1+w_2=w}} \binom{w_1-1}{s_1} \binom{w_2-2}{s_1+s_2-w_1} \zeta(w_1, w_2).
\end{aligned}$$

将上述两个公式与 $\sum_{i=0}^{s_2-1} (-1)^{s_2-i-1} \binom{w-2}{i} = \binom{w-3}{s_2-1}$结合，我们有

$$\begin{aligned}
S_{111} = {} & (-1)^{s_2} \sum_{\substack{w_1,w_2\geq 2\\ w_1+w_2=w}} (-1)^{w_1} \zeta(w_1)\zeta(w_2) \sum_{\substack{0\leq j\leq s_1\\ 1\leq i\leq s_2\\ i+j=w_1}} \binom{w_1-1}{j} \binom{w_2-1}{s_1-j} \\
& - (-1)^{s_1} \sum_{\substack{w_1\geq 1,w_2\geq 2\\ w_1+w_2=w}} \binom{w_1-1}{s_1} \binom{w_2-2}{s_1+s_2-w_1} \zeta(w_1, w_2) \\
& - \mathbb{I}^{s_2>0} (-1)^{s_2} \binom{w-2}{s_1} \big(\zeta(w) + \zeta(1, w-1)\big) - \mathbb{I}^{s_1=0} \binom{w-3}{s_2-1} \zeta(1, w-1).
\end{aligned}$$

类似地，对于和式 S_{112}，我们可以应用 (3.13) 得到

$$\begin{aligned}
S_{112} = {} & \sum_{i=0}^{s_2-1} (-1)^{s_1+s_2-i} \sum_{\substack{w_1,w_2\geq 2\\ w_1+w_2=w}} (-1)^{w_1} \binom{w_1-1}{s_1} \binom{w_2-1}{s_1+i+1-w_1} \zeta(w_1)\zeta(w_2) \\
& + (-1)^{s_2} \sum_{i=0}^{s_2-1} \sum_{\substack{w_1\geq 1,w_2\geq 2\\ w_1+w_2=w}} \binom{w_1-1}{i} \binom{w_2-1}{s_1+i+1-w_1} \zeta(w_1, w_2) \\
& + \mathbb{I}^{s_1=0} \sum_{i=0}^{s_2-1} (-1)^{s_2-i-1} \binom{w-2}{i} \big(\zeta(w) + \zeta(1, w-1)\big) \\
& + \mathbb{I}^{s_2>0} (-1)^{s_2} \binom{w-2}{s_1} \zeta(1, w-1).
\end{aligned}$$

通过与 S_{111} 类似的计算，我们得到

$$\begin{aligned}S_{112} &= -(-1)^{s_1}\sum_{\substack{w_1,w_2\geq 2\\ w_1+w_2=w}}(-1)^{w_1}\binom{w_1-1}{s_1}\binom{w_2-2}{s_1+s_2-w_1}\zeta(w_1)\zeta(w_2)\\ &\quad+(-1)^{s_2}\sum_{\substack{w_1\geq 1,w_2\geq 2\\ w_1+w_2=w}}\zeta(w_1,w_2)\sum_{\substack{0\leq i\leq s_1\\ 1\leq j\leq s_2\\ i+j=w_1}}\binom{w_1-1}{i}\binom{w_2-1}{s_1-i}\\ &\quad+\mathbb{I}^{s_1=0}\binom{w-3}{s_2-1}\big(\zeta(w)+\zeta(1,w-1)\big)+\mathbb{I}^{s_2>0}(-1)^{s_2}\binom{w-2}{s_1}\zeta(1,w-1).\end{aligned}$$

对于求和 S_{113}，根据 $\sum_{i=0}^{s_2-1}(-1)^{s_2-i-1}\binom{w_2-1}{i}=\binom{w_2-2}{s_2-1}$，我们有

$$\begin{aligned}S_{113} &= \Big\{\sum_{i=0}^{s_2-1}(-1)^{s_2-i-1}\sum_{\substack{w_1,w_2\geq 2\\ w_1+w_2=w}}\binom{w_1-1}{s_1}\binom{w_2-1}{i}\Big\}\zeta(w)\\ &= \Big\{\sum_{\substack{w_1\geq 1,w_2\geq 2\\ w_1+w_2=w}}\binom{w_1-1}{s_1}\binom{w_2-2}{s_2-1}-\mathbb{I}^{s_1=0}\binom{w-3}{s_2-1}\Big\}\zeta(w)\\ &= \Big\{\mathbb{I}^{s_2>0}\binom{w-2}{s_1+s_2}-\mathbb{I}^{s_1=0}\binom{w-3}{s_2-1}\Big\}\zeta(w).\end{aligned}$$

