$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$的正交映射图结构

Rohitesh Pradhan 和 Vivek Kumar Jain 南比哈尔中央大学,
加雅，印度 电子邮箱：rohiteshpradhan@gmail.com,
jaijinenedra@gmail.com

摘要： 本文通过确定图的结构，从理论上证明了群 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ 的正交映射图的极大团为 2。

关键词：正交映射图***2020***年数学主题分类：05B15

arXiv:2302.03260v1 [math.GR] 7 Feb 2023

1 引言

设 G 为一个群。若双射 θ: $G \to G$ 满足映射 ϕ: $x \mapsto x^{-1}\theta(x)$也是 G 上的双射，则称其为***G*** 的正交同构。若 θ_1 和 θ_2 是 G 的两个正交同构，则称它们正交，记作 $\theta_1 \perp \theta_2$，其中 $x \mapsto \theta_1(x)^{-1}\theta_2(x)$是 G上的双射。保持群的单位元不变的群正交同构称为标准化 正交同构。下文中，正交同构均指标准化正交同构。我们用 $Orth(G)$表示群 G 的正交映射集合。以 G 的正交映射为顶点、以邻接关系等价于正交性的图称为 G的正交映射图，记作 Orth(G)。图的最大完全子图的阶称为该图的团数。群 G的正交映射图的团数记作 $\omega(G)$。本文证明 $\omega(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4) = 2$。

1961年，Johnson、Dulmage 和 Mendelsohn 通过计算机搜索证明了$|Orth(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)| = 48$ 和 $\omega(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4) = 2$。1964年，Chang、Hsiang 和 Tai [1] 通过穷举手算也发现了 $\omega(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4) = 2$；1986年，Jungnickel 和 Grams [2]通过计算机搜索也证实了上述事实。1992年，Evans 和 Perkel 使用 Cayley（计算机代数系统 Magma 的前身）[3] 发现 $Orth(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)$由12个互不相交的4-圈组成，并请求给出这一事实的理论

证明 [3, 问题 19]。2021年，Evans 在 [5]中给出了这一事实的理论证明。本文给出了这一事实的另一种证明。

Orth(G) 的自同构 A 是 Orth(G) 上的一个双射，满足 A(θ_1) $\perp$ A(θ_2) 当且仅当 $\theta_1 \perp \theta_2$ ，其中 $\theta_1, \theta_2 \in$Orth(G)。

对于 $f \in$ Aut(G)，即 G 的自同构群，映射H_f: Orth(G) $\to$Orth(G) 定义为 $H_f(\theta) = f\theta f^{-1}$，称为 Orth($G$) 的同调。同调是 Orth($G$) 的一个自同构，见 [4, 定理 8.6，第 206] 页。本文中未作解释的任何记号均引自 [4]。

2 基本结果

设 $G = \{g_1 = e, g_2, \ldots, g_n\}$ 是一个有限群。 e 是 G 的单位元。设 τ 表示 G 的正则左置换表示。我们将 G 与 τ(G) 等同。因此 $G \leqslant Sym(G)$。此外，将 $Sym(G)$ 与 $Sym\{1, 2, \ldots, n\}$(记作 S_n) 等同，其中 g_i 与 i相对应。显然，若 $\theta \in$ Orth(G)，则 $\theta \in$Sym{2,3,...,n}(记作 S_{n-1})。对于 $\theta \in$Orth(G)，映射 ϕ_θ: $G \to G$ 定义为 $\phi_\theta(x) = x^{-1}\theta(x)$，称为与 θ相关联的完全映射。显然 $\phi_\theta \in S_n$。另请注意，$\theta(x) = x$ 当且仅当 x 是 G 的单位元。

注记。对于 $\theta \in Orth(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)$，取 a， $y \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ 使得$o(a) = 4$ 且 $o(y) = o(\theta(y)) = 2$。于是 $\{x \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \mid o(x) = 4\} = \{a, ay, a\theta(y)\ ay\theta(y)\}$ 且 $\{x \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \mid o(x) = 2\} = \{y, \theta(y)\ y\theta(y)\}$.

引理 2.1。设 $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ 是一个群， θ 是从G 到 G的映射。定义 A_{ij} i、$j \in \{2, 4\}$ 如下

$$
\begin{aligned}
A_{44} =& \{x \in G \mid o(x) = 4, o(\theta(x)) = 4\},\\
A_{42} =& \{x \in G \mid o(x) = 4, o(\theta(x)) = 2\},\\
A_{24} =& \{x \in G \mid o(x) = 2, o(\theta(x)) = 4\},\\
A_{22} =& \{x \in G \mid o(x) = 2, o(\theta(x)) = 2\}.
\end{aligned}
$$

(1) θ 是 G的一个保持单位元不变的双射，当且仅当

(a) $\{\theta(x) \mid x \in A_{44}\} \sqcup \{\theta(x) \mid x \in A_{24}\} = \{x \in G \mid o(x) = 4\}$, *and*

(b) $\{\theta(x) \mid x \in A_{42}\} \sqcup \{\theta(x) \mid x \in A_{22}\} = \{x \in G \mid o(x) = 2\}$.

