arXiv:2302.03234v1 [math.KT] 7 Feb 2023

伴随系数的莱布尼茨上同调

SHITU FAWAZ JIMOH

摘要：以庞加莱群 $\mathbf{R}^{3,1} \rtimes O(3,1)$ 为出发模型，我们针对 $n = p + q$, $p + q \geq 4$，研究仿射不定正交群 $\mathbf{R}^{p,q} \rtimes SO(p,q)$。记 $\mathfrak{h}_{p,q}$ 为仿射不定正交群的李代数。我们计算了 $\mathfrak{h}_{p,q}$ 的伴随系数莱布尼茨上同调，记作 $HL^*(\mathfrak{h}_{p,q}; \mathfrak{h}_{p,q})$。我们计算了若干不定正交不变量以及$\mathfrak{h}_{p,q}$-不变量，并给出了莱布尼茨上同调

1. INTRODUCTION

在物理学中，李群作为物理系统的对称群出现，而其李代数（单位元附近的切向量）可视为无穷小对称运动。因此，李代数及其表示在物理学中得到广泛应用，尤其是在量子力学和粒子物理学中。不定正交群 $O(p,q)$ 是物理学中广泛应用的最重要群之一。物理学中特别关注的是洛伦兹群 $O(3,1)$——闵可夫斯基时空中所有洛伦兹变换构成的群；闵可夫斯基时空是所有（非引力）物理现象的经典与量子背景 [11]；以及庞加莱群——洛伦兹群 $O(3,1)$ 的仿射群，即 $\mathbf{R}^{3,1} \rtimes O(3,1)$。洛伦兹群是电磁学和狭义相对论的理论背景。[1]

可借助联络对可微结构进行分类。这种方法需要进行计算，而计算有时并不容易处理。流形上的联络自然地构成向量场伴随表示 [14] 系数的莱布尼茨上同调复形中的一个上链。在 [6] 中，有人提出了可微流形的莱布尼茨上同调 HL^* 的定义。因此，我们可以将利用联络对可微结构进行分类的问题，转化为计算莱布尼茨上同调的问题。这是研究莱布尼茨代数和莱布尼茨（上）同调的诸多动机之一。对于任意莱布尼茨代数 $\mathfrak{h}$，莱布尼茨（上）同调,$HL^*(\mathfrak{h},\mathfrak{h})$，都很难计算。

半单莱布尼茨代数在伴随表示系数下的莱布尼茨上同调已在 [9], 中研究，而 $HL^*(\mathfrak{h};\mathfrak{h})$ 已被用于研究莱布尼茨代数范畴中的变形理论 [3], [4]。

我们给出 $HL(\mathfrak{h}_{p,q};\mathfrak{h}_{p,q})$ 的计算，其中 $\mathfrak{h}_{p,q}$ 是仿射不定正交李代数，$p+q\geq 4$。我们通过用平衡张量刻画一些不定正交不变量来计算这一上同调。随后，我们用这些不变量给出莱布尼茨上同调。此次计算的主要工具是霍赫希尔德–塞尔谱序列和 Pirashvili谱序列。在低维情形下，$HL^0(\mathfrak{h}_{p,q};\mathfrak{h}_{p,q})=0$, $HL^1(\mathfrak{h}_{p,q};\mathfrak{h}_{p,q})=\langle I\rangle$，且 $HL^2(\mathfrak{h}_{p,q};\mathfrak{h}_{p,q})=\langle\rho\rangle$。$HL^*(\mathfrak{h}_{p,q};\mathfrak{h}_{p,q})$ 的高维情形则呈现出这些类与张量代数之间的呼应。我们在第 7 节证明，存在一个分次向量空间的同构

$$HL^*(\mathfrak{h}_{p,q};\mathfrak{h}_{p,q})\simeq\langle I,\rho\rangle\otimes T(\gamma_{pq}^*),$$

其中 $\langle I,\rho\rangle$ 是以 $\{I,\rho\}$ 为基的实向量空间，而 $T(\gamma_{pq}^*)$ 是由 γ_{pq}^*的类生成的张量代数。我们在第5节证明，γ_{pq}^* 和 ρ 是 $\mathfrak{so}(p,q)$-不变量。此外，

I 是 $\mathfrak{h}_{p,\ q}$-不变量。

$$
\begin{aligned}
&I(\alpha_{ij}) = 0, \quad 1 \le i < j \le p, \quad p+1 \le i < j \le n, \\
&I(\beta_{ij}) = 0, \quad 1 \le i \le p, \quad p+1 \le j \le n, \\
&I(\tfrac{\partial}{\partial x^i}) = \tfrac{\partial}{\partial x^i}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

$$
\begin{aligned}
&\rho(\alpha_{ij} \wedge g) = 0, \quad 1 \le i < j \le p, \quad p+1 \le i < j \le n, \quad \text{for all}\, g \in \mathfrak{h}_{p,q}, \\
&\rho(\beta_{ij} \wedge g) = 0, \quad 1 \le i \le p, \quad p+1 \le j \le n, \quad \text{for all}\, g \in \mathfrak{h}_{p,q}, \\
&\rho(\tfrac{\partial}{\partial x^i} \wedge \tfrac{\partial}{\partial x^j}) = \alpha_{ij}, \qquad 1 \le i \le j \le p, \\
&\rho(\tfrac{\partial}{\partial x^i} \wedge \tfrac{\partial}{\partial x^j}) = -\alpha_{ij}, \quad p+1 \le i \le j \le n, \\
&\rho(\tfrac{\partial}{\partial x^i} \wedge \tfrac{\partial}{\partial x^j}) = \beta_{ij}, \quad 1 \le i \le p, \quad p+1 \le j \le n.
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma^*_{pq} = &\sum_{1 \le i < j \le p} (-1)^{i+j} dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^n \otimes \alpha^*_{ij} \\
&- \sum_{p+1 \le i < j \le n} (-1)^{i+j+1} dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^n \otimes \alpha^*_{ij} \\
&- \sum_{\substack{1 \le i \le p \\ p+1 \le j \le n}} (-1)^{i+j+1} dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^n \otimes \beta^*_{ij}
\end{aligned} \tag{1.3}
$$

这一结果推广了 Lodder 在旋转群上得到的结果 [14] 。旋转群是 $\mathfrak{so}(p, q)$ 的一个特例，即 $q = 0$ 时的情形，通常记作 $\mathfrak{so}(p)$。

2. THE INDEFINITE ORTHOGONAL LIE ALGEBRA

Let

$$I_{p,\,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

其中 I_k 表示 $k\times k$ 单位矩阵。接下来我们定义不定正交李代数,

$$\mathfrak{so}(p,\,q) = \{X \in M_n(\mathbf{R}) \,|\, X^T I_{p,\,q} = -I_{p,\,q} X\}$$

其中 $n = p + q$ 和 $p,\, q \in \mathbf{N}$。

考虑实数域 $\mathbf{R^n}$ 上的标准坐标 $(x_1, x_2, ..., x_n)$，其单位向量场 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 平行于 x_i 轴。

Let

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &:= x_i \tfrac{\partial}{\partial x^j} - x_j \tfrac{\partial}{\partial x^i}, \quad 1 \le i < j \le p, \quad p+1 \le i < j \le n, \\ \beta_{ij} &:= x_i \tfrac{\partial}{\partial x^j} + x_j \tfrac{\partial}{\partial x^i}, \quad 1 \le i \le p, \quad p+1 \le j \le n. \end{aligned} \tag{2.2}$$

那么 $\{\alpha_{ij}\}, \{\beta_{ij}\}$ 是一个向量空间基，它对应的李代数同构于 $\mathfrak{so}(p,\, q)$。令$\mathfrak{I}_n$ 为由以下元素张成的实数域 $\mathbf{R}$ 向量空间

$$\{\tfrac{\partial}{\partial x^i}\}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

于是 $\mathfrak{I}_n$ 是一个阿贝尔李代数。设 $\mathfrak{h}_{p,\ q}$ 是以 $\{\alpha_{ij}\}$、$\{\beta_{ij}\}$、$\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ 的并集为基的李代数。那么 $\mathfrak{I}_n$ 是 $\mathfrak{h}_{p,\ q}$ 的一个理想，并且存在李代数的短正合列 [12,第 217]页

$$0 \longrightarrow \mathfrak{I}_n \longrightarrow \mathfrak{h}_{p,\,q} \longrightarrow \mathfrak{so}(p,\, q) \longrightarrow 0$$

其中 $\mathfrak{h}_{p,\ q}/\mathfrak{I}_n \simeq \mathfrak{so}(p,\ q)$，且 $\mathfrak{h}_{p,\ q}$是 $\mathfrak{so}(p,\ q)$的仿射扩张。

令 α_{ij}^*、 β_{ij}^* 分别为相对于 $h_{p,q}$ 的基 $\{\alpha_{ij}\} \cup \{\beta_{ij}\} \cup \{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ 而言， α_{ij}、 β_{ij} 的对偶，并令 dx^i 为 $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 的对偶。

3. LIE ALGEBRA COHOMOLOGY WITH COEFFICIENTS

设 $\mathfrak{g}$ 是环 k 上的李代数， V 是任意的 $\mathfrak{g}$-模。 $\mathfrak{g}$ 关于模 V 的带系数李代数上同调记作 $H^*_{\text{Lie}}(\mathfrak{g};\ V)$，它是上链复形（切瓦利-艾伦伯格复形）的上同调，

$$\text{Hom}_k(\mathbf{R},\, V) \xrightarrow{\delta} \text{Hom}_k(\mathfrak{g},\, V) \xrightarrow{\delta} \text{Hom}_k(\mathfrak{g}^{\wedge 2},\, V) \xrightarrow{\delta} \text{Hom}_k(\mathfrak{g}^{\wedge 3},\, V) \xrightarrow{\delta} \cdots,$$

其中， $\mathfrak{g}^{\wedge n}$ 是 k 上 $\mathfrak{g}$ 的第 n 个外幂，而此类 n-上链的余边界 δf 是 $(n+1)$-上链

$$\begin{aligned}\delta f(g_1 \wedge ... \wedge g_{n+1}) &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i g_i \cdot f(g_1 \wedge ... \hat{g}_i ... \wedge g_{n+1}) \\ &+ \sum_{1 \le i < j \le n+1} (-1)^j f(g_1 \wedge ... \wedge g_{i-1} \wedge [g_i, g_j] \wedge ... \hat{g}_j ... \wedge g_{n+1}).\end{aligned} \tag{3.1}$$

特别地，当 $V = \mathfrak{g}$ 时，我们得到伴随表示的带系数李代数上同调，记作 $H^*_{\text{Lie}}(\mathfrak{g};\ \mathfrak{g})$；当 $V = g' := \text{Hom}_k(\mathfrak{g},\, k)$ 时，我们得到余伴随表示的带系数李代数上同调，记作 $H^*_{\text{Lie}}(\mathfrak{g};\, \mathfrak{g}')$。我们将 k 视为平凡的 $\mathfrak{g}$-模，因此 $H^*_{\text{Lie}}(\mathfrak{g};\ k)$ 是具有平凡系数的李代数上同调。