We 接下来考虑求和 S_{12} 和 S_{13}。交换求和顺序后，我们有 e

$$\begin{aligned}S_{12} &= \sum_{\substack{2\leq w_1\leq s_1+s_2+r_1\\ w_1+w_2=w}}\binom{w_1-1}{s_1}\zeta(w_1)\zeta(w_2)\sum_{i=0}^{\min(s_2-1,s_1+s_2+r_1-w_1)}(-1)^{s_2-i-1}\binom{w_2-1}{i}\\ &= \sum_{\substack{2\leq w_1\leq s_1+r_1\\ w_1+w_2=w}}\binom{w_1-1}{s_1}\zeta(w_1)\zeta(w_2)\sum_{i=0}^{s_2-1}(-1)^{s_2-i-1}\binom{w_2-1}{i}\\ &\quad+\sum_{\substack{s_1+r_1<w_1\leq s_1+s_2+r_1\\ w_1+w_2=w}}\binom{w_1-1}{s_1}\zeta(w_1)\zeta(w_2)\sum_{i=0}^{s_1+s_2+r_1-w_1}(-1)^{s_2-i-1}\binom{w_2-1}{i}\\ &= \sum_{\substack{2\leq w_1\leq s_1+r_1\\ w_1+w_2=w}}\binom{w_1-1}{s_1}\binom{w_2-2}{s_2-1}\zeta(w_1)\zeta(w_2)\\ &\quad-\sum_{\substack{s_1+r_1<w_1\leq s_1+s_2+r_1\\ w_1+w_2=w}}(-1)^{s_1+r_1+w_1}\binom{w_1-1}{s_1}\binom{w_2-2}{s_1+s_2+r_1-w_1}\zeta(w_1)\zeta(w_2).\end{aligned}$$

同样地，我们有

$$\begin{aligned}S_{13} &= \sum_{\substack{2\leq w_2\leq s_2+r_2-1\\ w_1+w_2=w}}\binom{w_1-1}{s_1}\binom{w_2-2}{s_2-1}\zeta(w_1)\zeta(w_2)\\ &\quad-\sum_{\substack{r_2<w_2\leq s_2+r_2-1\\ w_1+w_2=w}}(-1)^{s_2+r_2+w_2}\binom{w_1-1}{s_1}\binom{w_2-2}{r_2-1}\zeta(w_1)\zeta(w_2).\end{aligned}$$

对于和式 S_2，我们可以通过写成 $S_2 = S_{21} - S_{22} - S_{23}$ 来进行剖析

$$S_{21} \coloneqq (-1)^{s_2} \sum_{\substack{t_1,t_2\geq 0\\ t_1+t_2=s_1}} \sum_{\substack{w_1\geq 1, w_2\geq 2\\ w_1+w_2=w}} \binom{w_1-1}{t_1}\binom{w_2-1}{t_2}\zeta(w_1,w_2),$$

$$S_{22} \coloneqq (-1)^{s_2} \sum_{\substack{t_1,t_2\geq 0\\ t_1+t_2=s_1}} \sum_{\substack{1\leq w_1\leq s_2+r_1+t_1\\ w_1+w_2=w}} \binom{w_1-1}{t_1}\binom{w_2-1}{t_2}\zeta(w_1,w_2),$$

$$S_{23} \coloneqq (-1)^{s_2} \sum_{\substack{t_1,t_2\geq 0\\ t_1+t_2=s_1}} \sum_{\substack{2\leq w_2\leq r_2+t_2\\ w_1+w_2=w}} \binom{w_1-1}{t_1}\binom{w_2-1}{t_2}\zeta(w_1,w_2).$$

对于 S_{21}，我们可以计算二项式系数之和，得到

$$S_{21} = (-1)^{s_2}\binom{w-2}{s_1} \sum_{\substack{w_1\geq 1, w_2\geq 2\\ w_1+w_2=w}} \zeta(w_1,w_2) = (-1)^{s_2}\binom{w-2}{s_1}\zeta(w)$$

根据通常的求和公式。对于 S_{22}、 S_{23}，注意到

$$S_{22} = (-1)^{s_2} \sum_{\substack{w_1\geq 1, w_2\geq 2\\ w_1+w_2=w}} \zeta(w_1,w_2) \sum_{\substack{t_1,t_2\geq 0\\ t_1\geq w_1-(s_2+r_1)\\ t_1+t_2=s_1}} \binom{w_1-1}{t_1}\binom{w_2-1}{t_2},$$

$$S_{23} = (-1)^{s_2} \sum_{\substack{w_1\geq 1, w_2\geq 2\\ w_1+w_2=w}} \zeta(w_1,w_2) \sum_{\substack{t_1,t_2\geq 0\\ t_2\geq w_2-r_2\\ t_1+t_2=s_1}} \binom{w_1-1}{t_1}\binom{w_2-1}{t_2}.$$

由于 S_{22} 对应的(t_1,t_2)范围与 S_{23} 对应的范围互不相交，因此有

$$S_{22}+S_{23} = (-1)^{s_2} \sum_{\substack{w_1\geq 1, w_2\geq 2\\ w_1+w_2=w}} \zeta(w_1,w_2) \sum_{\substack{t_1,t_2\geq 0\\ t_1\geq w_1-(s_2+r_1) \text{ or } t_2\geq w_2-r_2\\ t_1+t_2=s_1}} \binom{w_1-1}{t_1}\binom{w_2-1}{t_2}.$$

综合上述计算，我们得到该定理。 □

作为定理 3.13 的一个特例，我们得到钩形的以下有界型求和公式。注意，下一个推论左边对应于 $s \geq 2$时的钩形$(s,1^r)$。

推论 3.15. 对于 s、 $r \geq 1$ 和 $w \geq s+r+2$，我们有

$$\begin{aligned} S_w\binom{0,\,s-1}{r,\quad 1} &= \binom{w-2}{s-1}\zeta(w) - \sum_{k=1}^{s-1}\binom{w-k-2}{s-k-1}\zeta(k,w-k) + (-1)^s\sum_{k=s}^{s+r-1}\zeta(k,w-k) \\ &\quad - \sum_{k=2}^{s-1}(-1)^k\binom{w-k-2}{s-k-1}\zeta(k)\zeta(w-k) - \sum_{k=2}^{r}\binom{w-k-2}{s-2}\zeta(k)\zeta(w-k) \\ &\quad + (-1)^r\sum_{k=r+1}^{s+r-1}(-1)^k\binom{w-k-2}{r+s-1-k}\zeta(k)\zeta(w-k). \end{aligned}$$

