arXiv:2302.03203v3 [math.RT] 7 Oct 2024

论仿射 Lusztig 簇

´ ´论仿射 Lusztig 簇

何旭华

Abstract. 仿射 Lusztig 簇刻画了 Iwahori–Hecke 函数的轨道积分，并为仿射特征层这一（猜想中的）理论提供了基本构件。我们建立了仿射 Lusztig 簇与仿射 Deligne–Lusztig 簇之间的密切联系。因此，在大多数情况下，我们给出了仿射 Lusztig 簇的显式非空性模式和维数公式。

Lusztig 仿射簇编码了 Iwahori–Hecke 函数的轨道积分，并作为仿射特征层（猜想中的）理论的基本元素。我们建立了 Lusztig 仿射簇与 Deligne–Lusztig 簇之间的紧密关系。因此，在大多数情况下，我们给出了 Lusztig 仿射簇非空性的一个显式模型和一个维数公式。

1. Introduction

1.1. Deligne–Lusztig 簇与 Lusztig 簇。设 H 是定义在有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的连通约化¯群。设 $H = \mathrm{H}(\mathbb{F}_q)$，Fr 是定义在 H 上的 Frobenius 自同态。设 B 是 H 的一个 F-稳定 Borel 子群，且 W 是 H 的 Weyl 群。Deligne–Lusztig 簇定义为

$$X_w = \{hB; h^{-1}\,\mathrm{Fr}(h) \in B\dot{w}B\},$$

其中 $w \in W$，且 $\dot{w}$ 是 G 中 w 的一个代表元。它是旗簇 H/B 的一个子簇，由相对于 Frobenius 自同态像具有固定相对位置的点组成。Deligne–Lusztig簇在有限 Lie 型群 [10] 的表示论中发挥着至关重要的作用。

Lusztig 簇由 Lusztig 于 1977年 在牛津举行的 LMS 研讨会（主题为 Lie 群的表示）上提出 [35] 。其定义是将 X_w 定义中的 Frobenius 自同态替换为给定正则半单元 $h \in H$ 的共轭作用。文献 [35] 表明，源自 Deligne–Lusztig 簇上同调的特征值是“普适不变量”，在复数域上也有意义。在 Lusztig 的特征层理论 [36] 中，Lusztig 簇的定义被推广到任意元素 $h \in H$ 。特征层有两种不同的定义方式：通过“容许复形”或通过 Lusztig 簇。两种定义相一致，这是一个深刻的结果。Abreu 和 Nigro [1] 在其研究 Hecke 代数的特征的几何方法中使用了 Lusztig 簇。Deligne–Lusztig 簇和 Lusztig 簇的同调类由 Kim [29] 进行了研究。

1.2. 仿射 Lusztig 簇。本文的主要研究对象是 Lusztig 簇的仿射类比。

设 k 为代数闭域，$L = \mathrm{k}((\varepsilon))$ 为 Laurent 级数域（等特征情形）；若 k 的特征为 p，则 $W(\mathrm{k})[1/p]$ 为混合特征情形下的域，其中 $W(\mathrm{k})$ 是 p-典型 Witt 向量环。设 G 是定义在 L 上的连通约化群。设 $\check{G} = \mathrm{G}(L)$。

Date:2024年10月10日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 22E35,22E67。*Key words and phrases.* 仿射 Lusztig 簇、仿射 Deligne–Lusztig 簇、环群、仿射旗簇、仿射格拉斯曼。

令 $\mathrm{Gr} = \check{G}/\mathcal{K}^{\mathrm{sp}}$ 为 $\check{G}$ 的仿射格拉斯曼，$\mathrm{Fl} = \check{G}/\mathcal{I}$ 为仿射旗簇。我们定义仿射 Lusztig 簇

$$Y_\mu^{\mathbf{G}}(\gamma) = \{g\mathcal{K}^{\mathrm{sp}}; g^{-1}\gamma g \in \mathcal{K}^{\mathrm{sp}} t^\mu \mathcal{K}^{\mathrm{sp}}\},$$
$$Y_w^{\mathbf{G}}(\gamma) = \{g\mathcal{I} \in \mathrm{Fl}; g^{-1}\gamma g \in \mathcal{I}\dot{w}\mathcal{I}\}$$

分别位于仿射格拉斯曼和仿射旗簇中。这里，γ 是 G中的正则半单元素，μ 是 G的支配余权，而 w 是$\check{G}$的 Iwahori–Weyl 群中的一个元素。Lusztig 首先在 [38]中引入了仿射 Lusztig 簇。Kottwitz 和 Viehmann [33]也研究了仿射格拉斯曼中的仿射 Lusztig 簇。在文献中，仿射 Lusztig 簇也称为广义仿射 Springer 纤维或 Kottwitz–Viehmann 簇。

在等特征情形下，仿射 Lusztig 簇是仿射格拉斯曼和仿射旗簇的局部闭子概形，并赋有既约概形结构。在混合特征情形下，我们将仿射 Lusztig 簇视为 Zhu [51] 和 Bhatt–Scholze [4], 意义下的完美概形，即 p-进旗簇的局部闭完美子概形。

仿射格拉斯曼和仿射旗簇中的仿射 Lusztig 簇，自然地出现在对球 Hecke 代数和 Iwahori–Hecke 代数的轨道积分的研究中。粗略地说，基于 Grothendieck–Lefschetz 示性公式，可以将球 Hecke 代数（分别为 Iwahori–Hecke 代数）的轨道积分解释为相关仿射格拉斯曼（分别为仿射旗簇）上的仿射 Lusztig 簇的点计数问题。关于联系仿射 Springer 纤维与轨道积分的一些公式，可参阅 Yun 的讲义 [50], 以及 Chi 的近期预印本 [9, §5.3] ；关于联系仿射格拉斯曼中的仿射 Lusztig 簇与轨道积分的一些公式，可参阅 G. Wang 的论文 [49, 命题 11.2.5]。

仿射 Lusztig 簇也是（猜想中的）仿射特征层理论的构建基块。具体而言，我们考虑映射

$$m : \check{G} \times^{\mathcal{I}} \mathcal{I}\dot{w}\mathcal{I} \longrightarrow \check{G}, \qquad (g, g') \longmapsto gg'g^{-1},$$

其中 $\check{G} \times^{\mathcal{I}} \mathcal{I}\dot{w}\mathcal{I}$是 $\check{G} \times \mathcal{I}\dot{w}\mathcal{I}$ 关于由 $i \cdot (g, g') = (gi^{-1}, ig'i^{-1})$ 定义的 $\mathcal{I}$-作用的商。这一映射的纤维是仿射旗簇中的仿射 Lusztig 簇。该映射是 Lusztig 映射的仿射类比，后者用于定义代数闭域上约化群的特征层。将 $\mathcal{I}$ 替换为 $\mathcal{K}^{\mathrm{sp}}$，可以定义类似的映射。利用仿射 Lusztig 簇来实现 Lusztig 对 p-进群 [40] 的幺幂几乎特征，是一件很有意思的事。

1.3. 主要结果。确定仿射 Lusztig 簇的非空性模式和维数公式，是一个基本问题。

对于等特征情形下分裂连通约化群的仿射格拉斯曼中的仿射 Lusztig 簇，这一问题已由 Bouthier 和 Chi [5, 6, 8]解决（在剩余特征满足一个温和假设的条件下）。他们的方法依赖于运用 Hitchin 纤维化的整体论证，在混合特征情形下并不适用（例如，对于分歧元素 γ，$Y_\mu(\gamma)$ 的情形）。参见 [8, 注 1.2.3]。关于非分裂群或仿射旗情形，我们所知甚少。

本文的主要目的是研究等特征和混合特征情形下，任意（不一定分裂的）连通约化群的仿射旗簇中的仿射 Lusztig 簇。我们采用的方法与以往的方法截然不同。核心思想是建立仿射 Lusztig 簇与其 Frobenius 扭曲类比对象——仿射 Deligne–Lusztig 簇之间的密切联系。我们的方法完全是局部的，因此也适用于混合特征情形。我们将重点讨论仿射旗的情形，因为仿射格拉斯曼的情形可由此推得。

我们先简要回顾仿射 Deligne–Lusztig 簇。设 F' 是一个非阿基米德局部域，$\check{F}'$是 F'的最大非分歧扩张的完备化。设 G′是定义在 F'上的连通约化群，$\check{G}' = \mathrm{G}'(\check{F}')$，且 σ是 $\check{G}'$上的 Frobenius 自同态。设 $\mathcal{I}'$ 是 $\check{G}'$中一个 σ-稳定的 Iwahori子群。设 $b \in \check{G}'$ 和 w 是 $\check{G}'$的 Iwahori–Weyl 群中的元素。仿射 Deligne–Lusztig 簇 $X_w(b)$ 定义为

$$X_w^{\mathbf{G}'}(b) = \{g\mathcal{I}' \in \mathrm{Fl}'; g^{-1}b\sigma(g) \in \mathcal{I}'\dot{w}\mathcal{I}'\}.$$

仿射 Deligne–Lusztig 簇的概念最早由 Rapoport [44] 引入。它在算术几何和 Langlands 纲领中发挥着重要作用。仿射 Deligne–Lusztig

簇在过去二十年中得到了广泛研究；如今，我们对这类簇的了解远多于对仿射 Lusztig 簇的了解。仿射 Deligne–Lusztig 簇的非空性模式和维数公式，在仿射格拉斯曼情形下已完全获知，在仿射旗情形下则对大多数对 (w,b) 已知。详细讨论请参阅综述文章 [21] 。

仿射 Deligne–Lusztig 簇的结构一般而言相当复杂，而仿射 Lusztig 簇则更加复杂，部分原因在于，在环群中，普通共轭类的分类比 Frobenius 扭曲共轭类的分类更加复杂。在 $w=1$ 的特殊情形下，相应的仿射 Deligne–Lusztig 簇要么为空，要么是离散集。相应的仿射 Lusztig 簇是仿射 Springer 纤维 Fl^{γ}，一般而言是有限维的（但不是零维的）。仿射 Springer 纤维的维数公式由 Bezrukavnikov [2] 在等特征情形下以及 Chi [9] 在混合特征情形下得到。

本文的主要结果粗略地说表明，仿射 Lusztig 簇与仿射 Deligne–Lusztig 簇之间的差异源于仿射 Springer 纤维。

定理 1.1（定理 6.7）。设群 G′ over F' 与群 G over L 相关联。设 γ 是 $\check{G}$ 的一个正则半单元，并且 $[b]=f_{\mathbf{G},\,\mathbf{G}'}(\{\gamma\})$。那么，对于任意 $w\in W$，有

(1) $Y_w^{\mathbf{G}}(\gamma)\neq\emptyset$ 当且仅当 $X_w^{\mathbf{G}'}(b)\neq\emptyset$; (2) 若 $X_w^{\mathbf{G}'}(b)\neq\emptyset$,
则 $\dim Y_{\mathbf{G}w}(\gamma)=\dim X_w^{\mathbf{G}'}(b)+\dim Y_{\mathbf{G}\gamma}$。

特别地，$Y_w^{\mathbf{G}}(\gamma)$要么是空集，要么是有限维的。

关联群的概念见 §2.6。这意味着 G′ 是剩余分裂的，并且 G 与 G′的 Iwahori–Weyl 群之间存在自然双射。若 $\check{F}$ 的剩余特征为正，则可以取定义在 $\check{F}$ 上的 G′，使得 $\check{G}=\check{G}'$。然而，若 G 定义在$\mathbb{C}((\varepsilon))$上，则 G′ 必须选取在另一个域上。仿射 Lusztig 簇 $Y_w(\gamma)$ 的同构类取决于 w 以及 $\check{G}$中 γ 的共轭类 $\{\gamma\}$；仿射德利涅–卢斯蒂格簇 $X_w(b)$ 的同构类取决于 w 以及 $\check{G}'$中 b 的 Frobenius 扭曲共轭类 $[b]$。为使这些数据相匹配，我们在 §2.6 引入一个满射（但非单射）映射$f_{\mathbf{G},\mathbf{G}'}$，将 G 的共轭类集合映到 $\check{G}'$的 Frobenius 扭曲共轭类集合。簇 Y_γ 是与 γ相关联的仿射 Springer 纤维，该纤维在 §6.3 中通过定理 4.4 建立的普通共轭作用下的霍奇–牛顿分解引入。若 γ 有界，则 Y_γ 是 G 的仿射 Springer 纤维；一般而言，Y_γ 是 G 的某个利维子群的仿射 Springer 纤维。

最后，在定理 6.9 和 6.10 中，我们给出了仿射 Lusztig 簇非空性模式和维数公式的显式描述；在大多数情况下，这些描述基于我们对仿射 Deligne–Lusztig 簇和仿射 Springer 纤维的了解。

也可以运用本文提出的方法研究不可约分支。这将留待未来工作完成。

还值得指出的是，仿射 Lusztig 簇与仿射 Deligne–Lusztig 簇之间的关系并非以几何方式构造的，也就是说，并未通过显式定义从一种簇到另一种簇的映射，再计算其像和纤维来构造。我们可以预期，仿射 Lusztig 簇的（上）同调与仿射 Deligne–Lusztig 簇的（上）同调之间存在某种密切关系，这类似于 Lusztig [35] 的工作（参见例如 [41, 第 13]页所示的等式）。揭示仿射 Lusztig 簇与仿射 Deligne–Lusztig 簇之间关系的另一种可能途径，是通过仿射 Hecke 范畴的余中心与仿射特征层（猜想中的）理论之间的（猜想中的）联系。Li、Nadler 和 Yun [34] 最近研究了仿射 Hecke 范畴的余中心。

致谢：XH 部分获得新基石科学基金会通过新基石研究员项目和探索者奖提供的资助，并获得香港研究资助局项目 14300122 的资助。我们感谢池景仁、George Lusztig、Michael Rapoport 和云志伟所提供的有益讨论与建议，并感谢 Felix Schremmer 仔细阅读本文的初稿。我们感谢编辑和审稿人提出的诸多有益建议。

2. Preliminary

2.1. 环群与 Iwahori–Weyl 群。设 k 为代数闭域，$L=\mathrm{k}((\varepsilon))$ W为 Laurent 级数域，或者在 k 的特征为 p 时为 $W(\mathrm{k})[1/p]$，其中 $W(\mathrm{k})$ 为 p 型 Witt 向量环。设 G 为定义在 L 上的连通约化群。令 $\breve{G}=\mathrm{G}(L)$，并令 G^{rs} 为 G 中正则半单元素的集合。

设 S 是 G 的极大分裂环面，T 是 S 在 G 中的中心化子。则 T 是 G 的极大环面。$\breve{G}$ 的相对 Weyl群定义为 $W_0=\mathrm{N(T)}(L)/\mathrm{T}(L)$，其中 N(T) 是 T 的正规化子。$\breve{G}$ 的 Iwahori–Weyl 群定义为 $\tilde{W}=\mathrm{N(T)}(L)/\mathrm{T}(L)_0$，，其中 $\mathrm{T}(L)_0$ 是 T(L)的（唯一）抛物型子群。设 $\mathcal{A}$ 是 G 中与 S 对应的公寓。我们在 $\mathcal{A}$ 中固定一个胞腔 $\mathfrak{a}$，并令 $\mathcal{I}$ 为 G对应的 Iwahori子群。简单反射是沿基准胞腔 $\mathfrak{a}$的墙的反射。令 $\mathbb{S}$ 为 W的简单反射集。我们选取 $\mathfrak{a}$ 的一个特殊顶点 v_0，并将 W 表示为半直积

$$\tilde{W}=X_*(\mathbf{T})_{\Gamma_0}\rtimes W_0=\{t^\lambda w;\lambda\in X_*(\mathbf{T})_{\Gamma_0},w\in W_0\},$$

