arXiv:2302.03265v1 [cs.GT] 7 Feb 2023

噪声和私人评估下间接互惠中合作的进化稳定性

Yuma Fujimoto[a, b, c, 1] 和 Hisashi Ohtsuki[a, d]

[a]综合进化科学研究中心，综合研究大学院大学。日本神奈川县叶山湘南村，邮编 240-0193[b]普遍生物学研究所（UBI），东京大学。日本东京都文京区本乡 7-3-1，邮编 113-0033。[c]CyberAgent, Inc.。日本东京都涩谷区宇田川町 40-1，邮编 150-0042。[d]生物系统进化研究系，综合研究大学院大学。日本神奈川县叶山湘南村，邮编 240-0193。[1]fujimoto yuma@soken.ac.jp

摘要

间接互惠是一种解释人类大规模合作的机制。在间接互惠中，个体利用声誉来决定是否与伙伴合作，并更新他人的声誉。一个重要问题是，选择行为的规则和更新声誉的规则如何进化。在公开声誉的情况下，所有个体对他人的评价一致，名为简单宽容（SS）和严厉评判（SJ）的社会规范已被证明能够维持合作。然而，在私人评估的情况下，个体独立评估他人，维持合作的机制仍基本未知。本研究从理论上首次表明，间接互惠下的合作在私人评估中可以达到进化稳定。具体而言，我们发现简单宽容可以稳定，而严厉评判则绝不可能稳定。这一点符合直觉，因为简单宽容规则简单，能够纠正声誉方面的人际差异。另一方面，严厉评判过于复杂，无法避免错误累积，最终导致合作瓦解。我们得出结论，适度的简单性是私人评估下维持合作的关键。我们的结果为人类合作的进化提供了理论基础。

1 引言

合作能为他人带来收益，但对合作个体自身而言却需要付出成本。然而，从微观到宏观尺度，合作都十分普遍，例如存在于微生物、动物、人类和国家之间。一种维持合作的方式是，行为主体有条件地与那些与自己合作的他人合作，这可以通过例如重复互动 [1–3] 和伙伴选择 [4–7]来实现。这种基于个人经验的条件性合作，仅适用于规模较小的种群，在这样的种群中，成员能够与大多数其他成员进行直接且重复的互动。

然而，即使在大规模社会（例如人类社会）中，也能观察到合作行为。由于个体在那里不可避免地会遇到陌生人，因此，为了避免无条件地合作，他们需要了解这些陌生人的声誉。只有拥有良好声誉的个体才能获得合作。如上所述，个体通过他人的声誉间接奖励他人的系统，被称为间接互惠 [8–10]。现实中，人类尤其关注自己和他人的声誉及流言 [11–13]。此外，许多实验指出，流言关注的是合作行为 [14–16]。

行为和评估中不可避免出现的错误会阻碍间接互惠中的合作。事实上，最简单的社会规范——形象评分 [9,10] ——无法在存在错误的情况下维持完全合作 [17,18] （直接互惠中也会出现类似的失败 [18–20]）。这是因为一次错误的背叛会引发更多背叛。尽管如此，先前的研究已从理论上证明，合作可以通过

所谓的“领先八”社会规范 [21,22] 得以维持，即便存在此类错误，只要所有个体对同一个体的声誉看法一致（即公共评估）。关于公开声誉的情形，过去约二十年来已有充分研究 [23–37]。然而，当个体无法共享对同一对象的评估时（即私人评估），错误对合作造成的威胁就更加严重。在这种情况下，两个个体之间的一次意见分歧便可能引发更多分歧 [38–42]。在噪声且私有的评估下能否维持合作，在理论上仍基本未有定论，也是间接互惠研究中的一项重大未解问题 [36,43,44]。

以往研究表明，在噪声且私有的评估下，通过间接互惠维持合作非常困难。例如，Hilbe 等人 [42] 通过进化模拟表明，在私人评估下，上述领先八策略无法实现合作。一些研究 [45–47] 证明了在噪声且私有的评估下合作会出现，但前提是只允许策略空间中的局部突变，因此排除了完全合作策略被搭便车者直接入侵的可能性。其他研究表明，个体之间意见同步的机制会对间接互惠中的合作产生积极影响，例如共情、慷慨、空间结构等 [48–57]。

关于私人评估的大多数研究都是通过计算机模拟 [42,45]开展的。这是因为，谁对谁赋予声誉这一二维信息（其矩阵表示形式称为“形象矩阵” [38,39,58,59]）会变得过于复杂，难以分析。例如，图 1-A 展示了其可能的变化过程，其中一次评估错误可能会随时间推移而放大，导致形象矩阵形成马赛克结构。在野生型与突变体之间进行进化分析，会使形象矩阵变得更加复杂，因为此时形象矩阵根据野生型和突变体个体采用的不同声誉赋予规则，包含四个区室（图 1-B）。尽管存在这些困难，我们在此报告，我们通过应用作者此前开发的一种技术 [60]，成功建立了研究形象矩阵的分析方法。这使我们能够对整个参数区域内噪声且私有的评估下合作何时得以维持，作出一般性预测。

下文将首先介绍噪声且私有的评估条件下间接互惠的设定，并说明如何通过分析复杂的形象矩阵来解析计算每个个体的期望收益。随后，我们将讨论在什么条件下哪种策略能够成为进化稳定策略（ESS） [61,62] ，并为这一结果提供直观解释。据我们所知，这是首项系统性研究，解析考察了噪声且私有的评估条件下间接互惠策略的进化稳定性。

模型

我们考虑一个规模为 N 的均匀混合种群中的间接互惠模型。我们假设，在每一步中，每个个体都会独立地为其他所有个体赋予二元声誉，即好或坏；这些评估由形象矩阵 $\{\beta_{ji}\}$ 汇总表示，其中，若个体 i 将个体 j 评为好（分别为坏），则 $\beta_{ji}=1$ （分别为 $\beta_{ji}=0$ ）。模型按以下方式进行。首先，从种群中随机选出一名给予者和一名接受者。接着，给予者对接受者采取行动，即合作或背叛。给予者合作时会付出成本 c（>0），并向接受者提供收益 b（$>c$）。另一方面，给予者背叛时，给予者和接受者的收益都不会发生变化。规定给予者如何选择行动的规则称为“行动规则”。本文始终假设所有个体都采用“辨别者”行动规则 [9,63], ：在自己看来，接受者声誉为好时选择合作（为坏时选择背叛）；也就是说，给予者 i 在 $\beta_{ji}=1$ 时对接受者 j 选择合作，在 $\beta_{ji}=0$ 时选择背叛。我们假设，给予者会以 $0\le e_1<1/2$ 的概率无意中采取与预定行动相反的行动（行动错误）。种群中的所有个体都会观察给予者与接受者之间的这次社会互动，并各自独立地更新自己对给予者的声誉。

规定每个观察者如何更新其他个体声誉的规则称为其“社会规范”。在公开声誉模型中，人们通常假设种群中的所有个体采用相同的社会规范 [21,29,64]（但参见 [38]），否则，他们就无法共享同一个体的声誉。然而，由于我们在此考虑的是私人声誉模型，因此我们转而假设个体可以采用不同的社会规范。本研究讨论的是这样一种情况：每个观察者（例如，

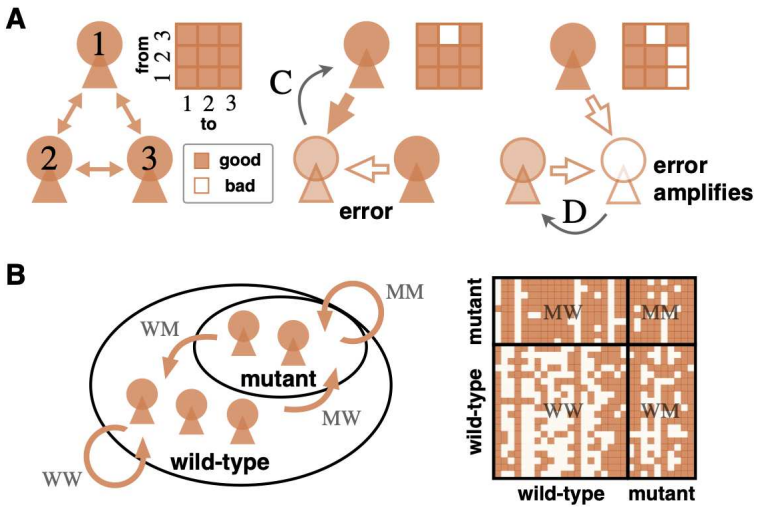

图 1：A. 评估错误如何放大的示意图。在全部三个图板中，都有第 1、第 2 和第 3 个人，3×3 形象矩阵和直箭头表示他们彼此之间的声誉。左侧图板中，他们彼此都被赋予良好声誉，因此实现了合作。中间图板中，第 2 个人与第 1 个人合作，但第 3 个人错误地给第 2 个人赋予了不良声誉。右侧图板中，第 3 个人基于自己眼中第 2 个人的不良声誉而背叛第 2 个人；但由于第 1 和第 2 个人都认为第 2 个人是好的，他们便给第 3 个人赋予了不良声誉。B. 形象矩阵复杂性的示意图。左侧图板显示，种群中野生型与突变体混杂，且存在四种声誉：野生型对野生型的 WW、突变体对野生型的 WM、野生型对突变体的 MW，以及突变体对突变体的 MM。右侧图板显示，形象矩阵被分解为相应的四个组成部分，每个部分都有不同的声誉结构。