证明。由定理 3.13 及对各项作一些重新排列即可得出。 □

例 3.16。对于形状 $\lambda = (3,1,1)$，我们得到如下求和公式： $w \geq 7$

$$\begin{aligned} S_w\left(\ydiagram{3,1,1}\right) &= S_w\binom{0,2}{2,1} \\ &= \binom{w-2}{2}\zeta(w) - (w-3)\zeta(2)\zeta(w-2) - (w-5)\zeta(3)\zeta(w-3) + \zeta(4)\zeta(w-4) \\ &\quad - (w-3)\zeta(1,w-1) - \zeta(2,w-2) - \zeta(3,w-3) - \zeta(4,w-4) \end{aligned}$$

由推论 3.15 取 $s=3$ 和 $r=2$ 得出。

4. Diagrams with one corner

本节中，我们考虑具有一个角的一般形状。回顾一下，在第 2 节中，我们对指标 $\boldsymbol{k} = (k_1,\dots,k_d)$ 和 $l \geq 0$作了定义

$$Q_l(\boldsymbol{k}) = \sum_{\substack{\boldsymbol{w}=(w_1,\dots,w_d)\text{: adm.} \\ \mathrm{wt}(\boldsymbol{w})=\mathrm{wt}(\boldsymbol{k})+l}} \binom{w_1-1}{k_1-1}\cdots\binom{w_{d-1}-1}{k_{d-1}-1}\binom{w_d-2}{k_d-1}\zeta(\boldsymbol{w})\,.$$

我们将在定理 4.2 中证明，对于具有一个角的 λ/μ，由 (1.2) 定义的目标 $S_w(\lambda/\mu)$ 可以用 $Q_{w-|\lambda/\mu|}$明确表示。这将由纯组合论证得出，并且我们将看到，这一结论对截断 Schur 多重 zeta 值已经成立。对于整数 $M \geq 1$ 以及任意的、不一定可容许的杨氏表 $\boldsymbol{k}$，它们定义如下:

$$\zeta_M(\boldsymbol{k}) = \sum_{\substack{(m_{i,j})\in \mathrm{SSYT}(\lambda/\mu) \\ m_{i,j}<M}} \prod_{(i,j)\in D(\lambda/\mu)} \frac{1}{m_{i,j}^{k_{i,j}}}\,.$$

特别地，对于整数 $M \geq 1$ 和指标 $\boldsymbol{k} = (k_1,\dots,k_d)$，其中 $k_1,\dots,k_d \geq 1$，截断多重ζ值由下式给出

$$\zeta_M(k_1,\dots,k_d) = \sum_{0<m_1<\cdots<m_d<M} \frac{1}{m_1^{k_1}\dots m_d^{k_d}}\,.$$

为了准确陈述上述定理，我们需要按照 [4] 引入一些代数框架。记 $\mathfrak{H}^1 = \mathbb{Q}\langle z_k \mid k \geq 1\rangle$ 为变量 z_k （ $k \geq 1$）上的非交换多项式环。 $\mathfrak{H}^1$ 中的首一单项式称为一个字，空字记作 $\mathbf{1}$。对于 $k \geq 1$ 和 $n \in \mathbb{Z}$，我们定义

$$z_k^n = \begin{cases} \underbrace{z_k\cdots z_k}_{n} & \text{if } n>0, \\ \mathbf{1} & \text{if } n=0, \\ 0 & \text{if } n<0. \end{cases}$$

指标与字之间存在一一对应关系；对于每个指标 $\boldsymbol{k} = (k_1,\dots,k_d)$，与之对应的字为 $z_{\boldsymbol{k}} := z_{k_1}\cdots z_{k_d}$。因此，我们可以将指标上的各种函数扩展为从 $\mathfrak{H}^1$ 到 $\mathbb{Q}$ 的线性映射。例如，我们定义 $Q_l\colon \mathfrak{H}^1 \to \mathbb{R}$，令$Q_l(z_{\boldsymbol{k}}) = Q_l(\boldsymbol{k})$，并将其线性延拓。

我们将 $*$ 上的 stuffle 积 $\overset{\sim}{\sqcup\!\sqcup}$ 和指标 shuffle 积 $\mathfrak{H}^1$ 定义为 $\mathbb{Q}$-双线性积，它们满足 $\mathbf{1} * w = w * \mathbf{1} = w$ 和 $\mathbf{1} \overset{\sim}{\sqcup\!\sqcup} w = w \overset{\sim}{\sqcup\!\sqcup} \mathbf{1} = w$，对任意字 $w \in \mathfrak{H}^1$ 以及任意 i、$j \geq 1$ 和字 w_1、$w_2 \in \mathfrak{H}^1$,

$$z_i w_1 * z_j w_2 = z_i(w_1 * z_j w_2) + z_j(z_i w_1 * w_2) + z_{i+j}(w_1 * w_2)\,,$$

$$z_i w_1 \mathbin{\widetilde{\sqcup\!\sqcup}} z_j w_2 = z_i(w_1 \mathbin{\widetilde{\sqcup\!\sqcup}} z_j w_2) + z_j(z_i w_1 \mathbin{\widetilde{\sqcup\!\sqcup}} w_2)\,.$$