其中 X_*(T)$_{\Gamma_0}$ 是余权格 X_*(T) 在 $\Gamma_0=\mathrm{Gal}(L/L)$作用下的余不变元集合。令 $\mathbb{S}=\mathbb{S}\cap W_0$ 为 W_0的简单反射集合。对于任意 $w\in W$，我们在 N(T)(L) 中选取一个代表元 $\dot{w}$。按照约定，$V=X_*(T)_{\Gamma_0}\otimes\mathbb{R}$的优势Weyl室与包含 $\mathfrak{a}$的唯一 Weyl室相对。令 Δ 为由优势Weyl室确定的相对简单根集合。我们用 w_0 表示 W_0的最长元素。

W的由一个子集 $J\subset\mathbb{S}$ 生成的子群 W_J 如果也为有限群，则称其为球子集。在这种情况下，我们用 $\mathcal{P}_K$ 表示由 $\mathcal{I}$ 和 $\dot{w}$（其中 $w\in W_K$）生成的 G 的标准抛物型子群。根据定义，G 的抛物型子群是一个Iwahori子群的双陪集的有限并。G 的任意抛物型子群都与某个标准抛物型子群 $\mathcal{P}_K$ 共轭，其中 K 是 $\mathbb{S}$的一个球子集。

对于任意 $J\subset\tilde{\mathbb{S}}$，我们将 $W_J\backslash\tilde{W}$（分别为 $\tilde{W}/W_J$）的最小代表元集合记作 ${}^J\tilde{W}$（分别为 $\tilde{W}^J$）。对于任意 J、$K\subset\tilde{\mathbb{S}}$，我们简记 ${}^J\tilde{W}\cap\tilde{W}^K$ 为 ${}^J\tilde{W}^K$。

令 G_{af} 为由 G 的所有抛尔霍里子群生成的子群，令 W_{af} 为 G_{af} 的Iwahori–Weyl 群。于是，W_{af} 是由 S 生成的 W 的子群。令 Ω 为 W 中零长度元素的集合。则有 $W=W_{\mathrm{af}}\rtimes\Omega$。

2.2. 仿射 Lusztig 簇。$\breve{G}$ 的仿射旗簇定义为 $\mathrm{Fl}=\breve{G}/\mathcal{I}$。如果 $\mathcal{K}^{\mathrm{sp}}\supset\mathcal{I}$ 是与特殊顶点 v_0 对应的 G 的极大特殊抛尔霍里子群，那么我们也考虑仿射格拉斯曼 $\mathrm{Gr}=\breve{G}/\mathcal{K}^{\mathrm{sp}}$。当 L 为 Laurent 级数域时，仿射旗簇和仿射格拉斯曼都具有自然的归纳极限概形结构。在混合特征情形下，我们将仿射旗簇和仿射格拉斯曼视为 Zhu [51] 和 Bhatt–Scholze [4] 意义下的完美归纳极限概形。

令 $X_*(T)^+_{\Gamma_0}$ 为支配余权的集合。我们有如下分解

$$\breve{G}=\bigsqcup_{w\in\tilde{W}}\mathcal{I}\dot{w}\mathcal{I},\qquad \breve{G}=\bigsqcup_{\mu\in X_*(T)^+_{\Gamma_0}}\mathcal{K}^{\mathrm{sp}}t^\mu\mathcal{K}^{\mathrm{sp}}.$$

对于任意 $\gamma\in\breve{G}$ 和 $w\in\tilde{W}$，仿射旗簇 Fl 中的仿射 Lusztig 簇 $Y_w(\gamma)$ 定义为

$$Y_w(\gamma)=\{g\mathcal{I}\in\mathrm{Fl};g^{-1}\gamma g\in\mathcal{I}\dot{w}\mathcal{I}\}.$$

对于满足 $\ell(w)=0$ 和 $\gamma\in\mathcal{I}\dot{w}\mathcal{I}$ 的 $w\in W$，有 $\mathcal{I}\dot{w}\mathcal{I}=\mathcal{I}\gamma$，且 $Y_w(\gamma)=\mathrm{Fl}^\gamma$ 是仿射 Springer 纤维。

对于任意支配余权 μ 和 $\gamma\in\breve{G}$，仿射格拉斯曼 Gr 中的仿射 Lusztig 簇 $Y_\mu(\gamma)$ 定义为

$$Y_\mu(\gamma)=\{g\mathcal{K}^{\mathrm{sp}}\in\mathrm{Gr};g^{-1}\gamma g\in\mathcal{K}^{\mathrm{sp}}t^\mu\mathcal{K}^{\mathrm{sp}}\}.$$

根据定义，$Y_w(\gamma)$ 是 Fl 中的局部闭归纳极限子概形，而 $Y_\mu(\gamma)$ 是 Gr 中的局部闭归纳极限子概形。令 $Z_{\breve{G}}(\gamma)=\{g\in\breve{G};g^{-1}\gamma g=\gamma\}$ 为 γ 的中心化子。它作用于仿射 Lusztig 簇 $Y_w(\gamma)$ 和 $Y_\mu(\gamma)$。

2.3. 仿射 Deligne–Lusztig 簇。设 $F' = \mathbb{F}_q((\varepsilon))$ 和 $\breve{F}' = \overline{\mathbb{F}}_q((\varepsilon))$。设 G′ 为连通约化群，在 F' 上剩余分裂，且 $\breve{G}' = $G′($\breve{F}'$)。设 σ 为 $\breve{G}'$ 上的 Frobenius 自同态。我们固定 $\breve{G}'$ 的一个 σ-稳定 Iwahori–Weyl 群 $\mathcal{I}'$。设 $\tilde{W}'$ 为 $\breve{G}'$ 的 Iwahori–Weyl 群， W_0' 为相对Weyl群。

对于 $b \in \breve{G}'$，仿射旗簇中的仿射 Deligne–Lusztig 簇 $X_w(b)$ 定义为

$$X_w(b) = \{g\mathcal{I} \in \mathrm{Fl}'; g^{-1}b\sigma(g) \in \mathcal{I}'\dot{w}\mathcal{I}'\}.$$

设 $\mathcal{K}' \supset \mathcal{I}'$ 是 $\breve{G}'$的一个 σ-稳定极大特殊抛尔霍里子群；那么我们也可以考虑仿射格拉斯曼 $\mathrm{Gr}' = \breve{G}'/\mathcal{K}'$ 中由下式定义的仿射 Deligne–Lusztig 簇

$$X_\mu(b) = \{g\mathcal{K}' \in \mathrm{Gr}'; g^{-1}b\sigma(g) \in \mathcal{K}'t^\mu\mathcal{K}'\}.$$

众所周知，仿射 Deligne–Lusztig 簇是仿射旗簇（分别为仿射格拉斯曼）中的局部有限型子概形。令 J_b 为 b 的 σ-中心化子，并令 $g^{-1}b\sigma(g) = b\}$ 为 J_b的 F'-有理点群。那么， J_b 自然作用于与 b相关的仿射 Deligne–Lusztig 簇上。

2.4. 集合 B_σ(G′) 和 B(G)。对于任意 $\gamma \in \breve{G}$，令 $\{\gamma\} = \{g\gamma g^{-1};\ g \in \breve{G}\}$ 为 γ的共轭类。令 B(G) 为 $\breve{G}$ 的共轭类集合。对于任意 $b \in \breve{G}'$，令 $[b] = \{gb\sigma(g)^{-1};\ g \in \breve{G}'\}$ 为 b的 σ-共轭类。令 B_σ(G′) 为 $\breve{G}'$的 σ-共轭类集合。

注意，仿射 Deligne–Lusztig 簇的同构类取决于 σ-共轭类 $[b]$，而非 $[b]$中的代表元 b。类似地，仿射 Lusztig 簇的同构类取决于共轭类 $\{\gamma\}$，而非 $\{\gamma\}$的代表元 γ。现在我们回顾 Kottwitz 对 B_σ(G′) 的分类及其在 B(G) 上的类似结果。

固定 G′的一个极大 F'-分裂环面 A′。设 S′是一个定义在 F'上且包含 A′的极大 $\breve{F}'$-分裂环面。设 Γ_0'为 F'的绝对伽罗瓦群。设 T′为 S′的中心化子。设 X_*(T′)$^+_{\mathbb{Q}}$ 为 T′上的支配有理余权集合。Kottwitz [30, 31]已对 $\breve{G}'$ 的 σ-扭共轭类进行了分类。这里我们只陈述剩余分裂群的结果。

定理 2.1。存在一个嵌入

$$f_\sigma : B_\sigma(\mathbf{G}') \longrightarrow \pi_1(\mathbf{G}')_{\Gamma_0'} \times X_*(\mathbf{T}')^+_{\mathbb{Q}}, \quad [b] \longmapsto (\kappa([b]), \nu_{[b]}).$$

Chai [7] 给出了 f_σ的像的显式描述。

类似地，我们有如下结论。

定理 2.2。存在一个自然映射

$$f : B(\mathbf{G}) \longrightarrow \pi_1(\mathbf{G})_{\Gamma_0} \times X_*(\mathbf{T})^+_{\mathbb{Q}}, \quad \{\gamma\} \longmapsto (\kappa(\{\gamma\}), \nu_{\{\gamma\}}).$$

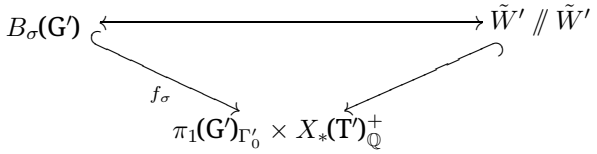
对于分裂群，这归功于 Kottwitz 和 Viehmann [33] 。一般情形则在 [26, §3] 中进行了研究。注意，映射 f 与 f_σ 不同，一般而言并非单射。我们不再回顾映射 f 和 f_σ 的精确定义，但将在下一小节中给出这些映射在 Iwahori–Weyl 群上的限制的显式描述。

˘2.5. 直共轭类。为了将 G 的共轭类与 $\breve{G}'$的 σ-共轭类对应起来，有必要比较 f与 f_σ的像。在本小节中，我们回顾 Iwahori–Weyl 群中直共轭类的定义，并比较直共轭类集合与 f 和 f_σ的像。

˜根据定义，若对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $\ell(w^n) = n\ell(w)$，则称元素 $w \in W$ 为直元素。若一个共轭类包含直元素，则称其为直共轭类。我们用 $W /\!\!/ W$ 表示 W 的直共轭类集合˜。

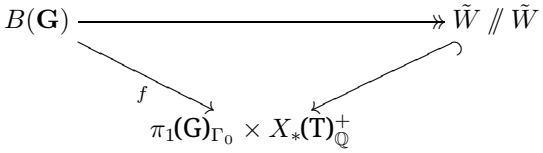
令 $w \in \tilde{W}$。于是存在一个正整数 n，使得对于某个 $\lambda \in X_*$(T)$^{\Gamma_0}$，有 $w^n = t^\lambda$。我们令 $\nu_w = \frac{\lambda}{n} \in X_*(T)_{\mathbb{Q}}$。容易看出， ν_w 与 n的选取无关。令 $\bar{\nu}_w$为 ν_w在 W_0-轨道中的唯一支配余权。我们还有一个自然同一$\tilde{W}/W_{\mathrm{af}} \cong \Omega \cong \pi_1(\mathbf{G})_{\Gamma_0}$。考虑映射 $\tilde{W} \to \pi_1(\mathbf{G})_{\Gamma_0} \times X_*(\mathbf{T})^+_{\mathbb{Q}}$， 其定义为 $w \mapsto (wW_{\mathrm{af}}, \bar{\nu}_w)$。根据 [24, 定理 3.3], ，该映射诱导出一个单射 $\tilde{W} /\!\!/ \tilde{W} \to \pi_1(G)_{\Gamma_0} \times X_*(T)^+_{\mathbb{Q}}$。类似地，我们有一个单射 $\tilde{W}' /\!\!/ \tilde{W}' \to \pi_1$(G′)$_{\Gamma_0'} \times X_*$(T′)$^+_{\mathbb{Q}}$。

~ ~ ~值得指出的是， σ 在 W' 上的诱导作用是平凡的，因此此处考虑的 $W'/\!\!/W'$~ ~与 [19]中的直 σ-共轭类 $W'/\!\!/W'$ 集合相同。根据 [19,~ ~§3], ，映射 $w \mapsto \dot{w}$ 在 $B_\sigma(\mathbf{G}')$ 与 $W'/\!\!/W'$ 之间诱导出一个自然双射，使得下图交换:



~双射如下给出。设 C' 是 W' 的一个直共轭类。那么，根据 [19],$\check{G}' \cdot_\sigma \mathcal{I}'\dot{w}'\mathcal{I}'$ 与 C' 中最小长度元素 w' 的选取无关，并且是 $\check{G}'$ 的一个单一σ-共轭类。映射 $B_\sigma(\mathbf{G}') \to \tilde{W}'/\!\!/\tilde{W}'$ 定义为 $[b] \mapsto C_{[b]}$，其中 $C_{[b]}$ 是 $\tilde{W}'/\!\!/\tilde{W}'$ 中满足 $[b] = \check{G}' \cdot_\sigma \mathcal{I}'\dot{w}'\mathcal{I}'$ 的唯一元素，对 $C_{[b]}$ 的任意最小长度元素 w' 均成立。

根据 [26, 第 3], 节，我们有一个类似的交换图



~ ~这里，映射 $B(\mathbf{G}) \to W/\!\!/W$ 定义如下。根据 [26, §3.2], ，给定 W的一个直线共轭 ~ ~类 C，子集 $G \cdot \mathcal{I}\dot{w}\mathcal{I}$与 C中最小长度元素 w的选取无关。我们将此子集记为 $\{C\}$。于是，根据 [26, 定理 3.2], $\check{G} = \bigsqcup_{C \in \tilde{W}/\!\!/\tilde{W}} \{C\}$。映射 ~ ~ ~ ~B(G) $\to W/\!\!/W$ 定义为 $\{\gamma\} \mapsto C_{\{\gamma\}}$，其中 $C_{\{\gamma\}}$ 是 $W/\!\!/W$ 中满足$\{\gamma\} \subset \{C_{\{\gamma\}}\}$的唯一元素。

集合 $\{C\}$ 在 $\check{G}$的共轭作用下保持稳定，但它可能包含无穷多个~ ~共轭类。映射 $B(\mathbf{G}) \to W/\!\!/W$ 是满射，但不是单射。这不同于~ ~双射映射 $B_\sigma(\mathbf{G}') \to W'/\!\!/W'$。

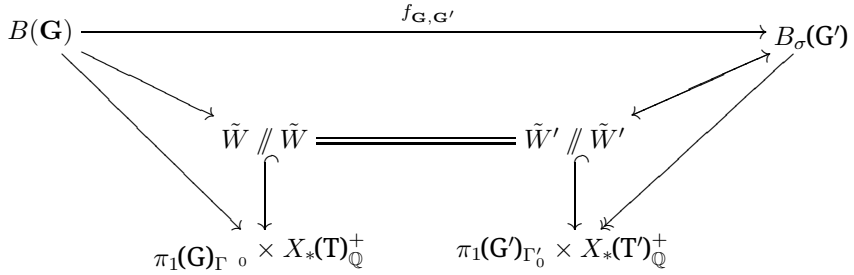
2.6. 从 $B(\mathbf{G})$ 到 $B_\sigma(\mathbf{G}')$ 的映射。若群 $\mathbf{G}'$ 在 F' 上与群 $\mathbf{G}$ 在 L 上相关联，我们称之为：$\mathbf{G}'$ 在 F' 上剩余分裂，并且存在一个与半直积相容的保长度同构 ~ ~W $\cong W'$，即

$$\begin{array}{ccc} X_*(T)_{\Gamma_0} \rtimes W_0 & = & \tilde{W} \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ X_*(T')_{\Gamma_0'} \rtimes W_0' & = & \tilde{W}' \end{array}$$

特别地，我们要求该同构在余权格和相对 Weyl 群上分别诱导同构，并在简单反射集合上诱导双射。根据约化群分类，对于任意 $\mathbf{G}$，都存在一个与之相关联的连通约化群 $\mathbf{G}'$ ，定义在 F' 上。