表1：本研究中的全部16种二阶社会规范

社会规范		GC	BC	GD	BD
S_{01}	(ALLG)	G	G	G	G
S_{02}		G	G	G	B
S_{03}	(SS；简单宽容)	G	G	B	G
S_{04}	(SC；评分)	G	G	B	B
S_{05}		G	B	G	G
S_{06}		G	B	G	B
S_{07}	(SJ；严厉评判)	G	B	B	G
S_{08}	（SH；回避）	G	B	B	B
S_{09}		B	G	G	G
S_{10}		B	G	G	B
S_{11}		B	G	B	G
S_{12}		B	G	B	B
S_{13}		B	B	G	G
S_{14}		B	B	G	B
S_{15}		B	B	B	G
S_{16}	（ALLB）	B	B	B	B

k）指的是：（i）给予者（例如，i）是进行合作（C）还是背叛（D）（一阶信息）；以及（ii）在观察者看来，接受者（例如，j）是好（G）还是坏（B）（二阶信息，由 β_{jk}表示），其中该观察者会更新给予者在观察者眼中的声誉，该声誉记为 β_{ik}。这类社会规范被称为“二阶”社会规范 [10, 18, 33, 36]。采用二阶社会规范的观察者可能面临四种不同情况，分别记为GC（“面对一名良好接受者时给予者进行合作”）、BC（“面对一名不良接受者时给予者进行合作”）、GD（“面对一名良好接受者时给予者进行背叛”）和BD（“面对一名不良接受者时给予者进行背叛”）；在每种情况下，观察者都会赋予给予者良好（G）或不良（B）的声誉。因此，一种社会规范可表示为一个四字母字符串。例如，GBBG这一社会规范在GC和BD情况下赋予给予者良好声誉，而在BC和GD情况下赋予不良声誉。此类社会规范总共有 $2^4 = 16$ 种；我们按照字典序排列它们，规定G排在B之前，并从 S_{01} 编号至 S_{16}。表1列出了本文研究的16种社会规范的完整清单。在更新声誉时，每位观察者都会以 $0 < e_2 < 1/2$的概率独立地发生评估错误；在这种情况下，他/她会意外地将给予者的声誉赋予与原本意图相反的结果。

先前研究中有几种规范尤为重要，因此我们在下面对其进行解释。我们将 S_{01} ALLG 称为 ALLG，将 S_{16} ALLB 称为 ALLB，因为这些规范无条件地赋予良好或不良声誉。接下来，S_{03}、S_{04}、S_{07} 和 S_{08} 属于 G∗B∗ 类规范。这些规范具有相同的特征：它们将对良好接受者的合作视为良好行为，将对良好接受者的背叛视为不良行为。它们仅在观察者眼中接受者不良时有所不同。首先，S_{04} 被称为评分（SC），它将对不良接受者的合作视为良好行为，将对不良接受者的背叛视为不良行为，因此，声誉分配不取决于观察者眼中接受者是良好还是不良（因此被归类为一阶规范）。接下来，S_{07} 被称为严厉评判（SJ），与 SC 相反，它将对不良接受者的合作视为不良行为，将对不良接受者的背叛视为良好行为。第三，S_{03} 被称为简单宽容（SS），它将针对不良接受者的任何行为都视为良好行为，因此是该类规范中最宽容的规范。最后，S_{08} 被称为回避（SH），它将针对不良接受者的任何行为都视为不良行为，因此是其中最不宽容的规范。值得注意的是，SJ 和 SS 是“领先八种”规范中的两种二阶规范，[21]，这些规范是在对三阶规范进行搜索时发现的，能够在存在噪声和公开声誉的情况下成功维持合作。尤其是，SJ 长期以来一直被认为很有前景，因为它在进化上取得了成功 [23]，并且尽管简单，却能维持非常高水平的合作 [33, 36]。SJ 始终只建议一种能够保持自身良好声誉的正确行为；它建议对良好个体进行合作、对不良个体进行背叛，而未能遵循这一规则会导致不良声誉。在有噪声的公开声誉下，SH 无法对抗自身实现完全合作，但能够阻止 ALLB 的入侵（详细计算请参见补充信息）。

在这些设置下　中，个体的策略就是其社会规范。因此，以下我们将“策略　”

”与“（社会）规范”互换使用。我们探讨哪种策略是进化稳定的。为此，我们研究突变策略对野生型策略的可入侵性。若一种策略不会被任何其他15种突变策略入侵，则该策略就是进化稳定策略。为了推导它们的收益，我们需要分析形象矩阵，下面将对此进行分析。

声誉结构分析

考虑这样一种情形：具有突变规范 M 的个体侵入由野生型规范 W 构成的种群（$\neq$ M）。这里，突变体的比例为 δ。通过扩展 Fujimoto & Ohtsuki 的方法 [60]，我们可以用两个概率分布来描述形象矩阵。具体而言，取一名规范为 $A \in$ {W,M} 的焦点个体，并令 $p_{AA'}$（下文称为“良好度”）表示规范 A' 的使用者中，对该焦点个体赋予良好声誉的个体比例，其中 $A' \in$ {W, M}。因此，一个野生型个体由一对良好度（p_{WW}，p_{WM}）表征，我们用 Φ_{W}（p_{WW}，p_{WM}）表示所有野生型个体的良好度分布。同理，一个突变体由一对良好度（p_{MW}，p_{MM}）表征，而 Φ_{M}（p_{MW}，p_{MM}）表示所有突变体的良好度分布。在补充信息中，我们在 $N \gg 1$（种群规模较大）、$\delta \ll 1$（突变体稀少）以及 $N\delta \gg 1$（但突变体数量足够多）的假设下，通过构建给予者良好度的随机转移，推导出 Φ_{W} 和 Φ_{M} 的动态。随后，我们推导出均衡分布 Φ^*_{W} 和 Φ^*_{M}。这些均衡分布给出了野生型和突变体的期望收益，使我们能够研究突变体对野生型的可入侵条件（另见补充信息）。

我们发现，这两个均衡分布中的每一个，都可以很好地近似为两个维度上协方差为零的高斯函数的加权和，其中每个高斯函数都可以用一个非零整数系统地标记，$j \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$（示例见图2-B，标记规则见图2-C）。因此，和中出现的高斯函数数量是可数无穷的。然而在某些情况下，这些标签会退化（即两个或多个高斯函数完全相同，却被赋予不同的标签），此时高斯函数的数量可能是有限的。随着 j 变为较大的正值或较大的负值，高斯函数的权重呈指数衰减，因此将无穷和截断为有限项，就能很好地近似数值计算所需的无穷和。

进化稳定规范

基于上述形象矩阵分析，我们研究了野生型 W 与突变体 M 所有组合的成对可入侵性。在下文中，我们将行动错误率设为 $e_1 = 0$，因为据我们的研究，这种错误——尤其是其取较小正值时——不会对结果产生定性影响。因此，成本收益比 b/c 和评估错误率 e_2 是我们的环境参数。

我们首先发现，四种策略 S_{06}、S_{07}（SJ）、S_{10} 和 S_{11}，无论作为野生型还是突变体，都完全无法区分。这是因为在均衡时，由于评估错误不断累积，这些规范总是将良好度 $1/2$ 赋予种群中的所有人，因此看起来会随机选择合作或背叛。具体而言，它们彼此中性。基于这些原因，接下来的分析中我们只讨论 S_{07}（SJ），将其作为这四种规范的代表，并排除其他三种。