由 [4, 定理 2.1] 可得一个交换的 $\mathbb{Q}$-代数 $\mathfrak{H}^1_*$。

引理 4.1. 设 $D_1, \dots, D_r$ 是斜杨图 $D(\lambda/\mu)$ 的非空子集，它们将 $D(\lambda/\mu)$ 不交地分解为，即 $D(\lambda/\mu) = D_1 \sqcup \cdots \sqcup D_r$。那么以下条件等价:

(i) 若令 $t_{ij} = a$ 对应于具有 $a = 1$ 的 $(i, j) \in D_a$，其中为 r，则 (t_{ij}) 是形状为 λ/μ 的半标准杨表。 (ii) 存在形状为 λ/μ 的半标准杨表 (m_{ij})，使得

$$m_{ij} < m_{kl} \iff a < b$$

对于任意 $(i, j) \in D_a$ 和 $(k, l) \in D_b$，均成立。

证明. 显然，(i) 蕴含 (ii)。反过来，假设半标准表 (m_{ij}) 满足条件 (ii)。若 (t_{ij}) 如 (i) 中所定义，则有

$$m_{ij} < m_{kl} \iff a < b \iff t_{ij} < t_{kl}$$

对于任意的 $(i, j) \in D_a$ 和 $(k, l) \in D_b$，这表明 (t_{ij}) 也是半标准的。因此 (ii) 推出 (i)。□

我们将满足引理 4.1 中等价条件 (i) 和 (ii) 的 $D(\lambda/\mu)$ 的非空子集组成的元组 $(D_1, \dots, D_r)$ 称为半标准分解。用 $\mathrm{SSD}(\lambda/\mu)$ 表示 $D(\lambda/\mu)$ 的所有半标准分解构成的集合。于是定义 $\varphi(\lambda/\mu)$ 的一个元素为 $\mathfrak{H}^1$

$$\varphi(\lambda/\mu) := \sum_{(D_1,\dots,D_r)\in \mathrm{SSD}(\lambda/\mu)} z_{|D_1|} \cdots z_{|D_r|},$$

其中 $|D_i|$ 表示 D_i的元素个数。这个元素与求和公式的关系如下。

定理 4.2. 当 λ/μ 只有一个角时，对于 $w > |\lambda/\mu|$，有

$$S_w(\lambda/\mu) = Q_{w-|\lambda/\mu|}(\varphi(\lambda/\mu)).$$

证明. 对于任意一个形状为 λ/μ 的可容许杨氏表 $\boldsymbol{k} = (k_{ij})$，我们有

$$\zeta(\boldsymbol{k}) = \sum_{(D_1,\dots,D_r)\in \mathrm{SSD}(\lambda/\mu)} \zeta\left(\sum_{(i,j)\in D_1} k_{ij}, \dots, \sum_{(i,j)\in D_r} k_{ij}\right) \tag{4.1}$$

通过按照引理 4.1 (ii) 中确定的半标准分解 $(D_1, \dots, D_r)$ 对形状为 λ/μ 的半标准表 (m_{ij}) 进行分类。然后，根据 $S_w(\lambda/\mu)$ 的定义，我们有

$$S_w(\lambda/\mu) = \sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in \mathrm{YT}(\lambda/\mu)\\ \boldsymbol{k}\text{: adm.}\\ \mathrm{wt}(\boldsymbol{k})=w}} \zeta(\boldsymbol{k}) = \sum_{\substack{k_{ij}\geq 1,\,(i,j)\in D(\lambda/\mu)\\ k_{ij}\geq 2,\,(i,j)\in C(\lambda/\mu)\\ \sum_{(i,j)} k_{ij}=w}} \sum_{(D_1,\dots,D_r)\in \mathrm{SSD}(\lambda/\mu)} \zeta\left(\sum_{(i,j)\in D_1} k_{ij}, \dots, \sum_{(i,j)\in D_r} k_{ij}\right)$$

$$= \sum_{(D_1,\dots,D_r)\in \mathrm{SSD}(\lambda/\mu)} \sum_{\substack{w_1,\dots,w_{r-1}\geq 1\\ w_r\geq 2\\ w_1+\cdots+w_r=w}} \binom{w_1-1}{|D_1|-1} \cdots \binom{w_{r-1}-1}{|D_{r-1}|-1} \binom{w_r-2}{|D_r|-1} \zeta(w_1, \dots, w_r).$$

这里回顾一下，$C(\lambda/\mu)$ 是 λ/μ 的角的集合，并注意，对于任意 $(D_1,\dots,D_r)\in\mathrm{SSD}(\lambda/\mu)$，$\lambda/\mu$ 的唯一角属于 D_r。上面的最后一个表达式等于

$$\sum_{(D_1,\dots,D_r)\in\mathrm{SSD}(\lambda/\mu)} Q_{w-|\lambda/\mu|}(|D_1|,\dots,|D_r|)=Q_{w-|\lambda/\mu|}(\varphi(\lambda/\mu)).$$

因此，证明完成。 □

由注 2.2 可知，定理 4.2 给出了具有一个角的形状的有界型求和公式。因此，要在单角情形下计算求和 $S_w(\lambda/\mu)$，就需要找到 $\varphi(\lambda/\mu)$ 的一个表达式。为此，以下表达式很有用：