~ ~假设 $\mathbf{G}'$ 与 $\mathbf{G}$ 相关联。那么我们可以将 W' 与 W等同。在此~ ~ ~ ~ 等同下，我们有 $W/\!\!/W = W'/\!\!/W'$。因此存在一个映射 $f_{\mathbf{G},\mathbf{G}'}$: $B(\mathbf{G}) \to B_\sigma(\mathbf{G}')$

使得下图交换:



注意， $B_\sigma(\mathrm{G}')$ 与 $W /\!\!/ W$之间存在自然双射。因此，映射 $f_{\mathbf{G},\mathbf{G}'}\colon B(\mathrm{G}) \to B_\sigma(\mathrm{G}')$ 是满射。然而，这个映射一般来说不是单射。

3. Affine Springer fibers

3.1. 模中心有界元素。本文其余部分中，除非另有说明，我们假设 k 的特征 $=0$ 或 k 的特征 >0 不整除 G 的 Weyl 群 W_0。

本节中，我们考虑群 G 以及一个群自同构 δ，满足$\delta(\mathcal{I}) = \mathcal{I}$。于是， δ 也在 W 和 Ω 上诱导出群自同构。我们考虑群扩张

$$\check{G}^{\mathrm{ex}} = \check{G} \rtimes \langle\delta\rangle, \tilde{W}^{\mathrm{ex}} = \tilde{W} \rtimes \langle\delta\rangle \text{ and } \Omega^{\mathrm{ex}} = \Omega \rtimes \langle\delta\rangle.$$

G^{ex} 中的一个元素称为有界的，如果它包含在某个有界子群中。注意，若$\tau \in \Omega^{\mathrm{ex}}$ 具有有限阶，则 $\mathcal{I}\dot{\tau}$ 中的任意元素都是有界的。另一方面，若 $g \in G^{\mathrm{ex}}$ 有界，则它在仿射旗簇中有一个不动点。因此，它共轭于中某个形如 $\mathcal{I}\dot{\tau}$ 的元素，其中 $\tau \in \Omega^{\mathrm{ex}}$。由有界性可知， τ 具有有限阶。因此， G^{ex} 中的一个元素有界，当且仅当它共轭于 $\mathcal{I}\dot{\tau}$ 中某个元素，其中 $\tau \in \Omega^{\mathrm{ex}}$ 且该元素具有有限阶。

Let $\check{G}_{\mathrm{ad}}$ 是 $\check{G}$。我们有一个自然投影映射 $\check{G}^{\mathrm{ex}} \to \mathrm{Aut}(G_{\mathrm{ad}})$。如果 $\check{G}^{\mathrm{ex}}$ 在 $\mathrm{Aut}(\check{G}_{\mathrm{ad}})$ 中的像是有界的，则称其为模中心有界。我们进一步假设， δ 在 $\mathrm{Aut}(\check{G}_{\mathrm{ad}})$ 中的像具有有限阶。于是， $\check{G}^{\mathrm{ex}}$是模中心有界，当且仅当它共轭于某个 $\mathcal{I}\dot{\tau}$ 中的元素，其中 $\tau \in \Omega^{\mathrm{ex}}$。因此， G^{ex} 是模中心有界，当且仅当它共轭于 $\mathcal{P}_K\dot{\tau}$ 中的某个元素，其中 $\tau \in \Omega^{\mathrm{ex}}$，且 K 是 $\mathbb{S}$的 $\mathrm{Ad}(\tau)$-稳定球子集。

3.2. 正则轨迹。设 G^{ex}的 γ 是一个模中心有界元素。设 $\tau \in \Omega^{\mathrm{ex}}$，且 K是 $\mathbb{S}$的 $\mathrm{Ad}(\tau)$-稳定球子集。我们在部分仿射旗簇 $\check{G}/\mathcal{P}_K$ 中定义仿射 Springer 纤维如下:

$$Y_{K,\tau}(\gamma) = \{g\mathcal{P}_K \in \check{G}/\mathcal{P}_K; g^{-1}\gamma g \in \mathcal{P}_K\dot{\tau}\}.$$

根据定义， $Y_{K,\,\tau}(\gamma) \neq \emptyset$当且仅当 γ共轭于 $\mathcal{P}_K\dot{\tau}$中的某个元素。若进一步假设 $\gamma \in \mathcal{P}_K\dot{\tau}$，则 $g^{-1}\gamma g \in \mathcal{P}_K\dot{\tau}$ 成立的条件等价于 $\gamma(g\mathcal{P}_K)\gamma^{-1} = g\mathcal{P}_K$。换言之， $Y_{K,\,\tau}(\gamma) = (\check{G}/\mathcal{P}_K)^\gamma$ 是 γ 在 $\check{G}/\mathcal{P}_K$上的不动点子概形。

令 $\mathcal{P}_K$ 为 $\mathcal{P}_K$的约化商，即 $\mathcal{P}_K$ 除以其原幺幂根所得的商。 $\mathcal{P}_K$ 的 Dynkin 图为 K。 $\dot{\tau}$ 在 $\mathcal{P}_K$ 上的共轭作用诱导出 $\mathcal{P}_K$上的图自同构，记作 $\bar{\tau}$。对于 $\mathcal{P}_K\dot{\tau}$中的任意元素 γ'，记 $\bar{\gamma}'$ 为其在（不一定连通的）约化群 $\mathcal{P}_K \rtimes \langle\bar{\tau}\rangle$中的像。我们考虑正则轨迹

$$Y^{\mathrm{reg}}_{K,\tau}(\gamma) = \{g\mathcal{P}_K \in Y_{K,\tau}(\gamma); \overline{g^{-1}\gamma g} \text{ is regular in } \bar{\mathcal{P}}_K \rtimes \langle\bar{\tau}\rangle\}.$$

由于 k 上任意约化群（不一定连通）中的正则元素构成开集， $Y_{\text{正则 }K,\,\tau}(\gamma)$ 是 $Y_{K,\,\tau}(\gamma)$ 中的开集。由 $[28, \S3,$ 命题 $1]$,可知，与模中心有界正则半单元素相关联的仿射 Springer 纤维是有限维的。

现在我们陈述本节的主要结果。

定理 3.1. 设 $\gamma \in G^{\mathrm{ex}}$ 是一个模中心有界的正则半单元。那么 (1) 仿射旗簇中的仿射 Springer 纤维 Fl^γ 是等维的;

˜(2) 对任意的 $\tau\in\Omega^{\mathrm{ex}}$，以及 $\mathbb{S}$中满足 $\gamma\in\mathcal{P}_K\dot{\tau}$的 Ad($\tau$)-稳定球子集 K，正则轨迹$Y_{\text{正则}}$ $_{K,\ \tau}(\gamma)$ 非空，且

$$\dim Y_{K,\tau}(\gamma)=\dim Y_{K,\tau}^{\mathrm{reg}}(\gamma)=\dim \mathrm{Fl}^{\gamma}.$$

3.3. 拓扑 Jordan 分解。我们沿用 [3, 附录 B]。回忆一下，k 是˘ ˘ F的 $\gamma\in G^{\mathrm{ex}}$ 剩余域。设 γ 为一个有界半单元。若对 $\mathbf{G}^{\mathrm{ex}}$ 的每个表示（在 $\breve{F}$的代数闭包上）， γ 的像的任一特征值在 $\mathbf{k}^{\times}$ 中（等特征情形），或为 $\mathbf{k}^{\times}$ 中某个元素的 Teichm¨uller 代表元（混合特征情形），则称 γ 为强半单纯。后一条件等价于：任一特征值的阶均为与 p互素的有限阶，其中 p 是剩余特征。若对 $\mathbf{G}^{\mathrm{ex}}$ 的每个表示（在$\breve{F}$的代数闭包上）， γ的任一特征值 α都满足 $\mathrm{val}_{\breve{F}}(\alpha-1)>0$, 则称 γ 为拓扑幺幂。

以下结果称为拓扑 Jordan 分解。Bezrukavnikov 和 Varshavsky [3, 在引理 B.16] 中证明了该结果适用于等特征情形下的分裂群。同一证明对等特征和混合特征下的所有群均适用。

˘引理 3.2。设 $\gamma\in G^{\mathrm{ex}}$ 是一个有界半单元。则存在唯一的分-˘ ˘解 $\gamma=su=us$，使得 $s\in G^{\mathrm{ex}}$ 是强半单纯的，且 $u\in G^{\mathrm{ex}}$ 是拓扑幺幂的。

拓扑 Jordan 分解可以明确地描述如下。注意，˘中的任意有界元都共轭于 G^{ex} 中的某个元素，而该元素属于 $\mathcal{I}\dot{\tau}$，其中 $\tau\in\Omega^{\mathrm{ex}}$ 具有有限阶。设 $\gamma\in\mathcal{I}\dot{\tau}$。按照 [3, 引理 B.17], 的证明，我们可以将 $\mathcal{I}$ 表示为 $\lim_n H_n$，其中 $H_n=\mathcal{I}/\mathcal{I}_n$ 是 k 上的一个代数群。这里， $\mathcal{I}_n$ 是 $\mathcal{I}$ 的第 n个同余子群。Ω^{ex} 的共轭作用保持 $\mathcal{I}_n$ 不变，并对每个 n在 H_n 上诱导一个作用。我们考虑群扩张 $H_n^{\mathrm{ex}}=H_n\rtimes\langle\dot{\tau}\rangle$。于是， $\gamma\in\mathcal{I}\dot{\tau}$对应于一个族 $\gamma_n\in H_n^{\mathrm{ex}}$。令 $\gamma_n=s_nu_n=u_ns_n$ 为 $\gamma_n\in H_n^{\mathrm{ex}}$的 Jordan 分解。根据 Jordan 分解的唯一性， $\{s_n\}_n$和 $\{u_n\}_n$都构成相容族。令 $s=\lim_n s_n\in\mathcal{I}\rtimes\langle\dot{\tau}\rangle$ 且$u=\lim_n u_n\in\mathcal{I}\rtimes\langle\dot{\tau}\rangle$。则 $\gamma=su=us$。根据 [3, 引理 B.17]的证明， s是强半单纯的，而 u 是拓扑幺幂的。因此， su 就是 γ的拓扑 Jordan 分解。

我们还有以下关于拓扑幺幂元的简单判据。设 $U_{\mathcal{I}}$ 是 $\mathcal{I}$ 的原幺幂根， $\mathcal{I}=\mathcal{I}/U_{\mathcal{I}}$ 是约化商，它是定义在 k 上的一个环面。设 $\gamma\in\mathcal{I}\rtimes\Omega^{\mathrm{ex}}$，且 $\bar{\gamma}$ 是 γ 在 $\mathcal{I}\rtimes\Omega^{\mathrm{ex}}$ 中的像。不难看出， γ 是拓扑¯幺幂的，当且仅当 $\bar{\gamma}$ 是（非连通）约化群 $\mathcal{I}\rtimes\Omega^{\mathrm{ex}}$ 中的幺幂元。当剩余特征较大时， $\mathcal{I}\rtimes\Omega^{\mathrm{ex}}$ 中唯一的幺幂元是单位元。在这种情况下， $\mathcal{I}\rtimes\Omega^{\mathrm{ex}}$ 中的拓扑幺幂元是 $U_{\mathcal{I}}$ 中的元素，˘ ˘，而 G 的拓扑幺幂元全部包含于 G_{af} 中。然而，剩余特征较小时情况并非如此。

例 3.3. 令 $\mathbf{G}=\mathrm{PGL}_2$ and $\breve{F}=\bar{\mathbb{F}}_2((\varepsilon))$. 那么 $\begin{bmatrix}\varepsilon & 1\\ \varepsilon & \varepsilon+\varepsilon^2\end{bmatrix}$ 是一个拓扑幺幂˘正则半单元。然而，该元素不属于 G_{af}。

3.4. 等维性。为证明定理 3.1，可以将讨论归约到伴随群的情形。特别地，可以假设 γ 是一个有界元。

令 $\gamma=su$ 为拓扑 Jordan 分解。对于任意强半单元˜$s\in G$，记 $\mathbf{G}_s^{\mathrm{sc}}$为$s$的中心化子的导出群的单连通覆盖。根据 [3, 引理 B.2.3], , 仿射 Springer 纤维 $(\mathrm{Fl}^{\mathbf{G}})^{\gamma}$ 与仿射 Springer 纤维 $(\mathrm{Fl}^{\mathbf{G}_s^{\mathrm{sc}}})^{\gamma}$ 的若干个副本的不交并之间存在普适同胚。

只需证明以下内容：

(a) 假设 G 是一个半单、单连通群。设 γ 是 $\breve{G}^{\mathrm{ex}}$中的一个拓扑幺幂元。那么仿射 Springer 纤维 Fl^{γ} 是连通且等维的。

当 G 在 $\mathbb{C}((\varepsilon))$ 上分裂时，该结果归功于 Kazhdan 和 Lusztig [28, §4，命题 1 和引理 2]。一般情形可由他们的证明推出，但需额外留意非连通约化群中幺幂元对应的 Springer 纤维（仅在小特征下出现）

如 [47, 第 II 章，§1] 所述。为方便读者，我们简要概述证明。

假设对于某个 $\tau\in\Omega^{\mathrm{ex}}$，$\gamma\in\breve{G}\dot{\tau}$。令 $\tilde{\mathbb{S}}_{\tau\text{-sph}}$ 为 $\tilde{\mathbb{S}}$ 上的球面 Ad(τ)-轨道集合。对于任意 $K\in\tilde{\mathbb{S}}_{\tau\text{-sph}}$，我们考虑投影映射 $\pi:\mathrm{Fl}\to\breve{G}/\mathcal{P}_K$。根据斯坦伯格定理，映射 π 从 Fl^γ 到 $Y_{K,\tau}(\gamma)=(\breve{G}/\mathcal{P}_K)^\gamma$ 诱导一个满射，而 $g\mathcal{P}_K$ 上的纤维是有限旗 $\mathcal{P}_K/\mathcal{I}$ 中与元素 $\overline{g^{-1}\gamma g}$ 相关联的 Springer纤维，其中 $\overline{g^{-1}\gamma g}$ 是 $g^{-1}\gamma g$ 在（不连通）约化群 $\bar{\mathcal{P}}_K\rtimes\Omega^{\mathrm{ex}}$ 中的像。由于 γ 是拓扑幺幂的，$\overline{g^{-1}\gamma g}$ 是幺幂的。根据 [47, Chap. II, Lemme 1.3], ，映射 $\pi:\mathrm{Fl}^\gamma\to(\breve{G}/\mathcal{P}_K)^\gamma$ 的任意纤维要么是一个点，要么是一条一维曲线。后一种情况下，我们称这条一维曲线为一条 K 型直线。

关于连通性，我们遵循 [28, §4，引理 2] 的证明。设 $z,z'\in\mathrm{Fl}^\gamma$。令 w 为 z 与 z' 的相对位置。则 w 也是 $\dot{\tau}\cdot z$ 与 $\dot{\tau}\cdot z'$ 的相对位置。因此 w 与 τ 交换。对于任意 $K\in\mathbb{S}_{\tau\text{-sph}}$，我们将有限 Weyl 群 W_K 中的最长元素记为 w_K。由于群 G 半单且单连通，Iwahori–Weyl 群 W 就是仿射 Weyl 群 W_{af}。根据 [37, 定理 A，W 中 τ 的中心化子是由 $\{w_K\}_{K\in\tilde{\mathbb{S}}_{\tau\text{-sph}}}$ 生成的仿射 Weyl 群。因此，我们有一个长度可加表达式 $w=w_{K_1}\cdots w_{K_n}$，其中 $K_1,\dots,K_n\in\mathbb{S}_{\tau\text{-sph}}$。于是存在唯一的序列 $z=z_0,z_1,\dots,z_n=z'$，其元素属于 Fl^γ，使得对于任意 $0<i\leqslant n$，z_{i-1} 与 z_i 都属于投影映射 $\mathrm{Fl}^\gamma\to(\breve{G}/\mathcal{P}_{K_i})^\gamma$ 的同一纤维。因此 z_{i-1} 与 z_i 可由一条 K_i 型直线相连。特别地，z 与 z' 相连，因此 Fl^γ 是连通的。