我们的穷尽分析表明，只有三种规范—— S_{03}（SS）、S_{08}（SH）和 S_{16}（ALLB）——可能成为进化稳定策略，其余规范均不可能。如图3-A所示，无论 b/c 和 e_2 如何，ALLB 都是进化稳定策略，因为这种规范会给所有人较差的声誉，节省自身成本，且不给他人带来收益。另一方面，在某些 b/c 和 e_2 条件下，SS 和 SH 能够成为进化稳定策略；它们成为进化稳定策略的 b/c 存在上下界，而这些界限取决于 e_2。下面我们将详细探讨。

进化稳定策略条件

S_{03}(SS)的进化稳定策略条件如图3-B所示。当 b/c 超过上界时，该规范会被 S_{01}(ALLG)入侵（比较图3-A的右侧和中间图板）。另一方面，当 b/c 低于下界时，该规范会被 S_{04}(SC)入侵（比较图3-A的左侧和中间图板）。图3-C

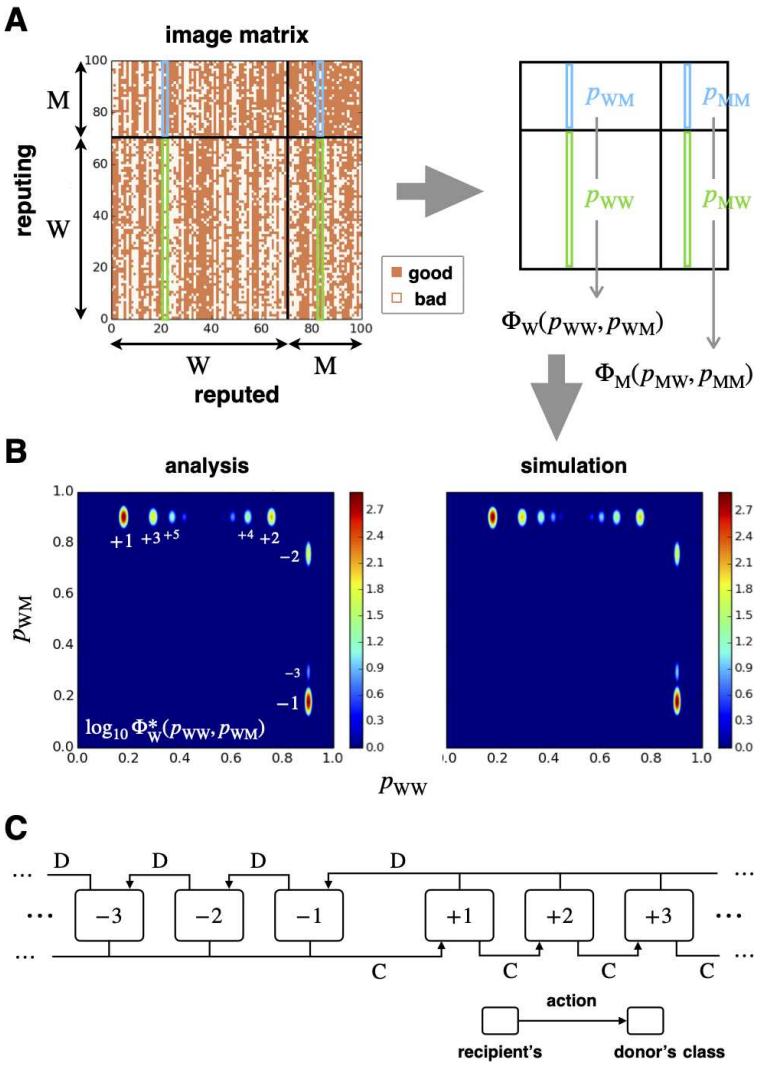

图2：分析声誉结构的方法示意图。A. 左侧图板展示了一个形象矩阵示例。我们将该形象矩阵分为四部分进行分析，分别对应评价方是野生型（W）还是突变体（M），以及被评价方是W还是M。右侧图板中，从形象矩阵提取了野生型（绿色）和突变体（蓝色）中每个个体的一对善意度。由于这对善意度彼此相关，我们考虑它们的联合概率分布，记为 Φ_W 和 Φ_M。B. 我们通过解析方法计算了该联合概率分布。可以看到，解析估计（左侧图板）与模拟结果（右侧）吻合良好。在两个图板中，我们均假设 (W, M) $=(S_{09}, S_{03})$、$N = 5000$、$\delta = 0.1$，且 (e_1, e_2) $=(0, 0.1)$。数值模拟中，我们使用了来自时间 $t = 51, \cdots$ 至 3050 的3000个形象矩阵样本（随机给予者的善意度每单位时间更新N 次，单位时间为 t）。另一方面，在理论分析中，我们引入了$-100 \leq j \leq +100$的截断。热峰附近的每个数字表示类别标签 j。C. 个体类别的标记规则。每个类别对应一个高斯分布。每个方框（标记为 $j \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$）代表一个类别。每个箭头的终点表示给予者在对属于箭头起点所示类别的接受者采取合作（C）或背叛（D）后转入的类别。例如，与类别为 $j = -2$ 的接受者合作的给予者会转入类别 $j = +1$。