$V^{\mathfrak{g}}$ 的（左）不变子模（在 $\mathfrak{g}$-模 V 中）定义如下:

$$V^{\mathfrak{g}} = \{v \in V :\ xv = 0 \text{ for all } x \in \mathfrak{g}\}$$

如上所述， $\mathfrak{g}$ 对 k 的作用是平凡的。这意味着，对于所有 $c \in k$和所有 $g \in \mathfrak{g}$，都有 $g \cdot c = 0$。令 $\mathfrak{g}$ 通过伴随表示作用于自身。对于 $g \in \mathfrak{g}$，线性映射 $\mathrm{ad}_g\colon\ \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 定义为

$$g \cdot x := \mathrm{ad}_g(x) = [g, x], \text{ for all } x \in \mathfrak{g}.$$

对于 $g\in \mathfrak{g}$ 和 $f \in \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{g}^{\wedge n}, V)$，我们定义 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathrm{Hom}_k(\mathfrak{g}^{\wedge n}, V)$ 上的作用 by

$$\begin{aligned}(gf)(x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n) &= g \cdot f(x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} f(x_1 \wedge ... \wedge x_{i-1} \wedge [x_i, g] \wedge x_{i+1} \wedge ... \wedge g_n)\end{aligned} \tag{3.2}$$

$\mathfrak{g}$ 对自身的作用可扩展到 $\mathfrak{g}^{\wedge n}$，定义如下

$$[g,\, x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n] = \sum_{i=1}^{n} x_1 \wedge_2 \wedge ... \wedge [g,\, x_i] \wedge ... \wedge x_n, \text{ for } g,\ x_i \in \mathfrak{g} \text{ for all i.} \tag{3.3}$$

4. LEIBNIZ COHOMOLOGY WITH COEFFICIENTS

设 $\mathfrak{g}$ 是环 k 上的莱布尼茨代数，且 V 是一个表示 $\mathfrak{g}$。设

$$CL^n(\mathfrak{g},\, V) := \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{g}^{\otimes n},\, V), \quad \text{where} \quad n \geq 0.$$

$\mathfrak{g}$ 取值于表示 V 的莱布尼茨上同调，记作$HL^*(\mathfrak{g};\ V)$，是上链复形 $CL^*(\mathfrak{g}, V)$ 的上同调，

$$\mathrm{Hom}_k(\text{实数域 } V) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{g}, V) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{g}^{\otimes 2}, V) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{g}^{\otimes 3}, V) \xrightarrow{\delta} \cdots,$$

其中， $\mathfrak{g}^{\otimes n}$ 是 k 上的 $\mathfrak{g}$ 的 n 次张量幂，而此类 n-上链的余边界 δf 是一个 $(n+1)$-上链

$$\begin{aligned}\delta f(g_1 \otimes \cdots \otimes g_{n+1}) &:= [g_1,\, f(g_2 \otimes \cdots \otimes g_{n+1})] \\ &+ \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^i [f(g_1 \otimes \cdots \hat{g}_i \cdots \otimes g_{n+1}),\, g_i] \\ &+ \sum_{1 \le i < j \le n+1} (-1)^{j+1} f(g_1 \otimes \cdots \otimes g_{i-1} \otimes [g_i, g_j] \otimes \cdots \hat{g}_j \cdots \otimes g_{n+1}).\end{aligned} \tag{4.1}$$

在低维情形下，计算 $HL^*(\mathfrak{g}, V)$ 很容易。对于 $HL^*(\mathfrak{g}, V)$ 的高维情形，我们使用 Pirashvili谱序列 [8] 以及由典范投影映射 $\pi_{\mathrm{rel}}: \mathfrak{g}^{\otimes(n+2)} \to \mathfrak{g}^{\wedge(n+2)}$, $\pi_{\mathrm{rel}}($ $g_1 \otimes g_2 \otimes ... \otimes g_{n+2})$ $= g_1 \wedge g_2 \wedge ... \wedge g_{n+2}$. 所诱导的长正合列

5. INVARIANTS FOR INDEFINITE ORTHOGONAL LIE ALGEBRA

我们给出 $\wedge^*\mathfrak{I}_n$、$\mathrm{Hom}(\wedge^*\mathfrak{I}_n, \mathfrak{h}_{p,\ q})$ 和 $\wedge^*\mathfrak{I}_n \otimes \mathfrak{h}_{p,\ q}$ 在 $\mathfrak{so}(p, q)$ 的作用下的不变量，其中 $n = p + q$.

引理 5.1. 存在一个向量空间同构

$$[\wedge^*\mathfrak{I}_n]^{\mathfrak{so}(p,q)} \simeq \mathbb{R} \oplus \langle v \rangle, where \quad v = \tfrac{\partial}{\partial x^1} \wedge \tfrac{\partial}{\partial x^2} \wedge \cdots \wedge \tfrac{\partial}{\partial x^n}. \tag{5.1}$$

证明。引理 5.1 已在 [5] 中证明，也可以通过直接计算轻松得出。

$$[\mathfrak{I}_n^{\wedge 0}]^{so(p,q)} = \mathbf{R}, \quad [\mathfrak{I}_n^{\wedge n}]^{so(p,q)} = \langle v \rangle \text{ and}$$

$$[\mathfrak{I}_n^{\wedge k}]^{so(p,q)} = \{0\} \quad \text{whenever} \quad k \notin \{0, n\}.$$

□

以下　下述引理已在 [13] 中证明，也可以通过直接计算得出　.

引理 5.2。存在一个向量空间同构

$[\mathfrak{I}_n \otimes \mathfrak{h}_{p,q}]^{\mathfrak{so}(p,q)} \simeq \langle I_{pq} \rangle$ 其中

$$I_{pq} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} - \sum_{i=p+1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^i},$$

$[\mathfrak{I}_n^{\wedge 2} \otimes \mathfrak{h}_{p,q}]^{\mathfrak{so}(p,q)} \simeq \langle \rho_{pq} \rangle \quad where$

$$\begin{aligned}\rho_{pq} = &\sum_{1\le i<j\le p} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes \alpha_{ij} - \sum_{p+1\le i<j\le n} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes \alpha_{ij} \\ &- \sum_{\substack{1\le i\le p \\ p+1\le j\le n}} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes \beta_{ij},\end{aligned}$$

$[\mathfrak{I}_n^{\wedge(n-1)} \otimes \mathfrak{h}_{p,q}]^{\mathfrak{so}(p,q)} \simeq \langle \beta_{pq} \rangle \quad where$

$$\begin{aligned}\beta_{pq} = &\sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \cdots \wedge \hat{\frac{\partial}{\partial x^i}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^n} \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &- \sum_{i=p+1}^{n} (-1)^{i} \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \cdots \wedge \hat{\frac{\partial}{\partial x^i}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^n} \otimes \frac{\partial}{\partial x^i},\end{aligned}$$

$[\mathfrak{I}_n^{\wedge(n-2)} \otimes \mathfrak{h}_{p,q}]^{\mathfrak{so}(p,q)} \simeq \langle \gamma_{pq} \rangle \quad where$

$$\begin{aligned}\gamma_{pq} = &\sum_{1\le i<j\le p} (-1)^{i+j} \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge ... \wedge \hat{\frac{\partial}{\partial x^i}} \wedge ... \wedge \hat{\frac{\partial}{\partial x^j}} \wedge ... \wedge \frac{\partial}{\partial x^n} \otimes \alpha_{ij} \\ &- \sum_{p+1\le i<j\le n} (-1)^{i+j+1} \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge ... \wedge \hat{\frac{\partial}{\partial x^i}} \wedge ... \wedge \hat{\frac{\partial}{\partial x^j}} \wedge ... \wedge \frac{\partial}{\partial x^n} \otimes \alpha_{ij} \\ &- \sum_{\substack{1\le i\le p \\ p+1\le j\le n}} (-1)^{i+j+1} \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge ... \wedge \hat{\frac{\partial}{\partial x^i}} \wedge ... \wedge \hat{\frac{\partial}{\partial x^j}} \wedge ... \wedge \frac{\partial}{\partial x^n} \otimes \beta_{ij}.\end{aligned}$$

$[\mathfrak{I}_n^{\wedge k} \otimes \mathfrak{h}_{p,q}]^{\mathfrak{so}(p,q)} \simeq \{0\}$ *for* $k \notin \{1, 2, n-1, n-2\}$,

引理 5.3。存在一个向量空间同构

$$\mathrm{Hom}(\mathfrak{I}_n^{\wedge k},\, \mathfrak{h}_{p,q}) \simeq \mathfrak{I}_n^{\wedge k} \otimes \mathfrak{h}_{p,q}\ ,\ for\quad k = 0, 1, 2, \cdots . \tag{5.2}$$

证明。我们定义 ψ: $\mathrm{Hom}(\mathfrak{I}_n^{\wedge k},\, \mathfrak{h}_{p,\ q}) \longrightarrow \mathfrak{I}_n^{\wedge k} \otimes \mathfrak{h}_{p,\ q}$,

$$\psi(\phi) := \sum_{s=0}^{k} \sum_{\substack{1\le i_1<i_2<\cdots<i_{k-s}\le p \\ p+1\le i_{k-s+1}<i_{k-s+2}<\cdots<i_k\le n}} (-1)^s z \otimes \phi(z), \tag{5.3}$$

对于所有的 $z = \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \in \mathfrak{I}_n^{\wedge k}$和 $\phi \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{I}_n^{\wedge k}, \mathfrak{h}_{p,\ q})$。

ψ 是一个同构，并且是 $\mathfrak{so}(p, q)$-等变的。同构的证明是直接的。为证明等变性质，我们首先考察 $\mathfrak{so}(p, q)$ 在 $\mathrm{Hom}(\mathfrak{I}_n^{\wedge k},\, \mathfrak{h}_{p,\ q})$ 和 $\mathfrak{I}_n^{\wedge k} \otimes \mathfrak{h}_{p,\ q}$ 上的作用。对于 $g \in \mathfrak{so}(p, q)$ 和 $\phi \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{I}_n^{\wedge k},\, \mathfrak{h}_{p,\ q})$，$g$ 在 ϕ 上的作用为:

$$(g \cdot \phi)(z) = [g,\, \phi(z)] + \phi([z,\, g]) = [g,\, \phi(z)] - \phi([g,\, z]),\ \text{for all } z \in \mathfrak{I}_n^{\wedge k}. \tag{5.4}$$