最后，我们证明等维性。设 Y 是 Fl^γ 的一个不可约分支。设 Y_0 是 Fl^γ 的一个维数为 d 的不可约分支，其中 $d=\dim\mathrm{Fl}^\gamma$。设 $z\in Y_0$ 和 z' 是 Y 中的一般点。设 $z=z_0$、z_1、……、$z_n=z'$ 是 Fl^γ 中的一列元素，使得对于任意 $0<i\leqslant n$，z_{i-1} 和 z_i 都由一条类型为 K_i 的直线 $\mathcal{L}_i$ 连通。根据 [28, §4，引理 1], ，存在 Fl^γ 的一个不可约分支 Y_i，使得 $\dim Y_i=d$ 且 $\mathcal{L}_i\subset Y_i$。特别地，$z'\in\mathcal{L}_n\subset Y_n$。由于 z' 是 Y 中的一般点，我们必有 $Y=Y_n$。特别地，$\dim Y=d$。

3.5. 正则轨道非空性。当 G 在 $\mathbb{C}((\varepsilon))$ 上分裂，且 K 是超特殊的时，该结果归功于 Kazhdan 和 Lusztig [28, §4，推论 1 和 2]。一般情形可由他们的证明推出，但需特别注意非连通约化群的施普林格纤维。为方便读者，我们简要概述证明。

设 $d=\dim\mathrm{Fl}^\gamma$。令 $\rho\colon W^{\mathrm{ex}}\to\mathrm{Aut}(H_{2d}(\mathrm{Fl}))$ 为 W^{ex} 在 $H_{2d}(\mathrm{Fl})$ 上的自然作用。假设 $\gamma\in\breve{G}_{\mathrm{af}}\dot{\tau}$，其中 $\tau\in\Omega^{\mathrm{ex}}$。令 V_γ 为 $H_{2d}(\mathrm{Fl}^\gamma)$ 在 $H_{2d}(\mathrm{Fl})$ 中的像。与 [28, §4 引理 7] 类似，V_γ 是 $Z_{\tilde{W}^{\mathrm{ex}}}(\tau)$-不变子空间，且包含于 $H_{2d}(\mathrm{Fl})$ 中。注意，$Z_{W_K}(\tau)$ 是 $Z_{\tilde{W}^{\mathrm{ex}}}(\tau)$ 的有限子群。与 [28, §4 引理 8], 类似，$(V_\gamma)^{Z_{W_K}(\tau)}\neq\{0\}$。对于 Fl^γ 的任意不可约分支 Y，我们用 $[Y]$ 表示由 Y 表示的同调类。令 $T=\sum_{w\in Z_{W_K}(\tau)}\rho(w)$。由于 $(V_\gamma)^{Z_{W_K}(\tau)}\neq\{0\}$，$T[Y]\neq0$，其中 Y 是 Fl^γ 的某个不可约分支。特别地，对于 K 中任意 Ad(τ)-轨道 K_1，都有 $(\mathrm{id}+\rho(w_{K_1}))[Y]\neq0$。与 [28, §4 引理9] 类似，$Y$ 不是由 K_1 型直线组成的并集。

设 y 是 Y 中的一般点。那么，对于 K 中任意一个 Ad(τ)-轨道 K_1，y 都不在 K_1 类型的直线上。设 y' 是 y 在 $\breve{G}/\mathcal{P}_K$ 中的像。那么 $y'\in(\breve{G}/\mathcal{P}_K)^\gamma=Y_{K,\tau}(\gamma)$。假设 $y'=g\mathcal{P}_K$。投影映射 $\mathrm{Fl}^\gamma\to Y_{K,\tau}(\gamma)$ 的 y' 纤维，是与元素 $\overline{g^{-1}\gamma g}$ 相关的 $\mathcal{P}_K/\mathcal{I}$ 的 Springer纤维。该纤维不包含任何一条经过 y 的 K_1 类型直线。根据 [47, 第二章，推论 1.7], ，该纤维是 0 维的。因此，$\overline{g^{-1}\gamma g}$ 是 $\overline{\mathcal{P}_K}\rtimes\langle\bar{\tau}\rangle$ 中的正则元素。于是 $y'\in Y_{\text{正则 }K,\tau}(\gamma)$。

令 $\pi:\mathrm{Fl}\to\breve{G}/\mathcal{P}_K$ 为投影映射。则 π 限制为满射 $\mathrm{Fl}^\gamma\to Y_{K,\tau}(\gamma)=(\breve{G}/\mathcal{P}_K)^\gamma$。特别地，$\dim Y_{K,\tau}(\gamma)\leqslant\dim\mathrm{Fl}^\gamma$。另一方面，由于 $Y^{\mathrm{reg}}{}_{K,\tau}(g)$ 在 $Y_{K,\tau}(\gamma)$ 中非空且开，$\pi^{-1}(Y^{\mathrm{reg}}{}_{K,\tau}(\gamma))$ 在 Fl^γ 中非空且开。根据定理 3.1 (1)，$\dim\mathrm{Fl}^\gamma=\dim\pi^{-1}(Y^{\mathrm{reg}}{}_{K,\tau}(\gamma))$。注意，映射 $\pi\colon\pi^{-1}(Y_{K,\tau}(\gamma))\to Y^{\mathrm{reg}}{}_{K,\tau}(\gamma)$ 的纤维是与正则元素相对应的有限旗中的 Springer纤维，因此是 0 维的。因此，$\dim(\pi^{-1}(Y^{\mathrm{reg}}{}_{K,\tau}(\gamma)))=\dim Y^{\mathrm{reg}}{}_{K,\tau}(\gamma)$。所以 $\dim\mathrm{Fl}^\gamma=\dim Y^{\mathrm{reg}}{}_{K,\tau}(\gamma)\leqslant\dim Y_{K,\tau}(\gamma)$。证明完毕。

4. 霍奇–牛顿分解

4.1. P-胞腔元素。我们遵循 [16]。令 $\mathbf{P} = \mathbf{MN}$ 为一个半标准抛物子群。

我们称 $w \in W$ 为 P-胞腔元素，若 w 属于 M 的 Iwahori–Weyl 群 $W_{\mathbf{M}}$，并且对于 G 的任意相对根 α，若其根子群为 $U_\alpha \subset \mathbf{N}(\breve{F})$，则有 $U_\alpha \cap {}^{\dot{w}}\mathcal{I} \subset U_\alpha \cap \mathcal{I}$。

仿射 Deligne–Lusztig 簇的霍奇–牛顿分解已在 [16,定理 2.1.4] 中针对分裂群证明，并在一般情形下于 [17, 定理 3.3.1] 中证明。这里陈述剩余特征分裂群的情形。在此情形下，σ 在 W 上的诱导作用是平凡的。

定理 4.1. 设 $\mathbf{P}' = \mathbf{M}'\mathbf{N}'$ 是 $\mathbf{G}'$ 的半标准抛物子群，且 $w \in W'$是一个 P′-胞腔元素。那么 $X_w^{\mathbf{G}'}(b) \neq \emptyset$ 蕴含 $[b] \cap \mathbf{M}'(\breve{F}) \neq \emptyset$。此外，对于 $b \in \mathbf{M}'(\breve{F})$，若 $\kappa_{\mathbf{M}'}([b]) = \kappa_{\mathbf{M}'}([\dot{w}])$，则典范浸入 $\mathrm{Fl}_{\mathbf{M}'} \to \mathrm{Fl}_{\mathbf{G}'}$ 诱导

$$\mathbf{J}_b^{\mathbf{M}'}(F) \backslash X_w^{\mathbf{M}'}(b) \cong \mathbf{J}_b^{\mathbf{G}'} \backslash X_w^{\mathbf{G}'}(b).$$

这里，$\mathbf{J}_b^{\mathbf{M}'}(F)$ 是 b 在 $\mathbf{M}'(\breve{F})$ 中的 σ-中心化子，而 $X_w^{\mathbf{M}'}(b)$ 是 $\mathbf{M}'(\breve{F})$ 的仿射旗簇中的仿射德利涅–卢斯蒂格簇。

注意，$1 \in W$ 是一个 B-坡元素，其中 B 是 G 的标准博雷尔子群。在这种情况下，对于任意 $\gamma \in \mathcal{I}$，$Y_1(\gamma) \neq \emptyset$。然而，存在 $\gamma \in \mathcal{I}$ 使得 $\{\gamma\} \cap \mathbf{T}(L) = \emptyset$。因此，仿射 Lusztig 簇的定理 4.1 类比一般并不成立。

本节的主要目的是证明，当 w 是其共轭类中的最短长度元素时，仿射 Lusztig 簇的霍奇–牛顿分解类比成立。

4.2. 半标准抛物子群 $\mathbf{P}_{\nu_w}$。对于 $w \in W$，令 $\mathbf{P}_{\nu_w}$ 为由 T 以及满足 $\langle \alpha, \nu_w \rangle \geqslant 0$ 的根子群 $\mathbf{U}_\alpha$ 生成的 G 的抛物子群；令 $\mathbf{M}_{\nu_w}$ 为由 T 以及满足 $\langle \alpha, \nu_w \rangle = 0$ 的根子群 $\mathbf{U}_\alpha$ 生成的 $\mathbf{P}_{\nu_w}$ 的利维子群；令 $\mathbf{P}^-_{\nu_w}$ 为由 T 以及满足 $\langle \alpha, \nu_w \rangle \leqslant 0$ 的根子群 $\mathbf{U}_\alpha$ 生成的 G 的对偶抛物子群。我们有利维分解 $\mathbf{P}_{\nu_w} = \mathbf{M}_{\nu_w}\mathbf{N}_{\nu_w}$ 和 $\mathbf{P}^-_{\nu_w} = \mathbf{M}_{\nu_w}\mathbf{N}^-_{\nu_w}$，其中 $\mathbf{N}_{\nu_w}$ 是 $\mathbf{P}_{\nu_w}$ 的幺幂根，$\mathbf{N}^-_{\nu_w}$ 是 $\mathbf{P}^-_{\nu_w}$ 的幺幂根。

令 $\breve{M}_{\nu_w} = \mathbf{M}_{\nu_w}(\breve{F})$，并令 $\tilde{W}_{\nu_w}$为 $\breve{M}_{\nu_w}$的 Iwahori–Weyl 群。令 $\mathcal{I}_{\mathbf{M}_{\nu_w}} = \mathcal{I} \cap \breve{M}_{\nu_w}$.

于是，$\mathcal{I}_{\mathbf{M}_{\nu_w}}$ 是 M_{ν_w}的 Iwahori 子群。我们考虑由 $\mathcal{I}_{\mathbf{M}_{\nu_w}}$确定的 W_{ν_w} 上的长度函数。

根据 [42, 定理 1.7], , 若 w 是其在 W中共轭类的最短长度元素，则 w 是一个 $\mathbf{P}_{\nu_w}$-胞腔元素。根据 [25, 命题 4.5], w 是其在 W_{ν_w}中共轭类的最短长度元素。注意，这是一个非平凡的结果，因为 W_{ν_w} 上的长度函数并非 W上长度函数的限制。根据定义，ν_w 在$\mathbf{M}_{\nu_w}$的根系中是中心的。根据 [24,推论 2.8],，存在 W_{ν_w}的一个零长度元素 τ以及一个 M_{ν_w} 的 $\dot{\tau}$-稳定标准抛物型子群 $\mathcal{P}$，使得对于有限 Weyl 群 $W_{\mathcal{P}}$中的某个元素 u，有 $w = u\tau$。特别地，$\dot{w} \in \mathcal{P}\dot{\tau}$，因此 $\mathcal{I}_{\mathbf{M}_{\nu_w}} \dot{w} \mathcal{I}_{\mathbf{M}_{\nu_w}} \subset \mathcal{P}\dot{\tau}$。注意，对于任意 $k \in \mathbb{N}$，我们有 $(\mathcal{P}\dot{\tau})^k = \mathcal{P}\dot{\tau}^k = \mathcal{P}\dot{w}^k\mathcal{P}$。因此得到如下结论：

(a) 假设 w 是 W中其共轭类里的最短长度元素。那么存在一个 M_{ν_w} 的标准抛物型子群 $\mathcal{P}$，使得

$$(\mathcal{I}_{\mathbf{M}_{\nu_w}} \dot{w} \mathcal{I}_{\mathbf{M}_{\nu_w}})^k \subset \mathcal{P}\dot{w}^k\mathcal{P}$$

对所有 $k \in \mathbb{N}$均成立。

4.3. 逐次逼近法。 [16] 中霍奇–牛顿分解的证明有一个关键要素，即逐次逼近法。

我们证明最短长度元素的以下结果。该陈述与关于 P-坡元素的 σ-共轭作用 [16, 引理 6.1.1], 类似，但证明更简单。在本小节中，我们简记 ghg^{-1}为 ${}^g h$ 。

引理4.2. 假设 w 是 W中其共轭类的最短长度元素。对于$n \in \mathbb{N}$，令 $\mathcal{I}_n \subset \mathcal{I}$为 $\mathcal{I}$的第 n个主合同子群。设 $N_n = \mathcal{I}_n \cap \mathbf{N}_{\nu_w}(\breve{F})$ $N_n^- = \mathcal{I}_n \cap \mathbf{N}^-_{\nu_w}(\breve{F})$和 $M_n = \mathcal{I}_n \cap \mathbf{M}_{\nu_w}(\breve{F})$。那么，对于 $m \in \mathcal{I}_{\mathbf{M}_{\nu_w}}$和 $n \in \mathbb{N}$，有如下结论：(1) 给定 $i_+ \in N_n$，存在 $b_+ \in N_n$ 使得 $b_+ {i_+}^{m\dot{w}} b_+^{-1} \in N_{n+1}$。

(2) 给定 $i_- \in N_n^-$，存在 $b_- \in N_n^-$使得$(\dot{w}m)^{-1} b_- i_- b_-^{-1} \in N_{n+1}^-$。

证明。我们证明第 (1) 部分。第 (2) 部分的证明方法相同。

我们简记 $\mathbf{M}_{\nu_w}$ 为 M。由于 w是一个 $\mathbf{P}_{\nu_w}$-胞腔元素，因此有 $^{\dot{w}}N_n \subset N_n$。于是$^{m\dot{w}}N_n \subset N_n$ 以及 $(m\dot{w})^k N_n \subset N_n$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$均成立。由 § 4.2，存在 $\breve{M}_{\nu_w}$ 的一个标准抛物型子群 $\mathcal{P}$，使得 $(m\dot{w})^k \subset \mathcal{P}\dot{w}^k\mathcal{P}$ 对所有 k均成立。

注意，$\mathcal{P}\dot{w}^k\mathcal{P} = \bigsqcup_{u\in W_M} \mathcal{I}_{\mathbf{M}}\dot{u}\dot{w}^k\mathcal{I}_{\mathbf{M}}$，其中 W_M 是 M 的（有限）相对Weyl群。我们选取 $k \in \mathbb{N}$使得 $\langle k\nu_w,\ \alpha\rangle \geqslant \max\{\ell(u);\ u \in W_M\} + 1$。令$\mathcal{I}_{\mathbf{N}} = \mathcal{I} \cap \mathbf{N}_{\nu_w}(\breve{F})$ 和 $\mathcal{I}_{\mathbf{N}^-} = \mathcal{I} \cap \mathbf{N}^-_{\nu_w}(\breve{F})$。我们有 Iwahori 分解 $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathbf{N}^-}\mathcal{I}_{\mathbf{M}}\mathcal{I}_{\mathbf{N}}$。那么，对于任意 $u \in W_M$,

$$\mathcal{I}\dot{u}\dot{w}^k\mathcal{I} = (\mathcal{I}_{\mathbf{N}}\mathcal{I}_{\mathbf{M}}\mathcal{I}_{\mathbf{N}^-})\dot{u}\dot{w}^k(\mathcal{I}_{\mathbf{N}}\mathcal{I}_{\mathbf{M}}\mathcal{I}_{\mathbf{N}^-}) = \mathcal{I}_{\mathbf{N}}\mathcal{I}_{\mathbf{M}}\dot{u}\dot{w}^k\mathcal{I}_{\mathbf{M}}\mathcal{I}_{\mathbf{N}^-}.$$

