arXiv:2302.03199v1 [math.DG] 7 Feb 2023

闭流形上 (α,β)-Ricci-Yamabe 流的存在性

LIANGDI ZHANG

Abstract. 在光滑闭黎曼流形上，我们证明了 (α,β)-Ricci-Yamabe 流的光滑解短时间存在性。该流是里奇流和 Yamabe 流的一种自然推广。我们还通过估计其曲率，建立了闭 (α,β)-Ricci-Yamabe 流的若干长期存在性定理。

Keywords：(α,β)-Ricci-Yamabe 流；存在性；曲率估计
2020 Mathematics Subject Classification：53C21；35A01

Contents

1. 引言 1 2. 短时间存在性 4 3. 曲率演化方程 6 4. 黎曼曲率的导数估计与长期存在性 I 10 5. 局部曲率估计与长期存在性 II 19 6. 曲率夹逼估计与长期存在性 III 30 致谢 35 参考文献 35

1. Introduction

设 $(M^n, g(x,t))$ 是一个 n 维光滑闭黎曼流形，其度量 $g(x,t)$ 满足 (α,β)-Ricci-Yamabe 流

$$\frac{\partial}{\partial t}g = -2\alpha Ric - \beta Rg, \tag{1.1}$$

其中 α 和 β 是实常数。

（α，β）-Ricci-Yamabe 流由 G¨uler 和 Grasmareanu 于 [10] 2019 年引入。这类几何流包含或关联着两种著名的几何流：里奇流（$\alpha = 1$ 和 $\beta = 0$）以及 Yamabe流（$\alpha = 0$ 和 $\beta = 1$）。

利用 Nash-Moser 逆函数定理，Hamilton [11] 证明了里奇流光滑解的短时间存在性

$$\frac{\partial}{\partial t}g = -2Ric$$

首次在闭流形上实现。此后不久，DeTurck [7] 通过修改流并证明里奇流可以替换为等价的严格抛物型偏微分方程，进一步简化了短时间存在性证明。

更一般地，Shi [35] 证明了：如果初始黎曼曲率有界，那么里奇流在完备非紧致黎曼流形上具有短时间存在性。

1995 年，Hamilton [12] 提出了一项长期存在性判据：定义在最大时间区间 $[0,T)$ 上的闭里奇流满足 $T=\infty$，或者黎曼曲率范数的最大值在有限时间 T 处爆破。大约十年后，˘Se˘sum [34] 证明，若有限时间区间上定义的闭里奇流沿流的里奇曲率一致有界，则利用佩雷尔曼的非坍缩定理（见 [30]）和 Hamilton 的紧致性定理（见 [13]），可知沿流的黎曼曲率也一致有界。˘Se˘sum 的结果在非紧情形下仍然成立：对于初始时刻黎曼曲率有界的完备非紧流形上的里奇流，里奇曲率一致有界意味着沿流的黎曼曲率一致有界（见 Ma-Cheng [28]，、Kotschwar-Munteanu-Wang [19]，和 Hsu[17] 的研究）。

关于闭里奇流 $g(\cdot,t)$ $0\le t<T<\infty$有一个众所周知的猜想：标量曲率的一致有界性足以使里奇流在时间 T之后延拓。Hamilton-Ivey 挤压估计在三维证明了这一猜想（见 [14, 16]）。Zhang [40] 和 Enders-M¨uller-Topping [9] 分别部分解决了 K¨ahler-里奇流和 I 型里奇流的这一猜想。Wang [37]证明，若闭里奇流 $g(\cdot,t)$ $0\le t<T<\infty$ 的里奇曲率张量具有一致下界，且标量曲率满足某些时空积分界，则该流可在 T 之后光滑延拓。2021年，Di Matteo [29] 在附加条件下将这一结果推广到了完备情形。

Ma 和 Cheng [28] 针对标量曲率和韦尔张量的范数有限的闭里奇流，推导出了一个光滑延拓结果；他们还证明，若初始时刻的截面曲率有界，且标量曲率和韦尔张量一致有界，则完备里奇流的黎曼曲率沿流始终一致有界。对于定义在极大区间 $[0,T)$ 上的闭里奇流 $g(\cdot,t)$，Cao [5] 证明，标量曲率要么在有限时刻 T 爆发，要么

$$\limsup_{t\to T} R<\infty \text{ but } \limsup_{t\to T}\frac{|W|}{R}=\infty,$$

其中 $W=\{W_{ijkl}\}$ 是 $g(\cdot,t)$的韦尔张量，定义为

$$W_{ijkl}=R_{ijkl}-\frac{1}{n-2}(g_{ik}R_{jl}-g_{il}R_{jk}-g_{jk}R_{il}+g_{jl}R_{ik})$$
$$+\frac{1}{(n-1)(n-2)}R(g_{ik}g_{jl}-g_{il}g_{jk}).$$

2018年，李 [21] 将曹的结果 [5] 推广到了里奇-调和流

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial t}g=-2Ric+2a(t)\nabla\phi\otimes\nabla\phi,\\ \frac{\partial}{\partial t}\phi=\Delta\phi,\end{cases}$$

其中 $a(t)$是随时间变化的正常数，ϕ 是在 $M\times[0,T)$上的函数族（满足 $0<T\le\infty$）。关于里奇-调和流存在性的更多相关工作，请参阅 [27, 33, 6, 22, 25, 38]。

Yamabe流是一种黎曼流形上的内在几何流，其定义为

$$\frac{\partial}{\partial t}g=-Rg,$$

而保体积归一化 Yamabe 流为

$$\frac{\partial}{\partial t}g = (r - R)g, \tag{1.2}$$

其中 r 是平均标量曲率。Ye [39] 证明，对于具有正 Ricci 曲率的紧致局部共形平坦流形上的初始度量，归一化 Yamabe 流（1.2）的解 $g(t)$ 对所有时间均存在，并在 C^∞ 范数下收敛到一个具有常标量曲率的共形度量。2005 年，Brendle[3] 证明，若底流形的维数 1.2为 n，或初始度量局部共形平坦，则闭流形上的流（$3 \leq n \leq 5$）对所有时间均存在，并收敛到一个具有常标量曲率的度量。

Catino、Cremaschi、Djadli、Mantegazza 和 Mazzieri [4] 证明了 Ricci-Bourguignon 流的短时间存在性及曲率估计

$$\frac{\partial}{\partial t}g = -2Ric + 2\rho Rg,$$

这是一族由 Bourguignon 于 1981 年引入的几何流 [2]，通过取 $\alpha = 2$ 和 $\beta = -2\rho$，可将其视为（1.1）的一个特例。

Liang 和 Zhu [26] 证明了，对于 Ricci-Bourguignon 流的任意光滑解，韦尔张量的范数都可以根据给定球上的初始值以及里奇张量的局部一致界进行显式估计。作为应用，他们 [26] 得出结论：在里奇张量一致有界的条件下，定义于有限时间区间上的 Ricci-Bourguignon 流的黎曼曲率张量一致有界。最近，Qiu 和 Zhu [32] 证明了：若初始度量具有常平均曲率并满足某些相容条件，则在边界具有常平均曲率的紧致黎曼流形上，Ricci-Bourguignon 流存在短时间解。

本文研究光滑闭黎曼流形上（α, β）-Ricci-Yamabe 流（1.1）的短期和长期存在性。第一个主要结果是证明方程（ $g(x,t)$ 的光滑解存在短时间的定理（1.1）。

定理 1.1. 设 (M, g_0) 是一个 n 维 $(n \geq 2)$ 光滑闭黎曼流形。则对于 $\alpha > 0, \beta > -\frac{\alpha}{n-1}$，以初始度量 $g(\cdot, 0) = g_0$ 为初值的 (α, β)-Ricci-Yamabe 流 (1.1) 在 $M \times [0, \epsilon)$ 上存在光滑解 $g(x, t)$，其中 $\epsilon > 0$ 为某个值。

存在一个针对 (1.1) 的光滑解的长期存在性判据，它是 Hamilton 里奇流长期存在性定理的推广（参见[12]）。

定理 1.2. 对于定义在 n 维 $(n \geq 2)$ 闭黎曼流形上的任意光滑初始度量 $g(\cdot, 0) = g_0$，存在一个最大时间 T，在该时间区间上，(α, β)-Ricci-Yamabe 流 (1.1) 存在光滑解 $g(x, t)$，其中 $0 \leq t < T$，且满足 $\alpha > 0$ 和 $\beta > -\frac{\alpha}{n-1}$。当 $t \to T$ 时，要么 $T = \infty$，要么黎曼曲率无界。

类似地，对于一个光滑解 $g(x, t)$ 到 (1.1) 的情形，在里奇曲率和标量曲率满足一定条件时，我们也有光滑延拓结果。

定理 1.3。设 $g(x,t)$，$0 \leq t < T < +\infty$是 (α, β)- Ricci-Yamabe 流 (1.1) 的光滑解，满足 $0 < \alpha \leq 1$且 $\beta > -\frac{\alpha}{n-1}$ 位于一个 n维$(n \geq 2)$ 闭黎曼流形 M上。若

$$\sup_{M \times [0,T)} (|Ric| + |\nabla^2 R|) < \infty,$$

则该流可随时间 T 光滑延拓。

此外，我们根据标量曲率和韦尔张量，推导出（α，β）-Ricci-Yamabe 流（1.1）的长期存在性定理，从而推广了曹此前的结果 [5]。

定理 1.4. 设 $g(x,\ t)$，$0 \le t < T < +\infty$ 是（α，β）-Ricci-Yamabe 流（1.1）的极大光滑解，满足 $\alpha > 0$ 且 $\beta > -\frac{\alpha}{n-1}$，定义在一个 n维（$n \ge 3$）闭黎曼流形 M上。那么以下二者之一成立:

$$\limsup_{t\to T}(\max_M R) = \infty$$

or

$$\limsup_{t\to T}(\max_M R) < \infty \ \textit{but} \ \limsup_{t\to T}\big(\max_M \frac{|W| + |\nabla R| + |\nabla^2 R|}{R}\big) = \infty.$$

本文安排如下。在第 2 节，我们证明光滑解 $g(x,\ t)$ 满足（α，β）-Ricci-Yamabe 流（1.1）的短时间存在性。第 3 节主要推导曲率算子的演化方程。第 4 节中，我们逐步估计黎曼曲率的每阶协变导数，并给出定理1.2的证明。第 5 节中，我们说明如何利用初始度量的黎曼曲率、里奇曲率以及标量曲率的二阶导数，对 $g(x,\ t)$ 的黎曼曲率进行局部控制。此外，我们完成定理1.3的证明。最后一节中，我们证明定理 1.4，该定理将（α，β）-Ricci-Yamabe 流的长期存在性与标量曲率和韦尔张量的行为联系起来。

2. Short time existence

本节中，我们通过 DeTurck 技巧证明（α, β）-Ricci-Yamabe 流（1.1）的短时间存在性。DeTurk [7, 8] 提出该技巧，以证明 Ricci 流等价于一个严格抛物型二阶线性偏微分方程的初值问题。

定理 **1.1** 的证明：对于每个 $h \in \Gamma(S^2M)$，在 g_0 沿h 方向的正规坐标中，里奇曲率和标量曲率的微分为（参见 [1], [4] 中的定理1.174，或 [36]）：

$$DRic_{g_0}(h)_{ik} = -\frac{1}{2}(\Delta_{g_0}h_{ik} + \nabla_i\nabla_k tr_{g_0}h - \nabla_i\nabla_j h_{kj} - \nabla_k\nabla_j h_{ij}) + \cdots,$$

and

$$DR_{g_0}(h) = -\Delta_{g_0}tr_{g_0}h + \nabla_j\nabla_l h_{jl} + \cdots,$$

分别如下，其中省略低阶项。于是，二阶非线性偏微分算子$P = -2\alpha Ric - \beta Rg$ 在 g_0 处的线性化（省略低阶项）为

$$\begin{aligned} DP_{g_0}(h)_{ik} &= -2\alpha DRic_{g_0}(h)_{ik} - \beta DR_{g_0}(h)(g_0)_{ik} - \beta R_{g_0}h_{ik} \\ &= \alpha(\Delta_{g_0}h_{ik} + \nabla_i\nabla_k tr_{g_0}h - \nabla_i\nabla_j h_{kj} - \nabla_k\nabla_j h_{ij}) \\ &\quad +\beta(\Delta_{g_0}tr_{g_0}h - \nabla_j\nabla_l h_{jl})(g_0)_{ik} + \cdots \end{aligned} \tag{2.1}$$

设 X: $\Gamma(S^2M) \to \Gamma(TM)$ 为由下式定义的向量场

$$X^j(g) := -\frac{\alpha}{2}g_0^{jk}g^{pq}(\nabla_k(g_0)_{pq} - \nabla_p(g_0)_{qk} - \nabla_q(g_0)_{pk}.$$

因此，沿 X 方向的$L_X g_0$ g_0 的李导数的线性化（不含低阶项）为

$$(DL_X)_{g_0}(h)_{ik} = \alpha(\nabla_i\nabla_k tr_{g_0}h - \nabla_i\nabla_j h_{kj} - \nabla_k\nabla_j h_{ij}) + \cdots. \tag{2.2}$$

运用 DeTuck 的技巧（[7, 8]），我们只需验证算子 D（$P-L_X$）$_{g_0}$是强椭圆的。

对于任意余切向量 ξ，线性微分算子 $D(P-L_X)_{g_0}(h)_{ik}$在 ξ方向上的主符号为

$$\begin{aligned}\sigma_\xi(D(P-L_X)_{g_0})(h)_{ik} &= \alpha(\xi_j\xi_j h_{ik} + \xi_i\xi_k tr_{g_0}h - \xi_i\xi_j h_{kj} - \xi_k\xi_j h_{ij})\\ &\quad +\beta(\xi_j\xi_j tr_{g_0}h - \xi_j\xi_l h_{jl})(g_0)_{ik}\\ &\quad -\alpha(\xi_i\xi_k tr_{g_0}h - \xi_i\xi_j h_{kj} - \xi_k\xi_j h_{ij})\\ &= \alpha\xi_j\xi_j h_{ik} + \beta(\xi_j\xi_j tr_{g_0}h - \xi_j\xi_l h_{jl})(g_0)_{ik}\end{aligned} \tag{2.3}$$

由于（2.3）是齐次的，我们可以在该点选取标准正交基 $\{e_i\}_{i=1,\ \ldots,\ n}$，使得（$g_0$）$_{ik} = \delta_{ik}$ 以及 $|\xi| = 1$，其中 $\xi_1 = 1$，同时不失一般性地令 $\xi_a = 0$ 对于$a \in \{2, \ldots, n\}$ 成立。因此，

$$\sigma_\xi(D(P-L_X)_{g_0})(h)_{ik} = \alpha h_{ik} + \beta(\delta_{ik}tr_{g_0}h - h_{11}\delta_{ik}). \tag{2.4}$$

与 [4] 中类似，σ_ξ（D（$P-L_X$）$_{g_0}$）可以表示在坐标系中

$$(h_{11}, h_{22}, \ldots, h_{nn}, h_{12}, \ldots, h_{1n}, h_{24}, \ldots, h_{n-1,n})$$

其矩阵为

$$\begin{pmatrix} U_{n\times n} & \\ & \alpha Id_{\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{n(n-1)}{2}} \end{pmatrix},$$

其中所有省略的项均为零，并且

$$U_{n\times n} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta & \cdots & \beta \\ 0 & \alpha+\beta & \beta & \cdots & \beta \\ 0 & \beta & \alpha+\beta & \cdots & \beta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \beta & \beta & \cdots & \alpha+\beta \end{pmatrix}.$$