(2) θ 是正交同构，当且仅当 θ 是保持单位元的双射，并且

(a) $\{x^{-1}\theta(x) \mid x \in A_{42}\} \sqcup \{x^{-1}\theta(x) \mid x \in A_{24}\} = \{x \in G \mid o(x) = 4\}$, *and*

(b) $\{x^{-1}\theta(x) \mid x \in A_{44}\} \sqcup \{x^{-1}\theta(x) \mid x \in A_{22}\} = \{x \in G \mid o(x) = 2\}$.

证明。由双射和正交同构的定义可得。

□

推论 2.2. 若 $\theta \in Orth(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)$，则 $|A_{44}| = |A_{42}| = |A_{24}| = 2$ 且 $|A_{22}| = 1$。

推论 2.3. 对于 $\theta \in Orth(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)$

(i) $|A_{44} \cap \theta(A_{44})| = |A_{44} \cap \theta(A_{24})| = |A_{42} \cap \theta(A_{44})| = |A_{42} \cap \theta(A_{24})| = 1$。

(ii) 若 $A_{22} = \{x\}$，则 $\theta(A_{42}) = \{x, x\theta(x)\}$ 且 $A_{24} = \{\theta(x), x\theta(x)\}$.

(iii) $\{x^{-1}\theta(x) \mid x \in A_{44}\} = \{x, \theta(x)\}$.

证明。(i) 根据推论 2.2，恰有两个 4 阶元素会映射到 4 阶元素。由于 $a^{-1}(ay) = (ay)^{-1}a = y$，其中 y是一个 2 阶元素，且 $a \in A_{44}$，因此 $A_{44} \neq \theta(A_{44})$。假设$A_{44} \cap \theta(A_{44}) = \phi$。那么如果 $\{a, ay\} \in A_{44}$，则 $\{az, azy\} \in \theta(A_{44})$，其中 $z \neq y$ 和 z, y 是 2 阶元素。于是 $a^{-1}(az) = (ay)^{-1}(azy) = z$ 或 $a^{-1}(azy) = (ay)^{-1}(az) = zy$，这与 ϕ_θ的双射性矛盾。因此 $|A_{44} \cap \theta(A_{44})| = 1$。由于 $\theta(A_{44})$与 $\theta(A_{24})$属于同一划分，所以 $|A_{44} \cap \theta(A_{24})| = 1$；此外， A_{44} 和 A_{42}也属于同一划分，因此 $|A_{42} \cap \theta(A_{44})| = |A_{42} \cap \theta(A_{24})| = 1$。

(ii) 假设 $A_{22} = \{x\}$。那么 $\theta(x) \neq x$。因此，$\{x, \theta(x)\ x\theta(x)\}$ 是 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$中所有 2 阶元素构成的集合。$\theta(A_{42}) \sqcup \theta(A_{22}) = \{x, \theta(x)\ x\theta(x)\}$。显然，$\theta(A_{42}) = \{x, x\theta(x)\}$。由于 $x \notin A_{24}$，所以$A_{24} = \{\theta(x)\ x\theta(x)\}$。

(iii) 若 θ 是正交同构，则 $\{x^{-1}\theta(x) \mid x \in A_{44}\} \sqcup \{x^{-1}\theta(x) \mid x \in A_{22}\} = \{x, \theta(x)\ x\theta(x)\}$。因此 $\{x^{-1}\theta(x) \mid x \in A_{44}\} = \{x, \theta(x)\}$。□

命题 2.4. 若 $\theta \in Orth(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)$ 且 $x \in A_{22}$，$a \in A_{44} \setminus \theta(A_{44})$，则 $\theta(a) = ax$。此外 $A_{44} = \{a, ax\}, \theta(A_{44}) = \{ax, ax\theta(x)\}$ 且 $A_{42} = \{ax\theta(x)\ a\theta(x)\}$。

证明。设 $x \in A_{22}$ 且 $a \in A_{44} \setminus \theta(A_{44})$。由推论 2.3 (iii)，$a^{-1}\theta(a) \in \{x, \theta(x)\}$。假设 $\theta(a) = a\theta(x)$。由推论 2.3 (i)，$A_{44} = \{a, a\theta(x)\}$。于是由推论 2.3 (iii)，$\theta(a\theta(x)) = ax\theta(x)$ 且 $A_{42} = \{ax, ax\theta(x)\}$。由推论 2.3 (ii)，$\theta(A_{42}) = \{x, x\theta(x)\}$。

情形(a)： 如果 $\theta(ax) = x$ 且 $\theta(ax\theta(x)) = x\theta(x)$，那么 $\phi_\theta(ax) = a^{-1}$ 且 $\phi_\theta(ax\theta(x)) = a^{-1}$，这与 ϕ_θ 的双射性矛盾。

情形(b)： 如果 $\theta(ax) = x\theta(x)$ 且 $\theta(ax\theta(x)) = x$，那么 $\phi_\theta(ax) = a^{-1}\theta(x)$ 且 $\phi_\theta(ax\theta(x)) = a^{-1}\theta(x)$，这再次与 ϕ_θ的双射性矛盾。

因此，$\theta(a) = ax$ 且 $\theta(ax) = ax\theta(x)$。于是，$A_{44} = \{a, ax\}$,$\theta(A_{44}) = \{ax, ax\theta(x)\}$ 且 $A_{42} = \{ax\theta(x)\ a\theta(x)\}$。□