因此 $(m\dot{w})^k \in N_0\mathcal{I}_{\mathbf{M}}\dot{u}\dot{w}^k\mathcal{I}_{\mathbf{M}}N_0^- \cap \breve{M} = \mathcal{I}_{\mathbf{M}}\dot{u}\dot{w}^k\mathcal{I}_{\mathbf{M}}$。然后，对于某些 i、$i' \in \mathcal{I}_{\mathbf{M}}$ 和 $u \in W_M$，有 $(m\dot{w})^k = i\dot{u}\dot{w}^k i'$。所以 $(m\dot{w})^k N_n \subset i\dot{w}^k\dot{u}N_n \subset {}^{i}N_{n+1} \subset N_{n+1}$。

我们取 $b_+ = (\overline{(m\dot{w})^{k-1}i_+^{-1}}) \cdots (\overline{m\dot{w}i_+^{-1}})i_+^{-1}$。于是有 $b_+ i_+ {}^{m\dot{w}}b_+^{-1} = (m\dot{w})^k i_+ \in N_{n+1}$。 □

现在我们证明以下结果，它类似于关于 P-坡元素和 σ-共轭作用的 [16, 定理 2.1。2] 。

~定理 4.3。设 w 是其在 W中的共轭类里的最短长度元素。令$\mathcal{I} \times^{\mathcal{I}_{\mathbf{M}_{\nu_w}}} \mathcal{I}_{\mathbf{M}_{\nu_w}}\dot{w}\mathcal{I}_{\mathbf{M}_{\nu_w}}$ 为 $\mathcal{I} \times \mathcal{I}_{\mathbf{M}_{\nu_w}}\dot{w}\mathcal{I}_{\mathbf{M}_{\nu_w}}$ 对由$i \cdot (g, h) = (gi^{-1}, ihi^{-1})$定义的 $\mathcal{I}_{\mathbf{M}_{\nu_w}}$ 作用所得的商。那么映射

$$\phi : \mathcal{I} \times^{\mathcal{I}_{\mathbf{M}_{\nu_w}}} \mathcal{I}_{\mathbf{M}_{\nu_w}}\dot{w}\mathcal{I}_{\mathbf{M}_{\nu_w}} \longrightarrow \mathcal{I}\dot{w}\mathcal{I}, \qquad (i, m) \longmapsto imi^{-1}$$

是满射。

证明。证明与 [16, §§4 和 6]中的证明类似。我们只记 $\mathcal{I}_{\mathbf{M}}$ 为 $\mathcal{I}_{\mathbf{M}_{\nu_w}}$。考虑如下笛卡尔图:

$$\begin{array}{ccc} (\dot{w}\mathcal{I} \cap \mathcal{I}) \times^{\dot{w}\mathcal{I}_{\mathbf{M}} \cap \mathcal{I}_{\mathbf{M}}} \dot{w}\mathcal{I}_{\mathbf{M}} & \xrightarrow{\phi} & \dot{w}\mathcal{I} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{I} \times^{\mathcal{I}_{\mathbf{M}}} \mathcal{I}_{\mathbf{M}}\dot{w}\mathcal{I}_{\mathbf{M}} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{I}\dot{w}\mathcal{I} \end{array}$$

只需证明映射 $(^{\dot{w}}\mathcal{I} \cap \mathcal{I}) \times^{\dot{w}\mathcal{I}_{\mathbf{M}} \cap \mathcal{I}_{\mathbf{M}}} \dot{w}\mathcal{I}_{\mathbf{M}} \to \dot{w}\mathcal{I}$ 是满射。按照 [16,§6], ，一个一般的 Moy–Prasad滤过给出一个滤过 $\mathcal{I} = \cup_{r\geqslant 0}\mathcal{I}[r]$ ，其中 $\mathcal{I}[r] \supset \mathcal{I}[s]$ 对 $r < s$成立，使得

(1) 每个 $\mathcal{I}[r]$ 都是 $\mathcal{I}$中的正规子群;

(2) (a) 要么存在一个正仿射根 α ，使得嵌入 $U_\alpha \subset \mathcal{I}$ 诱导出一个同构 $U_\alpha/U_{\alpha_+} \cong \mathcal{I}[r]/\mathcal{I}[r^+]$;

(b) or $(\mathbf{T}(\breve{F}) \cap \mathcal{I}[r])/(\mathbf{T}(\breve{F}) \cap \mathcal{I}[r^+]) \cong \mathcal{I}[r]/\mathcal{I}[r^+]$.

我们证明，$\dot{w}\mathcal{I}_{\mathbf{M}}\mathcal{I}[r]$ 中的任意元素都与 $\dot{w}\mathcal{I}_{\mathbf{M}}\mathcal{I}[r^+]$中的某个元素在 $^{\dot{w}}\mathcal{I} \cap \mathcal{I}$ 下共轭，并且当 r 足够大时，共轭元可以取为较小的元素。

如果 $\mathcal{I}[r]/\mathcal{I}[r^+] \neq \mathbf{T}(\breve{F}) \cap \mathcal{I}[r]/\mathbf{T}(\breve{F}) \cap \mathcal{I}[r^+]$，那么 $\mathcal{I}_{\mathbf{M}}\mathcal{I}[r] = \mathcal{I}_{\mathbf{M}}\mathcal{I}[r^+]$ ，我们只需取共轭元 h_r 为 1。若 $U_\alpha/U_{\alpha_+} \cong \mathcal{I}[r]/\mathcal{I}[r^+]$，则对任意 $g \in \dot{w}\mathcal{I}_{\mathbf{M}}\mathcal{I}[r]$，我们可利用引理4.2构造一个共轭元 h_r（当 r 足够大时，该共轭元足够小），使得$h_r g h_r^{-1} \in \dot{w}\mathcal{I}_{\mathbf{M}}\mathcal{I}[r^+]$。

现在，对于任意的 $g \in \dot{w}\mathcal{I}$，我们构造共轭元 h_r ，使得

$$(h_r \cdots h_0)g(h_r \cdots h_0)^{-1} \in \dot{w}\mathcal{I}_{\mathbf{M}}\mathcal{I}[r^+].$$

由于当 r 较大时， h_r 足够小，收敛乘积 $h = \lim_{r\to\infty} h_r \cdots h_0$ 存在且 $hgh^{-1} \in \dot{w}\mathcal{I}_{\mathbf{M}}$。证明至此完成。□

4.4. 普通共轭的霍奇–牛顿分解。现在我们证明本节的主要结果。

定理 4.4. 假设 w 是其在 W中的共轭类的最短长度元素。那么对于任意 $\gamma\in\check{G}$, $Y_{\mathbf{G}w}(\gamma)\neq\emptyset$ 当且仅当 $\{\gamma\}\cap\mathcal{I}_{\mathbf{M}_{\nu_w}}\dot{w}\mathcal{I}_{\mathbf{M}_{\nu_w}}\neq\emptyset$。此外，对于 $\gamma\in\mathcal{I}_{\mathbf{M}_{\nu_w}}\dot{w}\mathcal{I}_{\mathbf{M}_{\nu_w}}$，我们有 $Z_{\check{M}_{\nu_w}}(\gamma)=Z_{\check{G}}(\gamma)$，并且

$$Y_w^{\mathbf{M}_{\nu_w}}(\gamma)\cong Y_w^{\mathbf{G}}(\gamma).$$

证明。令 $\mathbf{M}=\mathbf{M}_{\nu_w}$。我们先证明

(a) 若 γ_1、$\gamma_2\in\mathcal{I}_{\mathbf{M}}\dot{w}\mathcal{I}_{\mathbf{M}}$和 $g\in\check{G}$满足 $g\gamma_1g^{-1}=\gamma_2$，则 $g\in\check{M}$。

根据定义，对于任意 $k\in\mathbb{N}$，都有 $g\gamma_1^kg^{-1}=\gamma_2^k$。选取 $k\in\mathbb{N}$，使得对于某个余权λ，有 $w^k=t^\lambda$。由§4.2 (a)，存在 $\check{M}$的一个标准抛物型子群 $\mathcal{P}$，使得对于任意 $l\in\mathbb{N}$，都有 $\gamma_1^{lk},\gamma_2^{lk}\in\mathcal{P}t^{l\lambda}=\mathcal{P}t^{l\lambda}$。于是 $\mathcal{P}t^{l\lambda}g\cap gt^{l\lambda}\mathcal{P}\neq\emptyset$。令 $\check{P}=\mathbf{P}_{\nu_w}(\check{F})$，$\check{N}=\mathbf{N}_{\nu_w}(\check{F})$，以及 $\check{N}^-=\mathbf{N}^-_{\nu_w}(\check{F})$。不妨设对于某个 $x\in W_0$，有 $g\in\check{P}\dot{x}\check{P}$。注意到 $\check{P}\dot{x}\check{P}\cong(\check{N}\cap\dot{x}\check{N}^-\dot{x}^{-1})\times\check{M}\dot{x}\check{P}$。我们将 g写成 g_1g_2，其中 $g_1\in(\check{N}\cap\dot{x}\check{N}^-\dot{x}^{-1})$ 且 $g_2\in\check{M}\dot{x}\check{P}$。于是 $gt^{l\lambda}\mathcal{P}\subset g_1\check{M}\dot{x}\check{P}t^{l\lambda}\mathcal{P}\subset\mathcal{P}(t^{l\lambda}g_1t^{l\lambda})\check{M}\dot{x}\check{P}$。因此对于所有 $l\in\mathbb{N}$，都有 $g_1\cap\mathcal{P}(t^{l\lambda}g_1t^{-l\lambda})\check{M}\neq\emptyset$。由于 $g_1\in\check{N}$，我们有 $\lim_{l\to\infty}t^{l\lambda}g_1t^{-l\lambda}=1$。因此，对于所有 $l\in\mathbb{N}$，若 $g_1\cap\mathcal{P}(t^{l\lambda}g_1t^{-l\lambda})\check{M}\neq\emptyset$，则 $g_1=1$。所以 $g\in M\dot{x}P$。用同样的论证可得 $g\in M\dot{x}M$。对于 $g_3,g_4\in M$，我们将 g写成 $g=g_3\dot{x}g_4$。根据定义，$\check{M}$中的任意元素都与 $t^{l\lambda}$交换。于是 $\mathcal{P}g_3t^{l\lambda}\dot{x}g_4\cap g_3t^{lx(\lambda)}\dot{x}g_4\mathcal{P}\neq\emptyset$，从而对于所有 $l\in\mathbb{N}$，都有$t^{l(x(\lambda)-\lambda)}\in g_3^{-1}\mathcal{P}g_3\dot{x}g_4\mathcal{P}g_4^{-1}\dot{x}^{-1}$。注意，对于固定的 g_3 和 g_4，$g_3^{-1}\mathcal{P}g_3\dot{x}g_4\mathcal{P}g_4^{-1}\dot{x}^{-1}$有界。因此我们有 $x(\lambda)=\lambda$。于是 $x\in W_{\nu_w}$ 且 $g\in\check{M}\dot{x}\check{M}=\check{M}$。

(a) 已得证明。

现在证明该定理。若 $Y_w(\gamma)\neq\emptyset$，则 $\{\gamma\}\cap\mathcal{I}\dot{w}\mathcal{I}\neq\emptyset$。由定理 4.3，$\{\gamma\}\cap\mathcal{I}_{\mathbf{M}}\dot{w}\mathcal{I}_{\mathbf{M}}\neq\emptyset$。我们假设 $\gamma\in\mathcal{I}_{\mathbf{M}}\dot{w}\mathcal{I}_{\mathbf{M}}$。注意到 $\mathcal{I}_{\mathbf{M}}\dot{w}\mathcal{I}_{\mathbf{M}}\subset\mathcal{I}\dot{w}\mathcal{I}$。令 $\mathrm{Fl}^{\mathbf{M}}$ 为 $\check{M}$ 的仿射旗簇。在浸入 $\mathrm{Fl}^{\mathbf{M}}\to\mathrm{Fl}$ 下，$Y_{\mathbf{M}w}(\gamma)$ 的像包含于 $Y_w(\gamma)$ 中。

设 $g\mathcal{I}\in Y_w(\gamma)$。由定理 4.3，适当乘以 $\mathcal{I}$ 中的一个元素后，我们可以假设 $g^{-1}\gamma g\in\mathcal{I}_{\mathbf{M}}\dot{w}\mathcal{I}_{\mathbf{M}}$。由 (a)，$g\in\check{M}$。这表明 $Y_{\mathbf{M}w}(\gamma)$ 的像等于$Y_w(\gamma)$。证明完成。□

4.5. 正则半单元素。在 §2.6 中，我们定义了一个自然映射$f_{\mathbf{G},\mathbf{G}'}$，它从 $\check{G}$ 的共轭类集合映射到 $\check{G}'$的 σ-共轭类集合。我们已经证明，该映射$f_{\mathbf{G},\mathbf{G}'}$是满射。现在我们证明，每个纤维都包含 G的某些正则半单共轭类。换言之，将该映射$f_{\mathbf{G},\mathbf{G}'}$限制在 G 的正则半单共轭类集合上，仍然是满射。这回答了审稿人提出的一个问题。

令$W[b]$上的诱导作用是平凡的。按照 §2.5，令$C=C_{[b]}$为与 $[b]$相关联的 $\tilde{W}'$ 的直共轭类。于是，对于 C 中的任意最小长度元素 w，都有 $[b]=\check{G}'\cdot_\sigma\mathcal{I}'\dot{w}\mathcal{I}'$。我们使用 W 与 W'的自然同一，并将w视为 W 中共轭类 C 的一个最小长度元素。

根据定理 4.4，$\check{G}\cdot\mathcal{I}\dot{w}\mathcal{I}=\check{G}\cdot\mathcal{I}_{\mathbf{M}_{\nu_w}}\dot{w}\mathcal{I}_{\mathbf{M}_{\nu_w}}$。回想一下，$\mathrm{T}(L)_0$ 是 $\mathrm{T}(L)$的唯一抛物型子群。容易看出，$\mathrm{T}(L)_0\subset\mathcal{I}_{\mathbf{M}_{\nu_w}}$ 和 $\mathrm{T}(L)_0\dot{w}$ 包含 $\check{G}$的正则半单元素。令 $\gamma\in\mathrm{T}(L)_0\dot{w}\cap\check{G}^{\mathrm{rs}}$。那么 $C_{\{\gamma\}}=C_{[b]}$ 和 $f_{\mathbf{G},\,\mathbf{G}'}(\{\gamma\})=[b]$。

5. Lusztig varieties and Deligne–Lusztig varieties

5.1. 群 H 和 H′。本节比较经典 Lusztig 簇与经典 Deligne–Lusztig 簇。

设 H 是代数闭域 k 上的连通约化代数群。我们记$H=\mathrm{H}(\mathrm{k})$。设 δ 是 H上的一个群自同构。设 B 是 H的一个 δ-稳定 Borel 子群。设W_H 是 H 的（有限）Weyl 群，$\mathbb{S}_H$ 是 W_H的简单反射集合。δ 在 H 上的群自同构在 W_H 上诱导出一个保长度的群自同构，并在 $\mathbb{S}_H$上诱导出一个双射。我们仍用 δ表示这些映射。

设 k′ 是有限域 $\mathbb{F}_q$ 的代数闭包，σ 是 k′ 相对于 $\mathbb{F}_q$的 Frobenius映射。设 H′ 是定义在 $\mathbb{F}_q$上的连通约化群。令 $H'=\mathrm{H}'(\mathrm{k}')$。我们仍用 σ表示 H' 上的 Frobenius 自同态。固定 H'的一个 σ-稳定 Borel 子群 B'。令 H' 的（有限）Weyl 群为 $W_{H'}$，令 $W_{H'}$的简单反射集合为 $\mathbb{S}_{H'}$。我们称 H′ 与