根据定义，我们有

$$\begin{aligned}
\psi(g \cdot \phi) &= \sum_{s=0}^{k} \sum_{\substack{1\le i_1<i_2<\cdots<i_{k-s}\le p \\ p+1\le i_{k-s+1}<i_{k-s+2}<\cdots<i_k\le n}} (-1)^s z \otimes (g \cdot \phi)(z), \\
&= \sum_{s=0}^{k} \sum_{\substack{1\le i_1<i_2<\cdots<i_{k-s}\le p \\ p+1\le i_{k-s+1}<i_{k-s+2}<\cdots<i_k\le n}} (-1)^s z \otimes [g,\, \phi(z)] \\
&- \sum_{s=0}^{k} \sum_{\substack{1\le i_1<i_2<\cdots<i_{k-s}\le p \\ p+1\le i_{k-s+1}<i_{k-s+2}<\cdots<i_k\le n}} (-1)^s z \otimes \phi([g,\, z])
\end{aligned}$$

$$g\cdot\psi(\phi)=\sum_{s=0}^{k}\sum_{\substack{1\le i_1<i_2<\cdots<i_{k-s}\le p\\ p+1\le i_{k-s+1}<i_{k-s+2}<\cdots<i_k\le n}}(-1)^s[g,\,z]\otimes\phi(z)$$

$$+\sum_{s=0}^{k}\sum_{\substack{1\le i_1<i_2<\cdots<i_{k-s}\le p\\ p+1\le i_{k-s+1}<i_{k-s+2}<\cdots<i_k\le n}}(-1)^s z\otimes[g,\,\phi(z)]$$

我们证明，对于所有 $g\in\mathfrak{so}(p,\,q)$ 和 $z\in\mathfrak{I}_n^{\wedge k}$

$$\sum_{s=0}^{k}\sum_{\substack{1\le i_1<i_2<\cdots<i_{k-s}\le p\\ p+1\le i_{k-s+1}<i_{k-s+2}<\cdots<i_k\le n}}(-1)^s[g,\,z]\otimes\phi(z)$$

$$=-\sum_{s=0}^{k}\sum_{\substack{1\le i_1<i_2<\cdots<i_{k-s}\le p\\ p+1\le i_{k-s+1}<i_{k-s+2}<\cdots<i_k\le n}}(-1)^s z\otimes\phi([g,\,z])$$

然后得出 $\psi(g\cdot\phi)=g\cdot\psi(\phi)$。 □

引理 5.3 的详细内容见我的学位论文。

推论 5.4。存在一个向量空间同构

$$[\mathrm{Hom}(\mathfrak{I}_n^{\wedge k},\,\mathfrak{h}_{p,q})]^{\mathfrak{so}(p,q)}\simeq[\mathfrak{I}_n^{\wedge k}\otimes\mathfrak{h}_{p,q}]^{\mathfrak{so}(p,q)},\ for\ all\ k. \tag{5.5}$$

证明。以下结果成立，是因为引理 5.3 中的 ψ 是 $\mathfrak{so}(p,\,q)$-等变的。不变量 $[\mathrm{Hom}(\mathfrak{I}_n^{\wedge *},\,\mathfrak{h}_{p,\ q})]^{\mathfrak{so}(p,q)}$ 可以通过直接计算求得，尽管这很困难。

对于 $k=1$，$[\mathrm{Hom}(\mathfrak{I}_n,\,\mathfrak{h}_{p,\ q})]^{\mathfrak{so}(p,q)}=\langle I\rangle$，

$$\psi(I):=\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes I(\frac{\partial}{\partial x^i})-\sum_{i=p+1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes I(\frac{\partial}{\partial x^i})=I_{pq}. \tag{5.6}$$

其中

$$I(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \frac{\partial}{\partial x^i}\,, i = 1, 2, \cdots, n.$$

注意, $\langle I\rangle = \langle -I\rangle$。

对于 $k = 2$, $[\mathbf{Hom}(\mathfrak{I}_n^{\wedge 2}, \mathfrak{h}_{p,q})]^{\mathfrak{so}(p,q)} = \langle\rho\rangle$,

$$\begin{aligned}\psi(\rho) := &\sum_{1\le i<j\le p} \frac{\partial}{\partial x^i}\wedge\frac{\partial}{\partial x^j}\otimes\rho(\frac{\partial}{\partial x^i}\wedge\frac{\partial}{\partial x^j})\\ &+\sum_{p+1\le i<j\le n} \frac{\partial}{\partial x^i}\wedge\frac{\partial}{\partial x^j}\otimes\rho(\frac{\partial}{\partial x^i}\wedge\frac{\partial}{\partial x^j})\\ &-\sum_{\substack{1\le i\le p\\ p+1\le j\le n}} \frac{\partial}{\partial x^i}\wedge\frac{\partial}{\partial x^j}\otimes\rho(\frac{\partial}{\partial x^i}\wedge\frac{\partial}{\partial x^j}) = \rho_{pq}\end{aligned} \tag{5.7}$$

其中

$$\begin{aligned}&\rho(\frac{\partial}{\partial x^i}\wedge\frac{\partial}{\partial x^j}) = \alpha_{ij},\ 1\le i\le j\le p,\\ &\rho(\frac{\partial}{\partial x^i}\wedge\frac{\partial}{\partial x^j}) = -\alpha_{ij},\ p+1\le i\le j\le n,\\ &\rho(\frac{\partial}{\partial x^i}\wedge\frac{\partial}{\partial x^j}) = \beta_{ij},\ 1\le i\le p,\ p+1\le j\le n.\end{aligned} \tag{5.8}$$

对于 $k = n-1$, $[\mathbf{Hom}(\mathfrak{I}_n^{\wedge(n-1)}, \mathfrak{h}_{p,q})]^{\mathfrak{so}(p,q)} = \langle\beta\rangle$,

$$\begin{aligned}\psi(\beta) :&= \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x^1}\wedge\cdots\wedge\hat{\frac{\partial}{\partial x^i}}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial x^n}\otimes\beta(\frac{\partial}{\partial x^1}\wedge\cdots\wedge\hat{\frac{\partial}{\partial x^i}}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial x^n})\\ &-\sum_{i=p+1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^1}\wedge\cdots\wedge\hat{\frac{\partial}{\partial x^i}}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial x^n}\otimes\beta(\frac{\partial}{\partial x^1}\wedge\cdots\wedge\hat{\frac{\partial}{\partial x^i}}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial x^n})\\ &= \beta_{pq}\end{aligned} \tag{5.9}$$

其中

$$\beta(\frac{\partial}{\partial x^1}\wedge\cdots\wedge\hat{\frac{\partial}{\partial x^i}}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial x^n}) = (-1)^{i+1}\frac{\partial}{\partial x^i}, i = 1, 2, \cdots, p$$

$$\beta(\frac{\partial}{\partial x^1}\wedge\cdots\wedge\frac{\hat{\partial}}{\partial x^i}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial x^n})=(-1)^i\frac{\partial}{\partial x^i},i=p+1,\cdots,n.$$

对于 $k=n-2$ $[\mathrm{Hom}(\mathfrak{I}_n^{\wedge(n-2)},\mathfrak{h}_{p,\ q})]^{\mathfrak{so}(p,q)}=\langle\gamma\rangle$,

(5.10)

$$\begin{aligned}\psi(\gamma):=&\\ &\sum_{1\le i<j\le p}\frac{\partial}{\partial x^1}\wedge\cdots\frac{\hat{\partial}}{\partial x^i}\cdots\frac{\hat{\partial}}{\partial x^j}\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial x^n}\otimes\gamma(\frac{\partial}{\partial x^1}\wedge\cdots\frac{\hat{\partial}}{\partial x^i}\cdots\frac{\hat{\partial}}{\partial x^j}\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial x^n})\\ -&\sum_{p+1\le i<j\le n}\frac{\partial}{\partial x^1}\wedge\cdots\frac{\hat{\partial}}{\partial x^i}\cdots\frac{\hat{\partial}}{\partial x^j}\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial x^n}\otimes\gamma(\frac{\partial}{\partial x^1}\wedge\cdots\frac{\hat{\partial}}{\partial x^i}\cdots\frac{\hat{\partial}}{\partial x^j}\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial x^n})\\ -&\sum_{\substack{1\le i\le p\\ p+1\le j\le n}}\frac{\partial}{\partial x^1}\wedge\cdots\frac{\hat{\partial}}{\partial x^i}\cdots\frac{\hat{\partial}}{\partial x^j}\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial x^n}\otimes\gamma(\frac{\partial}{\partial x^1}\wedge\cdots\frac{\hat{\partial}}{\partial x^i}\cdots\frac{\hat{\partial}}{\partial x^j}\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial x^n})\\ &=\gamma_{pq}\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}&\gamma(\frac{\partial}{\partial x^1}\wedge\cdots\frac{\hat{\partial}}{\partial x^i}\cdots\frac{\hat{\partial}}{\partial x^j}\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial x^n})=(-1)^{i+j}\alpha_{ij},\ 1\le i\le j\le p+1,\\ &\gamma(\frac{\partial}{\partial x^1}\wedge\cdots\frac{\hat{\partial}}{\partial x^i}\cdots\frac{\hat{\partial}}{\partial x^j}\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial x^n})=(-1)^{i+j+1}\alpha_{ij},\ p+1\le i\le j\le n,\\ &\gamma(\frac{\partial}{\partial x^1}\wedge\cdots\frac{\hat{\partial}}{\partial x^i}\cdots\frac{\hat{\partial}}{\partial x^j}\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial x^n})=(-1)^{i+j+1}\beta_{ij},\ 1\le i\le p,\ p+1\le j\le n.\end{aligned}\tag{5.11}$$

$[\mathrm{Hom}(\mathfrak{I}_n^{\wedge k},\mathfrak{h}_{p,\ q})]^{\mathfrak{so}(p,q)}=\{0\}$, 当 $k\notin\{1,2,n-1,n-2\}$ 时。 □

6. LIE ALGEBRA COHOMOLOGY OF $\mathfrak{h}_{p,\ q}$ WITH COEFFICIENTS

设 $\mathfrak{g}$ 是环 k 上的李代数, V 是任意 $\mathfrak{g}$-模。对每个 $n\ge 0$, 令 π_R: $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}^{\wedge(n+1)}\to\mathfrak{g}^{\wedge(n+2)}$ 为典范投影 $\pi_R(g_1\otimes g_2\wedge\cdots\wedge g_{n+2})=g_1\wedge g_2\wedge\ldots\wedge g_{n+2}$, 并令 $\pi_R^*:\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}^{\wedge(n+2)},V)\to\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}^{\wedge(n+1)},V)$ 为由 π_R 诱导的映射。

令 $CR^n(\mathfrak{g}) = \mathrm{coker}[\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}^{\wedge(n+2)}, V) \xrightarrow{\pi_R^*} \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}^{\wedge(n+1)}, V)]$，并令 $HR^*(\mathfrak{g})$ 为复形 $CR^n(\mathfrak{g})$ 的上同调。

存在一个短正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}^{\wedge(n+2)}, V) \xrightarrow{\pi_R^*} \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}^{\wedge(n+1)}, V) \to CR^n(\mathfrak{g}) \to 0 \tag{6.1}$$

它诱导出一个长正合列

$$\begin{aligned} \cdots \to H^{n+2}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}; V) \xrightarrow{\pi_R^*} H^{n+1}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}; \mathfrak{g}') \to HR^n(\mathfrak{g}) \xrightarrow{c_R} \\ H^{n+3}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}; V) \xrightarrow{\pi_R^*} H^{n+2}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}; \mathfrak{g}') \to \cdots \end{aligned} \tag{6.2}$$

其中，c_R 是连接同态，且 $\mathfrak{g}' = \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, V)$。