显示，这些理论界限也得到了基于个体的模拟的支持。值得注意的是，e_2 越小， S_{03}(SS)的进化稳定策略区域就越宽。

与 S_{03}(SS)相比， S_{08}(SH)的ESS区域相当狭窄，如图3-B所示。在

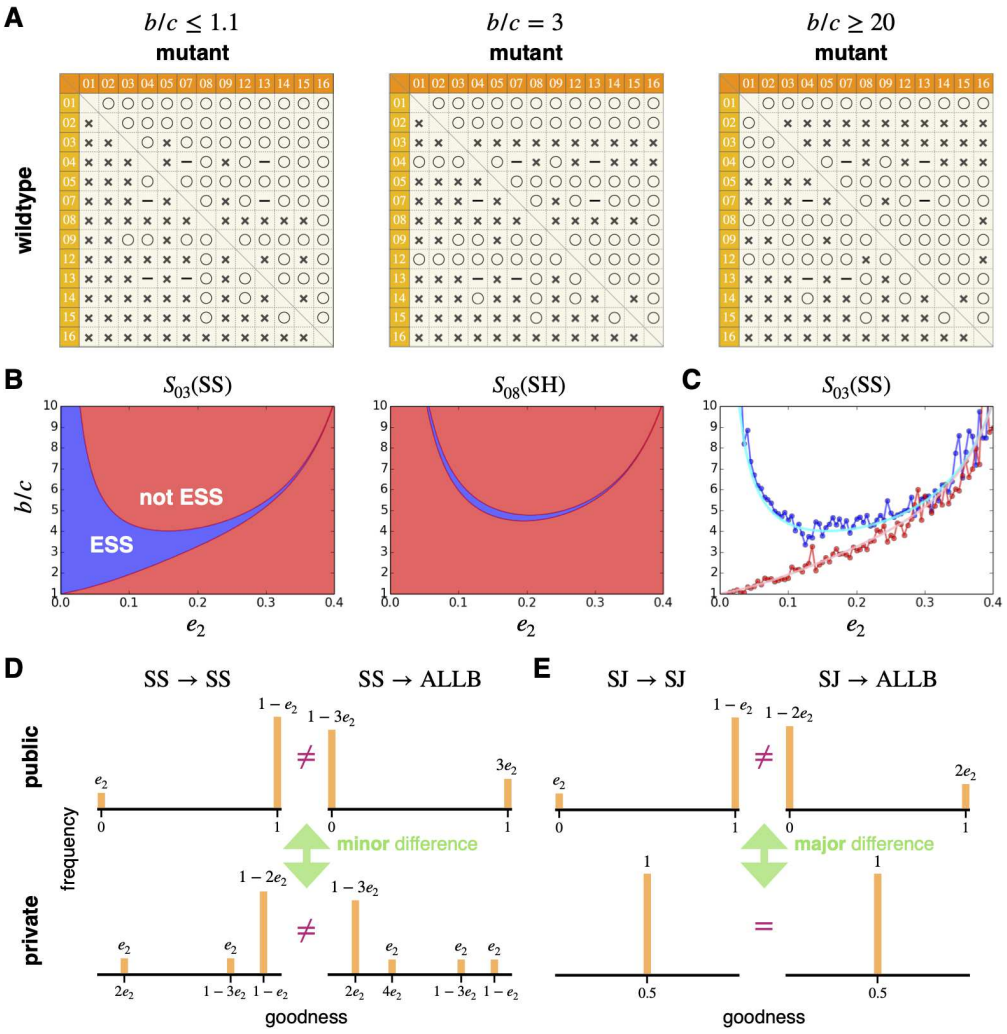

图3：ESS分析详情。A. 所有社会规范两两之间的可入侵性。左、中、右图板分别展示 $b/c \leq 1.1$、 $= 3$和 ≥ 20的情况。行（列）中的数字表示野生型（突变型）规范的标签。每个圆圈（叉号）表示突变体成功（未能）入侵。每个短横线表示野生型规范与突变型规范处于中性状态。所有图板均基于 $e_2 = 0.1$ 和 $-10000 \leq j \leq +10000$。B. 规范 S_{03}(SS)（左）和 S_{08}(SH)（右）的ESS参数区域。每个图板中，横轴（纵轴）表示 e_2 （ b/c）。蓝色（红色）表示该规范是（不是）ESS。C. 对 S_{03}(SS)的ESS区域进行解析计算与数值计算的比较。横轴和纵轴与B相同。青色（粉色）线表示理论上界（下界）（与B左图板相同）。蓝色（红色）点以线连接，表示上界（下界）的数值估计。这些估计基于图像矩阵的基于主体的模拟计算得出，参数为 $N = 10000$、 $\delta = 0.03$。使用了来自第 $51 \leq t \leq 100$ 代的50个样本的平均值，但在计算 $e_2 < 0.1$的上界（蓝点）时，为减少估计误差，改用来自 $51 \leq t \leq 3050$ 的3000个样本的平均值。D. 比较公共评估（上排）和私人评估（下排）下，野生型SS个体如何评价其他SS个体（左列），以及野生型SS个体如何评价突变型ALLB个体（右列）。每个图板中，横轴和纵轴分别表示个体善意度及其频率。柱的位置和高度仅在顺序 e_2范围内准确。我们看到，SS给予大多数SS个体较高的善意度（左列），给予大多数ALLB个体较低的善意度（右列），且上下两排之间的差异很小（在 $O(e_2)$ 的尺度上）。因此，在公共评估和私人评估下，SS都能抵御ALLB的入侵。E. 对野生型SJ和突变型ALLB进行了与D类似的比较。我们看到，在公共评估下，SJ给予大多数SS个体较高的善意度（左上），给予大多数ALLB个体较低的善意度（右上）；但在私人评估下，SJ给予SJ个体（左下）7和ALLB个体（右下） $1/2$ 的善意度相同。因此，SJ在公共评估下能够抵御ALLB的入侵，但在私人评估下不能。

此外，当 b/c 超过上限或低于下限时，该规范分别会被 S_{04}(SC) 和 S_{16}(ALLB) 入侵。使 SH 进化稳定的 b/c 比率范围在中间值 e_2 （约为 0.1）时最宽。

与这些结果相反，我们发现，已知在公共声誉条件下是一种成功规范的 S_{07}(SJ)，无论 b/c （以及 e_2）取何值，都会被诸如 S_{16}(ALLB) 和 S_{08}(SH) 这样的规范入侵，因此它从来不是进化稳定策略。这一点总结于图3-A。

总而言之，在公共评估下，SS、SH 和 SJ 都是进化稳定规范；但在私人评估下，它们能否保持进化稳定则大不相同。在评估错误率 $e_2 \ll 1$ 足够小但为正时，只要考察这些规范在公共声誉和私人声誉情形下所形成的声誉结构有何不同，就能清楚理解这种差异。下面以 ALLB（一种潜在入侵规范）为例，讨论每种规范能否阻止其入侵。

简单宽容的成功： S_{03}(SS)赋予的声誉结构在公开声誉和私人声誉情形下差异不大（见图3-D）。在公开声誉情形下（计算过程见补充信息），SS会给SS个体良好声誉（如图3-D左上面板中良好度为 $=1$ 的柱形所示），而给ALLB个体不良声誉（如图3-D右上面板中良好度为 $=0$ 的柱形所示）。因此，SS能够区分自身与入侵者ALLB，并阻止ALLB入侵。即使在私人声誉情形下，SS仍会给SS个体良好声誉（见图3左下面板；例如，比例为 $1-2e_2$ 的SS个体被赋予较高的良好度 $1-e_2$ ），并给ALLB个体不良声誉（见图3右下面板；例如，比例为 $1-3e_2$ 的ALLB个体被赋予较低的良好度 $2e_2$）。因此，SS与ALLB之间的区分得以维持。正因如此，即使在私人评估下，SS也能成为进化稳定策略。在该进化稳定策略下，当 e_2较小时，合作率高达 $1-2e_2$ ，因此几乎实现了完美合作。

严厉评判失效：与SS相反， S_{07}(SJ)所形成的声誉结构，在公开声誉和私人声誉情形下差异极大（见图3-E）。在公开声誉下（计算过程见补充信息），野生型SJ会给予其他SJ较高的良好度（图3-E左上），而野生型SJ会给予ALLB较低的良好度（图3-E右上）。因此，SJ能阻止ALLB入侵。然而，在私人评估下，SJ给予其他SJ个体的良好度为1/2（图3-E左下）， [39]同时SJ给予ALLB个体的良好度也为1/2（图3-E右下）。因此，SJ与ALLB之间的区别消失了。这就是SJ在私人评估下无法成为进化稳定策略的原因。

回避可以成为进化稳定策略，但合作水平较低：我们可以理解为什么 S_{08}(SH)只有在私人声誉下的狭小区域内才能成为进化稳定策略（详细计算见补充信息，便于理解的示意图见图 S3）。在公开声誉下，SH会给予一半的其他SH良好声誉，给予另一半不良声誉（图 S3左上），而SH会给予几乎所有ALLB不良声誉（图 S3右上）。因此，SH能阻止ALLB入侵。另一方面，在私人声誉下，SH给予SH和ALLB的良好度都较低（图 S3左下和右下）。不过，在此情况下，SH获得良好声誉的机会略高于ALLB，差值为 e_2^2。这解释了为什么SH只能在狭小区域内阻止ALLB入侵，也解释了为什么评估错误率 e_2越低，其进化稳定策略条件就越严格。在实际达到进化稳定策略时，若 e_2较小，合作率低至 e_2 ，因此我们得出结论， S_{08}(SH)无助于合作。

讨论

本研究考察了噪声且私有的评估下的间接互惠。我们关注不同规范之间个体的良好度（即给予该个体良好声誉的个体所占的比例），并开发了一种解析方法，用于计算均衡时良好度的分布。利用这一方法，我们研究了突变规范能否入侵野生型规范。尽管在公开声誉下， S_{03}(SS) 和 S_{07}(SJ) 都可以是进化稳定策略，但我们发现，在私人评估下，它们的进化稳定性截然不同。具体而言，我们发现，如果评估错误率较低， S_{03}(SS) 在私人评估下仍是进化稳定策略；而无论错误率多低， S_{07}(SJ) 都不可能成为进化稳定策略。

S_{03}(SS) 与 S_{07}(SJ) 之间出现这种差异的原因，在于这两种规范的复杂性不同。在私人评估的情境中，评估误差会在观察者之间独立累积，这可能导致种群中的合作瓦解。然而，由于 S_{03}(SS)

无论接受者是好是坏，都会将合作捐赠者视为好人，因此不同观察者对接受者看法不一致，并不会导致进一步的分歧；这两位观察者仍能一致认为这样的合作捐赠者是好人。相比之下， S_{07}(SJ) 比 S_{03}(SS) 更复杂，而且受助者的声誉始终是决定性信息（见表1），因此这种复杂性会妨碍观察者之间分歧的纠正。

Hilbe 等人 [42] 通过计算机模拟研究了在噪声且私有的评估下，领先八项规范能否维持合作。他们得出结论， S_{03}(SS)（在他们的论文中称为“L3”）和 S_{07}(SJ)（“L6”）无法实现合作，这与我们的结果相反。这种差异是因为我们研究的是确定性模型中的进化稳定性，而他们研究的是随机模型中的固定概率。由于这两种判据不同，很难得出一般性结论，但我们的研究意义在于，我们证明了即使在私人评估下，合作也能在进化过程中得以维持。

未来的研究方向之一，是在改变某些假设的情况下考察社会规范的进化稳定策略条件。例如，我们假设采用二阶规范，即个体在更新给予者的声誉时，会参考给予者的行为（一阶信息）和接受者的声誉（二阶信息）。然而，人类可能会使用比二阶规范更复杂的规范。研究高阶信息的影响， [32, 33, 36, 65], 例如给予者先前的声誉（三阶信息），将进一步加深我们对此的理解。我们还假设所有个体同时更新自己对同一给予者的看法。然而，在现实社会中，能够观察某个人行为的人数有限。因此，研究声誉异步更新的影响很有价值。最后但同样重要的是，我们隐含地假设博弈互动持续足够长的时间，因此可以使用良好度的均衡分布来计算收益（即折扣因子为 1）。然而，在某些情况下，初始声誉的影响未必可以忽略。