我们将子矩阵

$$\begin{pmatrix} \alpha+\beta & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \alpha+\beta & \cdots & \beta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta & \beta & \cdots & \alpha+\beta \end{pmatrix}$$

在 $U_{n\times n}$ 中记为 $V_{(n-1)\times(n-1)}$。容易验证

$$det(V_{(n-1)\times(n-1)} - \lambda Id_{(n-1)\times(n-1)}) = (\alpha-\lambda)^{n-2}(\alpha+(n-1)\beta-\lambda)$$

由归纳法可得。

因此，$\sigma_\xi(D(P-L_X)_{g_0})$ 的特征值为 $\alpha > 0$ 和 $\alpha+(n-1)\beta > 0$，其重数分别为 $^{n}{}_{(n+1)}{}_{2}$ ~~-1~~ 和 1。这意味着算子$D(P-L_X)_{g_0}$ 是强椭圆的。

我们得出结论：存在一个光滑解 $g(x,\ t)$，它满足带有初始度量 $g(\cdot,\ 0) = g_0$的 $(\alpha,\ \beta)$-Ricci-Yamabe 流（1.1），定义在 $M\times[0,\epsilon)$ 上，其中 $\epsilon > 0$。 □

3. Curvature evolution equations

本节中，我们计算光滑解 $g(x,\ t)$ 在 $(\alpha,\ \beta)$-Ricci-Yamabe 流（1.1）下的黎曼曲率Rm、里奇曲率 Ric 和标量曲率 R 的演化方程，正如 Hamilton [11] 在20世纪80年代对里奇流所做的那样。此外，我们证明了一些曲率条件在 $(\alpha,\ \beta)$-Ricci-Yamabe 流（1.1）下保持不变。

我们使用的记号与 Hamilton [11]中的记号一致。黎曼度量为 g_{ij} （分量中省略下标 x 和 t ），其逆为 g^{ij}。列维-奇维塔联络由克里斯托费尔符号给出

$$\Gamma_{ij}^{h}=\frac{1}{2}g^{hk}\big(\frac{\partial}{\partial x^{i}}g_{jk}+\frac{\partial}{\partial x^{j}}g_{ik}-\frac{\partial}{\partial x^{k}}g_{ij}\big).$$

黎曼曲率为

$$R_{ijk}^{h}=\frac{\partial}{\partial x^{i}}\Gamma_{jk}^{h}-\frac{\partial}{\partial x^{j}}\Gamma_{ik}^{h}+\Gamma_{ip}^{h}\Gamma_{jk}^{p}-\Gamma_{jp}^{h}\Gamma_{ik}^{p}$$

and

$$R_{ijkl}=g_{hk}R_{ijl}^{h}.$$

里奇曲率是缩并

$$R_{ik}=g^{jl}R_{ijkl},$$

而标量曲率为

$$R=g^{ij}R_{ij}.$$

Hamilton 引入的张量 [11]

$$B_{ijkl}=g^{pr}g^{qs}R_{piqj}R_{rksl}$$

满足以下对称性

$$B_{ijkl}=B_{jilk}=B_{klij}.$$

事实上，克里斯托费尔符号和标量曲率的演化方程可见 [4]。为完整起见，我们在本节给出详细证明。

以下两个公式与任何演化方程无关，由 Hamilton 在 [11] 中给出；它们是证明曲率演化方程所需的。

引理3.1（Hamilton [11]）。对于任意度量 g_{ij}，曲率张量 R_{ijkl} 满足恒等式

$$\begin{aligned}&\nabla_{i}\nabla_{k}R_{jl}-\nabla_{i}\nabla_{l}R_{jk}-\nabla_{j}\nabla_{k}R_{il}+\nabla_{j}\nabla_{l}R_{ik}\\&=\Delta R_{ijkl}+2(B_{ijkl}-B_{ijlk}-B_{iljk}+B_{ikjl})\\&\quad-g^{pq}(R_{pjkl}R_{qi}+R_{ipkl}R_{qj}),\end{aligned}\tag{3.1}$$

而张量 B_{ijkl} 满足恒等式

$$g^{jl}(B_{ijkl}-2B_{ijlk})=0.\tag{3.2}$$

定理 3.2. 黎曼曲率满足以下演化方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}R_{ijkl}&=\alpha\Delta R_{ijkl}+2\alpha(B_{ijkl}-B_{ijlk}-B_{iljk}+B_{ikjl})\\&\quad-\alpha g^{pq}(R_{pjkl}R_{qi}+R_{ipkl}R_{qj}+R_{ijpl}R_{qk}+R_{ijkp}R_{ql})\\&\quad+\frac{\beta}{2}(\nabla_{i}\nabla_{k}Rg_{jl}-\nabla_{i}\nabla_{l}Rg_{jk}-\nabla_{j}\nabla_{k}Rg_{il}+\nabla_{j}\nabla_{l}Rg_{ik})\\&\quad-\beta RR_{ijkl}.\end{aligned}\tag{3.3}$$

证明. 我们在任意固定的 (x,t) 处的正规坐标中计算这些公式。利用 (1.1)，可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^l_{jk} &= \frac{1}{2}(\nabla_j\frac{\partial}{\partial t}g_{kl}+\nabla_k\frac{\partial}{\partial t}g_{jl}-\nabla_l\frac{\partial}{\partial t}g_{jk})\\ &= -\alpha(\nabla_j R_{kl}+\nabla_k R_{jl}-\nabla_l R_{jk})\\ &\quad -\frac{\beta}{2}(\nabla_j Rg_{kl}+\nabla_k Rg_{jl}-\nabla_l Rg_{jk}).\end{aligned}\tag{3.4}$$

由 (3.4) 可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}R^h_{ijl} &= \nabla_i\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^h_{jl}-\nabla_j\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^h_{il}\\ &= -\alpha\nabla_i(\nabla_j R_{hl}+\nabla_l R_{hj}-\nabla_h R_{jl})\\ &\quad -\frac{\beta}{2}\nabla_i(\nabla_j Rg_{hl}+\nabla_l Rg_{hj}-\nabla_h Rg_{jl})\\ &\quad +\alpha\nabla_j(\nabla_i R_{hl}+\nabla_l R_{hi}-\nabla_h R_{il})\\ &\quad +\frac{\beta}{2}\nabla_j(\nabla_i Rg_{hl}+\nabla_l Rg_{hi}-\nabla_h Rg_{il})\\ &= -\alpha(R_{ijhp}R_{pl}+R_{ijlp}R_{ph})\\ &\quad +\alpha(\nabla_i\nabla_h R_{jl}-\nabla_i\nabla_l R_{hj}-\nabla_j\nabla_h R_{il}+\nabla_j\nabla_l R_{hi})\\ &\quad +\frac{\beta}{2}(\nabla_i\nabla_h Rg_{jl}-\nabla_i\nabla_l Rg_{hj}-\nabla_j\nabla_h Rg_{il}+\nabla_j\nabla_l Rg_{hi}).\end{aligned}\tag{3.5}$$

因此，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}R_{ijkl} &= (\frac{\partial}{\partial t}g_{hk})R^h_{ijl}+g_{hk}\frac{\partial}{\partial t}R^h_{ijl}\\ &= -2\alpha R_{pk}R_{ijpl}-\beta RR_{ijkl}-\alpha(R_{ijkp}R_{pl}-R_{ijpl}R_{pk})\\ &\quad +\alpha(\nabla_i\nabla_k R_{jl}-\nabla_i\nabla_l R_{kj}-\nabla_j\nabla_k R_{il}+\nabla_j\nabla_l R_{ik})\\ &\quad +\frac{\beta}{2}(\nabla_i\nabla_k Rg_{jl}-\nabla_i\nabla_l Rg_{jk}-\nabla_j\nabla_k Rg_{il}+\nabla_j\nabla_l Rg_{ik})\\ &= \alpha\Delta R_{ijkl}+2\alpha(B_{ijkl}-B_{ijlk}-B_{iljk}+B_{ikjl})\\ &\quad -\alpha(R_{pjkl}R_{pi}+R_{ipkl}R_{pj}+R_{ijpl}R_{pk}+R_{ijkp}R_{pl})\\ &\quad +\frac{\beta}{2}(\nabla_i\nabla_k Rg_{jl}-\nabla_i\nabla_l Rg_{jk}-\nabla_j\nabla_k Rg_{il}+\nabla_j\nabla_l Rg_{ik})\\ &\quad -\beta RR_{ijkl},\end{aligned}\tag{3.6}$$

其中，在第二个等式中用到了 (1.1) 和 (3.5)，在第二个等式中用到了 (3.1)。这就证明了 (3.3)。□

接下来，我们分别推导里奇曲率和标量曲率的演化方程。

定理 3.3. 里奇曲率满足以下演化方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}R_{ik} &= \alpha\Delta R_{ik}+2\alpha g^{pr}g^{qs}R_{piqk}R_{rs}-2\alpha g^{pq}R_{pi}R_{qk}\\ &\quad +\frac{\beta}{2}[(n-2)\nabla_i\nabla_k R+\Delta Rg_{ik}],\end{aligned}\tag{3.7}$$

而标量曲率满足

$$\frac{\partial}{\partial t}R=[\beta(n-1)+\alpha]\Delta R+2\alpha|Ric|^2+\beta R^2,\tag{3.8}$$

其中 $|Ric|^2 = g^{ik}g^{jl}R_{ij}R_{kl}$。

证明。由（1.1）可得

$$\frac{\partial}{\partial t}g^{ij} = -g^{ip}g^{jq}\frac{\partial}{\partial t}g_{pq} = 2\alpha g^{ip}g^{jq}R_{pq} + \beta R g^{ij}. \tag{3.9}$$

通过直接计算，我们有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}R_{ik} &= \frac{\partial}{\partial t}(g^{jl}R_{ijkl}) \\
&= -g^{pj}g^{ql}\big(\frac{\partial}{\partial t}g_{pq}\big)R_{ijkl} + g^{jl}\frac{\partial}{\partial t}R_{ijkl} \\
&= 2\alpha g^{pj}g^{ql}R_{pq}R_{ijkl} + \beta R R_{ik} \\
&\quad +\alpha\Delta R_{ik} + 2\alpha g^{jl}(B_{ijkl} - B_{ijlk} - B_{iljk} + B_{ikjl}) \\
&\quad -2\alpha g^{jl}g^{pq}R_{ipkl}R_{qj} - 2\alpha g^{pq}R_{pi}R_{qk} \\
&\quad +\frac{\beta}{2}(n\nabla_i\nabla_k R - 2\nabla_i\nabla_k R + \Delta R g_{ik}) - \beta R R_{ik} \\
&= \alpha\Delta R_{ik} + 2\alpha g^{jl}(B_{ijlk} - B_{iljk} + B_{ikjl}) \\
&\quad -2\alpha g^{pq}R_{pi}R_{qk} + \frac{\beta}{2}[(n-2)\nabla_i\nabla_k R + \Delta R g_{ik}] \\
&= \alpha\Delta R_{ik} + 2\alpha g^{pr}g^{qs}R_{piqk}R_{rs} - 2\alpha g^{pq}R_{pi}R_{qk} \\
&\quad +\frac{\beta}{2}[(n-2)\nabla_i\nabla_k R + \Delta R g_{ik}],
\end{aligned}$$

其中，第三个等式用到了（3.3）和（3.9），第四个等式用到了（3.2）。

类似地，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}R &= \frac{\partial}{\partial t}(g^{ik}R_{ik}) \\
&= -g^{pi}g^{qk}\big(\frac{\partial}{\partial t}g_{pq}\big)R_{ik} + g^{ik}\frac{\partial}{\partial t}R_{ik} \\
&= 2\alpha g^{pi}g^{qk}R_{pq}R_{ik} + \beta R^2 + \alpha\Delta R + 2\alpha g^{pr}g^{qs}R_{pq}R_{rs} \\
&\quad -2\alpha g^{ik}g^{pq}R_{pi}R_{qk} + \frac{\beta}{2}[(n-2)\Delta R + n\Delta R] \\
&= [\beta(n-1) + \alpha]\Delta R + 2\alpha|Ric|^2 + \beta R^2,
\end{aligned}$$

其中，第二个等式用到了（3.9），第三个等式用到了（3.7）。

证明至此完成。 □

作为（3.8）的应用，我们展示标量曲率下界如何在（α，β）-Ricci-Yamabe 流（1.1）中得以保持。

命题 3.4. 设 M 是一个 n 维（$n \geq 2$）闭黎曼流形，$g(x,t)$、$(x,t) \in M \times [0,T)$ 是满足 $\alpha > 0$ 和 $\beta > -\frac{\alpha}{n-1}$ 的（α,β）-Ricci-Yamabe 流（1.1）的极大光滑解。若对于某个常数 a，有 $R_{g(0)} \geq a$，则对任意 $t \in (0,T)$，均有 $R_{g(t)} \geq a$。特别地，若 $a > 0$，则 $T \leq {}^{n}{}_{(n-1)}{}_{(n-2)}\, a\alpha$。此外，若 $a = 0$，则对任意 $t \in (0,T)$，均有 $R_{g(t)} > 0$，或者在该流过程中 $Ric \equiv 0$。

证明。由（3.8）可得

$$\frac{\partial}{\partial t}R = [\beta(n-1) + \alpha]\Delta R + 2\alpha|Ric|^2 + \beta R^2$$

$$\geq [\beta(n-1)+\alpha]\Delta R + (\frac{2\alpha}{n}+\beta)R^2$$
$$> [\beta(n-1)+\alpha]\Delta R + \frac{(n-2)\alpha}{n(n-1)}R^2. \tag{3.10}$$

由于 $n \geq 2$ 且 $\beta(n-1)+\alpha > 0$, M 上的 R 的最小值满足

$$\frac{d}{dt}R_{\min} \geq \frac{(n-2)\alpha}{n(n-1)}R_{\min}^2 \geq 0 \text{ a.e.}, \tag{3.11}$$

这表明

$$R_{g(\cdot,t)} \geq R_{\min}(t) \geq R_{\min}(0) \geq a$$

对任意 $t \in [0,T)$ 。这就证明了第一个结果。

如果 $a > 0$, 我们可以将（3.11）改写为

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{R_{\min}} \leq -\frac{(n-2)\alpha}{n(n-1)}. \tag{3.12}$$

对（3.12）从 0 到 t 对任意 $0 < t < T$ 积分，并利用 $R_{\min}(0) \geq a$这一事实，可得

$$R_{\min}(t) \geq \frac{n(n-1)a}{n(n-1)-(n-2)a\alpha t},$$

因此， t 的任意性意味着最大存在时间 T 满足

$$T \leq \frac{n(n-1)}{(n-2)a\alpha}.$$

现在考虑 $R_{g(\cdot,0)} \geq 0$的情形。将强极大值原理应用于（3.10），可知 $R_{g(\cdot,t)} > 0$ 或 $R_{g(\cdot,t)} \equiv 0$ 对任意 $0 < t < T$均成立。在后一种情形下，（3.8）意味着 $Ric_{g(\cdot,t)} \equiv 0$。

证明到此完成。 □

当其存在时，关于 (1.1) 的平稳解有如下结果。

定理 3.5. 在α,β)-Ricci-Yamabe 流 (1.1) 作用于n维$(n \geq 3)$ 闭黎曼流形 M 上，若 $\alpha > 0$ 且 $\beta > -\frac{\alpha}{n-1}$, 则其平稳解必为里奇平坦。