本节中的计算是在 $k = V$ =实数域上进行的。

令α_{ij}^*, β_{ij}^* 分别为 α_{ij}, β_{ij} 关于$\mathfrak{h}_{p,q}$的基 $\{\alpha_{ij}\} \cup \{\beta_{ij}\} \cup \{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ 的对偶，并令 dx^i 为 $\frac{\partial}{\partial x^i}$的对偶。令

$$\begin{aligned} \gamma_{pq}^* = &\sum_{1\le i<j\le p} (-1)^{i+j} dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^n \otimes \alpha_{ij} \\ &- \sum_{p+1\le i<j\le n} (-1)^{i+j+1} dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^n \otimes \alpha_{ij} \\ &- \sum_{\substack{1\le i\le p \\ p+1\le j\le n}} (-1)^{i+j+1} dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^n \otimes \beta_{ij} \end{aligned} \tag{6.3}$$

引理 6.1. 李代数上同调中存在一个同构

$$\begin{aligned} H^*_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{h}_{p,q}; \mathbf{R}) \simeq H^*_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{so}(p,\, q)); \mathbf{R}) \otimes [H^*_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{I}_n; \mathbf{R})]^{\mathfrak{so}(p,q)} \\ H^*_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{h}_{p,q};\, \mathfrak{h}'_{p,q}) \simeq H^*_{Lie}(\mathfrak{so}(p,\, q);\, \mathbf{R}) \otimes [H^*_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{I}_n;\, \mathfrak{h}'_{p,q})]^{\mathfrak{so}(p,q)} \end{aligned} \tag{6.4}$$

其中 $\mathfrak{h}'_{p,q}=\mathrm{Hom}(\mathfrak{h}_{p,q}, \text{实数域})$。

证明。我们将霍赫希尔德–塞尔谱序列 [10] 应用于理想 $\mathfrak{I}_n$，它属于 $\mathfrak{h}_{p,\ q}$并利用李代数 $\mathfrak{h}_{p,\ q}/\mathfrak{I}_n \simeq \mathfrak{so}(p,\ q)$ 的同构。 □

根据第5节，$[\mathfrak{I}_n^{\wedge 0}]^{\mathfrak{so}(p,q)}=$实数域 $[\mathfrak{I}_n^{\wedge n}]^{\mathfrak{so}(p,q)}=\langle v\rangle$，其中 $v=\frac{\partial}{\partial x^1}\wedge\frac{\partial}{\partial x^2}\wedge\ldots\wedge\frac{\partial}{\partial x^n}$，且 $[\mathfrak{I}_n^{\wedge k}]^{\mathfrak{so}(p,q)}=\{0\}, k\notin\{0,n\}$.

定理6.2。对于 $p+q\geq 4$,

$$H^*_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{h}_{p,q};\ \mathbf{R})\simeq H^*_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{so}(p,\ q);\ \mathbf{R})\otimes(\mathbf{R}\oplus\langle v^*\rangle), \tag{6.5}$$

其中 $v^*=dx^1\wedge dx^2\wedge\cdots\wedge dx^n$。

证明。$[H^*_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{I}_n;\ \text{实数域})]^{\mathfrak{so}(p,q)}$是上链复形 $[\mathrm{Hom}(\wedge^*\mathfrak{I}_n, \text{实数域})]^{\mathfrak{so}(p,q)}$的上同调。注意

$$[\mathrm{Hom}(\wedge^*\mathfrak{I}_n,\ \mathbf{R})]^{\mathfrak{so}(p,q)}\simeq\mathrm{Hom}([\wedge^*\mathfrak{I}_n]^{\mathfrak{so}(p,q)},\ \mathbf{R}).$$

因此，我们将从复形中计算 $[H^*_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{I}_n;\ \text{实数域})]^{\mathfrak{so}(p,q)}$：

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}([\mathfrak{I}_n^{\wedge 0}]^{\mathfrak{so}(p,q)},\ \mathbf{R})\xrightarrow{\delta}\mathrm{Hom}([\mathfrak{I}_n]^{\mathfrak{so}(p,q)},\ \mathbf{R})\xrightarrow{\delta}\mathrm{Hom}([\mathfrak{I}_n^{\wedge 2}]^{\mathfrak{so}(p,q)},\ \mathbf{R})\xrightarrow{\delta}\cdots\\&\xrightarrow{\delta}\mathrm{Hom}([\mathfrak{I}_n^{\wedge n}]^{\mathfrak{so}(p,q)},\ \mathbf{R})\xrightarrow{\delta}0.\end{aligned} \tag{6.6}$$

$[H^0_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{I}_n;\ \text{实数域})]^{\mathfrak{so}(p,q)}\simeq$实数域，$[H^n_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{I}_n;\ \text{实数域})]^{\mathfrak{so}(p,q)}\simeq\mathrm{Hom}(\langle v\rangle\ \text{实数域})$，以及

$[H^k_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{I}_n;\ \text{实数域})]^{\mathfrak{so}(p,q)}\simeq\{0\}$ 对于 $k\notin\{0,n\}$。因此，$[H^*_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{I}_n;\ \text{实数域})]^{\mathfrak{so}(p,q)}\simeq$实数域 $\oplus\langle v^*\rangle$。根据引理 6.1，$H^*_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{h}_{p,q};\ \text{实数域})\simeq H^*_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{so}(p,\ q);\ \text{实数域})\otimes(\text{实数域}\oplus\langle v^*\rangle)$。 □

定理6.3. 李代数上同调中存在一个同构

$$H^*_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{h}_{p,q};\ \mathfrak{h}'_{p,q})\simeq H^*_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{so}(p,\ q);\ \mathbf{R})\otimes\langle\beta^*_{pq},\ \gamma^*_{pq}\rangle \tag{6.7}$$

证明. $[H^*_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{I}_n; \mathfrak{h}'_{p,\ q}]^{\mathfrak{so}(p,q)})$是上链复形 $[\mathrm{Hom}(\wedge^*\mathfrak{I}_n, \mathfrak{h}'_{p,\ q})]^{\mathfrak{so}(p,q)}$的上同调。注意

$$\begin{aligned}[\mathrm{Hom}(\wedge^*\mathfrak{I}_n,\, \mathfrak{h}'_{p,\,q})]^{\mathfrak{so}(p,\,q)} &= [\mathrm{Hom}(\wedge^*\mathfrak{I}_n,\, \mathrm{Hom}(\mathfrak{h}_{p,\,q},\, \mathbf{R})]^{\mathfrak{so}(p,\,q)} \\ &\simeq [\mathrm{Hom}(\wedge^*\mathfrak{I}_n \otimes \mathfrak{h}_{p,\,q},\, \mathbf{R})]^{\mathfrak{so}(p,\,q)} \\ &\simeq \mathrm{Hom}([\wedge^*\mathfrak{I}_n \otimes \mathfrak{h}_{p,\,q}]^{\mathfrak{so}(p,\,q)},\, \mathbf{R})\end{aligned}$$

我们利用第5节给出的一些不变量来计算李代数同调群 $[H^{\mathrm{Lie}}_*(\mathfrak{I}_n; \mathfrak{h}_{p,\ q})]^{\mathfrak{so}(p,q)}$, 然后应用泛系数定理求得$[H^*_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{I}_n; \mathfrak{h}'_{p,\ q})]^{\mathfrak{so}(p,\,q)}$。

李代数同调群 $[H^{\mathrm{Lie}}_*(\mathfrak{I}_n; \mathfrak{h}_{p,\ q})]^{\mathfrak{so}(p,\,q)}$ 可由以下复形计算:

$$\begin{aligned}&[\mathfrak{I}_n^{\wedge 0} \otimes \mathfrak{h}_{p,\,q}]^{\mathfrak{so}(p,\,q)} \xleftarrow{\delta} [\mathfrak{I}_n \otimes \mathfrak{h}_{p,\,q}]^{\mathfrak{so}(p,\,q)} \xleftarrow{\delta} [\mathfrak{I}_n^{\wedge 2} \otimes \mathfrak{h}_{p,\,q}]^{\mathfrak{so}(p,\,q)} \xleftarrow{\delta} \cdots \\ &\cdots \leftarrow [\mathfrak{I}_n^{\wedge n-2} \otimes \mathfrak{h}_{p,\,q}]^{\mathfrak{so}(p,\,q)} \xleftarrow{\delta} [\mathfrak{I}_n^{\wedge n-1} \otimes \mathfrak{h}_{p,\,q}]^{\mathfrak{so}(p,\,q)} \leftarrow 0.\end{aligned} \tag{6.8}$$

回想一下, $[\mathfrak{I}_n^{\wedge 0} \otimes \mathfrak{h}_{p,\,q}]^{\mathfrak{so}(p,\,q)} \simeq \{0\}$, $[\mathfrak{I}_n \otimes \mathfrak{h}_{p,\,q}]^{\mathfrak{so}(p,\,q)} \simeq \langle I_{pq}\rangle$, $[\mathfrak{I}_n^{\wedge 2} \otimes \mathfrak{h}_{p,\,q}]^{\mathfrak{so}(p,\,q)} \simeq \langle \rho_{pq}\rangle$, $[\mathfrak{I}_n^{\wedge (n-1)} \otimes \mathfrak{h}_{p,\,q}]^{\mathfrak{so}(p,\,q)} \simeq \langle \beta_{pq}\rangle$ 以及 $[\mathfrak{I}_n^{\wedge (n-2)} \otimes \mathfrak{h}_{p,\,q}]^{\mathfrak{so}(p,\,q)} \simeq \langle \gamma_{pq}\rangle$。

由于 $\delta(I_{pq}) = 0$, $\delta(\rho_{pq}) = I_{pq}$, $\delta(\beta_{pq}) = 0$, $\delta(\gamma_{pq}) = 0$, 因此

$$[H_0^{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{I}_n;\, \mathfrak{h}_{p,\,q})]^{\mathfrak{so}(p,\,q)} = \{0\},$$

$$[H_1^{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{I}_n;\, \mathfrak{h}_{p,\,q})]^{\mathfrak{so}(p,\,q)} = \langle I_{pq}\rangle / \langle I_{pq}\rangle \simeq \{0\},$$

$$[H_2^{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{I}_n;\, \mathfrak{h}_{p,\,q})]^{\mathfrak{so}(p,\,q)} = \{0\},$$

$$[H_{n-1}^{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{I}_n;\, \mathfrak{h}_{p,\,q})]^{\mathfrak{so}(p,\,q)} = \langle \beta_{pq}\rangle,$$

and

$$[H^{\mathrm{Lie}}_{n-2}(\mathfrak{I}_n;\ \mathfrak{h}_{p,\,q})]^{\mathfrak{so}(p,\,q)} = \langle \gamma_{pq} \rangle.$$

因此， $[H^{\mathrm{Lie}}_{*}(\mathfrak{I}_n;\mathfrak{h}_{p,\,q})]^{\mathfrak{so}(p,\,q)}$ 有两个类； $\langle \beta_{pq} \rangle$ 和 $\langle \gamma_{pq} \rangle$，并且

$$[H^{\mathrm{Lie}}_{*}(\mathfrak{I}_n;\mathfrak{h}_{p,\,q})]^{\mathfrak{so}(p,\,q)} \simeq \langle \beta_{pq}, \gamma_{pq} \rangle.$$