这可由图 1 得出

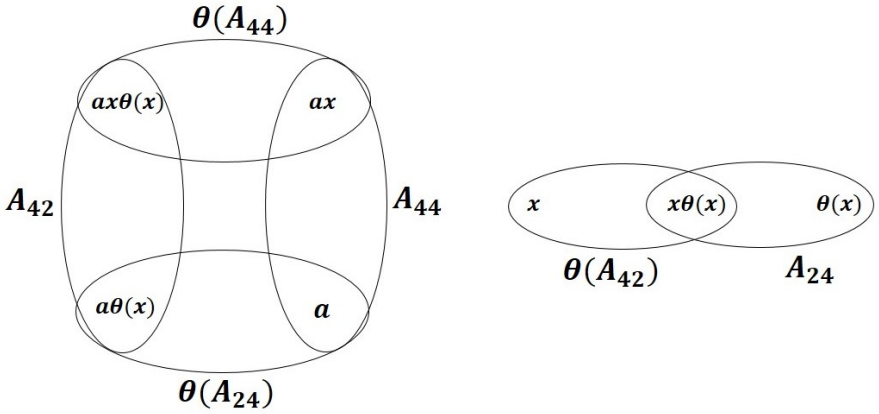

图 1

3 Orth($\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$) 的结构

定理 3.1。 设 $\theta \in Orth(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)$, $A_{22} = \{x\}$、 $a \in A_{44} \setminus \theta(A_{44})$。则 θ 具有以下形式之一

(i) $(a, ax, ax\theta(x)\ x\theta(x)\ a\theta(x)\ x, \theta(x))$, 其中 $x\theta(x) = a^2$。
(ii) $(a, ax, ax\theta(x)\ x\theta(x))(\theta(x)\ a\theta(x)\ x)$, 其中 $x\theta(x) \neq a^2$。
(iii) $(a, ax, ax\theta(x)\ x, \theta(x))(a\theta(x)\ x\theta(x))$, 其中 $x\theta(x) \neq a^2$。
(iv) $(a, ax, ax\theta(x)\ x, \theta(x)\ a\theta(x)\ x\theta(x))$, 其中 $x\theta(x) = a^2$。

以及 $|Orth(G)| = 48$。

证明。 假设 $A_{22} = \{x\}$ 且 $a \in A_{44} \setminus \theta(A_{44})$。根据命题 2.4, $A_{44} = \{a, ax\}$, $\theta(A_{44}) = \{ax, ax\theta(x)\}$ 且$A_{42} = \{ax\theta(x)\ a\theta(x)\}$。

情形(i)： 假设 $\theta(ax\theta(x)) = x\theta(x)$。显然, $\theta(a\theta(x)) = x$。于是 $\phi_\theta(ax\theta(x)) = a^{-1}$ 且 $\phi_\theta(a\theta(x)) = a^{-1}x\theta(x)$。

子情形(a)： 假设 $\theta(\theta(x)) = a$。则 $\theta(x\theta(x)) = a\theta(x)$, $\phi_\theta(\theta(x)) = a\theta(x)$ 以及 $\phi_\theta(x\theta(x)) = ax$。 ϕ_θ 的双射性意味着, $a^{-1}x\theta(x) = a$ 或 $x\theta(x) = a^2$。因此, 如果 $x\theta(x) = a^2$, 那么 θ 是一个正交同构, 由 (i) 给出。对于 a 有 4 种选择, 对于 有 2

种选择，因为 $x \neq a^2$。因此，我们在 $Orth(G)$ 中得到这种形式的 8 个正交映射。

子情形(b)： 假设 $\theta(\theta(x)) = a\theta(x)$。那么 $\theta(x\theta(x)) = a$，$\phi_\theta(\theta(x)) = a$ 且 $\phi_\theta(x\theta(x)) = ax\theta(x)$。$\phi_\theta$ 的双射性意味着$x\theta(x) \neq a^2$。因此，如果 $x\theta(x) \neq a^2$，那么 θ 是由 (ii) 给出的正交同构。显然，在 $Orth(G)$ 中，我们有 16 个这种形式的正交映射。

情形(ii)： 假设 $\theta(ax\theta(x)) = x$。显然，$\theta(a\theta(x)) = x\theta(x)$。于是 $\phi_\theta(ax\theta(x)) = a^{-1}\theta(x)$ 且 $\phi_\theta(a\theta(x)) = a^{-1}x$。

子情形(a)： 假设 $\theta(\theta(x)) = a$。那么 $\theta(x\theta(x)) = a\theta(x)$，$\phi_\theta(\theta(x)) = a\theta(x)$ 且 $\phi_\theta(x\theta(x)) = ax$。$\phi_\theta$ 的双射性意味着，$x\theta(x) \neq a^2$。因此，如果 $x\theta(x) \neq a^2$，那么 θ 是由 (iii) 给出的正交同构。显然，在 $Orth(G)$ 中，我们有 16 个这种形式的正交映射。

子情形(b)： 假设 $\theta(\theta(x)) = a\theta(x)$。那么 $\theta(x\theta(x)) = a$,$\phi_\theta(\theta(x)) = a$ 以及 $\phi_\theta(x\theta(x)) = ax\theta(x)$。$\phi_\theta$ 的双射性意味着$x\theta(x) = a^2$。因此，若 $x\theta(x) = a^2$，则 θ 是由 (iv) 给出的正交同构。显然，在 $Orth(G)$ 中有 8 个这种形式的正交同构。因此，$|Orth(G)|= 48$。 □