证明。 设 g_∞ 为 (1.1) 的平稳解。则其里奇曲率和标量曲率满足

$$Ric_\infty = -\frac{\beta}{2\alpha}R_\infty g_\infty. \tag{3.13}$$

根据舒尔引理（例如参见 [31]), (M, g_∞) 必为爱因斯坦。假设$R_\infty \neq 0$，则

$$-\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{1}{n},$$

即,

$$\beta = -\frac{2\alpha}{n} < -\frac{\alpha}{n-1}$$

因为 $\alpha > 0$ 和 $n \geq 3$, 这就产生了矛盾。

因此，我们得出结论：(M, g_∞) 是里奇平坦的。 □

4. Derivative estimates for the Riemannian curvarure and long timeexistence I

本节中，我们证明，对于（1.1）的光滑解，只要黎曼曲率一致有界，其黎曼曲率的每阶协变导数就都有界。作为应用，我们证明了（1.2）的长期存在性定理（定理1.1）。

与 [35, 24, 19], 一样，我们采用标准的 $*$记号，即 $A*B$ 表示通过度量 $g(x,t)$对任意时变张量场 A 和 B 的张量积进行缩并所得的某个线性组合 $A\otimes B$。

因此，（3.3）和（3.4）可分别改写为

$$\frac{\partial}{\partial t}Rm=\alpha\Delta Rm-\beta R\cdot Rm+\alpha g^{-1}*g^{-1}*Rm*Rm+\beta\nabla^2R*g, \tag{4.1}$$

and

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma=g^{-1}*\nabla(\alpha g^{-1}*Rm+\beta Rg),$$

分别。

更一般地，时变张量场 A 满足

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\nabla A&=\nabla(\frac{\partial}{\partial t}A)+(\frac{\partial}{\partial t}\Gamma)*A\\&=\nabla(\frac{\partial}{\partial t}A)+g^{-1}*\nabla(\alpha g^{-1}*Rm+\beta Rg)*A,\end{aligned} \tag{4.2}$$

and

$$\nabla\Delta A=\Delta\nabla A+g^{-1}*g^{-1}*Rm*\nabla A+g^{-1}*g^{-1}*\nabla Rm*A. \tag{4.3}$$

接下来，我们证明黎曼曲率的 k 阶协变导数的演化方程。

命题 **4.1.** 对任意非负整数 k，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\nabla^kRm&=\alpha\Delta\nabla^kRm+\alpha\sum_{i+j=k}\nabla^iRm*\nabla^jRm*g^{-1}*g^{-1}\\&\quad+\beta\nabla^{k+2}R*g+\beta\sum_{i+j=k}\nabla^iRg*\nabla^jRm*g^{-1}\end{aligned} \tag{4.4}$$

and

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\nabla^kR&=[\beta(n-1)+\alpha](\Delta\nabla^kR+\sum_{i+j=k}\nabla^iRm*\nabla^jR*g^{-1}*g^{-1})\\&\quad+\alpha\sum_{i+j=k}\nabla^iRic*\nabla^jRic+\beta\sum_{i+j=k}\nabla^iR*\nabla^jR\end{aligned} \tag{4.5}$$

沿着 $(\alpha,\ \beta)$-Ricci-Yamabe 流 (1.1)。

证明. 我们用归纳法证明该结论。由于分别有 ($k=0$ 成立，因为 (3.3) 和 (3.8)。假设 (4.4) 和 (4.5) 对 $k=m>0$ 成立，我们需要证明它们对 $k=m+1$ 成立。

将 A 替换为 ∇^mRm，代入（4.2）和（4.3），并使用归纳假设，可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^{m+1}Rm=\nabla\Big(\alpha\Delta\nabla^mRm+\alpha\sum_{i+j=m}\nabla^iRm*\nabla^jRm*g^{-1}*g^{-1}$$

$$
\begin{aligned}
&+\beta\nabla^{m+2}R*g+\beta\sum_{i+j=m}\nabla^{i}Rg*\nabla^{j}Rm*g^{-1}\Big)\\
&+g^{-1}*\nabla(\alpha g^{-1}*Rm+\beta Rg)*\nabla^{m}Rm\\
=\;&\alpha\nabla\Delta\nabla^{m}Rm+\alpha\sum_{i+j=m+1}\nabla^{i}Rm*\nabla^{j}Rm*g^{-1}*g^{-1}\\
&+\beta\nabla^{m+3}R*g+\beta\sum_{i+j=m+1}\nabla^{i}Rg*\nabla^{j}Rm*g^{-1}\\
=\;&\alpha\Delta\nabla^{m+1}Rm+\alpha g^{-1}*g^{-1}*Rm*\nabla^{m+1}Rm\\
&+\alpha g^{-1}*g^{-1}*\nabla Rm*\nabla^{m}Rm+\alpha\sum_{i+j=m+1}\nabla^{i}Rm*\nabla^{j}Rm*g^{-1}*g^{-1}\\
&+\beta\nabla^{m+3}R*g+\beta\sum_{i+j=m+1}\nabla^{i}Rg*\nabla^{j}Rm*g^{-1}\\
=\;&\alpha\Delta\nabla^{m+1}Rm+\alpha\sum_{i+j=m+1}\nabla^{i}Rm*\nabla^{j}Rm*g^{-1}*g^{-1}\\
&+\beta\nabla^{m+3}R*g+\beta\sum_{i+j=m+1}\nabla^{i}Rg*\nabla^{j}Rm*g^{-1},
\end{aligned}
$$

由此得到 4.4）对 $k=m+1$成立。

同样，我们有

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\nabla^{m+1}R=\;&\nabla\Big\{[\beta(n-1)+\alpha](\Delta\nabla^{m}R+\sum_{i+j=m}\nabla^{i}Rm*\nabla^{j}R*g^{-1}*g^{-1})\\
&+\alpha\sum_{i+j=m}\nabla^{i}Ric*\nabla^{j}Ric+\beta\sum_{i+j=m}\nabla^{i}R*\nabla^{j}R\Big\}\\
&+g^{-1}*\nabla(\alpha g^{-1}*Rm+\beta Rg)*\nabla^{m}R\\
=\;&[\beta(n-1)+\alpha]\big(\Delta\nabla^{m+1}R+g^{-1}*g^{-1}*Rm*\nabla^{m+1}R\\
&+g^{-1}*g^{-1}*\nabla Rm*\nabla^{m}R+\sum_{i+j=m+1}\nabla^{i}Rm*\nabla^{j}R*g^{-1}*g^{-1}\big)\\
&+\alpha\sum_{i+j=m+1}\nabla^{i}Ric*\nabla^{j}Ric+\beta\sum_{i+j=m+1}\nabla^{i}R*\nabla^{j}R\\
=\;&[\beta(n-1)+\alpha](\Delta\nabla^{m+1}R+\sum_{i+j=m+1}\nabla^{i}Rm*\nabla^{j}R*g^{-1}*g^{-1})\\
&+\alpha\sum_{i+j=m+1}\nabla^{i}Ric*\nabla^{j}Ric+\beta\sum_{i+j=m+1}\nabla^{i}R*\nabla^{j}R
\end{aligned}
$$

从而得到（4.5），其中 $k=m+1$。 □

引理 4.2。对于任意非负整数 k，我们有

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}|\nabla^{k}Rm|^{2}\\
\le\;&\alpha\Delta|\nabla^{k}Rm|^{2}-2\alpha|\nabla^{k+1}Rm|^{2}+\alpha\sum_{i+j=k}|\nabla^{i}Rm|\cdot|\nabla^{j}Rm|\cdot|\nabla^{k}Rm|\\
&+|\beta|C_{k}|\nabla^{k+2}R|\cdot|\nabla^{k}Rm|+|\beta|C_{k}\sum_{i+j=k}|\nabla^{i}R|\cdot|\nabla^{j}Rm|\cdot|\nabla^{k}Rm| \qquad (4.6)
\end{aligned}
$$

and

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}|\nabla^k R|^2\\ \leq\ & [\beta(n-1)+\alpha]\Delta|\nabla^k R|^2 - 2[\beta(n-1)+\alpha]|\nabla^{k+1}R|^2\\ &+(\alpha+|\beta|)C_k\sum_{i+j=k}|\nabla^i Rm|\cdot|\nabla^j Rm|\cdot|\nabla^k R| \end{aligned}\tag{4.7}$$

在 $(\alpha,\ \beta)$-Ricci-Yamabe 流 (1.1) 中，$\alpha>0$ 且 $\beta>-\frac{\alpha}{n-1}$，其中 C_k 是仅依赖于 n和 k的正常数。

证明。直接计算可得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}|\nabla^k Rm|^2\\ \leq\ & C_k|\alpha Ric+\beta Rg|\cdot|\nabla^k Rm|^2+2\langle\nabla^k Rm,\frac{\partial}{\partial t}\nabla^k Rm\rangle\\ \leq\ & \alpha C_k|Ric|\cdot|\nabla^k Rm|^2+|\beta|C_k|R|\cdot|\nabla^k Rm|^2+2\alpha\langle\nabla^k Rm,\Delta\nabla^k Rm\rangle\\ &+\alpha C_k\sum_{i+j=k}|\nabla^i Rm|\cdot|\nabla^j Rm|\cdot|\nabla^k Rm|\\ &+|\beta|C_k|\nabla^{k+2}R|\cdot|\nabla^k Rm|+|\beta|C_k\sum_{i+j=k}|\nabla^i R|\cdot|\nabla^j Rm|\cdot|\nabla^k Rm|\\ \leq\ & \alpha\Delta|\nabla^k Rm|^2-2\alpha|\nabla^{k+1}Rm|^2+\alpha C_k\sum_{i+j=k}|\nabla^i Rm|\cdot|\nabla^j Rm|\cdot|\nabla^k Rm|\\ &+|\beta|C_k|\nabla^{k+2}R|\cdot|\nabla^k Rm|+|\beta|C_k\sum_{i+j=k}|\nabla^i R|\cdot|\nabla^j Rm|\cdot|\nabla^k Rm|,\end{aligned}$$

其中，第一个不等式用到了（1.1），第二个不等式用到了（4.4）。这就证明了（4.6）。

类似地，利用（1.1）、（4.5）和柯西不等式，可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}|\nabla^k R|^2 &\leq C_k|\alpha Ric+\beta Rg|\cdot|\nabla^k R|^2+2\langle\nabla^k R,\frac{\partial}{\partial t}\nabla^k R\rangle\\ &\leq \alpha C_k|Ric|\cdot|\nabla^k R|^2+|\beta|C_k|R|\cdot|\nabla^k R|^2\\ &\quad+2[\beta(n-1)+\alpha]\langle\nabla^k R,\Delta\nabla^k R\rangle\\ &\quad+(\alpha+|\beta|)C_k\sum_{i+j=k}|\nabla^i Rm|\cdot|\nabla^j R|\cdot|\nabla^k R|\\ &\quad+\alpha C_k\sum_{i+j=k}|\nabla^i Ric|\cdot|\nabla^j Ric|\cdot|\nabla^k R|\\ &\quad+|\beta|C_k\sum_{i+j=k}|\nabla^i R|\cdot|\nabla^j R|\cdot|\nabla^k R|\\ &\leq [\beta(n-1)+\alpha]\Delta|\nabla^k R|^2-2[\beta(n-1)+\alpha]|\nabla^{k+1}R|^2\\ &\quad+(\alpha+|\beta|)C_k\sum_{i+j=k}|\nabla^i Rm|\cdot|\nabla^j Rm|\cdot|\nabla^k R|,\end{aligned}$$

由此得到（4.7）。 □

接下来我们证明，若黎曼曲率一致有界，则黎曼曲率和标量曲率的导数的所有 L^2-范数均有界

。这些论证受到 Shi 关于里奇流曲率估计的启发， [35] 以及 Li、Yuan 和 Z hang 关于 K¨ahler 流形上的几何流的研究的启发。 [24]以下解析结果是必要的。

命题 4.3（Catino 等人 [4]）。设 $k \in \mathbb{N}$, $p \in [1, +\infty]$ 和 $q \in [1, +\infty)$。存在常数 $C(n, k, p, q)$，使得对于所有 $0 \le j \le k$ 以及所有张量 T

$$\|\nabla^j T\|_{r_j} \le C\|T\|_p^{1-j/k}\|\nabla^k T\|_q^{j/k},$$

其中 $1/r_j = (1 - j/k)/p + j/k/q$。

定理 4.4。设 $g(t)$ 是 (α, β)-Ricci-Yamabe 流 (1.1) 的光滑解，且 $\alpha > 0$ 并且 $\beta > -\frac{\alpha}{n-1}$ 在一个 n 维闭黎曼流形上。若

$$|Rm| \le K$$

在 $M \times [0, a/K]$ 上对某些正数 a 和 K成立，则对每个正整数k，存在一个非负常数 B_k ，它仅依赖于 $k, n, \alpha, \beta, a, K$和 $Vol_{g(0)}(M)$，使得

$$\|\nabla^k Rm\|_2^2 + \|\nabla^{k+1} R\|_2^2 \le \frac{B_k}{t^k} \tag{4.8}$$

对所有 $t \in [0, a/K]$，在 M 上。这里

$$\|A\|_p := \Big(\int_M |A|^2 dVol_{g(t)}\Big)^{\frac{1}{p}}$$

对于任意依赖时间的 L^p 函数 A，定义在 M 上且满足 $1 \le p < \infty$。

证明。 我们逐步推导（4.8）。首先，我们考虑 $k = 1$ 的情形。定义

$$u_0 = t(\|Rm\|_2^2 + \|\nabla R\|_2^2) + A_0\|R\|_2^2$$

其中 A_0 是一个待定的正数。我们需要计算 $\frac{du_0}{dt}$。由 (1.1) 可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}dVol_{g(t)} &= \frac{1}{2}g^{ij}\frac{\partial}{\partial t}g_{ij}dVol_{g(t)} \\ &= -(\alpha + \frac{n\beta}{2})RdVol_{g(t)} \\ &\le (n\alpha + \frac{n^2}{2}|\beta|)KdVol_{g(t)},\end{aligned} \tag{4.9}$$

即,

$$\frac{d}{dt}\ln dVol_{g(t)} \le (n\alpha + \frac{n^2}{2}|\beta|)K. \tag{4.10}$$

对（4.10）从 0 积分至 t，可得

$$Vol_{g(t)}(M) \le Vol_{g(0)}(M) \cdot \exp\{(n\alpha + \frac{n^2}{2}|\beta|)Kt\}. \tag{4.11}$$

引理 4.2意味着

$$\frac{\partial}{\partial t}|Rm|^2 \le \alpha\Delta|Rm|^2 - 2\alpha|\nabla Rm|^2 + (\alpha + |\beta|)C_0K^3 + |\beta|C_0K|\nabla^2 R|, \tag{4.12}$$

and

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}|\nabla R|^2 \\ &\le [\beta(n-1) + \alpha]\Delta|\nabla R|^2 - 2[\beta(n-1) + \alpha]|\nabla^2 R|^2\end{aligned}$$

$$+(\alpha+|\beta|)C_1K|\nabla Rm|\cdot|\nabla R|. \tag{4.13}$$

因此，

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_M t|Rm|^2dVol_{g(t)}\\
&=\int_M|Rm|^2dVol_{g(t)}+\int_M t\frac{\partial}{\partial t}|Rm|^2dVol_{g(t)}+\int_M t|Rm|^2\frac{d}{dt}dVol_{g(t)}\\
&\le K^2Vol_{g(t)}(M)-2\alpha t\int_M|\nabla Rm|^2dVol_{g(t)}+(\alpha+|\beta|)C_0K^3tVol_{g(t)}(M)\\
&\quad+|\beta|C_0Kt\int_M|\nabla^2R|dVol_{g(t)},
\end{aligned}\tag{4.14}$$