根据泛系数定理，

$$[H^{*}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{I}_n;\ \mathfrak{h}^{'}_{p,\,q})]^{\mathfrak{so}(p,\,q)} \simeq \mathrm{Hom}(\ [H^{\mathrm{Lie}}_{*}(\mathfrak{I}_n;\mathfrak{h}_{p,\,q})]^{\mathfrak{so}(p,\,q)};\ \mathbf{R}).$$

因此，

$$[H^{*}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{I}_n;\ \mathfrak{h}^{'}_{p,\,q})]^{\mathfrak{so}(p,\,q)} \simeq \langle \beta^{*}_{pq}, \gamma^{*}_{pq} \rangle,$$

其中， β^{*}_{pq} 和 γ^{*}_{pq} 分别是 $\langle \beta_{pq} \rangle$、 $\langle \gamma_{pq} \rangle$ 的对偶。根据引理（6.1），

$$H^{*}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{h}_{p,\,q};\ \mathfrak{h}^{'}_{p,\,q}) \simeq H^{*}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{so}(p,\,q);\ \mathbf{R}) \otimes \langle \beta^{*}_{pq},\ \gamma^{*}_{pq} \rangle.$$

□

6.1. $HR^{*}(\mathfrak{h}_{p,\ q})$上同调群。

定理 6.4. 对于 $m \geq 0$，存在一个向量空间同构

$$HR^{m}(\mathfrak{h}_{p,\,q}) \simeq H^{m+3}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{so}(p,\,q);\ \mathbf{R}) \oplus (H^{m+3-n}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{so}(p,\,q);\ \mathbf{R}) \otimes \langle \gamma^{*}_{pq} \rangle). \tag{6.9}$$

证明。我们由长正合列（6.2）计算 $HR^{*}(\mathfrak{h}_{p,\,q})$

$$HR^{m}(\mathfrak{h}_{p,\,q}) \xrightarrow{c_R} H^{m+3}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{h}_{p,\,q};\mathbf{R}) \xrightarrow{\pi^{*}_{R}} H^{m+2}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{h}_{p,\,q};\mathfrak{h}^{'}_{p,\,q}) \to$$

$$HR^{m+1}(\mathfrak{h}_{p,\,q}) \xrightarrow{c_R} H^{m+4}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{h}_{p,\,q};\mathbf{R}) \to H^{m+3}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{h}_{p,\,q};\mathfrak{h}^{'}_{p,\,q}) \to \cdots$$

对于 $\theta \in H^{m+3}$ 李$(\mathfrak{so}(p,\, q)$; 实数域$)$, $\pi_R^*(\theta) = 0$ 属于 $\mathrm{H}^{\mathrm{m+2}}$ 李$(\mathfrak{h}_{\mathrm{p,\,q}}; \mathfrak{h}'_{\mathrm{p,q}})$。因此, 我们有$\pi_R^*[H^{m+3}$ 李$(\mathfrak{so}(p,\, q)$; 实数域$)] = 0$, 因为 θ 是任意的。

对于 $\theta \otimes v^* \in H^{m+3-n}$ 李$(\mathfrak{so}(p,\, q)$; 实数域$) \otimes \langle v^* \rangle$, $\pi_R^*(\theta \otimes v^*) = \theta \otimes \beta_{pq}^*$ 在 $\mathrm{H}^{\mathrm{m+2}}$ 李$(\mathfrak{h}_{\mathrm{p,\ q}}; \mathfrak{h}'_{\mathrm{p,\ q}})$ 中, 因此 $\theta \otimes \beta_{pq}^*$ 将在 $HR^{m+1}(\mathfrak{h}_{p,\ q})$ 中为平凡元, 而 $\theta \otimes \gamma_{pq}^* \in \mathrm{Im}[H^{m+2}$ 李$(\mathfrak{h}_{p,\ q}; \mathfrak{h}'_{p,\ q}) \to HR^{m+1}(\mathfrak{h}_{p,\ q})]$。

由上述内容可知, $\mathrm{Im} c_R = \ker \pi_R^* \simeq H^{m+3}$ 李$(\mathfrak{so}(p,\, q);\ R)$ 以及 $\mathrm{coker} \pi_R^* \simeq H^{m+3-n}$ 李$(\mathfrak{so}(p,\, q);\ \boldsymbol{R}) \otimes \langle \gamma_{pq}^* \rangle$。

$HR^m(\mathfrak{h}_{p,q})$中还有两类;

(1) θ', 其中 $c_R(\theta') = \theta \in H^{m+3}$ 李$(\mathfrak{so}(p,\, q)\ \boldsymbol{R})$（$\ker \pi_R^*$中的元素）

(2) $\theta \otimes \gamma_{pq}^*$, 其中 $\theta \in H^i_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{so}(p,\, q)\ \boldsymbol{R})$ 和 $i = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$（$\mathrm{coker} \pi_R^*$中的元素）。

最后,

$$HR^m(\mathfrak{h}_{p,q}) \simeq H^{m+3}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{so}(p,\, q);\, R) \oplus (H^{m+3-n}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{so}(p,\, q);\, \mathbf{R}) \otimes \langle \gamma_{pq}^* \rangle), \text{where } m \geq 0.$$

□

7. LEIBNIZ COHOMOLOGY OF $\mathfrak{h}_{p,\ q}$ WITH COEFFICIENTS

设 $\mathfrak{g}$ 是环 k 上的李代数, 且 V 是任意 $\mathfrak{g}$-模。对于每个 $n \geq 0$, 令π_{rel}: $\mathfrak{g}^{\otimes(n+2)} \to \mathfrak{g}^{\wedge(n+2)}$ 为典范投影映射 $\pi_{\mathrm{rel}}(g_1 \otimes g_2 \otimes \ldots \otimes g_{n+2}) = g_1 \wedge g_2 \wedge \ldots \wedge g_{n+2}$, 并令 $\pi_{\mathrm{rel}}^* : \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}^{\wedge(n+2)}, V) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}^{\otimes(n+2)}, V)$ 为由 π_{rel}诱导的映射。

我们将 $C^n_{\mathrm{rel}}(\mathfrak{g})$ 定义为: $= \mathrm{Coker}[\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}^{\wedge(n+2)}, V) \xrightarrow{\pi^*_{\mathrm{rel}}} \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}^{\otimes(n+2)}, V)]$, 并将 $H^*_{\mathrm{rel}}(\mathfrak{g})$ 定义为复形 $C^*_{\mathrm{rel}}(\mathfrak{g})$ 的上同调。

存在一个短正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}^{\wedge(n+2)},\, V) \xrightarrow{\pi^*_{\mathrm{rel}}} \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}^{\otimes(n+2)},\, V) \longrightarrow C^n_{\mathrm{rel}}(\mathfrak{g}) \longrightarrow 0$$

由此诱导出一个上同调长正合列

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow H^{n+2}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g};\, V) &\xrightarrow{\pi^*_{\mathrm{rel}}} HL^{n+2}(\mathfrak{g};\, V) \to H^n_{rel}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{c_{\mathrm{rel}}} \\ H^{n+3}_{Lie}(\mathfrak{g};\, V) &\xrightarrow{\pi^*_{\mathrm{rel}}} HL^{n+3}(\mathfrak{g};\, V) \longrightarrow H^{n+1}_{\mathrm{rel}}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{c_{\mathrm{rel}}} \cdots \end{aligned} \tag{7.1}$$

其中， c_{rel} 是连接同态。

7.1. PIRASHVILI 谱序列。

定理7.1：设 $\mathfrak{g}$ 是域F上的一个李代数，且 V 是一个左 $\mathfrak{g}$-模。那么存在一个第一象限谱序列，其收敛到 $H^*_{\mathrm{rel}}(\mathfrak{g};\ V)$，其中

$$E_2^{m,\,k} \simeq HR^m(\mathfrak{g}) \otimes HL^k(\mathfrak{g};\, V), \quad m \geq 0, \quad k \geq 0,$$

前提是 $HR^m(\mathfrak{g})$和 $HL^k(\mathfrak{g};\ V)$在每个维数上都是有限维向量空间。若不满足这一有限性条件，则可以使用完备张量积$\widehat{\otimes}$ 。

我们概述该构造的主要特征，并引入下文将使用的记号。令 $A^{m,\ k}$ 表示那些在 $\mathfrak{g}^{\otimes(k+m+2)}$ 的最后 $m+1$ 个张量因子上具有斜对称性的 $f \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}^{\otimes(k+m+2)},\, V)$ 元素。将复形 C^*_{rel} 按以下方式过滤：

$$F^{m,\,k} = A^{m,\,k}/\mathrm{Hom}(\Lambda^{k+m+2}(\mathfrak{g}),\, V).$$

那么， $F^{m,\,*}$是C^*_{rel}的子复形，其中 $F^{0,\,*} = C^*_{\mathrm{rel}}$且 $F^{m+1,\,*} \subseteq F^{m,\,*}$。为确定 $E^{*,\,*}_0$ 项，使用同构

$$\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}^{\otimes(k+m+2)},\, V) \simeq \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}^{\otimes(m+2)},\, \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}^{\otimes k},\, V)) \tag{7.2}$$

Then

$$\begin{aligned} E_0^{m,\,k} &= F^{m,\,k}/F^{m+1,\,k-1} \\ &\simeq \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}\otimes \mathfrak{g}^{\wedge(m+1)}/\mathfrak{g}^{\wedge(m+2)},\, \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}^{\otimes k},\, V)), \end{aligned} \tag{7.3}$$

以及 $d^{m,\,k}_0$: $E^{m,\,k}_0 \to E^{m,\,k+1}_0$, $m \geq 0$, $k \geq 0$。由此可得

$$E_1^{m,\,k} \simeq \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}\otimes \mathfrak{g}^{\wedge(m+1)}/\mathfrak{g}^{\wedge(m+2)},\, HL^k(\mathfrak{g};\, V)).$$

现在, $d^{m,\,k}_1$: $E^{m,\,k}_1 \to E^{m+1,\,k}_1$。由于 $\mathfrak{g}$ 在 $HL^*(\mathfrak{g};\ V)$上的作用是平凡的, 我们有$E^{m,\,k}_2 \simeq HR^m(\mathfrak{g})\widehat{\otimes}HL^k(\mathfrak{g};\ V)$。利用同构 (7.2), 我们将 $E^{m,\,k}_2$中的一个元素具体表示为 $HL^k(\mathfrak{g};\ V)\widehat{\otimes}HR^m(\mathfrak{g})$。

本节中的所有计算均在$V = \mathfrak{g} = \mathfrak{h}_{p,\,q}$ 和 $k =$ 实数域 $\mathbf{R}$ 上进行。

引理 7.2。李代数上同调之间存在一个同构

$$H^*_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{h}_{p,\,q};\, \mathfrak{h}_{p,\,q}) \simeq H^*_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{so}(p,\, q);\, \mathbf{R}) \otimes [H^*_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{I}_n;\, \mathfrak{h}_{p,\,q})]^{\mathfrak{so}(p,\,q)} \tag{7.4}$$