总之，我们证明了即使在噪声且私有的评估下，合作也能进化稳定。具体而言，我们表明，严厉评判是公开声誉体系下最主要的规范之一，但在私人评估下无法区分合作者与背叛者，因此无法达到进化稳定策略。另一方面，我们发现，简单宽容在很广泛的参数范围内都能保持稳定。根据这些结果，我们预测，在噪声且私有的评估下，简单宽容应在通过间接互惠维持合作方面发挥关键作用。这些发现为理解人类合作提供了坚实的理论基础，并为生物学、心理学、社会学和经济学领域的未来研究铺平了道路。

致谢

Y.F.感谢JSPS KAKENHI项目编号JP21J01393的资助。H.O.感谢JSPS KAKENHI项目编号JP19H04431的资助。

参考文献

[1] Robert L Trivers. 互惠利他的演化。《生物学季刊》，46(1):35–57，1971。[2] Robert Axelrod and William D Hamilton. 合作的演化。《科学》，211(4489):1390–1396，1981。[3] Robert Axelrod. 《合作的演化》。Basic出版社，纽约，1984。[4] Toshio Yamagishi、Nahoko Hayashi 和 Nobuhito Jin. 囚徒困境网络：选择策略与行动策略。载于《社会困境与合作》，第233–250页。施普林格，1984。[5] Ronald No¨e and Peter Hammerstein. 生物市场：供给与需求决定伙伴选择对合作、互利共生和交配的影响。《行为生态学与社会生物学》，35(1):1–11，1994。

[6] Ronald No¨e and Peter Hammerstein. 生物市场。《生态学与进化趋势》，10(8):336–339，1995。[7] Pat Barclay. 生物市场中的合作策略，尤其是人类的合作策略。《进化与人类行为》，34(3):164–175，2013。[8] Richard D Alexander. 道德体系的生物学。Aldine de Gruyter：纽约，1987。[9] Martin A Nowak and Karl Sigmund. 通过形象评分实现间接互惠的演化。《自然》，393(6685):573–577，1998。[10] Martin A Nowak and Karl Sigmund. 间接互惠的演化。《自然》，437(7063):1291–1298，2005。[11] Nicholas Emler. 流言、声誉与社会适应。堪萨斯大学出版社，1994。[12] Robin Ian MacDonald Dunbar. 理毛、流言与语言的演化。哈佛大学出版社，1998。[13] Robin IM Dunbar. 进化视角下的流言。《普通心理学评论》，8(2):100–110，2004。[14] Matthew Feinberg、Robb Willer、Jennifer Stellar 和 Dacher Keltner. 流言的美德：作为亲社会行为的声誉信息分享。《人格与社会心理学杂志》，102(5):1015，2012。[15] Matthew Feinberg、Robb Willer 和 Michael Schultz. 流言与排斥促进群体合作。《心理科学》，25(3):656–664，2014。[16] Junhui Wu、Daniel Balliet 和 Paul AM Van Lange. 声誉、流言与人类合作。《社会与人格心理学指南》，10(6):350–364，2016。[17] Karthik Panchanathan and Robert Boyd. 两个背叛者的故事：名誉地位对间接互惠演化的重要性。《理论生物学杂志》，224(1):115–126，2003。[18] Karl Sigmund. 自私的演算。普林斯顿大学出版社，2010。[19] Martin Nowak and Karl Sigmund. 一种在囚徒困境博弈中胜过针锋相对的赢则保持、输则转换策略。《自然》，364(6432):56–58，1993。[20] Jianzhong Wu and Robert Axelrod. 如何应对重复囚徒困境中的噪声。《冲突解决杂志》，39(1):183–189，1995。[21] Hisashi Ohtsuki and Yoh Iwasa. 我们应如何定义良好度？——间接互惠中的声誉动态。《理论生物学杂志》，231(1):107–120，2004。[22] Hisashi Ohtsuki and Yoh Iwasa. 领先八项规范：能够通过间接互惠维持合作的社会规范。《理论生物学杂志》，239(4):435–444，2006。[23] Jorge M Pacheco、Francisco C Santos 和 Fabio AC C Chalub. 斯特恩评判：一种简单而有效、能够促进间接互惠下合作的规范。PLoS计算生物学，2(12):e178，2006。[24] Shinsuke Suzuki and Eizo Akiyama. 不同规模群体中间接互惠的演化及其与直接互惠的比较。《理论生物学杂志》，245(3):539–552，2007。[25] Francisco C Santos、Fabio ACC Chalub 和 Jorge M Pacheco. 用于社会规范涌现的多层次选择模型。载于欧洲人工生命会议，第525–534页。施普林格，2007。[26] Feng Fu、Christoph Hauert、Martin A Nowak 和 Long Wang. 基于声誉的伙伴选择促进社会网络中的合作。《物理评论E》，78(2):026117，2008。

[27] Shinsuke Suzuki 和 Eizo Akiyama。《大规模群体中一阶信息间接互惠的进化稳定性》。《理论种群生物学》，73(3):426–436，2008。[28] Satoshi Uchida 和 Karl Sigmund。《间接互惠评估规则的竞争》。《理论生物学杂志》，263(1):13–19，2010。[29] Hisashi Ohtsuki、Yoh Iwasa 和 Martin A Nowak。《公共与私人互动中的声誉效应》。《PLoS计算生物学》，11(11):e1004527，2015。[30] Fernando P Santos、Francisco C Santos 和 Jorge M Pacheco。《小规模社会中的合作社会规范》。《PLoS计算生物学》，12(1):e1004709，2016。[31] Fernando P Santos、Jorge M Pacheco 和 Francisco C Santos。《任意探索率下间接互惠中的合作演化》。《科学报告》，6(1):1–9，2016。[32] Tatsuya Sasaki、Isamu Okada 和 Yutaka Nakai。《间接互惠中条件道德评估的演化》。《科学报告》，7(1):1–8，2017。[33] Fernando P Santos、Francisco C Santos 和 Jorge M Pacheco。《合作演化中的社会规范复杂性与过往声誉》。《自然》，555(7695):242–245，2018。[34] Fernando Santos、Jorge Pacheco 和 Francisco Santos。《声誉建立成本高昂时的合作社会规范》。《AAAI人工智能会议论文集》，32(1)，2018年4月。[35] Chengyi Xia、Carlos Gracia-L´azaro 和 Yamir Moreno。《记忆、不宽容和二阶声誉对合作的影响》。《混沌：非线性科学跨学科期刊》，30(6):063122，2020。[36] Fernando P Santos、Jorge M Pacheco 和 Francisco C Santos。《间接互惠下人类合作的复杂性》。《皇家学会哲学汇刊B辑》，376(1838):20200291，2021。[37] Shirsendu Podder、Simone Righi 和 K´aroly Tak´acs。《局部声誉、局部选择与领先八项规范》。《科学报告》，11(1):1–10，2021。[38] Satoshi Uchida。《私人信息对间接互惠的影响》。《物理评论E》，82(3):036111，2010。[39] Satoshi Uchida 和 Tatsuya Sasaki。《评估错误和私人信息对间接互惠中斯特恩评判的影响》。《混沌、孤子与分形》，56:175–180，2013。[40] Isamu Okada、Tatsuya Sasaki 和 Yutaka Nakai。《私人监测中，宽容的间接互惠可通过与无条件合作者团结来提升社会福利》。《科学报告》，7(1):1–11，2017。[41] Isamu Okada、Tatsuya Sasaki 和 Yutaka Nakai。《利用单独观察解决间接互惠中的私人评估问题》。《理论生物学杂志》，455:7–15，2018。[42] Christian Hilbe、Laura Schmid、Josef Tkadlec、Krishnendu Chatterjee 和 Martin A Nowak。《私人、带噪声且不完全信息下的间接互惠》。《美国国家科学院院刊》，115(48):12241–12246，2018。[43] Samuel Bowles 和 Herbert Gintis。《合作的物种》。载于《合作的物种》。普林斯顿大学出版社，2011。[44] Isamu Okada。《间接互惠理论研究综述》。《博弈》，11(3):27，2020。[45] Hitoshi Yamamoto、Isamu Okada、Satoshi Uchida 和 Tatsuya Sasaki。《一种用于揭示不可或缺规范的间接互惠规范剔除法》。《科学报告》，7(1):1–7，2017。[46] Sanghun Lee、Yohsuke Murase 和 Seung Ki Baek。《间接互惠连续模型中合作的局部稳定性》。《科学报告》，11(1):1–13，2021。