命题 4.3. 对于任意斜形 λ/μ，设 $\lambda'=(\lambda'_1,\dots,\lambda'_s)$ 和 $\mu'=(\mu'_1,\dots,\mu'_s)$ 分别为 λ 和 μ 的共轭分拆。那么有如下恒等式

$$\varphi(\lambda/\mu)=\det{}_*\big[z_1^{\lambda'_i-\mu'_j-i+j}\big]_{1\le i,j\le s},$$

其中，$\det_*$ 表示在 stuffle 代数 $\mathfrak{H}^1_*$ 中计算的行列式。

证明. 对于任意整数 $M>0$，有

$$\zeta_M(\varphi(\lambda/\mu))=\sum_{(D_1,\dots,D_r)\in\mathrm{SSD}(\lambda/\mu)}\zeta_M(|D_1|,\dots,|D_r|)=\zeta_M(\mathbf{O}_{\lambda/\mu}),$$

其中 $\mathbf{O}_{\lambda/\mu}$ 表示形状为 λ/μ 且所有元素均为 1 的杨氏表。事实上，第一个等式由 $\varphi(\lambda/\mu)$ 的定义显然成立，第二个等式则可仿照 (4.1) 得出。

另一方面，根据截断 Schur 多重 zeta 值的 Jacobi-Trudi 型公式（[7,定理 1.1], [1, 定理 4.7]），我们有

$$\zeta_M(\mathbf{O}_{\lambda/\mu})=\det\big[\zeta_M(z_1^{\lambda'_i-\mu'_j-i+j})\big]_{1\le i,j\le s}=\zeta_M\Big(\det{}_*\big[z_1^{\lambda'_i-\mu'_j-i+j}\big]_{1\le i,j\le s}\Big).$$

由于映射 $\mathfrak{H}^1\to\prod_{M\ge1}\mathbb{Q}$ 由 $w\mapsto(\zeta_M(w))_{M\ge1}$ 给出且为单射（[8, 定理 3.1]），我们便得到 $\mathfrak{H}^1$ 中所需的恒等式。□

在某些情况下，可以利用命题 4.3 显式计算 $\varphi(\lambda/\mu)$。

定理 4.4. 对于 $n\ge1$ 和 $k\ge0$，有

$$\varphi\big((2^{n+k})/(1^k)\big)=\sum_{l=0}^{n}\frac{k+1}{l+k+1}\binom{2l+k}{l}z_2^{n-l}\mathbin{\tilde{\sqcup\!\sqcup}}z_1^{2l+k}.$$

证明。根据命题 4.3，我们有

$$\varphi\big((2^{n+k})/(1^k)\big)=\begin{vmatrix}z_1^n & z_1^{n+k+1}\\ z_1^{n-1} & z_1^{n+k}\end{vmatrix}=z_1^{n+k}*z_1^n-z_1^{n+k+1}*z_1^{n-1}.$$

由 [6, 引理 1] 可得，对于 $m\ge n\ge1$

$$z_1^m*z_1^n=\sum_{l=0}^{n}\binom{m+n-2l}{m-l}\sum_{\boldsymbol{k}\in G_l^{m+n-2l}}z_{\boldsymbol{k}}=\sum_{l=0}^{n}\binom{m+n-2l}{n-l}z_2^l\mathbin{\tilde{\sqcup\!\sqcup}}z_1^{m+n-2l},\tag{4.2}$$

其中，G_b^a 是所有可能指标的集合，这些指标包含 a 个 1 和 b 个 2。由此可得

$$\begin{aligned}&\varphi\big((2^{n+k})/(1^k)\big)\\&=z_1^{n+k}*z_1^n-z_1^{n+k+1}*z_1^{n-1}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{l=0}^{n} \binom{2n+k-2l}{n-l} z_2^l \mathbin{\tilde{\sqcup\!\sqcup}} z_1^{2n+k-2l} - \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n+k-2l}{n-l-1} z_2^l \mathbin{\tilde{\sqcup\!\sqcup}} z_1^{2n+k-2l} \\
&= \sum_{l=0}^{n} \left(\binom{2n+k-2l}{n-l} - \binom{2n+k-2l}{n-l-1} \right) z_2^l \mathbin{\tilde{\sqcup\!\sqcup}} z_1^{2n+k-2l} \\
&= \sum_{l=0}^{n} \left(\binom{2l+k}{l} - \binom{2l+k}{l-1} \right) z_2^{n-l} \mathbin{\tilde{\sqcup\!\sqcup}} z_1^{2l+k} \\
&= \sum_{l=0}^{n} \frac{k+1}{l+k+1} \binom{2l+k}{l} z_2^{n-l} \mathbin{\tilde{\sqcup\!\sqcup}} z_1^{2l+k}.
\end{aligned}
$$

□

对于某些形状 λ/μ，$\varphi(\lambda/\mu)$将包含对具有固定权和深度的所有指标求和。对这些指标应用 Q 所得的相应和可以利用以下引理计算。

Lem题 4.5. 对于 $k \geq d \geq 1$、$w \geq d+1$ 以及指标 $\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_d)$，我们有 e

$$
\sum_{\substack{\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_d) \\ \mathrm{wt}(\boldsymbol{k})=k}} P_{w-k}(\boldsymbol{n};\boldsymbol{k}) = \binom{w-\mathrm{wt}(\boldsymbol{n})}{k-d} \zeta(w).
$$