证明。我们将霍赫希尔德–塞尔谱序列 [10] 应用于$\mathfrak{h}_{p,\,q}$的理想 $\mathfrak{I}_n$, 并利用李代数的同构$\mathfrak{h}_{p,\,q}/\mathfrak{I}_n \simeq \mathfrak{so}(p,\, q)$。□

定理 7.3. 李代数上同调中存在一个同构

$$H^*_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{h}_{p,\,q};\, \mathfrak{h}_{p,\,q}) \simeq H^*_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{so}(p,\, q);\, \mathbf{R}) \otimes \langle I, \rho\rangle. \tag{7.5}$$

证明。 $[H^*_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{I}_n; \mathfrak{h}_{p,\ q})]^{\mathfrak{so}(p,q)}$是复形 $[\mathrm{Hom}(\wedge^*\mathfrak{I}_n, \mathfrak{h}_{p,\ q})]^{\mathfrak{so}(p,q)}$的上同调。我们从复形中计算李代数上同调群 $[H^*_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{I}_n; \mathfrak{h}_{p,\ q})]^{so(p,q)}$：

$$[\mathrm{Hom}(\boldsymbol{R},\, \mathfrak{h}_{p,q})]^{\mathfrak{so}(p,q)} \xrightarrow{\delta} [\mathrm{Hom}(\mathfrak{I}_n,\, \mathfrak{h}_{p,q})]^{\mathfrak{so}(p,q)} \xrightarrow{\delta} [\mathrm{Hom}(\mathfrak{I}_n^{\wedge 2},\, \mathfrak{h}_{p,q})]^{\mathfrak{so}(p,q)} \xrightarrow{\delta}$$
$$\cdots \xrightarrow{\delta} [\mathrm{Hom}(\mathfrak{I}_n^{\wedge(n-2)}, \mathfrak{h}_{p,q})]^{\mathfrak{so}(p,q)} \xrightarrow{\delta} [\mathrm{Hom}(\mathfrak{I}_n^{\wedge(n-1)}, \mathfrak{h}_{p,q})]^{\mathfrak{so}(p,q)}$$
$$\xrightarrow{\delta} [\mathrm{Hom}(\mathfrak{I}_n^{\wedge n},\, \mathfrak{h}_{p,q})]^{\mathfrak{so}(p,q)}.$$

$\delta I = 0$, $\delta\rho = 0$, $\delta\beta = (-1)^{(n-1)}(n-1)\gamma$ and $\delta\gamma = 0$. It follows that,

$$[H^0_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{I}_n;\, \mathfrak{h}_{p,q})]^{\mathfrak{so}(p,q)} \simeq [\mathrm{Hom}(\boldsymbol{R},\, \mathfrak{h}_{p,q})]^{\mathfrak{so}(p,q)} \simeq \{0\}.$$

$$[H^1_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{I}_n;\, \mathfrak{h}_{p,q})]^{\mathfrak{so}(p,q)} \simeq [\mathrm{Hom}(\mathfrak{I}_n,\, \mathfrak{h}_{p,q})]^{\mathfrak{so}(p,q)} \simeq \langle I\rangle.$$

$$[H^2_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{I}_n;\, \mathfrak{h}_{p,q})] \simeq [\mathrm{Hom}(\mathfrak{I}_n^{\wedge 2},\, \mathfrak{h}_{p,q})]^{\mathfrak{so}(p,q)} \simeq \langle\rho\rangle.$$

$$[H^{n-2}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{I}_n;\, \mathfrak{h}_{p,q})]^{\mathfrak{so}(p,q)} \simeq \{0\}.$$

$$[H^{n-1}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{I}_n;\, \mathfrak{h}_{p,q})]^{\mathfrak{so}(p,q)} \simeq \langle\gamma\rangle/\langle\gamma\rangle \simeq \{0\}.$$

由引理 7.2，我们得出：

$H^*_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{h}_{p,\ q};\ \mathfrak{h}_{p,\ q}) \simeq H^*_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{so}(p,\ q);$ 实数域$) \otimes \langle I,\ \rho\rangle$，其中 I 和 ρ 如上所定义。

□

现在我们可以计算 $HL^*(\mathfrak{h}_{p,\ q}; \mathfrak{h}_{p,\ q})$，我们从低维情形开始 .

引理 7.4. $HL^0(\mathfrak{h}_{p,\ q};\mathfrak{h}_{p,\ q})\simeq 0$和 $HL^1(\mathfrak{h}_{p,\ q};\mathfrak{h}_{p,\ q})=\langle I\rangle$，其中 I:

$$
\begin{aligned}
&I(\alpha_{ij})=0,\quad 1\leq i<j\leq p,\quad p+1\leq i<j\leq n,\\
&I(\beta_{ij})=0,\quad 1\leq i\leq p,\quad p+1\leq j\leq n,\\
&I(\tfrac{\partial}{\partial x^i})=\tfrac{\partial}{\partial x^i},\quad i=1,2,\cdots,n.
\end{aligned}
\tag{7.6}
$$

证明。由长正合列 (7.1)，我们计算 $HL^0(\mathfrak{h}_{p,\ q};\ \mathfrak{h}_{p,\ q})$ 和 $HL^1(\mathfrak{h}_{p,\ q};\ \mathfrak{h}_{p,\ q})$。由 (7.1)，有

$$0\longrightarrow H^0_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{h}_{p,q};\ \mathfrak{h}_{p,q})\xrightarrow{\pi^*_{\mathrm{rel}}} HL^0(\mathfrak{h}_{p,q};\ \mathfrak{h}_{p,q})\xrightarrow{C_{\mathrm{rel}}} 0,$$

这意味着 π^*_{rel} 是一个同构，并且

$$HL^0(\mathfrak{h}_{p,q};\ \mathfrak{h}_{p,q})\simeq H^0_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{h}_{p,q};\ \mathfrak{h}_{p,q})\simeq 0.$$

由 (7.1)，我们还有

$$0\longrightarrow H^1_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{h}_{p,q};\ \mathfrak{h}_{p,q})\xrightarrow{\pi^*_{\mathrm{rel}}} HL^1(\mathfrak{h}_{p,q};\ \mathfrak{h}_{p,q})\xrightarrow{C_{\mathrm{rel}}} 0,$$

π^*_{rel} 是一个同构，并且

$$HL^1(\mathfrak{h}_{p,q};\ \mathfrak{h}_{p,q})\simeq H^1_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{h}_{p,q};\ \mathfrak{h}_{p,q})=\langle I\rangle,$$

其中 I 正如上文所定义。 □

对于高维情形，$HL^*(\mathfrak{h}_{p,\ q};\ \mathfrak{h}_{p,\ q})$ 的计算以递归方式进行，即利用低维结果来计算高维情形。我们的策略是先求出 $H^*_{\mathrm{rel}}(\mathfrak{h}_{p,\ q})$，然后将 $H^*_{\mathrm{rel}}(\mathfrak{h}_{p,\ q})$ 代入长正合序列（7.1），以计算 $HL^*(\mathfrak{h}_{p,\ q};\ \mathfrak{h}_{p,\ q})$。Pirashvili谱序列收敛

到 $H^*_{\mathrm{rel}}(\mathfrak{h}_{p,\ q})$，其 E_2 项由下式给出

$$E_2^{m,\,k} \simeq HL^k(\mathfrak{h}_{p,q};\,\mathfrak{h}_{p,q}) \otimes HR^m(\mathfrak{h}_{p,q}),\quad where\quad m \geq 0,\quad k \geq 0.$$

我们通过一个简单的例子来说明这一策略：由 Pirashvili 谱序列可得,

$$E_2^{m,\,0} \simeq HL^0(\mathfrak{h}_{p,q};\,\mathfrak{h}_{p,q}) \otimes HR^m(\mathfrak{h}_{p,q}) \simeq 0$$

对所有 m，由于 $HL^0(\mathfrak{h}_{p,\ q};\ \mathfrak{h}_{p,\ q}) = 0.$由于 $E^{0,}{}_2{}^0 \simeq 0$，我们有 $H^0_{\mathrm{rel}}(\mathfrak{h}_{p,\ q}) \simeq E^{0,}{}_2{}^0 \simeq 0.$现在，将 $H^0_{\mathrm{rel}}(\mathfrak{h}_{p,\ q})$ 代入 (7.1)，得到如下结果:

$$0 \longrightarrow H^2_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{h}_{p,q};\,\mathfrak{h}_{p,q}) \xrightarrow{\pi^*_{\mathrm{rel}}} HL^2(\mathfrak{h}_{p,q};\,\mathfrak{h}_{p,q}) \xrightarrow{C_{\mathrm{rel}}} H^0_{rel}(\mathfrak{h}_{p,q}) \simeq 0.$$

因此，$HL^2(\mathfrak{h}_{p,\ q};\ \mathfrak{h}_{p,\ q}) \simeq H^2_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{h}_{p,\ q};\ \mathfrak{h}_{p,\ q}) = \langle\rho\rangle$，其中 ρ如上所定义，只需将 $\wedge$替换为 $\otimes$。

引理7.5. 对于 $n = p + q \geq 4$，$HL^n(\mathfrak{h}_{p,\ q};\ \mathfrak{h}_{p,\ q}) \simeq [I \otimes \gamma^*_{pq}]$ 以及 $HL^{n+1}(\mathfrak{h}_{p,\ q}) \simeq [\rho \otimes \gamma^*_{pq}]$。

证明。我们从 Pirashvili谱序列的 $E^*{}_2{}^*$ 项开始迭代元素，其中为 $HL^1(\mathfrak{h}_{p,q};\mathfrak{h}_{p,q})$。考虑以下元素:

$$I \otimes \theta' \in HL^1(\mathfrak{h}_{p,q};\,\mathfrak{h}_{p,q}) \otimes HR^m(\mathfrak{h}_{p,q}) \subseteq E_2^{m,\,1}$$

$$I \otimes \gamma^*_{pq} \in HL^1(\mathfrak{h}_{p,q};\,\mathfrak{h}_{p,q}) \otimes HR^{n-3}(\mathfrak{h}_{p,q}) \subseteq E_2^{m,\,n-3}$$

其中 $c_R(\theta') = \theta \in H^{m+3}$ 李($\mathfrak{so}(p,\ q)$, 实数域)。

在 Pirashvili谱序列中，对于所有 $r \geq 2$，$d^m{}_{,r}{}^1(I \otimes \theta') = 0$，因此 $I \otimes \theta'$ 不会是余边界，进而 $[I \otimes \theta'] \in H^{m+1}{}_{\mathrm{rel}}(\mathfrak{h}_{p,q})$。利用长正合列

(7.1)，我们证明 $[I\otimes\theta]$ 在 HL^{m+4}中映射为 0。现在，

$$\delta(I\otimes\theta')(g_1\otimes\cdots\otimes g_{m+4})=\delta I\otimes\theta'\ (g_1\otimes\cdots\otimes g_{m+4})-I\otimes\delta\theta'\ (g_1\otimes\cdots\otimes g_{m+4})$$
$$+\sum_{i=3}^{m+4}(-1)^i g_i I(g_1)\theta'(g_2\otimes\cdots\widehat{g_i}\cdots\otimes g_{m+4}),$$