4 $Orth\ (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)$ 中的团

令 $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ 和 A_{ij}, A'_{ij} 分别表示按引理 2.1 中定义的关于 θ_1, θ_2 对 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ 的划分。

引理 4.1。若 θ_1 和 $\theta_2 \in Orth\ (G)$，则 $\theta_1 \perp \theta_2$ 当且仅当

$$
\begin{aligned}
(a)\ & \{\theta_1(x)^{-1}\theta_2(x) \mid x \in A_{44} \cap A'_{44}\} \sqcup \\
& \{\theta_1(x)^{-1}\theta_2(x) \mid x \in A_{24} \cap A'_{24}\} \sqcup \\
& \{\theta_1(x)^{-1}\theta_2(x) \mid x \in A_{42} \cap A'_{42}\} \sqcup \\
& \{\theta_1(x)^{-1}\theta_2(x) \mid x \in A_{22} \cap A'_{22}\} = \{x \in G \mid o(x) = 2\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(b)\ & \{\theta_1\ x\ ^{-1}\theta_2\ x\ \mid x \in A_{44} \cap A'_{42}\} \sqcup 0\,0\,0\,0 \\
& \{\theta_1\ x\ ^{-1}\theta_2\ x \mid x \in A_{42} \cap A'_{44}\} \sqcup \qquad\qquad \mid x \in A_{24} \cap A'_{22}\} \sqcup \\
& \{\theta_1\ x\ ^{-1}\theta_2\ x \qquad\qquad 0\,0 \{\theta_1\ x\ ^{-1}\theta_2\ x \\
& 0\,0\ \mid x \in A_{22} \cap A'_{24}\} = \{x \in G \mid o(x) = 4\}.
\end{aligned}
$$

证明。 由映射 $x \mapsto \theta_1(x)^{-1}\theta_2(x)$ 的双射性可得。 □

命题 4.2. 设 $\theta_1,\theta_2 \in Orth(G)$ 满足 $|A_{44}\cap A'_{44}|= 2$。则 $\theta_1 \not\perp \theta_2$。

证明. 由于 $|A_{44} \cap A'_{44}|= 2$, $|A_{42} \cap A'_{42}|= 2$。
因此, $|\{\theta_1\ x\ ^{-1}\theta_2\ x\ \mid x \in A_{44} \cap A'_{44}\}|+|\{\theta_1\ x\ ^{-1}\theta_2\ x\ \mid x \in A_{24} \cap A'_{24}\}|= 4 > |\{x \in G \mid o\ x\ = 2\}|$ 4 1, ( ) ( ) ( ) ( ) ( )。所以, 由引理 .$\theta_1 \not\perp \theta_2$。 □

命题 4.3. 设 $\theta_1, \theta_2 \in Orth(G)$ 满足 $|A_{44}\cap A'_{44}|= 1$。则 $\theta_1 \not\perp \theta_2$。

证明。 假设 $A_{44}\cap A'_{44} = \{a\}$ 2 4 $A_{44} =$ 。 $\{a, ax\}$ $A'_{44} = \{a, ax'\}$ $A_{22} = \{x\}$ $A'_{22} = \{x'\}$ 则根据命题 ., 且 , 其中 和 。显然, $x \neq x'$。

情形（1）： 假设 $a \in A_{44} \cap \theta_1\ (A_{24})$ 且 $a \in A'_{44} \cap \theta_2\ (A'_{24})$。则 $\theta_1\ (a)\ ^{-1}\theta_2\ (a)\ =\ (ax)\ ^{-1}ax' = xx'$。

子情形（a）： 假设 $\theta_1\ x\ = \theta_2\ x'$ $A_{22} \cup A_{24} = \{x, x',$ ( ) $\theta_1\ x\ \}$ $\theta_1\ a\ ^{-1}\theta_2\ a\ = xx' = \theta_1\ x$ $a\theta_1\ x\ \in A_{42}\cap A'_{42}.$ ( )。则 ( ) 。此外, ( ) ( ) ( ), 且 ( ) 显然, $\theta_1\ (A_{42})\ = \{x, x'\} = \theta_2\ (A'_{42})$。因此, $\theta_1\ (a\theta_1\ (x)\ )\ ^{-1}\theta_2\ (a\theta_2\ (x')\ ) = e$ 或 $\theta_1\ (x)$。这与引理 4.1 矛盾。因此 $\theta_1 \not\perp \theta_2$。

子情形(b): 假设 $\theta_1(x) \neq \theta_2(x')$。由于 $\theta_2(x') \in \{x, x', \theta_1(x)\}$ 且 $\theta_2(x') \neq x'$, $\theta_2(x') = x$。因此, $a\theta_1(x) = ax'\theta_2(x') \in A_{42} \cap A'_{42}$ 且 $\theta_1(x) = x'\theta_2(x') \in A_{24} \cap A'_{24}$。

(i) 若 $\theta_1(a\theta_1(x)) = x$ 且 $\theta_2(ax'\theta_2(x')) = x'$, 则 $\theta_1(a\theta_1(x))^{-1}\theta_2(ax'\theta_2(x')) = xx' = \theta_1(x)$。根据引理 4.1, $\theta_1 \not\perp \theta_2$。