特别地，

$$
\sum_{\substack{\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_d) \\ \mathrm{wt}(\boldsymbol{k})=k}} P_{w-k}(\boldsymbol{k}) = \binom{w-d}{k-d} \zeta(w), \qquad \sum_{\substack{\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_d) \\ \mathrm{wt}(\boldsymbol{k})=k}} Q_{w-k}(\boldsymbol{k}) = \binom{w-d-1}{k-d} \zeta(w).
$$

证明。直接应用楚–范德蒙德恒等式和多重ζ值的通常求和公式即可得到。□

注 4.6. 对于 $s \geq 0$ 和 $r \geq 1$，可以证明恒等式

$$
\varphi\big(((s+1)^r)/(s^{r-1})\big) = \sum_{l=0}^{s} \binom{r+l-1}{l} \sum_{\substack{\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_{r+l}) \\ \mathrm{wt}(\boldsymbol{k})=r+s}} z_{\boldsymbol{k}}
$$

通过计算对于每个 $\boldsymbol{k}$，$z_{\boldsymbol{k}}$ 出现的次数即可得出，如定理 3.4 的证明所示。（也可以通过对 s 使用归纳法，并利用表达式

$$
\varphi\big(((s+1)^r)/(s^{r-1})\big) = \det{}_* \begin{bmatrix}
z_1 & z_1^2 & \cdots & z_1^s & z_1^{r+s} \\
1 & z_1 & \cdots & z_1^{s-1} & z_1^{r+s-1} \\
0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & z_1 & z_1^{r+1} \\
0 & \cdots & 0 & 1 & z_1^r
\end{bmatrix}
$$

由命题 4.3 和式 (4.2) 得到。) 利用定理 4.2 和引理 4.5，可以用另一种方法证明定理 3.8 中的反钩求和公式

$$
\begin{aligned}
S_w\big(((s+1)^r)/(s^{r-1})\big) &= Q_{w-(r+s)}\left(\varphi\big(((s+1)^r)/(s^{r-1})\big)\right) \\
&= \sum_{l=0}^{s} \binom{r+l-1}{l} \sum_{\substack{\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_{r+l}) \\ \mathrm{wt}(\boldsymbol{k})=r+s}} Q_{w-(r+s)}(\boldsymbol{k})
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{l=0}^{s} \binom{r+l-1}{l} \binom{w-r-l-1}{s-l} \zeta(w)$$
$$= \binom{w-1}{s} \zeta(w) .$$

对于 λ/μ 只有一个角的情形，我们可以将给出 $S_w(\lambda/\mu)$ 的有界表达式的一般策略概括如下：

(i) 通过 stuffle 积计算命题 4.3 中的行列式，给出 $\varphi(\lambda/\mu)$ 的表达式。然后利用定理 4.2 得到 $S_w(\lambda/\mu) = Q_{w-|\lambda/\mu|}(\varphi(\lambda/\mu))$。(ii) 如果出现对固定权和深度的所有指标求和的情形，使用引理 4.5 将其写成黎曼 ζ 值的形式。(iii) 对于涉及 Q 的其他项，利用 (2.1) 将其写成 P 的形式，即

$$Q_l(k_1, \dots, k_d) = \sum_{j=0}^{k_d-1} (-1)^j P_{l+j}(k_1, \dots, k_{d-1}, k_d - j).$$

然后利用命题 2.1 得到以多重ζ值表示的递归（有界） P_{l+j} 表达式。深度为 2 和 3 时的显式表达式分别由推论 2.6 和推论 2.7 给出。

例 4.7。采用上述策略，我们得到引言中关于 $S_w\left(\ydiagram{2,2}\right)$ 的公式 (1.3) 以及以下例子：

（i）对于 $w \geq 6$，我们有

$$S_w\left(\ydiagram{3,1}\right) = \binom{w-2}{2}\zeta(2)\zeta(w-2) - \frac{5}{4}\zeta(4)\zeta(w-4) + \zeta(2)\zeta(2,w-4)$$
$$- \zeta(2)\zeta(1,w-3) - \binom{w-2}{2}\zeta(1,w-1) + \binom{w-3}{2}\zeta(2,w-2)$$
$$+ (w-3)\zeta(3,w-3) + (w-3)\zeta(1,1,w-2) - (w-5)\zeta(1,2,w-3)$$
$$- 2\zeta(1,3,w-4) + \zeta(2,1,w-3) - \zeta(2,2,w-4).$$

（ii）对于 $w \geq 6$，我们有

$$S_w\left(\ydiagram{2,1,1}\right) = (w-2)\zeta(2)\zeta(w-2) + (w-5)\zeta(3)\zeta(w-3) - \frac{5}{4}\zeta(4)\zeta(w-4)$$
$$- \zeta(2)\zeta(1,w-3) + \zeta(2)\zeta(2,w-4) + (2-w)\zeta(1,w-1) + (w-4)\zeta(2,w-2)$$
$$+ 2\zeta(3,w-3) + (w-3)\zeta(1,1,w-2) - (w-5)\zeta(1,2,w-3)$$
$$- 2\zeta(1,3,w-4) + \zeta(2,1,w-3) - \zeta(2,2,w-4).$$

将（i）和（ii）与（1.3）进行比较，我们看到，对于所有 $w \geq 1$，都有

$$2S_w\left(\ydiagram{3,1}\right) - 2S_w\left(\ydiagram{2,1,1}\right) = (w-5)S_w\left(\ydiagram{2,2}\right) . \tag{4.3}$$