这一对 (H δ) 相关联，若存在从 $W_{H'}$ 到 W_H 的保长度同构，使得下图交换：

$$\begin{array}{ccc} W_{H'} & \xrightarrow{\cong} & W_H \\ {\scriptstyle\sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\delta} \\ W_{H'} & \xrightarrow{\cong} & W_H \end{array}$$

5.2. Lusztig簇与Deligne–Lusztig簇。对于任意的 $\gamma \in H$ 和 $w \in W_H$，Lusztig簇定义为

$$\mathcal{B}_{w,\gamma,\delta} = \{gB \in H/B; g^{-1}\gamma\delta(g) \in B\dot{w}B\}.$$

Lusztig簇的同构类取决于 δ-扭共轭类 $\{\gamma\}$，其中 γ属于 H，且 $w \in W_H$。簇 $\mathcal{B}_{w,\ \gamma,\ \delta}$ 由 Lusztig [35] 引入，当时 γ 是 H 中的正则半单元；后来在 [36]中将其推广到 H 中的任意元素。当 $w = 1$时，Lusztig 簇 $\mathcal{B}_{1,\ \gamma,\ \delta} = \{gB \in H/B;\ g^{-1}\gamma\delta(g) \in B\}$ 是 γ的 Springer纤维。我们将 $\mathcal{B}_{1,\ \gamma,\ \delta}$简写为 $\mathcal{B}_{\gamma,\ \delta}$。Lusztig簇在特征层理论中发挥着重要作用。

类似地，对于任意的 $w' \in W_{H'}$，Deligne–Lusztig簇 $X_{w'}$ 定义为

$$X_{w'} = \{gB' \in H'/B'; g^{-1}\sigma(g) \in B'\dot{w}B'\}.$$

由 Lang定理，H' 中的任意元素都与 $1 \in H'$在 σ作用下共轭。因此，与 Lusztig簇不同，Deligne–Lusztig簇仅取决于元素 $w' \in W_{H'}$。

显然，$X_{w'}$ 总是非空的，且维数为 $\ell(w')$。另一方面，Lusztig簇更为复杂，因为涉及两个参数 $\{\gamma\}$ 和 w。

本节的主要目的是比较相联系的 (H δ) 与 H′ 的 Lusztig簇和 Deligne– Lusztig簇的维数。在本节余下部分，我们固定这样的 (H δ) 和 H′，并将 W_H 视为 W_H 上的群自同构，将 $W_{H'}$ 和 $\sigma = \delta$ 也视为 W_H 上的群自同构。

本节的主要结果如下。

命题 5.1. 设 $\gamma \in H$ 和 $w \in W_H$。那么

$$\dim \mathcal{B}_{w,\gamma,\delta} \leqslant \dim X_w + \dim \mathcal{B}_{\gamma,\delta}.$$

证明分为两部分：w 在其 δ-共轭类中的最小长度元素的基例，以及归约到基例的归约过程。本节余下部分将讨论这两部分。

5.3. 基例。在本小节中，我们证明 w 在其于 W_H 中的 δ-扭共轭类中具有最小长度时的命题 5.1。令 supp(w) 为出现在 w 的某个（等价地，任意一个）约化表达式中的简单反射的集合，并令 $\mathrm{supp}_\delta(w) = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} \delta^i(\mathrm{supp}(w))$。我们称 w 为 δ-椭圆的，如果 $\mathrm{supp}_\delta(w) = \mathbb{S}_H$。

以下结果由 Lusztig 在 [39, Corollary 5.7] 中证明，适用于 $\delta = id$ 的情形。该sa相同的证明适用于任意的 δ。

(a) 设 w 是一个 δ-椭圆元素，且在其于 W_H 中的 δ-扭共轭类中具有最小长度。如果 $\mathcal{B}_{w}{}_{\gamma,\delta} \neq \emptyset$，那么它具有纯维数 $\ell(w)$。

由于 $B \in \mathcal{B}_{\gamma,\delta}$, $\mathcal{B}_{\gamma,\delta}$ 总是非空。因此

(b) 对于一个 δ-椭圆元 w，有 $\dim\mathcal{B}_{w,\gamma,\delta} \leqslant \dim\mathcal{B}_{\gamma,\delta} + \ell(w)$。

接下来考虑 w 不是 δ-椭圆元的情形。令 $J = \mathrm{supp}_\delta(w)$，并令 W_J 为由 J生成的 W_H 的抛物子群。令 $P_J \supset B$ 为类型为 J 的标准抛物子群。设 $\mathcal{B}^J_{\gamma,\delta} = \{gP_J \in H/P_J;\ g^{-1}\gamma\delta(g) \in P_J\}$。定义投影映射

$$\pi_J : H/B \longrightarrow H/P_J, \qquad gB \longmapsto gP_J.$$

那么，根据定义，对于任意 $x \in W_J$，π_J 都将 $\mathcal{B}_{x,\ \gamma,\ \delta}$ 映入 $\mathcal{B}^J_{\gamma,\ \delta}$。

设 $gP_J \in \mathcal{B}^J_{\gamma,\ \delta}$。令 $\gamma' = g^{-1}\gamma\delta(g) \in P_J$。令 $L_J \subset P_J$ 为标准利维子群，$B_J = B \cap L_J$为 L_J 的 Borel 子群，$\gamma'_J \in L_J$为 γ' 在投影映射 $P_J \to L_J$ 下的像。由于 J是 δ-稳定的， P_J和 L_J也都是 δ-稳定的。对于任意 $x \in W_J$，有

$$\begin{aligned}\pi_J^{-1}(gP_J) \cap \mathcal{B}_{x,\gamma,\delta} &= \{gg'B \in H/B; g' \in P_J, (g')^{-1}g^{-1}\gamma\delta(g)\delta(g') \in B\dot{x}B\} \\ &\cong \{g'B \in P_J/B; (g')^{-1}\gamma'\delta(g') \in B\dot{x}B\} \\ &\cong \{lB_J \in L_J/B_J; l^{-1}\gamma'_J\delta(l) \in B_J\dot{x}B_J\} \\ &= \mathcal{B}^{L_J}_{x,\gamma'_J,\delta}.\end{aligned}$$

注意， w 在其于 W中的 δ-扭曲共轭类里具有最小长度。因此， w 在其于 W_J中的 δ-扭曲共轭类里具有最小长度。根据定义， w 在 W_J中是 δ-椭圆的。由 (b)，$\dim \mathcal{B}^{L_J}_{w,\ \gamma'_J,\ \delta} \leqslant \dim \mathcal{B}^{L_J}_{\gamma'_J,\ \delta} + \ell(w)$。基例得证。

5.4. 归约过程。归约过程基于以下两个要素：Deligne–Lusztig约化以及有限魏尔群的一些组合性质。

Deligne–Lusztig约化方法是在 [10, 定理 1 的证明中引入的，6] 用于 Deligne–Lusztig簇。同一证明也可应用于Lusztig簇。我们陈述这一结果。

命题 5.2. 设 $\gamma \in H$、 $w \in W_H$ 和 $s \in \mathbb{S}_H$。
(1) 如果 $\ell(sw\delta(s)) = \ell(w)$，那么 $\mathcal{B}_{w,\gamma,\delta}$ 同构于 $\mathcal{B}_{sw\sigma(s),\gamma,\delta}$，并且 X_w 与 $X_{sw\delta(s)}$之间是泛同胚。
(2) 如果 $sw\delta(s) < w$，那么我们有如下分解

$$\mathcal{B}_{w,\gamma,\delta} = X_1 \sqcup X_2 \text{ and } X_w = X'_1 \sqcup X'_2,$$

其中 X_1 （分别为 X'_1）是 $\mathcal{B}_{w,\gamma,\delta}$ （分别为 X_w）中的开子集，并且是以 $\mathcal{B}_{sw,\gamma,\delta}$ （分别为 X_{sw}）为底、去掉零截面后的 $\mathbb{A}^1$-丛；而 X_2 （分别为 X'_2）是以 $\mathcal{B}_{sw\delta(s),\gamma,\delta}$ （分别为 $X_{sw\delta(s)}$）为底的 $\mathbb{A}^1$-丛。

备注 5.3。值得指出的是，命题 5.2 第 (1) 部分中的态射 $X_w \to X_{sw\delta(s)}$ 涉及 H/B 上的弗罗贝尼乌斯态射，而态射 $\mathcal{B}_{w,\gamma,\delta} \to \mathcal{B}_{sw\sigma(w),\gamma,\delta}$则不涉及弗罗贝尼乌斯态射。这就是为什么我们只能得到德利涅–卢斯蒂格簇之间的泛同胚，而能得到 Lusztig簇之间的同构。仿射德利涅–卢斯蒂格簇与仿射 Lusztig 簇也会出现类似的现象，正如我们将在命题 6.1 和命题 6.2 中看到的那样。

现在回顾考克斯特群的一些组合性质。设 W 为一个考克斯特群，设 $\mathbb{S}$ 为 W 的简单反射集合。按照 [14], 对于 w、$w' \in W$ 和 $s \in \mathbb{S}$ 的记号，若 $w' = sw\delta(s)$ 且 $\ell(w') \leqslant \ell(w)$，我们记为 $w \xrightarrow{s}_\delta w'$。若存在 $w = w_0$、w_1、$\cdots$、$w_n = w'$ 这样一列 W 中的元素，使得对于任意 k、$w_{k-1} \xrightarrow{s}_\delta w_k$ 都有某个 $s \in \mathbb{S}$，则记为 $w \to_\delta w'$。若 $w \to_\delta w'$ 且 $w' \to_\delta w$，则记为 $w \approx_\delta w'$。容易看出，若 $w \to_\delta w'$ 且 $\ell(w) = \ell(w')$，则 $w \approx_\delta w'$。

对于 W 中的任意 δ-共轭类 $\mathcal{O}$，我们用 $\mathcal{O}_{\min}$ 表示 $\mathcal{O}$ 中最小长度元素的集合。关于有限Weyl群的以下结果归功于 Geck 和 Pfeiffer [14], 、Geck、Kim 和 Pfeiffer [13], ，以及本文作者与 S. Nie 的合作成果 [23]。

定理 5.4. 设 W 是一个有限Weyl群，且 $\mathcal{O}$ 是 W 和 $w \in \mathcal{O}$的 δ-共轭类。那么存在 $w' \in \mathcal{O}_{\min}$ 使得 $w \to_\delta w'$。

现在我们通过对 $\ell(w)$作归纳来证明命题 5.1。假设 w 在其 δ-扭曲共轭类中不是最小长度。由定理 5.4，存在 $w' \in W_H$，满足 $w \approx_\delta w'$ 和$s \in \mathbb{S}_H$，使得 $sw'\delta(s) < w'$。由命题 5.2，我们有

$$\dim \mathcal{B}_{w,\gamma,\delta} = \dim \mathcal{B}_{w',\gamma,\delta} = \max\{\mathcal{B}_{sw',\gamma\delta}, \mathcal{B}_{sw'\delta(s),\gamma,\delta}\} + 1.$$

注意， $\ell(sw')$ $\ell(sw'\delta(s)) < \ell(w)$。根据归纳假设，$\dim \mathcal{B}_{sw'}$ $_{\gamma,\delta} \leqslant$ 维$\mathcal{B}_{\gamma,\ \delta} + \ell(sw')$和 $\dim \mathcal{B}_{sw'\delta(s)\ \gamma,\delta} \leqslant \dim \mathcal{B}_{\gamma,\delta} + \ell(sw'\delta(s))$。因此

$$\dim \mathcal{B}_{w,\gamma,\delta} \leqslant (\dim \mathcal{B}_{\gamma,\delta} + \ell(w) - 1) + 1 = \dim \mathcal{B}_{\gamma,\delta} + \ell(w).$$

因此，该陈述对 w 成立。命题 5.1 的证明完成。

5.5. 正则元素的特殊情形。存在一种特殊情形，在此情形下 Lusztig簇与 Deligne–Lusztig簇的维数相同。

根据定义，若元素 $\gamma \in H$ 的 δ-扭共轭类具有可能的最大维数，则称 $\gamma \in H$ 为 δ-正则。根据 Springer [11, 命题 5.1 和引理 5.3][1]，对任意 δ-正则元素 $\gamma \in H$，都有 $\dim \mathcal{B}_{w,\gamma,\delta} = \ell(w)$。特别地，$\dim \mathcal{B}_{\gamma,\delta} = 0$，因此 (a) 对任意 $w \in W_H$ 以及群 H中的 δ-正则元素 γ，都有

$$\dim \mathcal{B}_{w,\gamma,\delta} = \dim X_w = \dim X_w + \dim \mathcal{B}_{\gamma,\delta}.$$

6. 维数比较

6.1. Deligne–Lusztig约化。我们回顾仿射 Deligne–Lusztig 簇的 Deligne 和 Lusztig 的“约化”方法。回顾一下，群 G′ 是剩余分裂的，并且 Frobenius 自同态在 Iwahori–Weyl 群上的诱导作用是平凡的。

命题 6.1. [27, 命题 3.3.1] 设 $w \in \tilde{W}'$、$s \in \tilde{\mathbb{S}}'$和 $b \in \check{G}'$。若 $\mathrm{char}(F') > 0$，则以下两个陈述成立：

(1) 若 $\ell(sws) = \ell(w)$，则存在一个 J_b-等变态射 $X_w(b) \to X_{sws}(b)$，它是普适同胚。(2) 若 $\ell(sws) = \ell(w) - 2$，则 $X_w(b) = X_1 \sqcup X_2$，其中 X_1 是 J_b-稳定开子概形 X，位于$X_w(b)$中，而 X_2 是其闭补，并满足以下条件：

- X_1 与 J_b-等变地普适同胚于$X_{sw}(b)$上的扎里斯基局部平凡 $\mathbb{G}_m$-丛；
- X_2 与 J_b-等变地普适同胚于$X_{sws}(b)$上的扎里斯基局部平凡 $\mathbb{A}^1$-丛。

若 $\mathrm{char}(F') = 0$，则上述两个陈述仍然成立，但需分别将 $\mathbb{A}^1$ 和 $\mathbb{G}_m$ 替换为完美化 $\mathbb{A}^{1,\mathrm{perf}}$ 和 $\mathbb{G}_m^{\mathrm{perf}}$。

类似地，我们有以下结论。

~ ~ ˘命题 6.2. 设 $w \in W$、$s \in \mathbb{S}$ 和 $\gamma \in G^{\mathrm{rs}}$。则以下两条陈述成立：

(1) 若 $\ell(sws) = \ell(w)$，则存在一个 $Z_{\check{G}}(\gamma)$-等变同构 $Y_w(\gamma) \to Y_{sws}(\gamma)$。(2) 若 $\ell(sws) = \ell(w) - 2$，则 $Y_w(\gamma) = Y_1 \sqcup Y_2$，其中 Y_1 是 $Z_{\check{G}}(\gamma)$-稳定开子概形 X of $Y_w(\gamma)$，而 Y_2 是其闭补，并满足以下条件：

- Y_1 与 $Z_{\check{G}}(\gamma)$-等变同构，并且是一个在 $Y_{sw}(\gamma)$ 上的 Zariski 局部平凡 $\mathbb{G}_m$-丛；
- Y_2 与 $Z_{\check{G}}(\gamma)$-等变同构，并且是一个在 $Y_{sws}(\gamma)$ 上的 Zariski 局部平凡 $\mathbb{A}^1$-丛。

如果 $\mathrm{char}(L) = 0$，那么上述两个陈述仍然成立，但其中的 $\mathbb{A}^1$ 和 $\mathbb{G}_m$ 分别替换为完美化 $\mathbb{A}^{1,\mathrm{perf}}$ 和 $\mathbb{G}_m^{\mathrm{perf}}$。