(ii) 若 $\theta_1(a\theta_1(x)) = x\theta_1(x)$ 且 $\theta_2(ax'\theta_2(x')) = x'\theta_2(x')$, 则 $\theta_1\ a\theta_1\ x\ ^{-1}\theta_2\ ax'\theta_2\ x'\ = x$ $\theta_1\ x\ = x'\theta_2\ x'\ \in A_{24} \cap (\ (\ ))\ (\ A'_{24}$ ( ))。此外 ( ) ( )。若 $x\theta_1(x) = a^2$, 则 $x'\theta_2(x') \neq a^2$。由定理 3.1 的 (iv) 和 (ii), $\theta_1(\theta_1(x))^{-1}\theta_2(x'\theta_2(x')) = (a\theta_1(x))^{-1}a = \theta_1(x)$。这与引理 4.1 矛盾。若 $x\theta_1(x) \neq a^2$ 且 $x'\theta_2(x') = a^2$, 则由定理 3.1 的 (iii) 和 (i), $\theta_1(\theta_1(x))^{-1}\theta_2(x'\theta_2(x')) = a^{-1}a\theta_2(x') = \theta_2(x') = x$。

这与引理 4.1 矛盾。
若 $x\theta_1(x) \neq a^2$ 且 $x'\theta_2(x') \neq a^2$，则由定理 3.1 (iii) 和 (ii) 可得，$\theta_1(\theta_1(x))^{-1}\theta_2(x'\theta_2(x')) = a^{-1}a = e$。这与引理 4.1 矛盾。

(iii) 若 $\theta_1(a\theta_1(x)) = x$ 且 $\theta_2(ax'\theta_2(x')) = x'\theta_2(x')$，则 $\theta_1(a\theta_1(x))^{-1}\theta_2(ax'\theta_2(x')) = x'$。若 $x\theta_1(x) = a^2$，则 $x'\theta_2(x') \neq a^2$. 。由定理 3.1 (i) 和 (ii) 可得，$\theta_1(\theta_1(x))^{-1}\theta_1(x'\theta_2(x')) = a^{-1}a = e$。这与引理 4.1 矛盾。若 $x\theta_1(x) \neq a^2$ 且 $x'\theta_2(x') = a^2$，则由定理 3.1 (ii) 和 (i) 可得，$\theta_1(\theta_1(x))^{-1}\theta_2(x'\theta_2(x')) = (a\theta_1(x))^{-1}a\theta_2(x') = x'$。这与引理 4.1 矛盾。若 $x\theta_1(x) \neq a^2$ 且 $x'\theta_2(x') \neq a^2$，则由定理 3.1 (ii) 和 (ii) 可得，$\theta_1(\theta_1(x))^{-1}\ \theta_2(x'\theta_2(x')) = (a\theta_1(x))^{-1}a = \theta_1(x)$。这与引理 4.1 矛盾。

(iv) 若 $\theta_1(a\theta_1(x)) = x\theta_1(x)$ 且 $\theta_2(ax'\theta_2(x')) = x'$，则 $\theta_1(a\theta_1(x))^{-1}\theta_2(ax'\theta_2(x')) = x\theta_1(x)x' = e$ 这与引理 4 1 $\theta_1 \not\perp \theta_2$ $a \in A_{44} \cap \theta_1\ A_{24}$ $a \in A_{44}^{'} \cap \theta_2\ A_{24}^{'}$
矛盾。因此，当 ( ) 和 ( ) 时。

情形（2）： 若 $a \in A_{44} \cap \theta_1(A_{24})$ 且 $a \in A_{44}^{'} \cap \theta_2(A_{44}^{'})$，则 $\theta_1(a) = ax$，$\theta_1(ax) = ax\theta_1(x)$ 且 $\theta_2(ax') = a$，$\theta_2(a) = a\theta_2(x')$。显然，$a \in A_{44} \cap A_{44}^{'}$ 且 $\theta_1(a)^{-1}\theta_2(a) = (ax)^{-1}a\theta_2(x') = x\theta_2(x')$。
子情形(a): 假设 $\theta_1(x) = \theta_2(x')$。则 $A_{22} \cup A_{24} = \{x, x',$
$\theta_1\ x\ \}$ $\theta_1\ a^{-1}\theta_2\ a = x'$ $a\theta_1\ x = a\theta_2\ x' \in A_{42} \cap$ ( ) 和 ( ) ( )。显然，( ) ( )
$A_{42}^{'}$ $\theta_1\ x = \theta_2\ x' \in A_{24} \cap A_{24}^{'}$.
和 ( ) ( )

(i) 若 $\theta_1(a\theta_1(x)) = x$ 且 $\theta_2(a\theta_2(x')) = x'$，则 $\theta_1(a\theta_1(x))^{-1}\theta_2(a\theta_2(x')) = xx' = \theta_1(x)$。若 $x\theta_1(x) = a^2$，则 $x'\theta_2(x') \neq a^2$。由定理 3.1 (i) 和 (ii)，$\theta_1(\theta_1(x))^{-1}\theta_2(\theta_2(x')) = a^{-1}a\theta_1(x) = \theta_1(x)$。这与引理 4.1 矛盾。若 $x\theta_1(x) \neq a^2$ 且 $x'\theta_2(x') = a^2$，则由定理 3.1 (ii) 和 (i)，$\theta_1(\theta_1(x))^{-1}\theta_2(\theta_2(x')) = (a\theta_1(x))^{-1}a = \theta_1(x)$。这与引理 4.1 矛盾。