现在我们将说明，不同形状的 S_w 之间的关系（4.3）是一个更一般的关系族的特例。为此，我们首先注意到，任何只有一个角的斜杨图 $D(\lambda/\mu)$都可以写成

$$\lambda = (n^m) = (\underbrace{n, \dots, n}_{m}), \quad \mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$$

其中 $\mu_1 = n$, $\mu_m > 0$ （例如，单框图表示为（2, 2）/（2, 1））。接着，我们将 I 记作满足以下条件的 $i = 1$、……、 m 的集合

$$\mu[i] \coloneqq (\mu_1, \dots, \mu_i - 1, \dots, \mu_m)$$

是非递增的。那么，对于 $i \in I$, $D(\lambda/\mu[i]) = D(\lambda/\mu) \cup \{(i, \mu_i)\}$，它仍然是一个带有一个角的斜杨图。作为 (4.3) 的推广，我们得到以下结果。

定理 4.8. 若 λ/μ 是一个带有一个角的斜杨图，则对所有 $w \geq 1$

$$\sum_{i \in I} \big((i - \mu_i) - (m - n)\big) S_w(\lambda/\mu[i]) = (w - |\lambda/\mu| - 1) S_w(\lambda/\mu). \tag{4.4}$$

为了证明 这一点，我们需要以下引理。定义一个线性映射 $\partial\colon \mathfrak{H}^1 \to \mathfrak{H}^1$ b y

$$\partial(z_{k_1} \cdots z_{k_d}) \coloneqq \sum_{a=1}^{d} k_a z_{k_1} \cdots z_{k_a+1} \cdots z_{k_d}.$$

特别地， $\partial(1) = 0$。

引理 4.9。

(i) ∂ 是关于 stuffle 积的导子。(ii) 对任意 $N \in \mathbb{Z}$,

我们有

$$\partial(z_1^N) = z_1 * z_1^N - (N+1) z_1^{N+1}.$$

(iii) 我们有

$$(l-1) Q_l(v) = Q_{l-1}(\partial(v))$$

对任意 $v \in \mathfrak{H}^1$。

证明。(i) 可通过对深度进行归纳法验证。由定义也容易证明 (ii)。最后，(iii) 中的恒等式由 Q_l 的定义以及恒等式得出

$$\begin{aligned}
&(w-k-1)\binom{w_1-1}{k_1-1}\cdots\binom{w_d-2}{k_d-1} \\
&= \big((w_1-k_1)+\cdots+(w_d-1-k_d)\big)\binom{w_1-1}{k_1-1}\cdots\binom{w_d-2}{k_d-1} \\
&= \sum_{a=1}^{d} k_a \binom{w_1-1}{k_1-1}\cdots\binom{w_a-1}{k_a}\cdots\binom{w_d-2}{k_d-1},
\end{aligned}$$

其中 $w = w_1 + \cdots + w_d$ 且 $k = k_1 + \cdots + k_d$。 □

定理 4.8 的证明。由定理 4.2 和命题 4.3，我们得到

$$S_w(\lambda/\mu) = Q_{w-|\lambda/\mu|}\Big(\det_*\big[z_1^{m-\mu'_j-i+j}\big]_{1\leq i,j\leq n}\Big).$$

这里，$(\mu'_1, \dots, \mu'_n)$ 表示分拆 $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ 的转置。注意，$\mu'_1 = m$ 和 $\mu'_n > 0$。由引理 4.9 (iii) 和 (i)，可知

$$\begin{aligned}
(w - |\lambda/\mu| - 1) S_w(\lambda/\mu) &= (w - |\lambda/\mu| - 1) Q_{w-|\lambda/\mu|}\Big(\det_*\big[z_1^{m-\mu'_j-i+j}\big]_{1\leq i,j\leq n}\Big) \\
&= Q_{w-|\lambda/\mu|-1}\Big(\partial \det_*\big[z_1^{m-\mu'_j-i+j}\big]_{1\leq i,j\leq n}\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} Q_{w-|\lambda/\mu|-1}\Big(\det_*\big[\partial^{\delta_{jk}}(z_1^{m-\mu'_j-i+j})\big]_{1\leq i,j\leq n}\Big).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

这里， $\partial^{\delta_{jk}}$ 表示算子 ∂ ，当 $j=k$ 时；否则表示恒等算子。此外，由于恒等

$$\begin{aligned}\partial(z_1^{m-\mu'_k-i+k}) &= z_1 * z_1^{m-\mu'_k-i+k} - (m-\mu'_k-i+k+1)z_1^{m-\mu'_k-i+k+1}\\ &= \big((\mu'_k-k)-(m-n)\big)z_1^{m-(\mu'_k-1)-i+k}\\ &\quad + z_1 * z_1^{m-\mu'_k-i+k} - (n+1-i)z_1^{m-(\mu'_k-1)-i+k}\end{aligned}$$

由引理 4.9 (ii) 可知，我们有

$$\begin{aligned}&\det{}_*\big[\partial^{\delta_{jk}}(z_1^{m-\mu'_j-i+j})\big]\\ &= \big((\mu'_k-k)-(m-n)\big)\det{}_*\big[z_1^{m-(\mu'_j-\delta_{jk})-i+j}\big]\\ &\quad + z_1 * \det{}_*\big[z_1^{m-\mu'_j-i+j}\big] - \det{}_*\big[(n+1-i)^{\delta_{jk}}z_1^{m-(\mu'_j-\delta_{jk})-i+j}\big].\end{aligned}\tag{4.6}$$