$g_iI=0$对所有 $g_i\in\mathfrak{h}_{p,\ q}$由于 I是 $\mathfrak{h}_{p,\ q}$-不变量且 $\delta I=0$，那么

$$\delta(I\otimes\theta')=-I\otimes\delta\theta'=-I\otimes c_R(\theta')=-I\otimes\theta.$$

因此，$c_{\mathrm{rel}}([I\otimes\theta'])=[\delta(I\otimes\theta')]=[I\otimes\theta]=[I\wedge\theta]$ 属于 $H^{m+4}_{Lie}(\mathfrak{h}_{p,\ q};\mathfrak{h}_{p,\ q})$，且$\pi^*_{\mathrm{rel}}([I\otimes\theta])=0$ 属于 $HL^{m+4}(\mathfrak{h}_{p,\ q};\mathfrak{h}_{p,\ q})$。

对于 $I\otimes\gamma^*_{pq}$，很容易看出 $d^{m,\ r\ 1}(I\otimes\gamma^*_{pq})=0$，对所有 $r\geq 2$ 而言，且 $I\otimes\gamma^*_{pq}$ 在 Pirashvili谱序列中不是余边界，因此$[I\otimes\gamma^*_{pq}]\in H^{n-2}$相对于$(\mathfrak{h}_{p,\ q})$。现在，我们将注意力转向 (7.1)，其中

$$\delta(I\otimes\gamma^*_{pq})(g_1\otimes\cdots\otimes g_{n+1})=\delta I\otimes\gamma^*_{pq}(g_1\otimes\cdots\otimes g_{n+1})-I\otimes\delta\gamma^*_{pq}(g_1\otimes\cdots\otimes g_{n+1})$$
$$+\sum_{i=3}^{n+1}(-1)^i g_i I(g_1)\gamma^*_{pq}(g_2\otimes\cdots\widehat{g_i}\cdots\otimes g_{n+1}).$$

我们知道，对于所有 $g_i\in\mathfrak{h}_{p,\ q}$，$\delta I=0$、$\delta\gamma^*_{pq}=0$ 和 $g_iI=0$，于是 $\delta(I\otimes\gamma^*_{pq})=0$。因此，$c_{\mathrm{rel}}([I\otimes\gamma^*_{pq}])=[\delta(I\otimes\gamma^*_{pq})]=0$ 属于 H^{n+1}李$(\mathfrak{h}_{p,\ q};\mathfrak{h}_{p,\ q})$，这意味着

$$[I\otimes\gamma^*_{pq}]\in HL^n(\mathfrak{h}_{p,q};\mathfrak{h}_{p,q}).$$

我们继续迭代 Pirashvili谱序列中 $E^{*,\ *}_2$ 项的元素，其中系数为 $HL^2(\mathfrak{h}_{p,q};\mathfrak{h}_{p,\ q})$。考虑以下元素：

$$\rho\otimes\theta'\in HL^2(\mathfrak{h}_{p,q};\mathfrak{h}_{p,q})\otimes HR^m(\mathfrak{h}_{p,q})\subseteq E_2^{m,2}$$

$$\rho\otimes\gamma_{pq}^*\in HL^2(\mathfrak{h}_{p,q};\mathfrak{h}_{p,q})\otimes HR^{n-3}(\mathfrak{h}_{p,q})\subseteq E_2^{m,n-3},$$

其中 $c_R(\theta')=\theta\in H^{m+3}$ 李$(\mathfrak{so}(p,q)$, 实数域$)$。

在 Pirashvili 谱序列中，$d^{m,r}{}^2(\rho\otimes\theta')=0$ 对所有 $r\geq 2$ 都成立，因此 $\rho\otimes\theta'$ 不是余边界，故 $[\rho\otimes\theta']\in H^{m+2}{}_{\mathrm{rel}}(\mathfrak{h}_{p,q})$。利用长正合列 (7.1)，我们证明 $[\rho\otimes\theta]$ 在 HL^{m+5} 中映射为 0。现在，

$$\begin{aligned}\delta(\rho\otimes\theta')(g_1\otimes\cdots\otimes g_{m+5})&=\delta\rho\otimes\theta'(g_1\otimes\cdots\otimes g_{m+5})+\rho\otimes\delta\theta'(g_1\otimes\cdots\otimes g_{m+5})\\&\quad+\sum_{i=4}^{m+5}(-1)^i g_i\rho(g_1\otimes g_2)\theta'(g_3\otimes\cdots\widehat{g_i}\cdots\otimes g_{m+5}),\end{aligned}$$

$\delta\rho=0$并且可以选取元素 $\theta'\in HR^m(\mathfrak{h}_{p,q})$，使得 $\theta'(y_1\otimes y_2\otimes\ldots\otimes y_{m+2})=0$（若存在任意 $y_i\in\mathfrak{I}_n$）。由于 $\rho\otimes\theta'\in E^{m,2}{}_2$，$d^2_{m,2}(\rho\otimes\theta')$ 关于变量 g_3、g_4、$\cdots$、g_{m+5} 是反对称的，并且假设对于唯一的某个 i $\in\{4,5,\cdots,m+5\}$，有 $g_i\in\mathfrak{I}_n$，那么

$$g_i\rho(g_1\otimes g_2)\theta'(g_3\otimes\cdots\widehat{g_i}\ldots\otimes g_{m+5})=\pm g_3\rho(g_1\otimes g_2)\theta'(g_i\otimes\ldots\widehat{g_3}\cdots\otimes g_{m+5})=0,$$

因为 $g_3\in\mathfrak{so}(p,q)$-是不变量，且 ρ 是一个 $\mathfrak{so}(p,q)$-不变量。因此

$$\delta(\rho\otimes\theta')=\rho\otimes\delta\theta'=\rho\otimes c_R(\theta')=\rho\otimes\theta.$$

因此，$c_{\mathrm{rel}}([\rho\otimes\theta'])=[\delta(\rho\otimes\theta')]=[\rho\otimes\theta]=[\rho\wedge\theta]$ 属于 $H^{m+5}_{Lie}(\mathfrak{h}_{p,q};\mathfrak{h}_{p,q})$，且 $\pi^*_{\mathrm{rel}}([\rho\otimes\theta])=0$ 属于 $HL^{m+5}(\mathfrak{h}_{p,q};\mathfrak{h}_{p,q})$。

对于 $\gamma^*_{pq}\in HR^{n-3}(\mathfrak{h}_{p,q})$，我们有 $\rho\otimes\gamma^*_{pq}\in E^{n-3,2}{}_2$并且 $E^{n-5,3}{}_2\xrightarrow{d^{n-5,2}{}^3}E^{n-3,2}{}_2\xrightarrow{d^{n-3,2}{}^2}E^{n-1,1}{}_2$. $d^{n-3,2}{}_2(\rho\otimes\gamma^*_{pq})=0$, $d^{n-5,3}{}_2$也是零映射，因此 $E^{n-3,2}{}_3\simeq E^{n-3,2}{}_2$。现在，在

Pirashvili谱序列的第三页上，我们有

$$E_3^{n-6,4} \xrightarrow{d_3^{n-3,2}} E_3^{n-3,2} \xrightarrow{d_3^{n-3,2}} E_3^{n,0} \simeq \{0\}.$$

因此，对于所有 $r \geq 3$， $\rho \otimes \gamma_{pq}^*$ 不是余边界，这说明 Pirashvili谱序列 $d^{n-3,}$ $_r$ $^2(\rho \otimes \gamma_{pq}^*) = 0$，从而有 $[\rho \otimes \gamma_{pq}^*] \in H^{n-1}{}_{\mathrm{rel}}(\mathfrak{h}_{p,}\ _q)$。我们再次将注意力转向（7.1），

$$c_{\mathrm{rel}}([\rho \otimes \gamma_{pq}^*]) = [\delta(\rho \otimes \gamma_{pq}^*)] = 0$$

在 H^{n+2}李$(\mathfrak{h}_{p,}\ _q; \mathfrak{h}_{p,}\ _q)$ 中，这意味着

$$[\rho \otimes \gamma_{pq}^*] \in HL^{n+1}(\mathfrak{h}_{p,q}).$$

我们已经确 立了 $[I \otimes \gamma_{pq}^*] \in HL^n(\mathfrak{h}_{p,}\ _q; \mathfrak{h}_{p,}\ _q)$ 和 $[\rho \otimes \gamma_{pq}^*] \in HL^{n+1}(\mathfrak{h}_{p,}\ _q; \mathfrak{h}_{p,}\ _q)$.

□

定理7.6。对于 $p+q \geq 4$， $HL^*(\mathfrak{h}_{p,}\ _q; \mathfrak{h}_{p,}\ _q) \simeq \langle I,\ \rho \rangle \otimes T(\gamma_{pq}^*)$，其中 $T(\gamma_{pq}^*) := \sum \langle \gamma_{pq}^* \rangle^{\otimes k}$是$k \geq 0$类上的张量代数

$$\begin{aligned}
\gamma_{pq}^* = & \sum_{1 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^n \otimes \alpha_{ij}^* \\
& - \sum_{p+1 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j+1} dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^n \otimes \alpha_{ij}^* \\
& - \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ p+1 \leq j \leq n}} (-1)^{i+j+1} dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^n \otimes \beta_{ij}^*
\end{aligned} \tag{7.7}$$

证明。 $k = 0$ 和 $k = 1$ 的结果分别由引理 7.4 和引理7.5 得出。我们继续迭代 Pirashvili 谱序列的 $E^*{}_{,2}{}^*$ 项中的元素

谱序列。

Consider $[I \otimes \gamma_{pq}^*] \in HL^n(\mathfrak{h}_{p,q};\, \mathfrak{h}_{p,q})$ and $\theta' \in HR^m(\mathfrak{h}_{p,q})$,

$$[I \otimes \gamma_{pq}^*] \otimes \theta' \in HL^n(\mathfrak{h}_{p,q};\, \mathfrak{h}_{p,q}) \otimes HR^m(\mathfrak{h}_{p,q}) \subseteq E_2^{m,n}.$$

在 Pirashvili 谱序列中，$d^{m,}{}_{r}{}^{n}((I \otimes \gamma_{pq}^*) \otimes \theta') = 0$ 当 $2 \le r \le n-1$ 时，但在第 n 页我们有

$$d_n^{m,n}((I \otimes \gamma_{pq}^*) \otimes \theta') = I \otimes (\theta \otimes \gamma_{pq}^*) \in HL^1(\mathfrak{h}_{p,q};\, \mathfrak{h}_{p,q}) \otimes HR^{m+n}(\mathfrak{h}_{p,q}) \subseteq E_n^{m+n,1}.$$

我们得出 $[I \otimes (\theta \otimes \gamma_{pq}^*)] \notin H^*_{\mathrm{rel}}(\mathfrak{h}_{p,\ q})$，当 $\theta \in H^{m+3}_{Lie}(\mathfrak{so}(p,\, q);$ 实数域) 且 $m =$ 时 $0, 1, 2, \cdots$.