其中用到了（4.9）、（4.12）和斯托克斯公式，并且

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_M t|\nabla R|^2dVol_{g(t)}\\
&=\int_M|\nabla R|^2dVol_{g(t)}+\int_M t\frac{\partial}{\partial t}|\nabla R|^2dVol_{g(t)}+\int_M t|\nabla R|^2\frac{d}{dt}dVol_{g(t)}\\
&\le\int_M|\nabla R|^2dVol_{g(t)}-2[\beta(n-1)+\alpha]t\int_M|\nabla^2R|^2dVol_{g(t)}\\
&\quad+(\alpha+|\beta|)C_1Kt\int_M|\nabla Rm|\cdot|\nabla R|dVol_{g(t)},
\end{aligned}\tag{4.15}$$

其中用到了（4.9）和（4.13），以及斯托克斯公式。

此外，由（3.8）可得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}R^2&=[\beta(n-1)+\alpha](\Delta R^2-2|\nabla R|^2)+4\alpha R|Ric|^2+2\beta R^3\\
&\le[\beta(n-1)+\alpha](\Delta R^2-2|\nabla R|^2)+(\alpha+|\beta|)C_0K^3.
\end{aligned}$$

结合（4.9）并利用斯托克斯公式，可得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\int_M A_0R^2dVol_{g(t)}&\le-2[\beta(n-1)+\alpha]A_0\int_M|\nabla R|^2dVol_{g(t)}\\
&\quad+(\alpha+|\beta|)C_0K^3A_0Vol_{g(t)}(M).
\end{aligned}\tag{4.16}$$

因此，（4.14）、（4.15）与（4.16）共同给出

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}u_0\le&-2\alpha t\int_M|\nabla Rm|^2dVol_{g(t)}+(\alpha+|\beta|)C_1Kt\int_M|\nabla Rm|\cdot|\nabla R|dVol_{g(t)}\\
&+|\beta|C_0Kt\int_M|\nabla^2R|dVol_{g(t)}-2[\beta(n-1)+\alpha]t\int_M|\nabla^2R|^2dVol_{g(t)}\\
&+[1-2(\beta(n-1)+\alpha)A_0]\int_M|\nabla R|^2dVol_{g(t)}\\
&+[(\alpha+|\beta|)C_0K^3(t+A_0)+K^2]Vol_{g(t)}(M).
\end{aligned}\tag{4.17}$$

根据柯西不等式和 $t\le a/K$ 这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}
&-2\alpha t\int_M|\nabla Rm|^2dVol_{g(t)}+(\alpha+|\beta|)C_1Kt\int_M|\nabla Rm|\cdot|\nabla R|dVol_{g(t)}\\
&\le\frac{(\alpha+|\beta|)^2}{\alpha}C_1K^2t\int_M|\nabla R|^2dVol_{g(t)}
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{(\alpha+|\beta|)^2}{\alpha} C_1 aK \int_M |\nabla R|^2 dVol_{g(t)}, \tag{4.18}$$

and

$$\begin{aligned} &|\beta| C_0 Kt \int_M |\nabla^2 R| dVol_{g(t)} - 2[\beta(n-1)+\alpha]t \int_M |\nabla^2 R|^2 dVol_{g(t)} \\ &\leq \frac{\beta^2 C_0 K^2 t}{\beta(n-1)+\alpha} Vol_{g(t)}(M) \leq \frac{\beta^2 C_0 aK}{\beta(n-1)+\alpha} Vol_{g(t)}(M). \end{aligned} \tag{4.19}$$

将（4.18）和（4.19）代入（4.17），然后利用 $t \leq a/K$ 和（4.11），可得

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} u_0 \\ &\leq [1 + \frac{(\alpha+|\beta|)^2}{\alpha} C_1 aK - 2(\beta(n-1)+\alpha)A_0] \int_M |\nabla R|^2 dVol_{g(t)} \\ &\quad + \{(\alpha+|\beta|)C_0(aK^2 + A_0 K^3) + K^2 + \frac{\beta^2 C_0 aK}{\beta(n-1)+\alpha}\} \\ &\quad \times \exp\{(n\alpha + \frac{n^2}{2}|\beta|)a\} Vol_{g(0)}(M). \end{aligned} \tag{4.20}$$

取

$$A_0 = [2\beta(n-1)+2\alpha]^{-1}[1 + \frac{(\alpha+|\beta|)^2}{\alpha} C_1 a + C_1 \alpha a K], \tag{4.21}$$

则（4.20）右端的第一项消失。对于任意的 $0 < t \leq a/K$，将（4.20）从 0 积分到 t，可得 $u_0 \leq B_0 t$ 其中某个常数 B_0仅依赖于 n， α， β， a， K 以及 $Vol_{g(0)}(M)$。此外，

$$\|Rm\|_2^2 + \|\nabla R\|_2^2 \leq B_0. \tag{4.22}$$

接下来，我们基于（ $\|\nabla Rm\|_2^2 + \|\nabla^2 R\|_2^2$ ）估计 4.22。定义

$$u_1 = t^2(\|\nabla Rm\|_2^2 + \|\nabla^2 R\|_2^2) + A_1 t(\|Rm\|_2^2 + \|\nabla R\|_2^2) + A_0 \|R\|_2^2,$$

其中 A_0 在（4.21）中定义，且 A_1 是一个稍后确定的正数。

然后我们计算 $\frac{du_1}{dt}$。由引理 4.2、(4.9) 和斯托克斯公式可得

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} \int_M t^2 |\nabla Rm|^2 dVol_{g(t)} \\ &\leq -2\alpha t^2 \int_M |\nabla^2 Rm|^2 dVol_{g(t)} + (\alpha+|\beta|)C_1 Kt^2 \int_M |\nabla Rm|^2 dVol_{g(t)} \\ &\quad + |\beta| C_1 t^2 \int_M |\nabla^3 R| \cdot |\nabla Rm| dVol_{g(t)} + 2t \int_M |\nabla Rm|^2 dVol_{g(t)}, \end{aligned} \tag{4.23}$$

and

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} \int_M t^2 |\nabla^2 R|^2 dVol_{g(t)} \\ &\leq -2[\beta(n-1)+\alpha]t^2 \int_M |\nabla^3 R|^2 dVol_{g(t)} + (\alpha+|\beta|)C_2 Kt^2 \int_M |\nabla^2 Rm| \cdot |\nabla^2 R| dVol_{g(t)} \\ &\quad + (\alpha+|\beta|)C_2 t^2 \int_M |\nabla Rm|^2 \cdot |\nabla^2 R| dVol_{g(t)} + 2t \int_M |\nabla^2 R|^2 dVol_{g(t)}. \end{aligned} \tag{4.24}$$

将 (4.14)、(4.15)、(4.16)、(4.23) 与 (4.24) 结合起来，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}u_1\\
\leq\ & -2\alpha t^2\int_M|\nabla^2Rm|^2dVol_{g(t)}+(\alpha+|\beta|)C_2Kt^2\int_M|\nabla^2Rm|\cdot|\nabla^2R|dVol_{g(t)}\\
&+|\beta|C_1t^2\int_M|\nabla^3R|\cdot|\nabla Rm|dVol_{g(t)}-2[\beta(n-1)+\alpha]t^2\int_M|\nabla^3R|^2dVol_{g(t)}\\
&+(\alpha+|\beta|)C_1t^2\int_M|\nabla Rm|^2|\nabla^2R|dVol_{g(t)}+A_1(\alpha+|\beta|)C_1Kt\int_M|\nabla Rm|\cdot|\nabla R|dVol_{g(t)}\\
&+A_1|\beta|C_0Kt\int_M|\nabla^2R|dVol_{g(t)}+[(\alpha+|\beta|)C_1Kt^2+2t-2A_1\alpha t]\\
&\times\int_M|\nabla Rm|^2dVol_{g(t)}+2[1-A_1(\beta(n-1)+\alpha)]t\int_M|\nabla^2R|^2dVol_{g(t)}\\
&+[A_1(\alpha+|\beta|)C_1Kt+A_1-2(\beta(n-1)+\alpha)A_0]\int_M|\nabla R|^2Vol_{g(t)}\\
&+[(\alpha+|\beta|)C_0K^3(A_1t+A_0)+A_1K^2]Vol_{g(t)}(M).
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

接下来，我们处理式（4.25）的右端。

由柯西不等式可得

$$
\begin{aligned}
&-2\alpha t^2\int_M|\nabla^2Rm|^2dVol_{g(t)}+(\alpha+|\beta|)C_2Kt^2\int_M|\nabla^2Rm|\cdot|\nabla^2R|dVol_{g(t)}\\
\leq\ &\frac{(\alpha+|\beta|)^2C_2K^2t^2}{\alpha}\int_M|\nabla^2R|^2dVol_{g(t)},
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

$$
\begin{aligned}
&|\beta|C_1t^2\int_M|\nabla^3R|\cdot|\nabla Rm|dVol_{g(t)}-2[\beta(n-1)+\alpha]t^2\int_M|\nabla^3R|^2dVol_{g(t)}\\
\leq\ &\frac{\beta^2C_1t^2}{\beta(n-1)+\alpha}\int_M|\nabla Rm|^2dVol_{g(t)},
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

$$
\begin{aligned}
&A_1(\alpha+|\beta|)C_1Kt\int_M|\nabla Rm|\cdot|\nabla R|dVol_{g(t)}\\
\leq\ &A_1(\alpha+|\beta|)C_1t\int_M|\nabla Rm|^2dVol_{g(t)}\\
&+A_1(\alpha+|\beta|)C_1K^2t\int_M|\nabla R|^2dVol_{g(t)},
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&A_1|\beta|C_0Kt\int_M|\nabla^2R|dVol_{g(t)}\\
\leq\ &A_1[\beta(n-1)+\alpha]t\int_M|\nabla^2R|^2dVol_{g(t)}+\frac{A_1\beta^2C_0K^2t}{\beta(n-1)+\alpha}Vol_{g(t)}(M).
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

此外，

$$
\begin{aligned}
&(\alpha+|\beta|)C_2t^2\int_M|\nabla Rm|^2|\nabla^2R|dVol_{g(t)}\\
\leq\ &(\alpha+|\beta|)C_2t^2\|\nabla Rm\|_4^2\cdot\|\nabla^2R\|_2\\
\leq\ &(\alpha+|\beta|)C_2t^2\|Rm\|_\infty\cdot\|\nabla^2Rm\|_2\cdot\|\nabla^2R\|_2
\end{aligned}
$$

$$\leq \alpha t^2 \int_M |\nabla^2 Rm|^2 dVol_{g(t)} + \frac{(\alpha+|\beta|)^2 C_2 K^2 t^2}{\alpha} \int_M |\nabla^2 R|^2 dVol_{g(t)}, \quad (4.30)$$

其中，在第一个不等式中我们使用了 H¨older 不等式，命题4.3 通过取$j=1,\ \ k=2,$ $p=\infty$ 以及 $q=2$ 在第二个不等式中使用了柯西不等式来得到最后一个不等式。

将（4.26）代入（4.30），再代入（4.25），并整理可得

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}u_1\\
&\leq \|\nabla Rm\|_2^2\big[(\alpha+|\beta|)C_1Kt+2+\frac{\beta^2C_1t}{\beta(n-1)+\alpha}-A_1(\alpha+|\beta|)\big]t\\
&\quad+\|\nabla^2R\|_2^2\big[\frac{(\alpha+|\beta|)^2C_2K^2t}{\alpha}+2-A_1(\beta(n-1)+\alpha)\big]t\\
&\quad+\|\nabla R\|_2^2[A_1(\alpha+|\beta|)C_1K(K+1)t+A_1-2(\beta(n-1)+\alpha)A_0]\\
&\quad+Vol_{g(t)}(M)\big[(\alpha+|\beta|)C_0K^3(A_1t+A_0)+A_1K^2+\frac{A_1\beta^2C_0K^2t}{\beta(n-1)+\alpha}\big]. \quad (4.31)
\end{aligned}$$

取

$$A_1 := \max\{C_1a+\frac{2}{\alpha+|\beta|}+\frac{\beta^2C_1a}{K[\beta(n-1)+\alpha](\alpha+|\beta|)}, \frac{(\alpha+|\beta|)^2C_2Ka}{\alpha[\beta(n-1)+\alpha]}+\frac{2}{\beta(n-1)+\alpha}\}.$$

将（4.22）应用于（4.31），并再次利用 $t\leq a/K$ 和（4.11），可得

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}u_1\\
&\leq B_0A_1[(\alpha+|\beta|)C_1(K+1)a+1]+Vol_{g(0)}(M)\exp\{(n\alpha+\frac{n^2}{2}|\beta|)a\}\\
&\quad\times\big[(\alpha+|\beta|)C_0K^2(A_1a+A_0K)+A_1K^2+\frac{A_1\beta^2C_0Ka}{\beta(n-1)+\alpha}\big]. \quad (4.32)
\end{aligned}$$

对于任意 $0<t\leq a/K$，将（4.32）从 0 积分到 t 可得 $u_1\leq B_1t$ 其中常数 B_1 仅依赖于 n、 α、 β、 a、 K 和 $Vol_{g(0)}(M)$。此外，

$$\|\nabla Rm\|_2^2+\|\nabla^2R\|_2^2\leq\frac{B_1}{t}. \quad (4.33)$$

定义

$$u_2 := t^3(\|\nabla^2Rm\|_2^2+\|\nabla^3R\|_2^2)+\sum_{i=0}^{2}A_it^i(\|\nabla^{i-1}Rm\|_2^2+\|\nabla^iR\|_2^2).$$

利用（4.22）、（4.33）以及类似于（4.25）、（4.31）的推理，可以估计 $\frac{du_2}{dt}$，进而得到

$$\|\nabla^2Rm\|_2^2+\|\nabla^3R\|_2^2\leq\frac{B_2}{t^2}$$

对于某个常数 B_2，它仅取决于 n、 α、 β、 a、 K 和 $Vol_{g(0)}(M)$。

逐步重复这一过程，我们得出 (4.8) 对每个正整数k。□

在本节余下部分，我们证明流（1.1）下黎曼曲率的导数估计。

定理 4.5。 设 $g(t)$ 是 (α,β)-Ricci-Yamabe 流 (1.1)的一个光滑解，其中 $\alpha>0$ 且 $\beta>-\frac{\alpha}{n-1}$ 定义在一个 n 维闭黎曼流形上。如果

$$|Rm|\leq K$$

在 $M\times[0,a/K]$ 上，对于某些正常数 a 和 K，那么对于每个正整数k，存在一个非负常数 B_k，它仅依赖于 k、 n、 α、 β、 a、 K 和 $Vol_{g(0)}(M)$，使得

$$\sup_M|\nabla^k Rm|\leq\frac{\bar{B}_k}{t^{\frac{k+1}{2}}}. \tag{4.34}$$

证明。 对于任意给定的 $k\geq1$，选取整数 $s=\lceil\frac{n(k+1)}{2}\rceil$，使其为大于 $\frac{n(k+1)}{2}$ 的最小整数。取 $p=\infty$和 $q=2$ 代入命题4.3，然后利用定理 4.4中的事实

$$\|\nabla^s Rm\|_2^2\leq\frac{B_s}{t^s},$$

我们有

$$\|\nabla^{k+1}Rm\|_{\frac{2s}{k+1}}\leq C_kK^{1-\frac{k+1}{s}}\|\nabla^s Rm\|_2^{\frac{k+1}{s}}\leq C_kK^{1-\frac{k+1}{s}}\big(\frac{B_s}{t^s}\big)^{\frac{k+1}{2s}}. \tag{4.35}$$

根据 Sobolev 嵌入定理（例如参见[18]中的定理 11.1.1），我们知道

$$\sup_M|\nabla^k Rm|\leq C_kVol_{g(t)}(M)^{\frac{1}{n}-\frac{k+1}{2s}}\|\nabla|\nabla^k Rm|\|_{\frac{2s}{k+1}}.$$