若 $x\theta_1(x) \neq a^2$ 且 $x'\theta_2(x') \neq a^2$，则由定理 3.1 (ii) 和 (ii)，$\theta_1($ $\theta_1(x))^{-1}\theta_2(\theta_2(x'))$ $=(a\theta_1(x))^{-1}a\theta_2(x')$ $= e$。这与引理 4.1 矛盾。

(ii) 若 $\theta_1(a\theta_1(x))$ $= x\theta_1(x)$ 且 $\theta_2(a\theta_2(x'))$ $= x'\theta_2(x')$，则 $\theta_1(a\theta_1(x))^{-1}\theta_2$ $(a\theta_2(x))$ $= x\theta_1(x)x'\theta_2(x')$ $= \theta_1(x)$。若 $x\theta_1(x)$ $= a^2$，则 $x'\theta_2(x')$ $\neq a^2$。于是由定理 3.1 的 (iv) 和 (iii)，可得 $\theta_1(\theta_1(x))^{-1}\theta_2(\theta_2(x'))$ $= (a\theta_1(x))$ $^{-1}a = \theta_1(x)$。这与引理 4.1 矛盾。若 $x\theta_1(x) \neq a^2$ 且 $x'\theta_2(x') = a^2$，则由定理 3.1 的 (iii) 和 (iv)，可得 $\theta_1(\theta_1(x))^{-1}\theta_2(\theta_2(x'))$ $= a^{-1}a\theta_2(x')$ $= \theta_1(x)$。这与引理 4.1 矛盾。若 $x\theta_1(x) \neq a^2$ 且 $x'\theta_2(x') \neq a^2$，则由定理 3.1 的 (iii) 和 (iii)，可得 $\theta_1(\theta_1(x))^{-1}\theta_2(\theta_2(x'))$ $= a^{-1}a = e$。这与引理 4.1 矛盾。

(iii) 若 $\theta_1(a\theta_1(x))$ $= x$ 且 $\theta_2(a\theta_2(x'))$ $= x'\theta_2(x')$，则 $\theta_1(a\theta_1(x))^{-1}\theta_2$ $(a\theta_2(x'))$ $= xx'\theta_2(x')$ $= e$。这与引理 4.1 矛盾。

(iv) 若 $\theta_1(a\theta_1(x))$ $= x\theta_1(x)$ 且 $\theta_2(a\theta_2(x'))$ $= x'$，则 $\theta_1(a\theta_1(x))^{-1}\theta_2$ $(a\theta_2(x'))$ $= x\theta_1(x)x' = e$。这与引理 4.1 矛盾。因此，$\theta_1 \not\perp \theta_2$。

子情形(b)： 假设 $\theta_1(x) \neq \theta_2(x')$。由于 $\theta_2(x') \in \{x, x', \theta_1(x)\}$ 且 $\theta_2(x') \neq x'$，所以 $\theta_2(x') = x$。由于 $a \in A_{44} \cap A'_{44}$，因此 $\theta_1(a)^{-1}\theta_2(a)$ $= x\theta_2(x')$ $= e$。这与引理 4.1 矛盾。因此，当 $a \in A_{44} \cap \theta_1(A_{24})$ 且 $a \in A'_{44} \cap \theta_2(A'_{44})$ 时，$\theta_1 \not\perp \theta_2$。 □

命题 4.4。设 θ_1，$\theta_2 \in Orth(G)$ 以及 $|A_{44} \cap A'_{44}| = 0$。则 $\theta_1 \perp \theta_2$.

证明。若 $|A_{44} \cap A'_{44}| = 0$，则 $|A_{22} \cap A'_{22}| = 1$ 和 $|A_{24} \cap A'_{24}| = 2$。此外，$|A_{44} \cap A'_{42}| = 2$ 和 $|A_{42} \cap A'_{44}| = 2$。考虑如下形式的正交同构：$\theta_1 = (a, ax,$ $ax\theta_1(x)$ $x\theta_1(x)$ $a\theta_1(x)$ $x, \theta_1(x))$，其中 $x\theta_1(x) = a^2$。这里，$A_{22} = \{x\}$，$A_{44} = \{a, ax\}$，$A_{42} = \{ax\theta_1(x)$ $a\theta_1(x)\}$，且 $A_{24} = \{\theta_1(x)$ $x\theta_1(x)\}$。若 θ_2 与 θ_1 正交，则 $A'_{22} = \{x\}$, $A'_{44} = \{ax\theta_1(x)$ $a\theta_1(x)\}$, $A'_{42} = \{a, ax\}$

以及 $A_{24}^{'}=\{\theta_1(x)\ x\theta_1(x)\}$。

情形（1）：假设 $a\theta_1(x)\in A_{44}^{'}\cap\theta_2(A_{24}^{'})$。那么由命题 2.4，$\theta_2(a\theta_1(x))=ax\theta_1(x)$ 且 $\theta_2(ax\theta_1(x))=a$，因为 $\theta_2(x)=x\theta_1(x)$。由于 $\theta_1(x\theta_1(x))=a\theta_1(x)$，$\theta_2(x\theta_1(x))=ax$ 且 $\theta_2(\theta_1(x))=a\theta_1(x)$。于是 $\phi_{\theta_2}(a\theta_1(x))=x$，$\phi_{\theta_2}(ax\theta_1(x))=x\theta_1(x)\phi_{\theta_2}(x)=\theta_1(x)\phi_{\theta_2}(x\theta_1(x))=a\theta_1(x)\phi_{\theta_2}(\theta_1(x))=a$。