注意：$\theta \otimes \gamma_{pq}^* \in HR^{m+n}(\mathfrak{h}_{p,\ q})$ 的情形，其中 $\theta \in H^{m+3}_{Lie}(\mathfrak{so}(p,\, q);$ 实数域) 且 $m = 0, 1, 2, \cdots$，以及 $HL^1(\mathfrak{h}_{p,\ q};\, \mathfrak{h}_{p,\ q})\ \big(\ I \otimes (\theta \otimes \gamma_{pq}^*) \in HL^1(\mathfrak{h}_{p,\ q};\, \mathfrak{h}_{p,\ q}) \otimes HR^{m+n}(\mathfrak{h}_{p,\ q}) \subseteq E^{m+n,\ 2}{}^{1}\ \big)$ 现在已在迭代中涵盖。

对于 $[I \otimes \gamma_{pq}^*] \in HL^n(\mathfrak{h}_{p,q};\, \mathfrak{h}_{p,q})$ 和 $\gamma_{pq}^* \in HR^{n-3}(\mathfrak{h}_{p,q})$，我们有 $[I \otimes \gamma_{pq}^*] \otimes \gamma_{pq}^* \in HL^n(\mathfrak{h}_{p,q};\, \mathfrak{h}_{p,q}) \otimes HR^{n-3}(\mathfrak{h}_{p,q}) \subseteq E^{n-3}{}_{,2}{}^{n}$. 在 Pirashvili谱序列中，$d^{n-3,}{}_{r}{}^{n}([I \otimes \gamma_{pq}^*] \otimes \gamma_{pq}^*) = 0$，对所有 $r \ge 2$ 均成立，这意味着 $[I \otimes \gamma_{pq}^*] \otimes \gamma_{pq}^* \in H^{2n-3}{}_{\mathrm{rel}}(\mathfrak{h}_{p,q})$。

Now,

$$\begin{aligned}
&\delta((I\otimes\gamma_{pq}^*)\otimes\gamma_{pq}^*)(g_1\otimes\cdots\otimes g_n\otimes\cdots\otimes g_{2n})\\
&=\delta(I\otimes\gamma_{pq}^*)\otimes\gamma_{pq}^*(g_1\otimes\cdots\otimes g_n\otimes\cdots\otimes g_{2n})\\
&+(I\otimes\gamma_{pq}^*)\otimes\delta\gamma_{pq}^*(g_1\otimes\cdots\otimes g_n\otimes\cdots\otimes g_{2n})\\
&+\sum_{i=n+2}^{2n}(-1)^i(g_i(I\otimes\gamma_{pq}^*))(g_1\otimes\cdots\otimes g_n)\gamma_{pq}^*(g_{n+1}\otimes\cdots\otimes\hat{g_i}\otimes\cdots\otimes g_{2n}),
\end{aligned}$$

由于 $\delta(I\otimes\gamma_{pq}^*)=0$、$\delta\gamma_{pq}^*=0$、$I$和 γ_{pq}^* 是$\mathfrak{h}_{p,q}$-不变量，因此 $\delta((I\otimes\gamma_{pq}^*)\otimes\gamma_{pq}^*)=0$。因此，$c_{\mathrm{rel}}([[I\otimes\gamma_{pq}^*]\otimes\gamma_{pq}^*])=[\delta(I\otimes\gamma_{pq}^*)\otimes\gamma_{pq}^*)]=0$在 $H^{2n}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{h}_{p,q};\mathfrak{h}_{p,q})$ 中成立，所以$[I\otimes\gamma_{pq}^*]\otimes\gamma_{pq}^*\in HL^{2n-1}(\mathfrak{h}_{p,q};\mathfrak{h}_{p,q})$。

对 $[\rho\otimes\gamma_{pq}^*]\otimes\theta'\in HL^{n+1}(\mathfrak{h}_{p,\ q};\mathfrak{h}_{p,\ q})\otimes HR^m(\mathfrak{h}_{p,\ q})\subseteq E^{m,\ n+1}_{2}$和 $\rho\otimes(\theta\otimes\gamma_{pq}^*)\in HL^2(\mathfrak{h}_{p,\ q};\mathfrak{h}_{p,\ q})\otimes HR^{m+n}(\mathfrak{h}_{p,\ q})\subseteq E^{m+n,\ 2}_{2}$作出与上文相同的论证：在 Pirashvilli 谱序列的第 n 页，

$$d_n^{m,n+1}((\rho\otimes\gamma_{pq}^*)\otimes\theta')=\rho\otimes(\theta\otimes\gamma_{pq}^*).$$

因此，当 $\theta\in H^{m+3}$ 李$(\mathfrak{so}(p,q);$ 实数域$)$ and$m=0,1,2,\cdots$时，$[\rho\otimes(\theta\otimes\gamma_{pq}^*)]$不属于 $H^*_{\mathrm{rel}}(\mathfrak{h}_{p,\ q})$。

类似地，$\theta\otimes\gamma_{pq}^*\in HR^{m+n}(\mathfrak{h}_{p,q})$ 的情形，其中 $\theta\in H^{m+3}_{Lie}(\mathfrak{so}(p,q);$ 实数域$)$ 且 $m=0,1,2,\cdots$，满足 $HL^2(\mathfrak{h}_{p,q};\mathfrak{h}_{p,q})$（$\rho\otimes(\theta\otimes\gamma_{pq}^*)\in HL^2(\mathfrak{h}_{p,q};\mathfrak{h}_{p,q})\otimes HR^{m+n}(\mathfrak{h}_{p,q})\subseteq E^{m+n,2}_{2}$），现已在迭代中得到涵盖。

考虑 $[\rho\otimes\gamma_{pq}^*]\in HL^{n+1}(\mathfrak{h}_{p,q};\mathfrak{h}_{p,q})$ 和 $\gamma_{pq}^*\in HR^{n-3}(\mathfrak{h}_{p,q})$，我们有 $(\rho\otimes\gamma_{pq}^*)\otimes\gamma_{pq}^*\in E^{n-3,2}{}^{n+1}$。现在，

$$\begin{aligned}&\delta((\rho\otimes\gamma_{pq}^*)\otimes\gamma_{pq}^*)(g_1\otimes\cdots\otimes g_{2n+1})\\&=\delta(\rho\otimes\gamma_{pq}^*)\otimes\gamma_{pq}^*(g_1\otimes\cdots\otimes g_{2n+1})\\&+(\rho\otimes\gamma_{pq}^*)\otimes\delta\gamma_{pq}^*(g_1\otimes\cdots\otimes g_{2n+1})\\&+\sum_{i=n+3}^{2n+1}(-1)^i g_i\rho(g_1\otimes g_2)\gamma_{pq}^*(g_3\otimes\cdots\otimes g_{n+1})\gamma_{pq}^*(g_{n+2}\otimes\cdots\hat{g}_i\cdots\otimes g_{2n+1}).\end{aligned}$$

$^{2n+1}\delta((\rho\otimes\gamma_{pq}^*)\otimes\gamma_{pq}^*)(g_1\otimes\cdots\otimes g_{2n+1}) = \sum(-1)^i g_i\rho(g_1\otimes g_2)\gamma_{pq}^*(g_3\otimes\cdots\otimes g_{n+1})\gamma_{pq}^*(g_{n+2}\otimes_{i=n+3}\cdots\hat{}g_i\cdots\otimes g_{2n+1})$，因为 $\delta(\rho\otimes\gamma_{pq}^*)=0$ 且 $\delta\gamma_{pq}^*=0.$ 运用反对称论证，$\delta((\rho\otimes\gamma_{pq}^*)\otimes\gamma_{pq}^*)=0$，这意味着 $(\rho\otimes\gamma_{pq}^*)\otimes\gamma_{pq}^*\in H^{2n-2}{}_{\text{关系}}(\mathfrak{h}_{p,\ q})$。因此，$\pi^*{}_{\text{关系}}\left(\left[[\rho\otimes\gamma_{pq}^*]\otimes\gamma_{pq}^*\right]\right)=0$。所以 $(\rho\otimes\gamma_{pq}^*)\otimes\gamma_{pq}^*\in HL^{2n}(\mathfrak{h}_{p,\ q};\mathfrak{h}_{p,\ q})$。

此外，在 Pirashvili谱序列中，我们有

$$d^n((I\otimes(\gamma_{pq}^*)^{\otimes 2})\otimes\theta')=(I\otimes\gamma_{pq}^*)\otimes(\gamma_{pq}^*\otimes\theta)$$

$$d^n((\rho\otimes(\gamma_{pq}^*)^{\otimes 2})\otimes\theta')=(\rho\otimes\gamma_{pq}^*)\otimes(\gamma_{pq}^*\otimes\theta)$$

对 k 作归纳可知，$HL^*(\mathfrak{h}_{p,\ q};\mathfrak{h}_{p,\ q})$ 是向量空间 $\langle I、\rho\rangle\otimes(\gamma_{pq}^*)^{\otimes k}.$ 的直和。由此得出

$$HL^*(\mathfrak{h}_{p,q};\mathfrak{h}_{p,q})\simeq\langle I,\rho\rangle\otimes T(\gamma_{pq}^*)$$

□

References

[1] Loday, J.-L.，《循环同调》，Spring Verlag，海德堡，1992年。[2] Bloh, A.，“李代数概念的一种推广”，《科学院通报》，苏联，第 165 卷（1965年），第 471–473 页。[3] Fialowski, A., Mandal, A.，“李代数的莱布尼茨变形”，《数学物理学杂志》，第 49 卷，第 9 期（20008年），doi.org/10.1063/1.2981562。[4] Fialoswki, A., Mandal, A., Mukherjee, G.，“莱布尼茨代数的整体变形”，K- Theory，第 3 卷，第 2 期（2009年），第 327–358 页。[5] Biyogmam, G. R.，“欧氏群李代数的莱布尼茨（上）同调”，《纯粹与应用代数杂志》，第 215 卷（2011年），第 1889–1901 页。[6] Lodder, J.，“可微流形的莱布尼茨上同调”，《格勒诺布尔傅里叶研究所年刊》，第 48 卷，第 1 期（1998年），第 73–95 页。[7]Loday, J.-L., Pirashvili, T.，“莱布尼茨代数的泛包络代数与（上）同调”，《数学年刊》，第 296 卷（1993年），第 139–158 页。[8] Pirahsvili, T.，“论莱布尼茨同调”，《格勒诺布尔傅里叶研究所年刊》，第 44 卷，第 2 期（1994年），第 401–411 页。[9] Feldvoss, J., Wagemann, F.，“论莱布尼茨上同调”，《代数杂志》，第 569 卷，第 276–317 页，2021年。[10] Hochschild, G., Serre, J-P.，“李代数上同调”，《数学年刊》，第 57 卷，第 3 期（1953年），第 591–603 页。[11] Hall Brian，《李群、李代数与表示：基础导论》，第 222 卷，施普林格，2015年。[12] Weibel, C.，《同调代数导论》（1994年），剑桥高等数学研究，第 38 卷，剑桥大学出版社，剑桥。[13] Biyogmam, Guy.，“仿射不定正交李代数的莱布尼茨同调”，《非洲侨民数学杂志》，新系列，第 19 卷（第 1 期），第 37–48 页，2016年。[14] Lodder, Jerry.，“可微流形上的莱布尼茨上同调与联络”，《微分几何及其应用》，第 79 卷，2021年。