注意

$$2|\nabla^k Rm|\cdot|\nabla|\nabla^k Rm||=|\nabla|\nabla^k Rm|^2|\leq2|\nabla^k Rm|\cdot|\nabla^{k+1}Rm|,$$

也就是说，

$$|\nabla|\nabla^k Rm||\leq|\nabla^{k+1}Rm|.$$

因此，

$$\begin{aligned}\sup_M|\nabla^k Rm|&\leq C_kVol_{g(t)}(M)^{\frac{1}{n}-\frac{k+1}{2s}}\|\nabla^{k+1}Rm\|_{\frac{2s}{k+1}}\\&\leq C_kVol_{g(0)}(M)^{\frac{1}{n}-\frac{k+1}{2s}}\cdot\exp\{(\frac{1}{n}-\frac{k+1}{2s})(n\alpha+\frac{n^2}{2}|\beta|)Kt\}\\&\quad\times K^{1-\frac{k+1}{s}}\big(\frac{B_s}{t^s}\big)^{\frac{k+1}{2s}}\\&\leq\frac{\bar{B}_k}{t^{\frac{k+1}{2}}},\end{aligned} \tag{4.36}$$

其中我们在第二个不等式中使用了（4.11）和（4.35）以及 $Kt\leq a$。

证明至此完成。 □

现在借助定理1.2 和定理4.5，我们可以证明定理。

定理**1.2**的证明：我们通过反证法证明该结论。若 $T<\infty$ 是光滑解 $g(x,t)$在（α, β)-Ricci-Yamabe 流（1.1）的最大存在时间，并且

$$\sup_{M\times[0,T)}|Rm|<\infty.$$

根据定理 4.5，我们知道，沿此流演化时，黎曼曲率的所有协变导数都保持一致有界。因此， $g(\cdot,\ t)$ 光滑收敛到完备极限度量 $g(\cdot,\ T)$。随后，可从该度量重新启动流（1.1）

新的初始度量 $g(\cdot,\ T)$，依据短时存在性结果定理 1.1，这与有限的 T 是最大存在时间相矛盾。

这就证明了该定理。 □

5. Local curvature estimates and long time existence II

受 Kotschwat-Munteanu-Wang 关于里奇流的研究以及 Li-Yuan 对 [19] 的研究启发，[23] 我们证明，对于 (κ-LYZ 流的光滑解，在给定测地球上的黎曼曲率张量范数上界，可以根据初始时刻该球上的局部 α 范数以及里奇曲率和标量曲率二阶导数的统一局部界，进行局部显式估计。β1.1 L^∞

设 $g(x,t)$，$t\in[0,T']$ 是满足 α,β 的 (1.1) Ricci-Yamabe 流的光滑解，且 $0<\alpha\leq 1$，并且 $\beta>-\frac{\alpha}{n-1}$ 定义在 n维闭黎曼流形M 上。

按照 [19, 23], 中的方法，不失一般性地假设 M 是一个光滑完备流形，且

$$|Ric|+|\nabla^2 R|\leq L \tag{5.1}$$

在 $\Omega\times[0,T']$ 上，其中 $\Omega=B_{g(0)}(x_0,\rho/\sqrt{L})\subset\subset M^n$ 是初始度量下的一个开测地球，对于 $x_0\in M$ 以及正常数 L 和 ρ。

取截断函数

$$\phi(x)=\Big(\frac{\rho/\sqrt{L}-d_{g(0)}(x_0,x)}{\rho/\sqrt{L}}\Big)_+ \tag{5.2}$$

该函数是 Lipschitz 函数，支集为 $\overline{B_{g_0}(x_0,\rho/\sqrt{L})}$。

在本小节中，用 c 表示一个仅依赖于 n 和 p 的普适正常数。

下面，我们计算一些必要的微分不等式。

命题 5.1. 对于任意 $p\geq 3$，我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha}{L}\int_M|\nabla Ric|^2|Rm|^{p-1}\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
\leq&-\frac{3}{2L}\cdot\frac{d}{dt}\int_M|Ric|^2|Rm|^{p-1}\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
&+\frac{(\alpha+|\beta|)^2cL}{\alpha}\int_M|\nabla Rm|^2|Rm|^{p-3}\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
&+\frac{(\alpha+|\beta|)^2cL}{\alpha}\int_M|Rm|^{p-1}|\nabla\phi|^2\phi^{2p-2}dVol_{g(t)}\\
&+(\alpha+|\beta|)cL\int_M|Rm|^p\phi^{2p}dVol_{g(t)}.
\end{aligned}\tag{5.3}$$

证明。在 $\Omega\times[0,T]$ 上直接计算可得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|Ric|^2&=g^{ia}g^{kb}\Big(\frac{\partial}{\partial t}R_{ik}\Big)R_{ab}+g^{ie}g^{la}(2\alpha R_{le}+\beta Rg_{le})g^{kb}R_{ik}R_{ab}\\
&=\alpha g^{ia}g^{kb}R_{ab}\Delta R_{ik}+2\alpha g^{ia}g^{je}g^{kb}g^{ld}R_{ijkl}R_{ab}R_{de}\\
&\quad-2\alpha g^{ja}g^{li}g^{bk}R_{jl}R_{ab}R_{ik}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\beta}{2}[(n-2)g^{ia}g^{kb}R_{ik}\nabla_a\nabla_b R+R\Delta R]\\
&+2\alpha g^{ja}g^{li}g^{bk}R_{jl}R_{ab}R_{ik}+\beta R|Ric|^2\\
\leq\ &\frac{\alpha}{2}\Delta|Ric|^2-\alpha|\nabla Ric|^2+\alpha cL^2|Rm|\\
&+|\beta|c\nabla^2 R*Ric+\frac{\beta}{2}R\Delta R,
\end{aligned}\tag{5.4}
$$

其中，第一个等式中使用了（3.9），第二个等式中使用了（3.7）。此外，在最后一个不等式中使用了柯西不等式以及 $|Ric|\leq L$ 这一事实。重新整理可得

$$
\begin{aligned}
\alpha|\nabla Ric|^2\leq\ &\frac{\alpha}{2}\Delta|Ric|^2-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|Ric|^2+\alpha cL^2|Rm|\\
&+|\beta|c\nabla^2 R*Ric+\frac{\beta}{2}R\Delta R.
\end{aligned}\tag{5.5}
$$

同样，我们可以由（3.3）推导出

$$
\alpha|\nabla Rm|^2\leq\frac{\alpha}{2}\Delta|Rm|^2-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|Rm|^2+(\alpha+|\beta|)c|Rm|^3+2|\beta|\cdot|\nabla^2 R|\cdot|Ric|.\tag{5.6}
$$

此外，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}|Rm|^2&=\frac{\partial}{\partial t}(g^{ia}g^{jb}g^{ld}g_{kc}R^k_{ijl}R^c_{abd})\\
&\leq(\alpha+|\beta|)c(\nabla^2 Ric*Rm+\nabla^2 R*Ric+Ric*Rm*Rm),
\end{aligned}\tag{5.7}
$$

其中用到了（1.1）、（3.5）和（3.9）。

由（5.5）可知

$$
\begin{aligned}
&\frac{\alpha}{L}\int_M|\nabla Ric|^2|Rm|^{p-1}\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
\leq\ &\frac{\alpha}{2L}\int_M(\Delta|Ric|^2)|Rm|^{p-1}\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
&+\frac{|\beta|}{L}\int_M(\nabla^2 R*Ric)|Rm|^{p-1}\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
&+\frac{\beta}{2L}\int_M R\Delta R|Rm|^{p-1}\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
&-\frac{1}{2L}\int_M(\frac{\partial}{\partial t}|Ric|^2)|Rm|^{p-1}\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
&+\alpha cL\int_M|Rm|^p\phi^{2p}dVol_{g(t)}.
\end{aligned}\tag{5.8}
$$

分部积分后，再利用柯西不等式可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{\alpha}{2L}\int_M(\Delta|Ric|^2)|Rm|^{p-1}\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
&+\frac{|\beta|}{L}\int_M(\nabla^2 R*Ric)|Rm|^{p-1}\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
&+\frac{\beta}{2L}\int_M R\Delta R|Rm|^{p-1}\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
=\ &-\frac{\alpha}{2L}\int_M\langle\nabla|Ric|^2,\nabla|Rm|^{p-1}\rangle\phi^{2p}dVol_{g(t)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\alpha}{2L}\int_M \langle\nabla|Ric|^2,\nabla(\phi^{2p})\rangle|Rm|^{p-1}\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
&+\frac{|\beta|}{L}\int_M (\nabla R * \nabla Ric)|Rm|^{p-1}\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
&+\frac{|\beta|}{L}\int_M (\nabla R * Ric * \nabla|Rm|^{p-1})\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
&+\frac{|\beta|}{L}\int_M (\nabla R * Ric * \nabla(\phi^{2p}))|Rm|^{p-1}dVol_{g(t)}\\
&-\frac{\beta}{2L}\int_M |\nabla R|^2|Rm|^{p-1}\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
&-\frac{\beta}{2L}\int_M R\langle\nabla R,\nabla|Rm|^{p-1}\rangle\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
&-\frac{\beta}{2L}\int_M R\langle\nabla R,\nabla(\phi^{2p})\rangle|Rm|^{p-1}dVol_{g(t)}\\
\le\ &(\alpha+|\beta|)c\int_M |\nabla Ric|\cdot|\nabla Rm|\cdot|Rm|^{p-2}\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
&+(\alpha+|\beta|)c\int_M |\nabla Ric|\cdot|\nabla\phi|\cdot|Rm|^{p-1}\phi^{2p-1}dVol_{g(t)}\\
\le\ &\frac{\alpha}{3L}\int_M |\nabla Ric|^2|Rm|^{p-1}\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
&+\frac{(\alpha+|\beta|)^2cL}{\alpha}\int_M |\nabla Rm|^2|Rm|^{p-3}\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
&+\frac{(\alpha+|\beta|)^2cL}{\alpha}\int_M |Rm|^{p-1}|\nabla\phi|^2\phi^{2p-2}dVol_{g(t)}.
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

与（4.9）类似，我们有

$$
\frac{\partial}{\partial t}dVol_{g(t)} = -(\alpha+\frac{n}{2}\beta)RdVol_{g(t)} \le (\alpha+|\beta|)c|Ric|dVol_{g(t)}. \tag{5.10}
$$

此外，

$$
\frac{\partial}{\partial t}|Rm|^{p-1} = \frac{\partial}{\partial t}(|Rm|^2)^{\frac{p-1}{2}} = \frac{p-1}{2}|Rm|^{p-3}\frac{\partial}{\partial t}|Rm|^2 \tag{5.11}
$$

对于 $p\ge 3$。

因此，

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2L}\int_M \big(\frac{\partial}{\partial t}|Ric|^2\big)|Rm|^{p-1}\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
=\ &-\frac{1}{2L}\cdot\frac{d}{dt}\int_M |Ric|^2|Rm|^{p-1}\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
&+\frac{p-1}{4L}\int_M |Ric|^2|Rm|^{p-3}\big(\frac{\partial}{\partial t}|Rm|^2\big)\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
&-\frac{1}{2L}\big(\alpha+\frac{n}{2}\beta\big)\int_M R|Ric|^2|Rm|^{p-1}\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
\le\ &-\frac{1}{2L}\cdot\frac{d}{dt}\int_M |Ric|^2|Rm|^{p-1}\phi^{2p}dVol_{g(t)}
\end{aligned}
$$

$$+\frac{(\alpha+|\beta|)c}{L}\int_M |Ric|^2|Rm|^{p-3}(\nabla^2 Ric * Rm+\nabla^2 R * Ric)\phi^{2p}dVol_{g(t)}$$
$$+(\alpha+|\beta|)cL\int_M |Rm|^p\phi^{2p}dVol_{g(t)}, \tag{5.12}$$

其中我们用到了（5.7）。分部积分后，再利用柯西不等式，可得

$$\begin{aligned}
&\frac{(\alpha+|\beta|)c}{L}\int_M |Ric|^2|Rm|^{p-3}(\nabla^2 Ric * Rm+\nabla^2 R * Ric)\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
=&\frac{(\alpha+|\beta|)c}{L}\int_M \nabla|Ric|^2 * (\nabla Ric * Rm+\nabla R * Ric)|Rm|^{p-3}\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
&+\frac{(\alpha+|\beta|)c}{L}\int_M |Ric|^2(\nabla Ric * Rm+\nabla R * Ric) * \nabla|Rm|^{p-3}\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
&+\frac{(\alpha+|\beta|)c}{L}\int_M |Ric|^2(\nabla Ric * \nabla Rm+\nabla R * \nabla Ric)|Rm|^{p-3}\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
&+\frac{(\alpha+|\beta|)c}{L}\int_M |Ric|^2(\nabla Ric * Rm+\nabla R * Ric) * \nabla(\phi^{2p})|Rm|^{p-3}dVol_{g(t)}\\
\le&(\alpha+|\beta|)c\int_M |\nabla Ric|\cdot|\nabla Rm|\cdot|Rm|^{p-2}\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
&+(\alpha+|\beta|)c\int_M |\nabla Ric|\cdot|Rm|^{p-1}\cdot|\nabla\phi|\phi^{2p-1}dVol_{g(t)}\\
\le&\frac{\alpha}{3L}\int_M |\nabla Ric|^2|Rm|^{p-1}\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
&+\frac{(\alpha+|\beta|)^2cL}{\alpha}\int_M |\nabla Rm|^2|Rm|^{p-3}\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
&+\frac{(\alpha+|\beta|)^2cL}{\alpha}\int_M |Rm|^{p-1}|\nabla\phi|^2\phi^{2p-2}dVol_{g(t)}.
\end{aligned}\tag{5.13}$$

将（5.13）代入（5.12），再将（5.9）和（5.12）应用于（5.8），即可立即得出（5.3）。□

引理 5.2。定义

$$\begin{aligned}
U(t):=&\int_M |Rm|^p\phi^{2p}dVol_{g(t)}+\frac{3}{2L}\int_M |Ric|^2|Rm|^{p-1}\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
&+\frac{(\alpha+|\beta|)^2cL}{\alpha^2}\int_M |Rm|^{p-1}\phi^{2p}dVol_{g(t)}.
\end{aligned}$$

那么，对于任意 $p\ge 3$，我们有

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}U(t)\le&(\alpha+|\beta|)\big(1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\big)cL\int_M |Rm|^p\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
&+\frac{(\alpha+|\beta|)^2}{\alpha}cL\int_M |Rm|^{p-1}|\nabla\phi|^2\phi^{2p-2}dVol_{g(t)}\\
&+\frac{(\alpha+|\beta|)^2|\beta|}{\alpha^2}cL^2\int_M |Rm|^{p-2}\phi^{2p}dVol_{g(t)}.
\end{aligned}\tag{5.14}$$