子情形（a）：假设 $\theta_2(a)=x$。那么 $\theta_2(ax)=\theta_1(x)$，$\phi_{\theta_2}(a)=a^{-1}x$ 且 $\phi_{\theta_2}(ax)=(ax)^{-1}\theta_1(x)=a$，这不是一个正交自同构。

子情形(b)：假设 $\theta_2(a)=\theta_1(x)$。则 $\theta_2(ax)=x$，$\phi_{\theta_2}(a)=a^{-1}\theta_1(x)=ax$，且 $\phi_{\theta_2}(ax)=(ax)^{-1}x=a^{-1}$。在此情形下，$\theta_2$ 成为由 $\theta_2=(a\theta_1(x)\ ax\theta_1(x)\ a,\ \theta_1(x))\ (x,\ x\theta_1(x)\ ax)$ 给出的一个正交同构。现在

$$\theta_1(y)^{-1}\theta_2(y)=\begin{cases}\theta_1(x)x\theta_1(x)=x & y=x\in A_{22}\cap A_{22}^{'}\\ a^{-1}a\theta_1(x)=\theta_1(x) & y=\theta_1(x)\in A_{24}\cap A_{24}^{'}\\ a^{-1}\theta_1(x)ax=x\theta_1(x) & y=x\theta_1(x)\in A_{24}\cap A_{24}^{'}\\ a^{-1}x\theta_1(x)=a & y=a\in A_{44}\cap A_{42}^{'}\\ a^{-1}x\theta_1(x)x=ax & y=ax\in A_{44}\cap A_{42}^{'}\\ xax\theta_1(x)=a\theta_1(x) & y=a\theta_1(x)\in A_{42}\cap A_{44}^{'}\\ x\theta_1(x)a=ax\theta_1(x) & y=ax\theta_1(x)\in A_{42}\cap A_{44}^{'}\end{cases}$$

显然，$y\mapsto\theta_1(y)^{-1}\theta_2(y)$ 是一个双射。因此，$\theta_1\perp\theta_2$。

情形(2)：假设 $a\theta_1(x)\in A_{44}^{'}\cap\theta_2(A_{44}^{'})$。则根据命题 2.4，$\theta_2(a\theta_1(x))=ax$，$\theta_2(ax\theta_1(x))=a\theta_1(x)$，因为 $\theta_2(x)=x\theta_1(x)$。

由于 $\theta_1(\theta_1(x))=a$，$\theta_2(\theta_1(x))=ax\theta_1(x)$，且 $\theta_2(x\theta_1(x))=a$。于是 $\phi_{\theta_2}(a\theta_1(x))=x\theta_1(x)$ $\phi_{\theta_2}(ax\theta_1(x))=x$，$\phi_{\theta_2}(x)=\theta_1(x)$，$\phi_{\theta_2}(x\theta_1(x))=ax\theta_1(x)=a^{-1}$，$\phi_{\theta_2}(\theta_1(x))=ax$。

子情形(a)：假设 $\theta_2(a)=\theta_1(x)$。于是 $\theta_2(ax)=x$，$\phi_{\theta_2}(a)=a^{-1}\theta_1(x)$，且 $\phi_{\theta_2}(ax)=(ax)^{-1}x=a^{-1}$，这不是一个正交同构。

子情形(b)：假设 $\theta_2(a)=x$。那么 $\theta_2(ax)=\theta_1(x)$，$\phi_{\theta_2}(a)=a^{-1}x$ 且 $\phi_{\theta_2}(ax)=(ax)^{-1}\theta_1(x)$。在这种情况下，$\theta_2$ 变为一个正交同构，给定为

由 $\theta_2 = (ax\theta_1(x)\ a\theta_1(x)\ ax,\ \theta_1(x))\ (x,\ x\theta_1(x)\ a)$给出。现在,

$$\theta_1(y)^{-1}\theta_2(y) = \begin{cases} \theta_1(x)x\theta_1(x) = x & y = x \in A_{22} \cap A_{22}^{'} \\ a^{-1}ax\theta_1(x) = x\theta_1(x) & y = \theta_1(x) \in A_{24} \cap A_{24}^{'} \\ a^{-1}\theta_1(x)a = \theta_1(x) & y = x\theta_1(x) \in A_{24} \cap A_{24}^{'} \\ a^{-1}xx = ax\theta_1(x) & y = a \in A_{44} \cap A_{42}^{'} \\ a^{-1}x\theta_1(x)\theta_1(x) = a\theta_1(x) & y = ax \in A_{44} \cap A_{42}^{'} \\ xax = a & y = a\theta_1(x) \in A_{42} \cap A_{44}^{'} \\ x\theta_1(x)a\theta_1(x) = ax & y = ax\theta_1(x) \in A_{42} \cap A_{44}^{'} \end{cases}$$

显然, $y \mapsto \theta_1(y)^{-1}\theta_2(y)$ 是一个双射。因此, $\theta_1 \perp \theta_2$。于是, 若 $\theta_1 = (a, ax, ax\theta_1(x)\ x\theta_1(x)\ a\theta_1(x)\ x, \theta_1(x))$, 其中 $x\theta_1(x) = a^2$, 则 θ_1 与 $\theta_2 = (a\theta_1(x)\ ax\theta_1(x)\ a, \theta_1(x))(x, x\theta_1(x)\ ax)$ 以及 $\theta_3 = (ax\theta_1(x)\ a\theta_1(x)\ ax, \theta_1(x))(x, x\theta_1(x)\ a)$ 正交。