~6.2. 最小长度元素。对于 W 中的任意共轭类 C，我们记 $C_{\min}$ 为 C 中最小长度元素的集合。对于 w、$w' \in \tilde{W}$ 和 $s \in \tilde{\mathbb{S}}$，若 $w' = sws$ 且 $\ell(w') \leqslant \ell(w)$，我们记为 $w \xrightarrow{s} w'$。如果存在一列元素 $w = w_0$、w_1、……、$w_n = w'$，其中元素属于 $\tilde{W}$，并且对于任意 k，均有 $w_{k-1} \xrightarrow{s} w_k$ 对某个 $s \in \tilde{\mathbb{S}}$ 成立，则记为 $w \to w'$。如果 $w \to w'$ 且 $w' \to w$，我们记为 $w \approx w'$。容易看出，若 $w \to w'$ 且 $\ell(w) = \ell(w')$，则 $w \approx w'$。以下将定理 5.4 推广到 Iwahori–Weyl 群的结果见 [24, 定理 2.10]。

~定理 6.3. 设 C 是 W 的一个共轭类，且 $w \in C$。则存在 $w' \in C_{\min}$ 使得 $w \to w'$。

关于最短长度元素的良好代表元，我们有以下结果，将在§6.4中使用。

~定理 6.4。 [24, 命题 2.4 和 2.7] 设 $w \in W$。那么存在一个直元素$x \in \tilde{W}$，$K \subset \tilde{\mathbb{S}}$满足 W_K有限、$x \in {}^K\tilde{W}^K$，且 $\mathrm{Ad}(x)(K) = K$并且 $u \in W_K$，使得 ux是 w 的共轭类中的最短长度元素，并且 $w \to ux$。

[1][11] 只考虑 $\delta =$ 恒等映射的情形，但同样的证明也适用于任意 δ。

注 6.5。在 [24], 中，相关结果以更几何化的方式陈述。这里我们提供更多细节。此处的元素 w 对应于 $\tilde{w}_A$ ，而元素 ux 对应于 [24,命题 2.4]中的 $\tilde{w}_{A'}$ 。分解 $\tilde{w}_{A'} = ux$ 由 [24, 命题 2.7]得出。

我们还指出，在这种情况下， u 是 W_K 的 Ad(x)-共轭类中的一个最小长度元素。

定理 6.6。 [24, 定理 3。8] 设 C 是 W 的一个直共轭类。那么，对于 C 中任意两个直元素 w 和 w' ，都有 $w \approx w'$。

6.3. 与 γ 相关的仿射 Springer 纤维。设 $\gamma \in G^{\mathrm{rs}}$ 和 C 是满足 $\gamma \in \{C\}$ 的 W 的直共轭类。设 w、w' 是 C 的最小长度元素。由定理 6.6，得到 $w \approx w'$，因此由命题 6.2， $Y_w(\gamma) \cong Y_{w'}(\gamma)$。滥用记号，取某个最小长度元素 $w \in C$，并记 $Y_\gamma = Y_w(\gamma)$。 Y_γ 的同构类与所选最短长度代表元无关。我们称之为与 $\{\gamma\}$ 相关的仿射 Springer 纤维。

令 $w \in C$ 为一个最短长度元素。由定理 4.4， $\{\gamma\} \cap \mathcal{I}_{\mathbf{M}_{\nu_w}} \dot{w} \mathcal{I}_{\mathbf{M}_{\nu_w}} \neq \emptyset$。我们进一步假设 $\gamma \in \mathcal{I}_{\mathbf{M}_{\nu_w}} \dot{w} \mathcal{I}_{\mathbf{M}_{\nu_w}}$。由 [24, 命题 3.2]， w 是 $\tilde{W}_{\nu_w}$ 中的一个零长度元素。因此， $Y_\gamma \cong Y_w(\gamma) \cong Y_{\mathbf{M}_w}{}^{\nu_w}(\gamma)$ 是 γ 在 $\breve{M}_{\nu_w}$ 中的仿射 Springer 纤维。特别地， Y_γ 总是非空的。由定理 3.1，我们有

(a) 令 $\gamma \in \breve{G}^{\mathrm{rs}}$。则 Y_γ 是等维的。

现在我们陈述本文的主要结果。

定理 6.7. 假设 G′ 与 G 相关联。令 γ 为 $\breve{G}$ 的一个正则半单元，且 $[b] = f_{\mathbf{G},\mathbf{G}'}(\{\gamma\}) \in B_\sigma(\mathbf{G}')$。那么，对于任意 $w \in \tilde{W}$，我们有

(1) $Y_w(\gamma) \neq \emptyset$ 当且仅当 $X_w(b) \neq \emptyset$;

(2) 如果 $X_w(b) \neq \emptyset$，那么 $\dim Y_w(\gamma) = \dim X_w(b) + \dim Y_\gamma$。

特别地， $Y_w(\gamma)$ 要么为空集，要么是有限维的。

定理 6.7 的证明包括两部分：基例和归约过程。归约过程与命题 5.1 的证明类似，但基例更为复杂。

6.4. 基例：上界。我们考虑 w 在其 $\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$ 共轭类中具有最小长度的情形。令 C 为与 $\{\gamma\}$ 及 $[b]$ 相关联的 $W = W'$ 的直共轭类。

令 u 和 x 为定理 6.4 中满足 $w \approx ux$ 的元素。令 $\mathcal{P}_K$ 为由 $\mathcal{I}$ 和 $\dot{s}$ 针对 $s \in K$ 生成的标准抛物型子群。根据命题 6.2 (1)， $Y_w(\gamma) \cong Y_{ux}(\gamma)$。我们有 $\mathcal{I}\dot{u}\dot{x}\mathcal{I} \subset \mathcal{P}_K \dot{x} \mathcal{P}_K$。

令 $L_K = \mathcal{P}_K / U_{\mathcal{P}_K}$ 为抛物型子群 $\mathcal{P}_K$ 的约化商。设 $\delta = \mathrm{Ad}(\dot{x})$。

那么 δ 是 L_K上的图自同构。令 $B = \mathcal{I}/U_{\mathcal{P}_K}$ 为 L_K的一个 Borel 子群。那么 B在 δ的作用下稳定。根据斯坦伯格定理， [46], L_K 中的任意元素都与 B中的某个元素 δ-共轭。因此， $\mathcal{P}_K \dot{x} \mathcal{P}_K$ 中的任意元素都可通过 $\mathcal{P}_K$ 与 $\mathcal{I}\dot{x}\mathcal{I} \subset \{C'\}$中的某个元素共轭，其中 C' 是 x的直共轭类。特别地， $\mathcal{P}_K \dot{x} \mathcal{P}_K \subset \{C'\}$。

If $C' \neq C$，那么 $\{C\} \cap \{C'\} = \emptyset$，从而 $\{\gamma\} \cap \mathcal{I}\dot{u}\dot{x}\mathcal{I} = \emptyset$。因此 $Y_{ux}(\gamma) = \emptyset$。根据 [19，定理 orems 3.5 和 3.7], $X_{ux}(b) = \emptyset$。在这种情况下，结论显然成立。

现在假设 $C' = C$。令 $\pi_K : \breve{G}/\mathcal{I} \to \breve{G}/\mathcal{P}_K$ 为投影映射。设

$$Y = \{g\mathcal{P}_K \in \breve{G}/\mathcal{P}_K ; g^{-1}\gamma g \in \mathcal{P}_K \dot{x} \mathcal{P}_K\}.$$

于是，对任意 $u' \in W_K$, $\pi_K(Y_{u'x}(\gamma)) \subset Y$。

注意， Y 中的任意元素均可写成 $g\mathcal{P}_K$ ，其中 $g \in \breve{G}$ 满足 $g^{-1}\gamma g = \gamma_1 \dot{x}$ ，而某个$\gamma_1 \in \mathcal{P}_K$满足相应条件。令 $\bar{\gamma}_1$ 为 γ_1 在 $\bar{L}_K$中的像。与 §5.3 中的证明类似， $\pi_K^{-1}(g\mathcal{P}_K) \cap Y_{u'x}(\gamma)$ 同构于 Lusztig 簇 $\{\bar{g}\bar{B} \in \bar{L}_K/\bar{B}; \bar{g}\bar{\gamma}_1\delta(\bar{g})^{-1} \in \bar{B}\dot{u}'\bar{B}\} \subset \bar{L}_K/\bar{B}$。将命题 5.1 应用于映射 $Y_{ux}(\gamma) \to Y$和 $Y_x(\gamma) \to Y$的纤维，得到

$$\dim Y_{ux}(\gamma) - \dim Y_x(\gamma) \leqslant \ell(u).$$

根据定义， $Y_\gamma = Y_x(\gamma)$。由 [19, 定理 4.8], $\dim X_w(b) = \dim X_{ux}(b) = \ell(u)$。因此， $\dim Y_w(\gamma) = \dim Y_{ux}(\gamma) \leqslant \dim X_w(b) + \dim Y_\gamma$。

6.5. 基例：下界。我们沿用 §6.4 中的记号。

设 $\mathbf{M} = \mathbf{M}^{\nu_x}$ 和 $\mathcal{P} = \breve{M} \cap \mathcal{P}_K$。我们有浸入 $\mathrm{Fl}^{\mathbf{M}} \to \mathrm{Fl}$ 和 $\breve{M}/\mathcal{P} \to \breve{G}/\mathcal{P}_K$。设

$$Y' = \{g\mathcal{P} \in \breve{M}/\mathcal{P}; g^{-1}\gamma g \in \mathcal{P}\dot{x}\mathcal{P}\}.$$

浸入 $\breve{M}/\mathcal{P} \to \breve{G}/\mathcal{P}_K$ 诱导出一个浸入 $Y' \to Y$。对于任意 $u' \in W_K$，我们有如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} Y_{\mathbf{M}u'x}(\gamma) & \longrightarrow & Y_{u'x}(\gamma) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y' & \longrightarrow & Y \end{array}$$

我们在 §6.4 中已证明，$\mathcal{P}_K\dot{x}\mathcal{P}_K$ 中的任意元素都与 $\mathcal{P}_K$ 共轭于$\mathcal{I}\dot{x}\mathcal{I}$中的某个元素。因此，映射 $Y_x(\gamma) \to Y$是满射。由定理 4.4，映射 $Y_x^{\mathbf{M}}(\gamma) \to Y_x(\gamma)$ 是同构。上面对 $u' = 1$ 的交换图说明，浸入 $Y' \to Y$是同构。特别地，我们可以并且将假设 $\gamma \in \mathcal{P}\dot{x}\mathcal{P}$。

令 $\delta = \mathrm{Ad}(\dot{x})$。则 δ 是 $\breve{M}$ 上的群自同构，并稳定其 Iwahori子群$\mathcal{I}_{\mathbf{M}} = \breve{M} \cap I$。此外，$\mathcal{P}$ 是 $\breve{M}$的一个标准 δ-稳定抛物型子群。因此，Y'是与元素 $\gamma\dot{x} \in \breve{M}_{\mathrm{ex}}$相关联的部分仿射旗簇 $\breve{M}/\mathcal{P}$中的仿射 Springer 纤维。令$Y^{',\mathrm{reg}} \subset Y'$ 为 §3.2 中定义的正则轨迹。由定理 3.1 和 4.4，

$$\dim Y^{',\mathrm{reg}} = \dim Y' = \dim Y_x^{\mathbf{M}}(\gamma) = \dim Y_x(\gamma) = \dim Y_\gamma.$$

考虑以下交换图：

$$\begin{array}{ccccc} (\pi'_K)^{-1}(Y^{',\mathrm{reg}}) \cap Y_{ux}^{\mathbf{M}}(\gamma) & \hookrightarrow & Y_{ux}^{\mathbf{M}}(\gamma) & \xrightarrow{\cong} & Y_{ux}(\gamma) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi'_K} & & \downarrow{\scriptstyle \pi'_K} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_K} \\ Y^{',\mathrm{reg}} & \hookrightarrow & Y' & \xrightarrow{\cong} & Y \end{array}$$

其中 $\pi_K : \mathrm{Fl} \to \breve{G}/\mathcal{P}_K$ 和 $\pi'_K : \mathrm{Fl}^{\mathbf{M}} \to \breve{M}/\mathcal{P}$ 是投影映射。

对于任意 $g\mathcal{P} \in Y^{',\mathrm{reg}}$，纤维

$$(\pi'_K)^{-1}(g\mathcal{P}) \cap Y_{ux}^{\mathbf{M}}(\gamma) = \{gg_1\mathcal{I}_{\mathbf{M}} \in g\mathcal{P}/\mathcal{I}_{\mathbf{M}}; g_1^{-1}(g^{-1}\gamma g)g_1 \in \mathcal{I}_{\mathbf{M}}\dot{u}\dot{x}\mathcal{I}_{\mathbf{M}}\}.$$

令 $\bar{\mathcal{P}}$ 为 $\mathcal{P}$ 的约化商，并令 $\bar{\gamma}_1$ 为 $g^{-1}\gamma g$ 在 $\bar{\mathcal{P}}$中的像。由于 $g\mathcal{P} \in Y'$,reg，$\bar{\gamma}_1$ 是 $\bar{\mathcal{P}}$中的一个 δ-正则元素。类似于 §5.3 中的证明，$(\pi'_K)^{-1}(g\mathcal{P}) \cap Y\mathbf{M}_{ux}(\gamma)$ 与关联于 $\mathcal{P}$的 δ-正则元素 $\bar{\gamma}_1$ 所对应的 Lusztig 簇同构。由 §5.5，$\dim\big((\pi'_K)^{-1}(g\mathcal{P}) \cap Y\mathbf{M}_{ux}(\gamma)\big) = \ell(u)$，因此 $\dim\big((\pi'_K)^{-1}(Y'\mathrm{,reg}) \cap Y\mathbf{M}_{ux}(\gamma)\big) = \dim\ Y'\mathrm{,reg} + \ell(u)$。

根据定理 4.4，$\dim\ Y_{ux}(\gamma) = \dim Y_{\mathbf{M}ux}(\gamma)$。于是我们有

$$\begin{aligned} \dim Y_{ux}(\gamma) = \dim Y_{ux}^{\mathbf{M}}(\gamma) &\geqslant \dim\big((\pi'_K)^{-1}(Y^{',\mathrm{reg}}) \cap Y_{ux}^{\mathbf{M}}(\gamma)\big) \\ &= \dim Y^{',\mathrm{reg}} + \ell(u) = \dim X_{ux}(b) + \dim Y_\gamma. \end{aligned}$$

这就完成了基例的证明。

~ ~6.6. 归约过程。设 $w \in W$。假设 $w \notin W_{\min}$，并且定理 6.7 对任意满足 $\ell(w') < \ell(w)$ 的 $w' \in W$ 都成立。根据定理 5.4，存在 $w' \in W$，使得 $w \approx w'$ 且 $s \in \mathbb{S}$，并满足 $sw's < w'$。

根据命题 6.2 和 6.1，我们有

$$\begin{aligned} \dim X_w(b) = \dim X_{w'}(b) &= \max\{\dim X_{sw'}(b), \dim X_{sw's}(b)\} + 1, \\ \dim Y_w(\gamma) = \dim Y_{w'}(\gamma) &= \max\{\dim Y_{sw'}(\gamma), \dim Y_{sw's}(\gamma)\} + 1. \end{aligned}$$

Here 我们采用约定，$\dim\ \emptyset = -\infty$ 且 $-\infty + 1 = -\infty$。注意，$\ell(sw')$ $\ell(sw's)$ $< \ell(w)$ 。根据归纳假设，我们有

(1) $Y_{sw'}(\gamma) \neq \emptyset$ 当且仅当 $X_{sw'}(b) \neq \emptyset$。在这种情况下，

$$\dim Y_{sw'}(\gamma) - \dim X_{sw'}(b) = \dim Y_\gamma;$$

(2) $Y_{sw's}(\gamma) \neq \emptyset$ 当且仅当 $X_{sw'\sigma}(b) \neq \emptyset$。在这种情况下，

$$\dim Y_{sw's}(\gamma) - \dim X_{sw's}(b) = \dim Y_\gamma.$$

因此，当且仅当 $Y_w(\gamma) \neq \emptyset$ if and only if $X_w(b) \neq \emptyset$。在这种情况下，

$$\begin{aligned}&\dim Y_w(\gamma) - \dim X_w(b)\\ &= \max\{\dim Y_{sw'}(\gamma), \dim Y_{sw's}(\gamma)\} - \max\{\dim X_{sw'}(b), \dim X_{sw's}(b)\}\\ &= \dim Y_\gamma.\end{aligned}$$