证明。通过直接计算，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_M |Rm|^p\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
=&\frac{p}{2}\int_M |Rm|^{p-2}\frac{\partial}{\partial t}|Rm|^2\phi^{2p}dVol_{g(t)}-(\alpha+\frac{n}{2}\beta)\int_M R|Rm|^p\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
\leq&(\alpha+|\beta|)c\Big(\int_M |Rm|^{p-2}(\nabla^2 Ric*Rm+\nabla^2 R*Ric)\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
&+L\int_M |Rm|^p\phi^{2p}dVol_{g(t)}\Big)\\
=&(\alpha+|\beta|)c\int_M \nabla|Rm|^{p-2}*(\nabla Ric*Rm+\nabla R*Ric)\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
&+(\alpha+|\beta|)c\int_M |Rm|^{p-2}(\nabla Ric*\nabla Rm+\nabla R*Ric)\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
&+(\alpha+|\beta|)c\int_M |Rm|^{p-2}(\nabla Ric*Rm+\nabla R*Ric)*\nabla(\phi^{2p})dVol_{g(t)}\\
&+(\alpha+|\beta|)cL\int_M |Rm|^p\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
\leq&(\alpha+|\beta|)c\int_M |\nabla Ric|\cdot|\nabla Rm|\cdot|Rm|^{p-2}\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
&+(\alpha+|\beta|)c\int_M |\nabla Ric|\cdot|Rm|^{p-1}\cdot|\nabla\phi|\phi^{2p-1}dVol_{g(t)}\\
&+(\alpha+|\beta|)cL\int_M |Rm|^p\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
\leq&\frac{\alpha}{L}\int_M |\nabla Ric|^2|Rm|^{p-1}\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
&+\frac{(\alpha+|\beta|)^2cL}{\alpha}\int_M |\nabla Rm|^2|Rm|^{p-3}\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
&+\frac{(\alpha+|\beta|)^2cL}{\alpha}\int_M |Rm|^{p-1}|\nabla\phi|^2\phi^{2p-2}dVol_{g(t)}\\
&+(\alpha+|\beta|)cL\int_M |Rm|^p\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
\leq&-\frac{3}{2L}\cdot\frac{d}{dt}\int_M |Ric|^2|Rm|^{p-1}\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
&+\frac{(\alpha+|\beta|)^2cL}{\alpha}\int_M |\nabla Rm|^2|Rm|^{p-3}\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\
&+\frac{(\alpha+|\beta|)^2cL}{\alpha}\int_M |Rm|^{p-1}|\nabla\phi|^2\phi^{2p-2}dVol_{g(t)}\\
&+(\alpha+|\beta|)cL\int_M |Rm|^p\phi^{2p}dVol_{g(t)}.
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

其中第一次等式使用了（5.10）和（5.11），第二次等式使用了（5.7），第二个和第三个不等式使用了柯西不等式，最后一个不等式使用了命题5.1 。

现在处理（5.15）右端的第二项。

$$
\begin{aligned}
&\int_M |\nabla Rm|^2 |Rm|^{p-3}\phi^{2p} dVol_{g(t)} \\
\leq\ & \frac{1}{2}\int_M (\Delta |Rm|^2)|Rm|^{p-3}\phi^{2p} dVol_{g(t)} - \frac{1}{2\alpha}\int_M (\frac{\partial}{\partial t}|Rm|^2)|Rm|^{p-3}\phi^{2p} dVol_{g(t)} \\
&+\frac{(\alpha+|\beta|)c}{\alpha}\int_M |Rm|^p\phi^{2p} dVol_{g(t)} + \frac{4\beta}{\alpha}\int_M \langle \nabla^2 R, Ric\rangle |Rm|^{p-3}\phi^{2p} dVol_{g(t)} \\
=\ & -\frac{1}{2}\int_M \langle \nabla |Rm|^2, \nabla |Rm|^{p-3}\rangle \phi^{2p} dVol_{g(t)} \\
&-\frac{1}{2}\int_M \langle \nabla |Rm|^2, \nabla \phi^{2p}\rangle |Rm|^{p-3} dVol_{g(t)} \\
&-\frac{1}{\alpha(p-1)}\int_M \frac{\partial}{\partial t}|Rm|^{p-1}\phi^{2p} dVol_{g(t)} + \frac{(\alpha+|\beta|)c}{\alpha}\int_M |Rm|^p\phi^{2p} dVol_{g(t)} \\
&+\frac{|\beta|}{\alpha}cL\int_M |Rm|^{p-2}\phi^{2p} dVol_{g(t)} \\
\leq\ & c\int_M |\nabla Rm|\cdot|\nabla\phi|\cdot|Rm|^{p-2}\cdot\phi^{2p-1} dVol_{g(t)} \\
&-\frac{1}{\alpha(p-1)}\cdot\frac{d}{dt}\int_M |Rm|^{p-1}\phi^{2p} dVol_{g(t)} \\
&+\frac{(\alpha+|\beta|)c}{\alpha}\int_M |Rm|^p\phi^{2p} dVol_{g(t)} + \frac{|\beta|}{\alpha}cL\int_M |Rm|^{p-2}\phi^{2p} dVol_{g(t)} \\
\leq\ & \frac{1}{2}\int_M |\nabla Rm|^2 |Rm|^{p-3}\phi^{2p} dVol_{g(t)} + c\int_M |Rm|^{p-1}|\nabla\phi|^2\phi^{2p-2} dVol_{g(t)} \\
&-\frac{1}{\alpha(p-1)}\cdot\frac{d}{dt}\int_M |Rm|^{p-1}\phi^{2p} dVol_{g(t)} + \frac{(\alpha+|\beta|)c}{\alpha}\int_M |Rm|^p\phi^{2p} dVol_{g(t)} \\
&+\frac{|\beta|}{\alpha}cL\int_M |Rm|^{p-2}\phi^{2p} dVol_{g(t)}, \qquad (5.16)
\end{aligned}
$$

其中，第一个不等式中使用了（5.6），第二个不等式中使用了（5.10），最后一步使用了柯西不等式。

结合（5.15）和（5.16），并重新整理，即可得到（5.14）。 □

在本节余下部分，我们用 C表示一个仅依赖于 α、β、 L 和 n 的普适常数。于是，我们得到黎曼曲率的一个 L^p 估计。

引理 5.3. 对于任意 $x_0 \in M^n$ 和 $\theta > 1$， $g(t),t\in[0,T']$的黎曼曲率满足

$$
\begin{aligned}
&\Big(\int_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{\theta\sqrt{L}})} |Rm|^p(x,t) dVol_{g(t)}\Big)^{\frac{1}{p}} \\
\leq\ & \Big(\frac{\theta}{\theta-1}\Big)^{2p} Ce^{CLT'}\Big[\Big(\int_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{\sqrt{L}})} |Rm|^p(x,0) dVol_{g(0)}\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&+\big(L^{\frac{1}{2}}+L+\frac{L}{\rho^2}\big)Vol^{\frac{1}{p}}_{g(0)}(B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{\sqrt{L}}))\Big]. \qquad (5.17)
\end{aligned}
$$

证明。 由（1.1）可知，在 $B_{g(0)}(x_0,\ \rho/\sqrt{L})\times[0,T']$,

$$\frac{\partial}{\partial t}g\le CLg,$$

即,

$$e^{-CLt}g(x,0)\le g(x,t)\le e^{CLt}g(x,0). \tag{5.18}$$

因此,

$$Vol_{g(t)}(B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{\sqrt{L}}))\le e^{CLT'}Vol_{g(0)}(B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{\sqrt{L}})), \tag{5.19}$$

对所有 $0\le t\le T'$，并且

$$|\nabla\phi|_{g(t)}\le e^{CLT'}|\nabla\phi|_{g(0)}\le e^{CLT'}\cdot\frac{\sqrt{L}}{\rho}. \tag{5.20}$$

此外,

$$\begin{aligned}&\int_M|Rm|^{p-1}|\nabla\phi|^2\phi^{2p-2}dVol_{g(t)}\\ &\le\frac{L}{\rho^2}\cdot e^{CLT'}\int_M|Rm|^{p-1}\phi^{2p-2}dVol_{g(t)}\\ &\le\frac{L^p}{\rho^{2p}}\cdot e^{CLT'}Vol_{g(0)}(B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{\sqrt{L}}))\\ &\quad+\int_M|Rm|^p\phi^{2p}dVol_{g(t)},\end{aligned} \tag{5.21}$$

其中第一个不等式用到了（5.20），最后一个不等式用到了杨氏不等式和（5.19）。

再次使用杨氏不等式，我们可以得到

$$\begin{aligned}&L\int_M|Rm|^{p-2}\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\ &\le L^{\frac{p}{2}}\cdot e^{CLT'}Vol_{g(0)}(B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{\sqrt{L}}))\\ &\quad+\int_M|Rm|^p\phi^{2p}dVol_{g(t)},\end{aligned} \tag{5.22}$$

将（5.21）和（5.22）代入（5.14），得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}U(t)&\le CL\int_M|Rm|^p\phi^{2p}dVol_{g(t)}\\ &\quad+C\big(L^{\frac{p}{2}+1}+\frac{L^{p+1}}{\rho^{2p}}\big)e^{CLT'}Vol_{g(0)}(B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{\sqrt{L}}))\\ &\le CLU(t)+C\big(L^{\frac{p}{2}+1}+\frac{L^{p+1}}{\rho^{2p}}\big)\\ &\quad\times e^{CLT'}Vol_{g(0)}(B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{\sqrt{L}})).\end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\big(e^{-CLt}U(t)\big)\\ &\le C\big(L^{\frac{p}{2}+1}+\frac{L^{p+1}}{\rho^{2p}}\big)e^{CL(T'-t)}Vol_{g(0)}(B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{\sqrt{L}})).\end{aligned} \tag{5.23}$$

对于任意 $\tau\in(0,\ T']$，对（5.23）从 0 积分到 τ可得

$$U(\tau)\le e^{CLT'}\big(U(0)+C(L^{\frac{p}{2}}+\frac{L^p}{\rho^{2p}})Vol_{g(0)}(B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{\sqrt{L}}))\big). \tag{5.24}$$

另一方面，对于任意常数 $\theta>1$, $\phi(x)\ge 1-\frac{1}{\theta}$，有 $d_{g(0)}(x_0,x)\le\frac{\rho}{\theta\sqrt{L}}$。因此，

$$(\frac{\theta-1}{\theta})^{2p}\int_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{\theta\sqrt{L}})}|Rm|^p(x,\tau)dVol_{g(\tau)}\le\int_M|Rm|^p(x,\tau)\phi^{2p}dVol_{g(\tau)}\le U(\tau). \tag{5.25}$$

根据定义，我们有

$$\begin{aligned}U(0)\le&\int_M|Rm|^p(x,0)\phi^{2p}dVol_{g(0)}+\frac{3\sqrt{n}}{2}\int_M|Rm|^p(x,0)\phi^{2p}dVol_{g(0)}\\&+CL\int_M|Rm|^{p-1}(x,0)\phi^{2p}dVol_{g(0)}\\\le&C\int_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{\sqrt{L}})}|Rm|^p(x,0)\phi^{2p}dVol_{g(0)}\\&+CL^pVol_{g(0)}(B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{\sqrt{L}})),\end{aligned} \tag{5.26}$$

其中，第一个不等式中用到了 $|Ric|\le L$ 和 $|Ric|\le\sqrt{n}|Rm|$，第二个不等式中用到了杨氏不等式。

由（5.24）、（5.25）和（5.26）可得

$$\begin{aligned}&\int_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{\theta\sqrt{L}})}|Rm|^p(x,\tau)\phi^{2p}dVol_{g(\tau)}\\\le&(\frac{\theta}{\theta-1})^{2p}Ce^{CLT'}\big[\int_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{\sqrt{L}})}|Rm|^p(x,0)dVol_{g(0)}\\&+(L^{\frac{p}{2}}+L^p+\frac{L^p}{\rho^{2p}})Vol_{g(0)}(B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{\sqrt{L}}))\big]\end{aligned} \tag{5.27}$$

对于所有 $0<\tau\le T'$ 和 $\theta>1$。

由 5.17 可从 5.27 得出，这是因为 τ 任意。 □

定义

$$\fint_B hdVol_{g(0)}=\frac{1}{Vol_{g(0)}(B)}\int_B hdVol_{g(0)}$$

为光滑函数 $h\in M\times[0,T']$ 在某个测地球 B 上关于 $g(0)$ 的平均值。由 (5.18) 可知

$$e^{-CLT'}Vol_{g(0)}(B)\le Vol_{g(t)}(B)\le e^{CLT'}Vol_{g(0)}(B), \tag{5.28}$$

对所有 $t\in(0,T']$.

现在，我们准备通过应用 De Giorgi-Nash-Moser 迭代方法证明一个局部曲率估计（例如，参见 [20]）。证明基于 Kotschwar、Munteanu 和 Wang [19] 的工作，并作了少量修改。

定理 5.4. 对于任意 $x_0\in M$，存在常数 a_1 和 a_2，它们仅依赖于 n，使得

$$\sup_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{4\sqrt{L}})\times[\frac{T'}{2},T']}|Rm|(x,t)\le Ce^{C(LT'+\rho)}\big[1+(\frac{\Lambda_0}{L})^{a_1}+(\frac{1}{LT'}+\frac{1}{\rho^2})^{a_2}\big]$$

$$\times\big(\Lambda_0+L^{\frac{1}{2}}+L+\frac{L}{\rho^2}\big), \tag{5.29}$$

其中

$$\Lambda_0:=\sup_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{\sqrt{L}})}|Rm|(x,0).$$

证明。对于 $p\geq 3$，由（5.28）和引理 5.3 可得

$$\begin{aligned}
&\big(\fint_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{2\sqrt{L}})}|Rm|^p(x,t)dVol_{g(0)}\big)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq e^{CLT'}\big(\frac{1}{Vol_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{2\sqrt{L}})}\int_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{2\sqrt{L}})}|Rm|^p(x,t)dVol_{g(t)}\big)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq Ce^{CLT'}\big(\Lambda_0+L^{\frac{1}{2}}+L+\frac{L}{\rho^2}\big)\big(\frac{Vol_{g(0)}(B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{\sqrt{L}}))}{Vol_{g(0)}(B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{2\sqrt{L}}))}\big)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}\tag{5.30}$$

由于 $g(0)$ 的里奇曲率有下界，应用 Bishop-Gromov 体积比较定理（例如参见 [20]）于（5.30），可得

$$\begin{aligned}
&\big(\fint_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{2\sqrt{L}})}|Rm|^p(x,t)dVol_{g(0)}\big)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq Ce^{C(T'+\frac{\rho}{\sqrt{L}})}\big(\Lambda_0+L^{\frac{1}{2}}+L+\frac{L}{\rho^2}\big)
\end{aligned}\tag{5.31}$$

对于 $p\geq 3$。

注意到 $0<\alpha\leq 1$，利用 Kato 不等式和（5.6），可得

$$\begin{aligned}
\alpha|\nabla|Rm||^2&\leq\alpha|\nabla Rm|^2\\
&\leq\frac{\alpha}{2}\Delta|Rm|^2-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|Rm|^2+C|Rm|^3+C|\nabla^2R|\cdot|Rm|^2\\
&\leq|\nabla|Rm||^2+\alpha|Rm|\Delta|Rm|-|Rm|\frac{\partial}{\partial t}|Rm|+C|Rm|^3+CL|Rm|^2,
\end{aligned}$$

即，

$$\big(\frac{\partial}{\partial t}-\alpha\Delta\big)|Rm|\leq C(|Rm|+L)|Rm|$$

在 $M\times[0,T']$ 上弱成立。

如 [19, 25], 所示，记 $f=|Rm|+L$ 和 $u=|Rm|$，则

$$\big(\frac{\partial}{\partial t}-\alpha\Delta\big)u\leq Cfu \tag{5.32}$$

在 $M\times[0,T']$上弱收敛。固定 $a\geq 1$ 并在 5.32上积分 $B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{2\sqrt{L}})$，得到

$$\begin{aligned}
&\int_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{2\sqrt{L}})}\varphi^2u^{2a-1}\frac{\partial u}{\partial t}dVol_{g(t)}-\alpha\int_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{2\sqrt{L}})}\varphi^2u^{2a-1}\Delta udVol_{g(t)}\\
&\leq C\int_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{2\sqrt{L}})}\varphi^2u^{2a}fdVol_{g(t)}
\end{aligned}\tag{5.33}$$