□

同理, 计算其他情形后, 得到下表 1:

θ_1	$\theta_2,\ \theta_3$
$(a,\ ax,\ ax\theta_1(x)\ x\theta_1(x)\ a\theta_1(x)\ x,\ \theta_1(x))$ 其中 $x\theta_1(x) = a^2$	$(a\theta_1(x)\ ax\theta_1(x)\ a, \theta_1(x))(x, x\theta_1(x)\ ax)$, $(ax\theta_1(x)\ a\theta_1(x)\ ax, \theta_1(x))(x, x\theta_1(x)\ a)$.
$(a, ax, ax\theta_1(x)\ x, \theta_1(x)\ a\theta_1(x)\ x\theta_1(x))$ 其中 $x\theta_1(x) = a^2$	$(a\theta_1(x)\ ax\theta_1(x)\ a, x, x\theta_1(x))(ax, \theta_1(x))$, $(ax\theta_1(x)\ a\theta_1(x)\ ax, x, x\theta_1(x))(a, \theta_1(x))$.
$(a,\ ax,\ ax\theta_1(x)\ x\theta_1(x))(\theta_1(x)\ a\theta_1(x)\ x)$ 其中 $x\theta_1(x) \neq a^2$ 和 $x = a^2$	$(a\theta_1(x)\ ax\theta_1(x)\ a, x, x\theta_1(x))(ax, \theta_1(x))$, $(ax\theta_1(x)\ a\theta_1(x)\ ax, x, x\theta_1(x))(a, \theta_1(x))$.
$(a,\ ax,\ ax\theta_1(x)\ x\theta_1(x))(\theta_1(x)\ a\theta_1(x)\ x)$ 其中 $x\theta_1(x) \neq a^2$ 和 $\theta_1(x) = a^2$	$(a\theta_1(x)\ ax\theta_1(x)\ a, \theta_1(x)\ ax, x, x\theta_1(x))$, $(ax\theta_1(x)\ a\theta_1(x)\ ax, \theta_1(x)\ a, x, x\theta_1(x))$.
$(a, ax, ax\theta_1(x)\ x, \theta_1(x))(a\theta_1(x)\ x\theta_1(x))$ 其中 $x\theta_1(x) \neq a^2$ 和 $x = a^2$	$(a\theta_1(x)\ ax\theta_1(x)\ a, \theta_1(x))(ax, x, x\theta_1(x))$, $(ax\theta_1(x)\ a\theta_1(x)\ ax,\ \theta_1(x))(a,\ x,\ x\theta_1(x))$ 。
$(a, ax, ax\theta_1(x)\ x, \theta_1(x))(a\theta_1(x)\ x\theta_1(x))$ 其中 $x\theta_1(x) \neq a^2$ 和 $\theta_1(x) = a^2$	$(a\theta_1(x)\ ax\theta_1(x)\ a, x, x\theta_1(x)\ ax, \theta_1(x))$, $(ax\theta_1(x)\ a\theta_1(x)\ ax,\ x,\ x\theta_1(x)\ a,\ \theta_1(x))$。

表 1: $\theta_1 \perp \theta_2$ 和 $\theta_1 \perp \theta_3$

推论 4.5. $\omega(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4) = 2.$

证明。显然，与给定正交同构正交的正交同构有两个，而它们彼此不正交，因为它们的 A_{44} 相同。因此， $\omega(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4) = 2$。□

推论 4.6. ***(i)*** 两个与 θ 正交的正交映射 ψ_1 和 ψ_2 可由元素 $\alpha = (a, ax)(ax\theta(x)\ a\theta(x))$ 在 $Aut(Z_2 \times Z_4)$ 中彼此共轭，其中 $A_{44} = \{a, ax\}$ 和 $A_{22} = \{x\}$ 属于 θ。此外， ψ_1 和 ψ_2 也与 $\alpha\theta\alpha^{-1} = \theta^{\alpha}$ 正交。

(ii) $Orth(Z_2 \times Z_4)$ 由 *12* 个互不相交的 *4*-圈组成。每个 *4*-圈如图 *2* 所示。

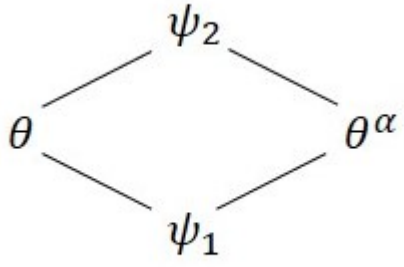

图 2

参考文献

[1] Chang, L.Q., Tai, S.S.：关于小阶非交换群的正交映射之间的正交关系。《数学学报》14，471–480（1964年），中文译本：《中国数学学报》5，506–515（1964年）

[2] Jungnickel, D., Grams, G.：阶为 ≤ 10的最大差矩阵。《离散数学》58，199–203（1986年）

[3]Evans, A.B.：群的正交同构图。数学讲义1535，Springer-Verlag，柏林（1992）[4]Evans, A.B.：基于群的正交拉丁方，Springer，尚贝里（2018）。[5]Evans, A. B.：基于阶为8的群的正交拉丁方图。《澳大拉西亚组合学杂志》80，116-142（2021）。