[47] Sanghun Lee、Yohsuke Murase 和 Seung Ki Baek。《间接互惠连续模型的二阶微扰理论》。arXiv预印本 arXiv:2203.03920，2022。[48] Eleanor Brush、 ̊Ake Br¨annstr¨om 和 Ulf Dieckmann。《负向分类和有限信息下的间接互惠可促进合作》。《理论生物学杂志》，443:56–65，2018。[49] Roger M Whitaker、Gualtiero B Colombo 和 David G Rand。《间接互惠与偏见群体的演化》。《科学报告》，8(1):1–14，2018。[50] Arunas L Radzvilavicius、Alexander J Stewart 和 Joshua B Plotkin。《共情道德评价的演化》。《eLife》，8:e44269，2019。[51] Marcus Krellner 和 The Anh Han。《设身处地为每个人着想——取悦行为使私人评估下的间接互惠成为可能》。载于《人工生命会议论文集》第32卷，第402–410页。麻省理工学院出版社，One Rogers Street, Cambridge, MA 02142-1209, USA，2020。[52] Ji Quan、Xiukang Yang、Xianjia Wang、Jian-Bo Yang、Kaibiao Wu 和 Zilong Dai。《在不完全信息下，暂缓判断与惩罚促进间接互惠中的合作》。《EPL（欧洲物理学快报）》，128(2):28001，2020。[53] Marcus Krellner 和 The Anh Han。《取悦行为增强基于间接互惠的合作，适用于私人评估》。《人工生命》，31:1–31，2021。[54] Laura Schmid、Pouya Shati、Christian Hilbe 和 Krishnendu Chatterjee。《行为慷慨度与评估慷慨度下间接互惠的演化》。《科学报告》，11(1):1–14，2021。[55] Taylor A Kessinger 和 Joshua B Plotkin。《具有群体结构的种群中的间接互惠》。arXiv预印本 arXiv:2204.10811，2022。[56] Ji Quan、Jiacheng Nie、Wenman Chen 和 Xianjia Wang。《维持或逆转社会规范通过增强间接互惠促进合作》。《混沌、孤子与分形》，158:111986，2022。[57] Pengfei Gu 和 Yanling Zhang。《基于声誉的重连促进复杂网络中的合作》。载于《制导、导航与控制进展》，第1405–1415页。施普林格，2022。[58] Karl Sigmund。《间接互惠中的道德评估》。《理论生物学杂志》，299:25–30，2012。[59] Koji Oishi、Takashi Shimada 和 Nobuyasu Ito。《通过间接互惠形成群体》。《物理评论E》，87(3):030801，2013。[60] Yuma Fujimoto 和 Hisashi Ohtsuki。《噪声且私有的评估下间接互惠中的声誉结构》。《科学报告》，12(1):1–13，2022。[61] J Maynard-Smith 和 George R Price。《动物冲突的逻辑》。《自然》，246(5427):15–18，1973。[62] John Maynard-Smith。《演化与博弈论》。剑桥大学出版社，1982。[63] Martin A Nowak 和 Karl Sigmund。《间接互惠的动态》。《理论生物学杂志》，194(4):561–574，1998。[64] Hisashi Ohtsuki 和 Yoh Iwasa。《演化动态的全局分析，以及对通过声誉维持合作的社会规范进行穷举搜索》。《理论生物学杂志》，244(3):518–531，2007。[65] Robert Sugden。《权利、合作与福利经济学》。Basil Blackwell，1986。

补充材料

S1 善度的联合分布的计算

本节提出一种解析方法，用于获得间接互惠下的声誉结构。我们假设这样一种情形：比例为 δ、遵循规范 M 的少数突变体侵入比例为 $1-\delta$、遵循规范 W 的其他野生型。我们将规范 $A \in$ {W、M} 的种群比例记为 ρ_A；当 $A=$ W 时为 $\rho_A = 1-\delta$，而当 $A=$ M 时为 $\rho_A = \delta$。为刻画声誉结构，我们将 p_{iA} 定义为遵循规范 A 的个体将良好声誉赋予个体 i 的比例。我们将 p_{iA} 称为来自规范 $A \in$ {W、M} 的个体 i 的善意度。

下面，我们考虑每个回合中 p_{iA} 的随机转移。在单个回合中，会选择一名接受者和一名给予者，分别标记为 i_{R} 和 i_{D}。在该回合中，$p_{i_{\mathrm{D}}A_{\mathrm{O}}}$（即来自规范 A_{O} 的给予者的善意度）变为下一个善意度 $p'_{i_{\mathrm{D}}A_{\mathrm{O}}}$，适用于所有 $A_{\mathrm{O}} \in$ {W、M}。下文将针对给予者选择合作或背叛的情形，分别 formulates 随机变化。

C映射情形：首先，我们考虑给予者与接受者合作的情形，其发生概率为

$$h(p_{i_{\mathrm{R}}A_{\mathrm{D}}}) := p_{i_{\mathrm{R}}A_{\mathrm{D}}}(1-e_1) + (1-p_{i_{\mathrm{R}}A_{\mathrm{D}}})e_1. \tag{1}$$

在此情形下，$N\rho_{A_{\mathrm{O}}}p'_{i_{\mathrm{D}}A_{\mathrm{O}}}$，即在下一回合中依据规范 A_{O} 给予给予者良好声誉的观察者数量，服从如下概率分布

$$N\rho_{A_{\mathrm{O}}}p'_{i_{\mathrm{D}}A_{\mathrm{O}}} \sim N_1 + N_2, \tag{2}$$

$$N_1 \sim \mathcal{B}(N\rho_{A_{\mathrm{O}}}p_{i_{\mathrm{R}}A_{\mathrm{O}}}, a^{\mathrm{GC}}_{A_{\mathrm{O}}}), \tag{3}$$

$$N_2 \sim \mathcal{B}(N\rho_{A_{\mathrm{O}}}(1-p_{i_{\mathrm{R}}A_{\mathrm{O}}}), a^{\mathrm{BC}}_{A_{\mathrm{O}}}). \tag{4}$$

此处，$\mathcal{B}(n,a)$表示成功概率为 a、试验次数为 n的二项分布。此外，$a^{XY}_{A_{\mathrm{O}}}$表示这样的概率：依据规范 A_{O}、将接受者评价为 $X \in$ {G、B}的观察者，首次将行为为 $Y \in$ {C、D}的给予者赋予良好声誉。$a^{\mathrm{GC}}_{A_{\mathrm{O}}}$、$a^{\mathrm{BC}}_{A_{\mathrm{O}}}$、$a^{\mathrm{GD}}_{A_{\mathrm{O}}}$和 $a^{\mathrm{BD}}_{A_{\mathrm{O}}}$通过将表1主文稿中的相应 G 和 B 枢轴值转换为 $1-e_2$和 e_2得到。我们不使用式（3），而采用简写符号；

$$N\rho_{A_{\mathrm{O}}}p'_{i_{\mathrm{D}}A_{\mathrm{O}}} \sim \mathcal{B}(N\rho_{A_{\mathrm{O}}}p_{i_{\mathrm{R}}A_{\mathrm{O}}}, a^{\mathrm{GC}}_{A_{\mathrm{O}}}) + \mathcal{B}(N\rho_{A_{\mathrm{O}}}(1-p_{i_{\mathrm{R}}A_{\mathrm{O}}}), a^{\mathrm{BC}}_{A_{\mathrm{O}}}). \tag{5}$$

由于 $N\rho_{A_{\mathrm{O}}}$ 足够大，$p'_{i_{\mathrm{D}}A_{\mathrm{O}}}$ 的均值和方差为

$$\mathrm{E}[p'_{i_{\mathrm{D}}A_{\mathrm{O}}}] = p_{i_{\mathrm{R}}A_{\mathrm{O}}}(\underbrace{a^{\mathrm{GC}}_{A_{\mathrm{O}}} - a^{\mathrm{BC}}_{A_{\mathrm{O}}}}_{=:\Delta f^{\mathrm{C}}_{A_{\mathrm{O}}}}) + a^{\mathrm{BC}}_{A_{\mathrm{O}}} \quad (=: f^{\mathrm{C}}_{A_{\mathrm{O}}}(p_{i_{\mathrm{R}}A_{\mathrm{O}}})), \tag{6}$$

$$\mathrm{Var}[p'_{i_{\mathrm{D}}A_{\mathrm{O}}}] = \frac{p_{i_{\mathrm{R}}A_{\mathrm{O}}}a^{\mathrm{GC}}_{A_{\mathrm{O}}}(1-a^{\mathrm{GC}}_{A_{\mathrm{O}}}) + (1-p_{i_{\mathrm{R}}A_{\mathrm{O}}})a^{\mathrm{BC}}_{A_{\mathrm{O}}}(1-a^{\mathrm{BC}}_{A_{\mathrm{O}}})}{N\rho_{A_{\mathrm{O}}}} = \frac{e_2(1-e_2)}{N\rho_{A_{\mathrm{O}}}} \quad (=: \rho^{-1}_{A_{\mathrm{O}}}s^2). \tag{7}$$