对于任意 $t\in[0,T']$ 以及在 $B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{2\sqrt{L}})$ 中具有紧支撑的非负 Lipschitz 函数 $\varphi(x)$。

由（4.9），我们知道

$$\int_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{2\sqrt{L}})}\varphi^2u^{2a-1}\frac{\partial u}{\partial t}dVol_{g(t)}\geq\frac{1}{2a}\cdot\frac{d}{dt}\int_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{2\sqrt{L}})}\varphi^2u^{2a}dVol_{g(t)}$$
$$-C\int_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{2\sqrt{L}})}\varphi^2u^{2a}fdVol_{g(t)}. \quad (5.34)$$

分部积分可得

$$\begin{aligned}
&-\int_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{2\sqrt{L}})}\varphi^2u^{2a-1}\Delta udVol_{g(t)}\\
&=2\int_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{2\sqrt{L}})}\varphi^2u^{2a-1}\langle\nabla u,\nabla\varphi\rangle dVol_{g(t)}\\
&\quad+(2a-1)\int_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{2\sqrt{L}})}\varphi^2u^{2a-2}|\nabla u|^2dVol_{g(t)}\\
&\geq 2\int_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{2\sqrt{L}})}\varphi^2u^{2a-1}\langle\nabla u,\nabla\varphi\rangle dVol_{g(t)}\\
&\quad+a\int_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{2\sqrt{L}})}\varphi^2u^{2a-2}|\nabla u|^2dVol_{g(t)}\\
&=\frac{1}{a}\int_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{2\sqrt{L}})}|\nabla(\varphi u^a)|^2dVol_{g(t)}\\
&\quad-\frac{1}{a}\int_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{2\sqrt{L}})}|\nabla\varphi|^2u^{2a}dVol_{g(t)}. \qquad (5.35)
\end{aligned}$$

将（5.34）和（5.35）代入（5.33），可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\int_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{2\sqrt{L}})}\varphi^2u^{2a}dVol_{g(t)}+\alpha\int_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{2\sqrt{L}})}|\nabla(\varphi u^a)|^2dVol_{g(t)}\\
&\leq Ca\int_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{2\sqrt{L}})}\varphi^2u^{2a}fdVol_{g(t)}+\int_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{2\sqrt{L}})}|\nabla\varphi|^2u^{2a}dVol_{g(t)}. \quad (5.36)
\end{aligned}$$

对于 $0<s<s+v<T'$，将（5.36）与 Lipschitz 函数 $\psi(t)$ 相乘，该函数与 [19], 中的（3.6）相同

$$\psi(t):=\begin{cases}0 & \text{for } 0\leq t\leq s\\ \frac{t-s}{v} & \text{for } s<t\leq s+v\\ 1 & \text{for } s+v<t\leq T\end{cases}$$

并得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\Big(\psi^2\int_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{2\sqrt{L}})}\varphi^2u^{2a}dVol_{g(t)}\Big)\\
&+\alpha\psi^2\int_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{2\sqrt{L}})}|\nabla(\varphi u^a)|^2dVol_{g(t)}\\
&\leq Ca\psi^2\int_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{2\sqrt{L}})}\varphi^2u^{2a}fdVol_{g(t)}
\end{aligned}$$

$$+\psi^2\int_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{2\sqrt{L}})}|\nabla\varphi|^2u^{2a}dVol_{g(t)}$$
$$+\psi\psi'\int_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{2\sqrt{L}})}\varphi^2u^{2a}dVol_{g(t)}. \tag{5.37}$$

对于 $\tau\in(0,\ T']$，将（5.37）从 0 积分到 τ，然后利用（5.28）可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\psi^2(\tau)\fint_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{2\sqrt{L}})}\varphi^2u^{2a}(\tau)dVol_{g(0)}\\
&+\alpha\int_0^\tau\psi^2\fint_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{2\sqrt{L}})}|\nabla(\varphi u^a)|^2dVol_{g(0)}\\
\le\ & Cae^{CLT}\int_0^\tau\psi^2\fint_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{2\sqrt{L}})}\varphi^2u^{2a}fdVol_{g(0)}\\
&+e^{CLT}\int_0^\tau\psi^2\fint_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{2\sqrt{L}})}|\nabla\varphi|^2u^{2a}dVol_{g(0)}\\
&+e^{CLT}\int_0^\tau\psi\psi'\fint_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{2\sqrt{L}})}\varphi^2u^{2a}dVol_{g(0)}.
\end{aligned}\tag{5.38}$$

关于 $|Ric|\le L$ 在 $B_{g(0)}(x_0,\ \frac{\rho}{2\sqrt{L}})$的条件与(5.18)共同表明，存在如下形式的索博列夫不等式

$$\frac{1}{C}\cdot\frac{e^{-C\rho}}{\rho^2}\Big(\fint_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{2\sqrt{L}})}(\varphi u^a(t))^{2\mu}dVol_{g(0)}\Big)^{\frac{1}{\mu}}\le\fint_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{2\sqrt{L}})}|\nabla(\varphi u^a(t))|^2_{g(0)}dVol_{g(0)} \tag{5.39}$$

其中常数 $\mu=\mu(n)\ \le\frac{n}{n-2}$ 仅依赖于 n。

将(5.39)应用于(5.38)，可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\psi^2(\tau)\fint_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{2\sqrt{L}})}\varphi^2u^{2a}(\tau)dVol_{g(0)}\\
&+\frac{1}{C}\frac{e^{-C\rho}}{\rho^2}\int_0^\tau\Big(\fint_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{2\sqrt{L}})}(\varphi u^a(t))^{2\mu}dVol_{g(0)}\Big)^{\frac{1}{\mu}}\\
\le\ & Cae^{CLT}\int_0^\tau\psi^2\fint_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{2\sqrt{L}})}\varphi^2u^{2a}fdVol_{g(0)}\\
&+e^{CLT}\int_0^\tau\psi^2\fint_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{2\sqrt{L}})}|\nabla\varphi|^2u^{2a}dVol_{g(0)}\\
&+e^{CLT}\int_0^\tau\psi\psi'\fint_{B_{g(0)}(x_0,\frac{\rho}{2\sqrt{L}})}\varphi^2u^{2a}dVol_{g(0)},
\end{aligned}\tag{5.40}$$

这与[19]中的(3.9)完全相同。对于其余步骤，按照 [19] 中(3.10)至(3.11)的迭代论证，结合(5.31)，我们得出(5.29)。□

最后，我们给出定理1.3的证明。

定理 **1.3** 的证明：由于里奇曲率一致有界，由定理 5.4以及 M 的紧致性可知， $g(t)$ 的黎曼曲率

在 (α,β)-Ricci-Yamabe 流 1.1 下保持一致有界。因此，根据定理 1.3，该流可以光滑延拓。□

6. Curvature pinching estimates and long time existence III

本节中，我们在无迹里奇

。曲率 $Ric:=Ric-\frac{1}{n}Rg$ 在一个 n维的（$n\geq 3$）（α，β）-Ricci-Yamabe 流（1.1下推导了曲率夹逼估计，这推广了曹的结果 [5]。作为应用，我们根据标量曲率和韦尔张量，展示了（1.1）的有限时间奇异行为。

取 $b=2$ 最大值$_M|R(\cdot,0)|+1$，由命题3.4 可得

$$b\geq 1,\ R+b\geq 1 \text{ and } (R+b)^2\geq R^2. \tag{6.1}$$

沿着（α，β）-Ricci-Yamabe 流（1.1，其中 $\alpha>0$ 且 $\beta>-\frac{\alpha}{n-1}$。
如[5, 21], 中所定义

$$\begin{aligned} f&:=\frac{|\mathring{Ric}|^2}{(R+b)^2}\\ &=\frac{|Ric+\frac{b}{n}g-\frac{R+b}{n}g|^2}{(R+b)^2}\\ &=\frac{|Ric|^2}{(R+b)^2}+\frac{2bR}{n(R+b)^2}+\frac{b^2}{n(R+b)^2}-\frac{1}{n}\\ &=\frac{|Ric|^2}{(R+b)^2}+\frac{R^2}{n(R+b)^2}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

对于任意 $(x,t)\in M^n\times[0,T)$，我们在以 x 为中心的正规坐标系中进行计算。

命题 6.1。 在 (α,β)-Ricci-Yamabe 流 (1.1)中，我们有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(R+b)^2}\frac{\partial}{\partial t}|Ric+\frac{b}{n}g|^2\\ &=\alpha\Delta f+2\alpha\frac{\langle\nabla f,\nabla R\rangle}{R+b}+\frac{2\alpha b^2|\nabla R|^2}{n(R+b)^4}\\ &\quad+[\frac{2\alpha\Delta R}{R+b}+\frac{4\alpha(2n-3)}{n(n-1)}R+\beta R+\frac{4b\alpha}{n}]f\\ &\quad+[\frac{2\alpha R}{n}+\beta R+\frac{2b}{n}(\beta(n-1)-\alpha(n-2))]\frac{\Delta R}{(R+b)^2}\\ &\quad+[\frac{4\alpha(n-8)}{n(n-2)}R+\beta R+2b\beta+\frac{4b\alpha}{n}]\frac{R^2}{n(R+b)^2}\\ &\quad+4\alpha\frac{W(\mathring{Ric},\mathring{Ric})}{(R+b)^2}-\frac{8\alpha}{n-2}\frac{tr\mathring{Ric}^3}{(R+b)^2}+(n-2)\beta\frac{\langle Ric,\nabla^2R\rangle}{(R+b)^2}\\ &\quad-2\alpha\frac{|(R+b)\nabla_iR_{jk}-\nabla_iRR_{jk}|^2}{(R+b)^4}, \end{aligned} \tag{6.3}$$

其中 $W(\mathring{Ric},\mathring{Ric}):=W_{ijkl}\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jl}$ 和 $tr\ \mathring{Ric}^3=R_{ij}R_{jk}R_{ki}$。

证明。 类似于（5.4）中的计算，由（3.7）和（3.8）可得

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}|Ric+\frac{b}{n}g|^2\\
&=\frac{\partial}{\partial t}|Ric|^2+\frac{2b}{n}\frac{\partial R}{\partial t}\\
&=\alpha\Delta|Ric|^2-2\alpha|\nabla Ric|^2+4\alpha Rm(Ric,Ric)\\
&\quad+\beta R|Ric|^2+(n-2)\beta\langle Ric,\nabla^2R\rangle+\beta R\Delta R\\
&\quad+\frac{2b}{n}[\beta(n-1)+\alpha]\Delta R+\frac{4b\alpha}{n}|Ric|^2+\frac{2b\beta}{n}R^2.
\end{aligned}\tag{6.4}$$

根据（6.2），我们有

$$\begin{aligned}
\langle\nabla f,\nabla R\rangle=&\frac{\langle\nabla|Ric|^2,\nabla R\rangle}{(R+b)^2}+\frac{2b|\nabla R|^2}{n(R+b)^2}\\
&-\frac{2f|\nabla R|^2}{R+b}-\frac{2|\nabla R|^2}{n(R+b)}
\end{aligned}\tag{6.5}$$

and

$$\begin{aligned}
\Delta f=&div(\frac{\nabla|Ric|^2}{(R+b)^2}+\frac{2b\nabla R}{n(R+b)^2}-\frac{2f\nabla R}{R+b}-\frac{2\nabla R}{n(R+b)})\\
=&\frac{\Delta|Ric|^2}{(R+b)^2}-\frac{2\langle\nabla|Ric|^2,\nabla R\rangle}{(R+b)^3}+\frac{2b\Delta R}{n(R+b)^2}\\
&-\frac{4b|\nabla R|^2}{n(R+b)^3}-\frac{2\langle\nabla f,\nabla R\rangle}{R+b}-\frac{2f\Delta R}{R+b}\\
&+\frac{2f|\nabla R|^2}{(R+b)^2}-\frac{2\Delta R}{n(R+b)}+\frac{2|\nabla R|^2}{n(R+b)^2}\\
=&\frac{\Delta|Ric|^2}{(R+b)^2}-\frac{4\langle\nabla f,\nabla R\rangle}{R+b}-\frac{2f|\nabla R|^2}{(R+b)^2}-\frac{2|\nabla R|^2}{n(R+b)^2}\\
&+\frac{2b\Delta R}{(R+b)^2}-\frac{2f\Delta R}{R+b}-\frac{2\Delta R}{n(R+b)}.
\end{aligned}\tag{6.6}$$

注意

$$\begin{aligned}
|\nabla Ric|^2=&\frac{|(R+b)\nabla_iR_{jk}-\nabla_iRR_{jk}|^2}{(R+b)^2}+\frac{\langle\nabla|Ric|^2,\nabla R\rangle}{R+b}\\
&-\frac{|\nabla R|^2|Ric|^2}{(R+b)^2}\\
=&\frac{|(R+b)\nabla_iR_{jk}-\nabla_iRR_{jk}|^2}{(R+b)^2}+(R+b)\langle\nabla f,\nabla R\rangle\\
&-\frac{2b|\nabla R|^2}{n(R+b)}+f|\nabla R|^2+\frac{1}{n}|\nabla R|^2\\
&+\frac{2bR|\nabla R|^2}{n(R+b)^2}+\frac{b^2|\nabla R|^2}{n(R+b)^2},
\end{aligned}\tag{6.7}$$

其中我们使用了（6.5）和（6.2）。

根据韦尔张量的定义，我们有

$$Rm(Ric,Ric)=R_{ijkl}R_{ik}R_{jl}$$

$$
\begin{aligned}
&= W_{ijkl}R_{ik}R_{jl} + \frac{2}{n-2}R|Ric|^2 \\
&\quad -\frac{1}{n-2}(R_{jk}R_{ik}R_{ij} + R_{il}R_{ik}R_{kl}) \\
&\quad -\frac{1}{(n-1)(n-2)}R(R^2 - |Ric|^2) \\
&= W(Ric, Ric) + \frac{1}{n-2}\big(\frac{2n-1}{n-1}|Ric|^2R - 2trRic^3 - \frac{R^3}{n-1}\big).
\end{aligned}
$$

由于韦尔张量是无迹的，且

$$
\begin{aligned}
trRic^3 &= R_{ij}R_{jk}R_{ki} \\
&= (\overset{\circ}{R}_{ij} + \frac{R}{n}g_{ij})(\overset{\circ}{R}_{jk} + \frac{R}{n}g_{jk})(\overset{\circ}{R}_{ki} + \frac{R}{n}g_{ki}) \\
&= (\overset{\circ}{R}_{ij}\overset{\circ}{R}_{jk} + \frac{2R}{n}\overset{\circ}{R}_{ik} + \frac{R^2}{n^2}g_{ik})(\overset{\circ}{R}_{ki} + \frac{R}{n}g_{ki}) \\
&= tr\overset{\circ}{Ric}^3 + \frac{3}{n}R|\overset{\circ}{Ric}|^2 + \frac{R^3}{n^2},
\end{aligned}
$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
Rm(Ric, Ric) &= W(\overset{\circ}{Ric}, \overset{\circ}{Ric}) + \frac{2n-3}{n(n-1)}|Ric|^2R \\
&\quad -\frac{2}{n-2}tr\overset{\circ}{Ric}^3 - \frac{n^2+2n-2}{n^2(n-1)(n-2)}R^3 \\
&= W(\overset{\circ}{Ric}, \overset{\circ}{Ric}) + \frac{2n-3}{n(n-1)}(R+b)^2fR \\
&\quad -\frac{2}{n-2}tr\overset{\circ}{Ric}^3 + \frac{n-8}{n^2(n-2)}R^3. \qquad (6.8)
\end{aligned}
$$