另一方面，(4.4) 的左边等于

$$\sum_{k=1}^{n}\big((\mu'_k-k)-(m-n)\big)Q_{w-|\lambda/\mu|-1}\Big(\det{}_*\big[z_1^{m-(\mu'_j-\delta_{jk})-i+j}\big]\Big).\tag{4.7}$$

这里，先验上， k 只遍历满足 $\mu'_k>\mu'_{k+1}$的指标。不过，如果 $\mu'_k=\mu'_{k+1}$，矩阵 $\big(z^{m-(\mu'_j-\delta_{jk})-i+j}_1\big)_{i,j}$的第$k$列和第（$k+1$）列相同，因此行列式为零。

比较 (4.5)、(4.6) 和 (4.7)，只需证明等式

$$nz_1 * \det{}_*\big[z_1^{m-\mu'_j-i+j}\big] \stackrel{?}{=} \sum_{k=1}^{n}\det{}_*\big[(n+1-i)^{\delta_{jk}}z_1^{m-(\mu'_j-\delta_{jk})-i+j}\big].\tag{4.8}$$

我们来沿第 k列进行余子式展开，计算右边。

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\det{}_*\big[(n+1-i)^{\delta_{jk}}z_1^{m-(\mu'_j-\delta_{jk})-i+j}\big]\\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(-1)^{k+l}(n+1-l)z_1^{m-(\mu'_k-1)-l+k} * \det{}_*\big[z_1^{m-\mu'_j-i+j}\big]_{i\neq l,j\neq k}\\ &= \sum_{l=1}^{n}(n+1-l)\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+l}z_1^{m-(\mu'_k-1)-l+k} * \det{}_*\big[z_1^{m-\mu'_j-i+j}\big]_{i\neq l,j\neq k}.\end{aligned}$$

于是，对第 l 行进行余子式展开，得到

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+l}z_1^{m-(\mu'_k-1)-l+k} * \det{}_*\big[z_1^{m-\mu'_j-i+j}\big]_{i\neq l,j\neq k} = \det{}_*\big[z_1^{m-\mu'_j-(i-\delta_{il})+j}\big].$$

由于第 l 行与第 $(l-1)$ 行相同，因此当 $l=2,\ldots,n$ 时，该式为零。由此可知，(4.8) 的右端为 $n\det{}_*\big[z_1^{m+\delta_{i1}-\mu'_j-i+j}\big]$，现在只需证明

$$z_1 * \det{}_*\big[z_1^{m-\mu'_j-i+j}\big] \stackrel{?}{=} \det{}_*\big[z_1^{m+\delta_{i1}-\mu'_j-i+j}\big].$$

但这是显然的，因为这里的两个矩阵分别具有以下形式

$$\begin{pmatrix}1 & *\\ \mathbf{0} & Z\end{pmatrix}\quad\text{and}\quad\begin{pmatrix}z_1 & *\\ \mathbf{0} & Z\end{pmatrix},$$

，且它们有共同的（$n-1$）×（$n-1$）矩阵 $Z=\left[z_1^{m-\mu_i'-i+j}\right]_{2\le i,\ j\le n}$。因此证明完成。□

References

[1] H. Bachmann，《插值舒尔多重ζ值》，澳大利亚数学会杂志 104 (2018)，289–307。[2] A. Granville，《黎曼ζ函数的一个分解》，《解析数论》（京都，1996），95–101，伦敦数学会讲义丛书，247，剑桥大学出版社，剑桥，1997。[3] M. E. Hoffman，《多重调和级数》，太平洋数学杂志 152 (2) (1992)，275–290。[4] M. E. Hoffman，《多重调和级数的代数》，代数杂志 194 (1997)，477–495。[5] M. Kaneko 和 S. Yamamoto，《多重ζ值的一个新的积分—级数恒等式及正则化》，数学精选（新系列）24 (2018)，2499–2521。[6] Kwang-Wu Chen，《多重ζ值的 stuffle 积的应用》，数论杂志，153 (2015)，107–116。[7] M. Nakasuji、O. Phuksuwan 和 Y. Yamasaki，《关于舒尔多重ζ函数：多重ζ函数的一种组合推广》，数学进展 333 (2018)，570–619。[8] S. Yamamoto，《某些多重ζ星值和的显式求值》，Functiones et Approximatio 49 (2013)，283–289。[9] S. Yamamoto，《多重ζ星值与重积分》，《多重ζ值的各个方面》2016，RIMS Kōkyūroku Bessatsu B68 (2017)，3–14。

Graduate School of Mathematics, Nagoya University, Nagoya, Japan.电子邮箱：henrik.bachmann@math.nagoya-u.ac.jpFaculty of Fundamental Science, National Institute of Technology (KOSEN), NiihamaCollege, Niihama, Japan.电子邮箱：s.kadota@niihama-nct.ac.jpDepartment of Mathematics, Rikkyo University, Tokyo, Japan 电子邮箱：suzuyu@rikkyo.ac.jpFaculty of Science and Technology, Keio University, Yokohama, Japan电子邮箱：yamashu@math.keio.ac.jp
Graduate School of Science and Engineering, Ehime University, Matsuyama, Japan电子邮箱：yamasaki@math.sci.ehime-u.ac.jp