在式（6）中，$f^{\mathrm{C}}_{A_{\mathrm{O}}}$ 表示将当前回合接受者的良好度映射到下一回合给予者良好度的映射。由于该映射仅在给予者合作时应用，因此我们称之为“C映射”。

D映射情形：另一方面，我们考虑给予者背叛接受者的情形，其发生概率为 a
概率为

$$1-h(p_{i_{\mathrm{R}}A_{\mathrm{D}}}) = (1-p_{i_{\mathrm{R}}A_{\mathrm{D}}})(1-e_1) + p_{i_{\mathrm{R}}A_{\mathrm{D}}}e_1. \tag{8}$$

在此情形下，$N\rho_{A_{\mathrm{O}}}p'_{i_{\mathrm{D}}A_{\mathrm{O}}}$ 服从概率分布

$$N\rho_{A_{\mathrm{O}}}p'_{i_{\mathrm{D}}A_{\mathrm{O}}} \sim \mathcal{B}(N\rho_{A_{\mathrm{O}}}p_{i_{\mathrm{R}}A_{\mathrm{O}}}, a^{\mathrm{GD}}_{A_{\mathrm{O}}}) + \mathcal{B}(N\rho_{A_{\mathrm{O}}}(1-p_{i_{\mathrm{R}}A_{\mathrm{O}}}), a^{\mathrm{BD}}_{A_{\mathrm{O}}}). \tag{9}$$

由此方程可得，$p'_{i_{\mathrm{D}}A_{\mathrm{O}}}$ 的均值和方差为

$$\mathrm{E}[p'_{i_{\mathrm{D}}A_{\mathrm{O}}}] = p_{i_{\mathrm{R}}A_{\mathrm{O}}}(\underbrace{a^{\mathrm{GD}}_{A_{\mathrm{O}}} - a^{\mathrm{BD}}_{A_{\mathrm{O}}}}_{=:\Delta f^{\mathrm{D}}_{A_{\mathrm{O}}}}) + a^{\mathrm{BD}}_{A_{\mathrm{O}}} \quad (=: f^{\mathrm{D}}_{A_{\mathrm{O}}}(p_{i_{\mathrm{R}}A_{\mathrm{O}}})), \tag{10}$$

$$\mathrm{Var}[p'_{i_{\mathrm{D}}A_{\mathrm{O}}}] = \frac{p_{i_{\mathrm{R}}A_{\mathrm{O}}}a^{\mathrm{GD}}_{A_{\mathrm{O}}}(1-a^{\mathrm{GD}}_{A_{\mathrm{O}}}) + (1-p_{i_{\mathrm{R}}A_{\mathrm{O}}})a^{\mathrm{BD}}_{A_{\mathrm{O}}}(1-a^{\mathrm{BD}}_{A_{\mathrm{O}}})}{N\rho_{A_{\mathrm{O}}}} = \frac{e_2(1-e_2)}{N\rho_{A_{\mathrm{O}}}} \quad (=: \rho^{-1}_{A_{\mathrm{O}}}s^2). \tag{11}$$

由于映射 $f^{\mathrm{D}}_{A_{\mathrm{O}}}$ 是在给予者背叛时应用的，因此我们以与 C映射 相同的方式将其称为 D映射。

上述 C映射 $f^{\mathrm{C}}_{S_k}$ 和 D映射 $f^{\mathrm{D}}_{S_k}$ 针对所有 $S_k \in \mathcal{S}$在图 1中进行了说明。

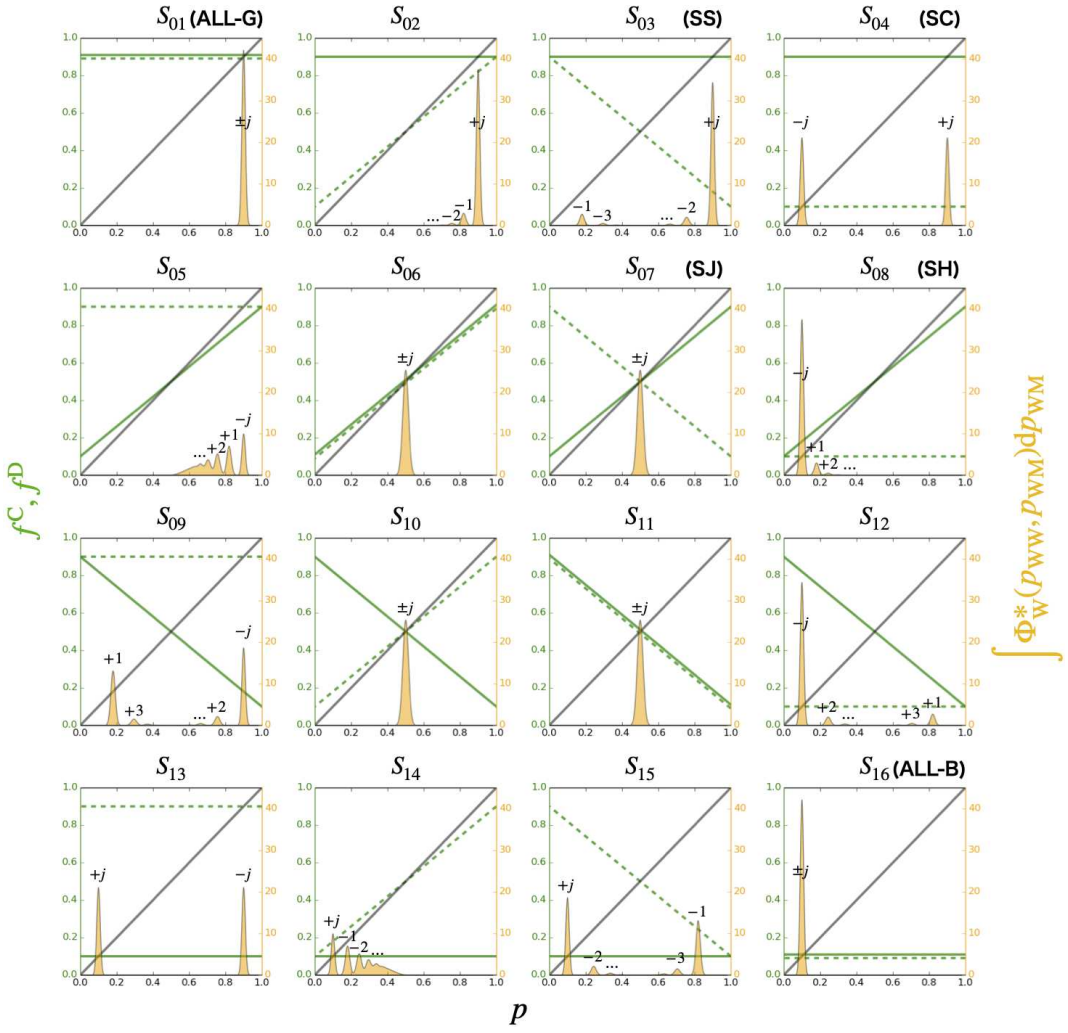

图 S 1：所有二阶规范 $\mathrm{W} = S_k$ 的声誉结构材料。绿色实线（分别为虚线）表示规范的 C映射 $f^{\mathrm{C}}_{\mathrm{W}}$（分别为 D映射 f_{DW}）。灰色线表示恒等映射，与这些映射的交点即为 C映射和 D映射的不动点。橙色分布表示 $\mathrm{W} = S_k$ 时善意度 p_{WW} 的概率密度函数。所有图板均在 $N = 2000$、$\delta = 0$ 和 $(e_1, e_2) = (0, 0.1)$ 下生成。每个峰上方的数字表示 j。