因此，定理 6.7 对于 $w \in W$成立。

6.7. 显式描述。令 6 表示支配有理余权集合上的支配序，也就是说，$\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ 当且仅当 $\lambda_2 - \lambda_1$ 是简单余根的非负有理线性组合。

我们回顾亏格和虚维数的定义。

对于 $b \in \breve{G}'$，b的亏格定义为 $\mathrm{def}(b) = \mathrm{rank}_F \mathrm{G}' - \mathrm{rank}_F \mathrm{J}_b$，其中，对于定义在 F上的约化群 H，rank_F表示群 H 的 F-秩。亏格也可以按如下方式定义，这种定义只依赖于 Iwahori–Weyl 群，而不依赖于约化群。令$V_w = \{v \in V;\ w \cdot v = v + \nu_w\}$。对于 W 的任一直共轭类 C，我们将C 的亏格定义为

$$\mathrm{def}(C) = \dim V - \dim V_w \text{ for any } w \in C.$$

根据 [32, §1.9], $\mathrm{def}(C) = \mathrm{def}(b)$，其中 $[b] = [\dot{w}]$ 对任意 $w \in C$均成立。

注意都可以任意地写成 $xt^\lambda y$ 的形式，其中 $x, y \in W_0$, λ 是满足 $t^\lambda y \in {}^{\mathbb{S}_0}\tilde{W}$ 的支配余权。我们令 $\eta(xt^\lambda y) = yx \in W_0$。对于任意 $w \in \tilde{W}$ 和$b \in \breve{G}'$，虚维数定义为

$$d_w(b) = \frac{1}{2}\big(\ell(w) + \ell(\eta(w)) - \mathrm{def}(b)\big) - \langle \nu_{[b]}, \rho\rangle.$$

根据 [20, 定理 2.30], ，我们有 $\dim X_w(b) \leqslant d_w(b)$。

我们可以改用直共轭类 C 来重新表述虚维数。令

$$d_w(C) = \frac{1}{2}\big(\ell(w) + \ell(\eta(w)) - \mathrm{def}(C) - \ell(C)\big).$$

这里，$\ell(C)$ 定义为 C 中任意最短长度元素的长度。我们有 $\ell(C) = \langle \nu_{[b]}, 2\rho\rangle$，若对任意 $w \in C$, $[b] = [\dot{w}]$ 均成立。这里，ρ 是正根之和的一半。

现在陈述仿射格拉斯曼中仿射 Deligne–Lusztig 簇的非空性模式与维数公式的结果。

定理 6.8. 设 μ 是一个支配余权。那么 $X_\mu(b) \neq \emptyset$ 当且仅当 $\kappa(\mu) = \kappa(b)$ 且 $\nu_{[b]} \leqslant \mu$。在此情形下，

$$\dim X_\mu(b) = \langle \mu - \nu_{[b]}, \rho\rangle - \frac{1}{2}\mathrm{def}(b).$$

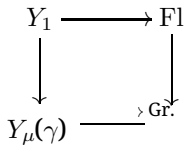
非空性模式中的“仅当”部分归功于 Rapoport 和 Richartz [45]，而“当”部分归功于 Gashi [12]。维数公式在分裂群的情形下由 [15] 和 [48] 证明，在非分歧群的情形下由 [18] 和 [51] 证明，而一般情形则见 [20, 定理 2.29]。

结合定理 6.8 与定理 6.7，我们得到仿射格拉斯曼中仿射 Lusztig 簇的非空性模式与维数公式的如下描述。

定理 6.9. 设 μ 为支配余权，且 $\gamma \in \breve{G}^{\mathrm{rs}}$。那么 $Y_\mu(\gamma) \neq \emptyset$ 当且仅当 $\kappa(\mu) = \kappa(\gamma)$ 且 $\nu_{\{\gamma\}} \leqslant \mu$。在此情况下，

$$\dim Y_\mu(\gamma) = \langle \mu - \nu_{\{\gamma\}}, \rho\rangle - \frac{1}{2}\mathrm{def}(C_{\{\gamma\}}) + \dim Y_\gamma.$$

证明。注意，$\mathcal{K}^{\mathrm{sp}} t^\mu \mathcal{K}^{\mathrm{sp}} = \bigsqcup_{w \in W_0 t^\mu W_0} \mathcal{I}\dot{w}\mathcal{I}$。令 $Y_1 = \sqcup_{w \in W_0 t^\mu W_0} Y_w(\gamma)$。我们有以下笛卡尔图



注意，投影映射 $\mathrm{Fl} \to \mathrm{Gr}$ 的纤维同构于 $\mathcal{K}^{\mathrm{sp}}/\mathcal{I}$。于是我们有

$$\dim Y_\mu(\gamma) = \dim Y_1 - \dim \mathcal{K}^{\mathrm{sp}}/\mathcal{I} = \dim Y_1 - \ell(w_0).$$

类似地，我们设定 $X_1 = \sqcup_{w \in W_0 t^\mu W_0} X_w(b)$。我们有 $\dim X_\mu(b) = \dim X_1 - \ell(w_0)$。

特别地，$X_1 \neq \emptyset$ 当且仅当 $X_\mu(b) \neq \emptyset$ 且 $Y_1 \neq \emptyset$ 当且仅当 $Y_\mu(\gamma) \neq \emptyset$。由定理 6.9，$X_w(b) \neq \emptyset$ 对于某个 $w \in W_0 t^\mu W_0$ 当且仅当 $\kappa(\mu) = \kappa(b)$ 且 $\nu_{[b]} \leqslant \mu$。由 §2.6，$\kappa(\gamma) = \kappa(b)$ 且 $\nu_{\{\gamma\}} = \nu_{[b]}$。因此，由定理 6.7，$Y_\mu(\gamma) \neq \emptyset$ 当且仅当 $\kappa(\mu) = \kappa(\gamma)$ 且 $\nu_{\{\gamma\}} \leqslant \mu$。

假设 $\kappa(\mu) = \kappa(\gamma)$ 且 $\nu_{\{\gamma\}} \leqslant \mu$。由定理 6.7 和定理 6.9，我们有

$$\begin{aligned}
\dim Y_\mu(\gamma) &= \dim Y_1 - \ell(w_0) \\
&= \max_{w \in W_0 t^\mu W_0} \dim Y_w(\gamma) - \ell(w_0) \\
&= \max_{w \in W_0 t^\mu W_0} \dim X_w(b) + \dim Y_\gamma - \ell(w_0) \\
&= \dim X_1 - \ell(w_0) + \dim Y_\gamma \\
&= \dim X_w(b) + \dim Y_\gamma \\
&= \langle \mu - \nu_{\{\gamma\}}, \rho \rangle - \frac{1}{2} \operatorname{def}(C_{\{\gamma\}}) + \dim Y_\gamma.
\end{aligned}$$

□

我们尚未完全描述仿射旗簇中仿射 Deligne–Lusztig 簇的非空性模式和维数公式。不过，[22] 给出了几乎所有情形的明确答案。结合定理 6.7 与 [22, 定理 6.1], ，我们得到仿射旗簇中仿射 Lusztig 簇的以下结果。

定理 6.10. 设 $\gamma \in \breve{G}^{\mathrm{rs}}$。假设 $\langle \mu, \alpha \rangle \geqslant 2$ 对任意单根 α 及 $\nu_{\{\gamma\}} + 2\rho^\vee \leqslant \mu$ 均成立。那么，对任意 $x, y \in W_0$, $Y_{xt^\mu y}(\gamma) \neq \emptyset$，当且仅当 $\kappa(\gamma) = \kappa(\mu)$ 且 $\mathrm{supp}(yx) = \mathbb{S}$。在此情形下，

$$\dim Y_{xt^\mu y}(\gamma) = d_{xt^\mu y}(C_{\{\gamma\}}) + \dim Y_\gamma.$$

References

[1] A. Abreu 和 A. Nigro, *A geometric approach to characters of Hecke algebras*, arXiv:2205.14835（2022）。[2] R. Bezrukavnikov, *The dimension of the fixed point set on affine flag manifolds*, 《数学研究快报》3（1996），第2期，185–189。[3] R. Bezrukavnikov 和 Y. Varshavsky, *Affine Springer fibers and depth zero L-packets*, arXiv:2104.13123。[4] B. Bhatt 和 P. Scholze, *Projectivity of the Witt vector Grassmannian* 209 2017 2, , 《发明数学》 329 423 （），第–期。[5] A. Bouthier, *Dimension des fibres de Springer affines pour les groupes* 20 2015 3, , 《变换群》（），615 663 第–期。[6] A. Bouthier 和 J. Chi, *Correction to "Dimension des fibres de Springer affines pour les groupes"*, 《变换群》23（2018），第4期，1217–1222。[7] C.-L. Chai, *Newton Polygons as Lattice Points*, 《美国数学杂志》122（2000），967–990。[8] J. Chi, *Geometry of Kottwitz-Viehmann Varieties*, 《朱西厄数学研究所杂志》21（2022），第1期，1–65。[9] J. Chi, *Witt vector affine Springer fibers*, arXiv:2404.09945。[10] P. Deligne 和 G. Lusztig, *Representations of reductive groups over finite fields*, 《数学年刊》（第2辑）103（1976），第1期，103–161。[11] E. W. Ellers 和 N. Gordeev, *Intersection of conjugacy classes with Bruhat cells in Chevalley groups*, 《太平洋数学杂志》214（2004），245–260。[12] Q. Gashi, *On a conjecture of Kottwitz and Rapoport* 4 **43** 2010 6, , 《高等师范学校科学年刊》 ´ （） （），第–期。[13] M. Geck, S. Kim 和 G. Pfeiffer, *Minimal length elements in twisted conjugacy classes of finite Coxeter groups* **229** 2000 2, 570 600 , 《代数杂志》 1017 1038 （），第–期。[14] M. Geck 和 G. Pfeiffer, *On the irreducible characters of Hecke algebras* **102** 1993 1, , 《数学进展》 79 94 （），第–期。[15] U. G¨ortz、T. Haines、R. Kottwitz、D. Reuman, *Dimensions of some affine Deligne–Lusztig varieties*, 《高等师范学校科学年刊》 ´39（2006），467–511。[16] U. G¨ortz、T. Haines、R. Kottwitz、D. Reuman, *Affine Deligne–Lusztig varieties in affine flag varieties*, 《组合数学》146（2010），1339–1382。[17] U. G¨ortz、X. He、S. Nie, *P-alcoves and nonemptiness of affine Deligne–Lusztig varieties*, 《高等师范学校科学年刊》 ´48（2015），647–665。[18] P. Hamacher, *The geometry of Newton strata in the reduction modulo p of Shimura varieties of PEL type*, 《杜克数学杂志》164（2015），2809–2895。

[19] X. He, *Geometric and homological properties of affine Deligne–Lusztig varieties*, 《数学年刊》179（2014），367–404。[20] X. He, *Hecke algebras and p-adic groups*, 《数学最新进展》2015，73–135，Int. Press, Somerville，MA，2016。[21] X. He, *Some results on affine Deligne–Lusztig varieties*, 2018年里约热内卢国际数学家大会论文集。第二卷：特邀报告，1345–1365，World Sci. Publ.，Hackensack，NJ，2018。[22] X. He, *Cordial elements and dimensions of affine Deligne–Lusztig varieties*, 《数学论坛·圆周率》9（2021），e9。[23] X. He 和 S. Nie, *Minimal length elements of finite Coxeter groups*, 《杜克数学杂志》161（2012），2945–2967。[24] X. He 和 S. Nie, *Minimal length elements of extended affine Weyl group*, 《组合数学》150（2014），第11期，1903–1927。[25] X. He、S. Nie, *P-alcoves, parabolic subalgebras and cocenters of affine Hecke algebras*, 《精选数学》21（2015），995–1019。[26] X. He、S. Nie, *A geometric interpretation of Newton strata* 26 2020 1, 4, , 16 《精选数学》（新系列）（），文章编号：页。[27] X. He、R. Zhou 和 Y. Zhu, *Stabilizers of irreducible components of affine Deligne–Lusztig varieties*, 《欧洲数学会杂志》（2024），DOI 10.4171/JEMS/1414。[28] D. Kazhdan 和 G. Lusztig, *Fixed point varieties on affine flag manifolds*, 《以色列数学杂志》62（2）（1988），129–168。[29] 金东允, *Homology Class of a Deligne–Lusztig Variety and Its Analogs*, 《国际数学研究通知》2020（4）（2020），1246–1280。[30] R. Kottwitz, *Isocrystals with additional structure*, 《组合数学》56（1985），201–220。[31] R. Kottwitz, *Isocrystals with additional structure. II*, 《组合数学》109（1997），255–339。[32] R. Kottwitz, *Dimensions of Newton strata in the adjoint quotient of reductive groups*, 《纯粹与应用数学季刊》2（2006），817–836。[33] 科特维茨和维曼, *Generalized affine Springer fibres*, 《朱西厄数学研究所杂志》11（3）（2012），569–609。[34] 李鹏、纳德勒和云志, *Functions on the commuting stack via Langlands duality*, 《数学年刊》200（2024），609–748。[35] G. Lusztig, *On the reflection representation of a finite Chevalley group*, 《李群表示论》，LMS讲义丛书第34卷，剑桥大学出版社，1979，325–337。[36] G. Lusztig, *Character sheaves*, I–V, 《数学进展》56（1985），193–237；57（1985），226–265；57（1985），266–315；59（1986），1–63；61（1986），103–155。[37] G. Lusztig, *Hecke algebras with unequal parameters*, CRM专著丛书第18卷，美国数学会，普罗维登斯，RI，2003；扩充和更新版见 arxiv.org/0208154。[38] G. Lusztig, *On some partitions of a flag manifold*, 《亚洲数学杂志》15（2011），第1期，1–8。[39] G. Lusztig, *From conjugacy classes in the Weyl group to unipotent classes*, 《表示论》15（2011），494–530。[40] G. Lusztig, *Unipotent almost characters of simple p-adic groups*, Ast´erisque 370（2015），243–267。[41] G. Lusztig, *Comments on my papers*, arXiv:1707.09368，v7。[42] S. Nie, *Fundamental elements of an affine Weyl group*, 《数学年刊》362（2015），485–499。[43] 奥布洛姆科夫和云志, *Geometric representations of graded and rational Cherednik algebras*, 《数学进展》292（2016），601–706。[44] M. Rapoport, *A guide to the reduction modulo p of Shimura varieties*, Ast´erisque（2005），第298期，271–318。[45] M. Rapoport 和 M. Richartz, *On the classification and specialization of F-isocrystals with additional structure* 103 1996 181 , 《组合数学》（），第2期，153–。[46] 斯坦伯格, *Endomorphisms of linear algebraic groups*, 《美国数学会回忆录》80（1968）。[47] 施帕尔滕施泰因, *Classes Unipotentes et Sous-groupes de Borel*, Springer 柏林海德堡，1982。[48] 维曼。*The dimension of affine Deligne–Lusztig varieties*, 《高等师范学校科学年刊》´（第4辑）39（2006），513–526。[49] 王晓格里芬, *Multiplicative Hitchin Fibration and Fundamental Lemma*, arXiv:2402.19331。[50] 云志, *Lectures on Springer theories and orbital integrals*, 《模空间几何与表示论》，155–215，IAS/Park City数学丛书第24卷，美国数学会，普罗维登斯，RI，2017。[51] 朱熙, *Affine Grassmannians and the geometric Satake in mixed characteristic*, 《数学年刊》185（2017），第2期，403–492。

Department of Mathematics and New Cornerstone Science Laboratory, The University of Hong Kong, Pokfulam, Hong Kong, Hong Kong SAR, China*Email address*: xuhuahe@hku.hk