将（6.2）、（6.5）、（6.6）、（6.7）、（6.8）代入（6.4），得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}|Ric + \frac{b}{n}g|^2 \\
&= \alpha(R+b)^2\Delta f + 4\alpha(R+b)\langle\nabla f, \nabla R\rangle + 2\alpha f|\nabla R|^2 + \frac{2\alpha}{n}|\nabla R|^2 \\
&\quad -2\alpha b\Delta R + 2\alpha f(R+b)\Delta R + \frac{2\alpha}{n}(R+b)\Delta R \\
&\quad -2\alpha\frac{|(R+b)\nabla_i R_{jk} - \nabla_i R R_{jk}|^2}{(R+b)^2} - 2\alpha(R+b)\langle\nabla f, \nabla R\rangle \\
&\quad +\frac{4\alpha b|\nabla R|^2}{n(R+b)} - 2\alpha f|\nabla R|^2 - \frac{2\alpha}{n}|\nabla R|^2 - \frac{4\alpha bR|\nabla R|^2}{n(R+b)^2} \\
&\quad -\frac{2\alpha b^2|\nabla R|^2}{n(R+b)^2} + 4\alpha W(\overset{\circ}{Ric}, \overset{\circ}{Ric}) + \frac{4\alpha(2n-3)}{n(n-1)}(R+b)^2fR \\
&\quad -\frac{8\alpha}{n-2}tr\overset{\circ}{Ric}^3 + \frac{4\alpha(n-8)}{n^2(n-2)}R^3 + \beta(R+b)^2Rf + \frac{\beta}{n}R^3 \\
&\quad +\frac{2b\beta}{n}R^2 + (n-2)\beta\langle Ric, \nabla^2 R\rangle + \beta R\Delta R \\
&\quad +\frac{2b}{n}[\beta(n-1) + \alpha]\Delta R + \frac{4b\alpha}{n}[(R+b)^2f + \frac{R^2}{n}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -2\alpha\frac{|(R+b)\nabla_i R_{jk} - \nabla_i R R_{jk}|^2}{(R+b)^2} \\
&\quad +\alpha(R+b)^2\Delta f + 2\alpha(R+b)\langle\nabla f, \nabla R\rangle + \frac{2\alpha b^2|\nabla R|^2}{n(R+b)^2} \\
&\quad +(R+b)^2[\frac{2\alpha\Delta R}{R+b} + \frac{4\alpha(2n-3)}{n(n-1)}R + \beta R + \frac{4b\alpha}{n}]f \\
&\quad +[\frac{2\alpha R}{n} + \beta R + \frac{2b}{n}(\beta(n-1) - \alpha(n-2))]\Delta R \\
&\quad +[\frac{4\alpha(n-8)}{n(n-2)}R + \beta R + 2b\beta + \frac{4b\alpha}{n}]\frac{R^2}{n} \\
&\quad +4\alpha W(\overset{\circ}{Ric}, \overset{\circ}{Ric}) - \frac{8\alpha}{n-2}tr\overset{\circ}{Ric}^3 + (n-2)\beta\langle Ric, \nabla^2 R\rangle. \qquad (6.9)
\end{aligned}
$$

因此， （6.3）立即成立。 □

命题 6.2. 在 $(\alpha,\ \beta)$-Ricci-Yamabe 流 (1.1)下，我们有

$$
\begin{aligned}
&|Ric + \frac{b}{n}g|^2\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{(R+b)^2} \\
&= -4\alpha(R+b)f^2 - [\frac{2[\beta(n-1)+\alpha]\Delta R}{R+b} \\
&\quad +\frac{4}{n}\alpha(R+b) + 2\big(\frac{2\alpha}{n}+\beta\big)\frac{R^2}{R+b}]f \\
&\quad -\frac{2[\beta(n-1)+\alpha]\Delta R}{n(R+b)} - 2\big(\frac{2\alpha}{n}+\beta\big)\frac{R^2}{n(R+b)}. \qquad (6.10)
\end{aligned}
$$

证明。通过直接计算，我们得到

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{(R+b)^2} &= -\frac{2}{(R+b)^3}\frac{\partial R}{\partial t} \\
&= -\frac{2[\beta(n-1)+\alpha]\Delta R}{(R+b)^3} - \frac{4\alpha|Ric|^2}{(R+b)^3} - \frac{2\beta R^2}{(R+b)^3} \\
&= -\frac{2[\beta(n-1)+\alpha]\Delta R}{(R+b)^3} - \frac{4\alpha}{R+b}f \\
&\quad -2\big(\frac{2\alpha}{n}+\beta\big)\frac{R^2}{(R+b)^3}, \qquad (6.11)
\end{aligned}
$$

其中第二个等式用到了 (3.8)，第三个等式用到了 (6.2)。

由（6.2）和（6.11）可得

$$
\begin{aligned}
&|Ric + \frac{b}{n}g|^2\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{(R+b)^2} \\
&= (f+\frac{1}{n})\big[-\frac{2[\beta(n-1)+\alpha]\Delta R}{R+b} \\
&\quad -4\alpha(R+b)f - 2\big(\frac{2\alpha}{n}+\beta\big)\frac{R^2}{R+b}] \\
&= -4\alpha(R+b)f^2 - [\frac{2[\beta(n-1)+\alpha]\Delta R}{R+b}
\end{aligned}
$$

$$+\frac{4}{n}\alpha(R+b)+2\big(\frac{2\alpha}{n}+\beta\big)\frac{R^2}{R+b}\big]f$$
$$-\frac{2[\beta(n-1)+\alpha]\Delta R}{n(R+b)}-2\big(\frac{2\alpha}{n}+\beta\big)\frac{R^2}{n(R+b)}.$$

□

接下来我们推导出一个对曲率夹逼估计至关重要的不等式。

引理 6.3. 在满足 $\alpha > 0$ 的 (α,β)-Ricci-Yamabe 流下，存在一个仅依赖于 n、α 和 β 的统一正常数 $\bar{c}$，使得

$$\frac{\partial}{\partial t}f \le \alpha\Delta f+2\alpha\frac{\langle\nabla f,\nabla R\rangle}{R+b}-\alpha f^2$$
$$\bar{c}\big(\frac{b^2|\nabla R|^2+|\nabla^2 R|^2+|W|^2}{(R+b)^2}\big)+\bar{c}(R+b)^2. \tag{6.12}$$

证明。 由命题6.2、命题 6.2、(6.2) 及柯西不等式可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}f &= \frac{1}{(R+b)^2}\frac{\partial}{\partial t}|Ric+\frac{b}{n}g|^2+|Ric+\frac{b}{n}g|^2\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{(R+b)^2}\\ &\le \alpha\Delta f+2\alpha\frac{\langle\nabla f,\nabla R\rangle}{R+b}+\frac{2\alpha b^2|\nabla R|^2}{n(R+b)^4}\\ &\quad+\bar{c}\big(\frac{|\nabla^2 R|}{R+b}+R+b\big)f+\frac{\bar{c}(|\nabla^2 R|+R^2)}{R+b}\\ &\quad+\bar{c}|W|f+\bar{c}(R+b)f^{\frac{3}{2}}+\bar{c}(f+\frac{R^2+|\nabla^2 R|^2}{(R+b)^2})\\ &\quad-4\alpha(R+b)f^2+\bar{c}\big(\frac{|\nabla^2 R|+R^2}{R+b}+R+b\big)f\end{aligned} \tag{6.13}$$

将 (6.1) 和杨氏不等式应用于 (6.13)，得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}f &\le \alpha\Delta f+2\alpha\frac{\langle\nabla f,\nabla R\rangle}{R+b}-4\alpha(R+b)f^2\\ &\quad+\bar{c}\big(|\nabla^2 R|+R+b+|W|\big)f+\bar{c}(R+b)f^{\frac{3}{2}}\\ &\quad+\frac{\bar{c}b^2|\nabla R|^2}{(R+b)^2}+\frac{\bar{c}|\nabla^2 R|^2}{(R+b)^2}+\bar{c}(R+b)\\ &\le \alpha\Delta f+2\alpha\frac{\langle\nabla f,\nabla R\rangle}{R+b}-\alpha f^2\\ &\quad\bar{c}\big(\frac{b|\nabla R|+|\nabla^2 R|+|W|}{R+b}\big)^2+\bar{c}(R+b)^2.\end{aligned}$$

□

将最大值原理应用于 (6.12)，即可立即得到曲率夹挤估计。

定理 6.4。 设 $g(x,t)$，$0\le t<T<+\infty$，是 (α,β)- Ricci-Yamabe 流 (1.1) 的光滑解，且 $\alpha>0$ 以及 $\beta>-\frac{\alpha}{n-1}$定义在一个 n维 $(n\ge 3)$

闭黎曼流形 M 上。定义 $b:=2\max_M|R(\cdot,0)|+1$。则存在一个仅依赖于 $g(\cdot,0)$、n、α 和 β 的一致正常数 C，使得

$$\frac{|\mathring{Ric}|^2}{(R+b)^2}(x,t)\leq \bar{C}+\bar{C}\max_{M\times[0,t]}\Big(\frac{|W|+|\nabla R|+|\nabla^2 R|}{R+b}+R+b\Big). \tag{6.14}$$

对所有 $(x,t)\in M\times[0,T)$.

在本节末尾，我们完成定理 1.4 的证明。

定理 **1.4** 的证明： 我们用反证法证明该定理。假设

$$\limsup_{t\to T}(\max_M R)<\infty \text{ and } \limsup_{t\to T}\Big(\max_M\frac{|W|+|\nabla R|+|\nabla^2 R|}{R}\Big)<\infty.$$

。因此，定理 6.4 推出 $|Ric|$ 在 $M\times[0,T$ 上一致有界）。众所周知， n 维（$n\geq 3$）黎曼流形上的曲率可分解为三个正交分量：韦尔张量部分、无迹里奇曲率部分和标量曲率部分（例如参见 [17]）。由此可知，黎曼曲率在 $M\times[0,T$ 上一致有界）。根据定理 1.2，该流可在时间 T 之后光滑延拓，这与 T 是最大存在时间这一事实矛盾。□

Acknowledgements

作者谨向 Yi Li 教授和 Xiaokui Yang 教授致谢，感谢他们提供的宝贵建议。

References

[1] A. L. Besse，《爱因斯坦流形》，《数学成果》(3)10，Springer，柏林，1987。[2] J. P. Bourguignon，里奇曲率与爱因斯坦度量，载于《整体微分几何与整体分析》（柏林，1979），D. Ferus 等编，数学讲义第838卷，Springer，柏林，1981。[3] S. Brendle，任意初始能量下 Yamabe 流的收敛性，《微分几何杂志》69(2)（2005）217-278。[4] G. Catino、L. Cremaschi、Z. Djadli、C. Mantegazza、L. Mazzieri，Ricci-Bourguignon 流，《太平洋数学杂志》287(2)（2017）337-370。[5] X. Cao，里奇流的曲率夹逼估计与奇点，《分析与几何通讯》19(5)（2011）975-990。[6] L. Cheng、A. Zhu，调和里奇流的延拓，《几何学专论》164（2013）179-185。[7] D. M. DeTurck，沿度量的里奇张量方向变形度量，《微分几何杂志》18(1)（1983）157-162。[8] D. M. DeTurck，沿度量的里奇张量方向变形度量（改进版），载于《里奇流论文集》，H. D. Cao 等编，几何与拓扑丛书第37卷，Int. Press，马萨诸塞州萨默维尔，2003。[9] J. Enders、R. M¨uller、P. M. Topping，关于里奇流中的 I 型奇点，《分析与几何通讯》19(5)（2011）905-922。[10] S. G¨uler、M. Grasmareanu，黎曼流的里奇-亚马贝映射及其体积变化与体积熵，《土耳其数学杂志》43（2019）2631-2641。[11] R. S. Hamilton，具有正里奇曲率的三维流形，《微分几何杂志》17（1982）255-306。[12] R. S. Hamilton，里奇流中的奇点形成，《微分几何调查》第2卷，International Press，马萨诸塞州剑桥（1995）7-136。[13] R. S. Hamilton，里奇流解的紧性性质，《美国数学杂志》117（1995）545-572。

[14] R. S. Hamilton，三维流形上里奇流的非奇异解，《分析与几何通讯》7（1999）695-729。[15] G. Huisken，黎曼流形上度量的里奇变形，《微分几何杂志》21（1985）47-62。[16] T. Ivey，紧三维流形上的里奇孤立子，《微分几何及其应用》3（1993）301-307。[17] S. Y. Hsu，里奇流局部曲率估计的另一种证明，《几何学专论》198（2019）171-180。[18] J. Jost，《偏微分方程》，第三版，数学研究生教材第214卷，Springer Science+Business Media，纽约（2013）。[19] B. Kotschwar、O. Munteanu、J. Wang，里奇流的局部曲率估计，《泛函分析杂志》271（2016）2004-2630。[20] P. Li，《几何分析》，剑桥高等数学研究丛书第134卷，剑桥大学出版社，剑桥（2012）。[21] Y. Li，里奇-调和流的长期存在性与有界标量曲率，《微分方程杂志》265（2018）69-97。[22] Y. Li，里奇-调和流的局部曲率估计，arXiv:1810.09760v1 [math.DG]。[23] Y. Li、Y. Yuan，沿 κ-LYZ 流的局部曲率估计，《几何物理杂志》164（2021）104162。[24] Y. Li、Y. Yuan、Y. Zhang，K¨ahler 流形上的一种新几何流，《分析与几何通讯》28(6)（2020）1251-1288。[25] Y. Li、M. Zhang，完备黎曼流形上里奇-调和流的局部曲率估计，arXiv: 2112.02576v2 [math.DG]。[26] Q. Liang、A. Zhu，关于延拓里奇-布尔吉尼翁流的条件，《非线性分析：理论、方法与应用》179（2019）344-353。[27] B. List，扩展里奇流系统的演化，《分析与几何通讯》16(5)（2008）1007-1048。[28] L. Ma、L. Cheng，关于控制里奇流曲率张量的条件，《整体分析与几何杂志》37（2010）403-411。[29] G. Di Matteo，里奇流的混合积分范数，《几何分析杂志》31（2021）4781-4805。[30] G. Perelman，里奇流的熵公式及其几何应用，arXiv:math/021159 [math.DG]。[31] P. Peterson，《黎曼几何》，第三版，数学研究生教材第171卷，Springer International Publishing AG（2016）。[32] H. Qiu、A. Zhu，带边界流形上的里奇-布尔吉尼翁流，《中国数学年刊》B辑42(6)（2021）953-968。[33] R. M¨uller，与调和映射流耦合的里奇流，《高等师范学校科学年刊》45(1)（2012）101-142。[34] N. ˇSeˇsum，里奇流下的曲率张量，《美国数学杂志》127(6)（2005）1315-1324。[35] W. X. Shi，完备黎曼流形上的度量变形，《微分几何杂志》30（1989）223-301。[36] P. Topping，《里奇流讲义》，伦敦数学学会讲义系列第325卷，剑桥大学出版社，2006。[37] B. Wang，关于延拓里奇流的条件，《国际数学研究通报》2008(9)（2008）2349-2367。[38] G. Wu、Y. Zheng，关于延拓里奇-调和流，《数学成果》75（2020）55。[39] R. Ye，Yamabe 流的整体存在性与收敛性，《微分几何杂志》39(1)（1994）35-50。[40] Z. Zhang，K¨ahler-里奇流有限时间奇性中的标量曲率行为，《密歇根数学杂志》59(2)（2010）419-433。

(LIANGDI ZHANG)

1. Yanqi Lake Beijing Institute of Mathematical Sciences and Applications, Beijing 101408, P. R. China2. Yau Mathematical Sciences Center, Tsinghua University, Beijing 100084, P. R. China*Email address*: ldzhang91@163.com