S2 声誉结构的时间演化

由于野生型和突变体的种群都足够大，我们可以将个体善意度的分布连续化，并分别考虑个体的规范为 W 或 M 的情况。下文中，$p_{AA'}$ 表示在规范为 A' 的个体眼中，规范为 A 的个体的连续化善意度。我们来考察 $p_{AA'}$ 分布随时间的变化。然而，如上所述，我们应注意到，$p_{A\mathrm{W}}$ 和 $p_{A\mathrm{M}}$ 会同时受到 C映射或 D映射的影响而发生变化。因此，我们考察 $\Phi_A(p_{A\mathrm{W}}, p_{A\mathrm{M}})$ 的动力学，它是 $p_{A\mathrm{W}}$ 和 $p_{A\mathrm{M}}$ 的联合概率分布。注意，所选接受者的规范为 M 的概率仅为 δ，因此它对 Φ_A 动力学的贡献仅在 $O(\delta)$ 的量级上。忽略这一 $O(\delta)$ 的量级后，Φ_A 的动力学为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_A(p_{A\mathrm{W}}, p_{A\mathrm{M}}) = -\Phi_A(p_{A\mathrm{W}}, p_{A\mathrm{M}}) + \int_0^1\int_0^1 \{&h(p'_{\mathrm{W}A})g(p_{A\mathrm{W}}; f_{\mathrm{W}}^{\mathrm{C}}(p'_{\mathrm{WW}}), \rho_{\mathrm{W}}^{-1}s^2)g(p_{A\mathrm{M}}; f_{\mathrm{M}}^{\mathrm{C}}(p'_{\mathrm{WM}}), \rho_{\mathrm{M}}^{-1}s^2)\\ &+ (1-h(p'_{\mathrm{W}A}))g(p_{A\mathrm{W}}; f_{\mathrm{W}}^{\mathrm{D}}(p'_{\mathrm{WW}}), \rho_{\mathrm{W}}^{-1}s^2)g(p_{A\mathrm{M}}; f_{\mathrm{M}}^{\mathrm{D}}(p'_{\mathrm{WM}}), \rho_{\mathrm{M}}^{-1}s^2)\}\\ &\times \Phi_{\mathrm{W}}(p'_{\mathrm{WW}}, p'_{\mathrm{WM}})\mathrm{d}p'_{\mathrm{WW}}\mathrm{d}p'_{\mathrm{WM}}. \end{aligned} \tag{12}$$

这里，$g(p;\mu,\sigma^2)$ 表示均值为 μ、方差为 σ^2 的高斯函数：

$$g(p;\mu,\sigma^2) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(p-\mu)^2}{2\sigma^2}\right). \tag{13}$$

方程（12）说明了给予者的善意度随时间的更新。右侧第一项（分别是第二项）表示通过更新善意度而产生的减量（增量）。具体而言，第二项中的 $\Phi_{\mathrm{W}}(p'_{\mathrm{WW}}, p'_{\mathrm{WM}})$ 表示在野生型（分别是突变体）看来，接受者的善意度为 p'_{WW}（分别是 p'_{WM}）的密度。$h(p'_{\mathrm{W}A})$ 表示给予者进行合作的概率，而给予者更新后在规范 W 和 M 的观察者看来，其善意度分别由 $g(p_{A\mathrm{W}}; f_{\mathrm{W}}^{\mathrm{C}}(p'_{\mathrm{WW}})\rho^{-1}{}_{\mathrm{W}}s^2)$ 和 $g(p_{A\mathrm{M}}; f_{\mathrm{M}}^{\mathrm{C}}(p'_{\mathrm{WM}})\rho^{-1}{}_{\mathrm{M}}s^2)$ 描述。给予者选择背叛时也有类似的解释。

方程（12）的平衡态，即 Φ_A^*，满足 s

$$\begin{aligned}\Phi_A^*(p_{A\mathrm{W}}, p_{A\mathrm{M}}) = \int_0^1\int_0^1 \{&h(p'_{\mathrm{W}A})g(p_{A\mathrm{W}}; f_{\mathrm{W}}^{\mathrm{C}}(p'_{\mathrm{WW}}), \rho_{\mathrm{W}}^{-1}s^2)g(p_{A\mathrm{M}}; f_{\mathrm{M}}^{\mathrm{C}}(p'_{\mathrm{WM}}), \rho_{\mathrm{M}}^{-1}s^2)\\ &+ (1-h(p'_{\mathrm{W}A}))g(p_{A\mathrm{W}}; f_{\mathrm{W}}^{\mathrm{D}}(p'_{\mathrm{WW}}), \rho_{\mathrm{W}}^{-1}s^2)g(p_{A\mathrm{M}}; f_{\mathrm{M}}^{\mathrm{D}}(p'_{\mathrm{WM}}), \rho_{\mathrm{M}}^{-1}s^2)\}\\ &\times \Phi_{\mathrm{W}}^*(p'_{\mathrm{WW}}, p'_{\mathrm{WM}})\mathrm{d}p'_{\mathrm{WW}}\mathrm{d}p'_{\mathrm{WM}}. \end{aligned} \tag{14}$$

为求解该方程，我们假设平衡态可以表示为若干个相互独立的二维高斯函数之和：

$$\Phi_A^*(p_{A\mathrm{W}}, p_{A\mathrm{M}}) = \sum_j q_{Aj}g(p_{A\mathrm{W}}; \mu_{A\mathrm{W}j}, \rho_{\mathrm{W}}^{-1}\sigma_{A\mathrm{W}j}^2)g(p_{A\mathrm{M}}; \mu_{A\mathrm{M}j}, \rho_{\mathrm{M}}^{-1}\sigma_{A\mathrm{M}j}^2). \tag{15}$$

高斯分布的假设由上述给予者良好度的转移过程所支持。在足够大的种群中，良好度实际上仅由均值和方差决定。我们不假设存在相关性，因为方差由持有不同规范的观察者独立给出。

现在我们推导方程 每种规范 $A \in \{\mathrm{W}, \mathrm{M}\}$ 所满足的平衡态条件。首先，将（15）代入 $A \in \{$W 的（14）式，　　）

将其代入 $A=$W 的 (14) 式中，可得

$$
\begin{aligned}
&\sum_j q_{\mathrm{W}j} g(p_{\mathrm{WW}};\mu_{\mathrm{WW}j},\rho_{\mathrm{W}}^{-1}\sigma_{\mathrm{WW}j}^2) g(p_{\mathrm{WM}};\mu_{\mathrm{WM}j},\rho_{\mathrm{M}}^{-1}\sigma_{\mathrm{WM}j}^2)\\
&=\int_0^1\int_0^1 \{h(p'_{\mathrm{WW}}) g(p_{\mathrm{WW}};f_{\mathrm{W}}^{\mathrm{C}}(p'_{\mathrm{WW}}),\rho_{\mathrm{W}}^{-1}s^2) g(p_{\mathrm{WM}};f_{\mathrm{M}}^{\mathrm{C}}(p'_{\mathrm{WM}}),\rho_{\mathrm{M}}^{-1}s^2)\\
&\qquad +(1-h(p'_{\mathrm{WW}})) g(p_{\mathrm{WW}};f_{\mathrm{W}}^{\mathrm{D}}(p'_{\mathrm{WW}}),\rho_{\mathrm{W}}^{-1}s^2) g(p_{\mathrm{WM}};f_{\mathrm{M}}^{\mathrm{D}}(p'_{\mathrm{WM}}),\rho_{\mathrm{M}}^{-1}s^2)\}\\
&\qquad \times \sum_j q_{\mathrm{W}j} g(p'_{\mathrm{WW}};\mu_{\mathrm{WW}j},\rho_{\mathrm{W}}^{-1}\sigma_{\mathrm{WW}j}^2) g(p'_{\mathrm{WM}};\mu_{\mathrm{WM}j},\rho_{\mathrm{M}}^{-1}\sigma_{\mathrm{WM}j}^2)\mathrm{d}p'_{\mathrm{WW}}\mathrm{d}p'_{\mathrm{WM}},\\
&=\sum_j q_{\mathrm{W}j}\int_0^1\int_0^1 \{h(p'_{\mathrm{WW}}) g(p_{\mathrm{WW}};f_{\mathrm{W}}^{\mathrm{C}}(p'_{\mathrm{WW}}),\rho_{\mathrm{W}}^{-1}s^2) g(p_{\mathrm{WM}};f_{\mathrm{M}}^{\mathrm{C}}(p'_{\mathrm{WM}}),\rho_{\mathrm{M}}^{-1}s^2)\\
&\qquad +(1-h(p'_{\mathrm{WW}})) g(p_{\mathrm{WW}};f_{\mathrm{W}}^{\mathrm{D}}(p'_{\mathrm{WW}}),\rho_{\mathrm{W}}^{-1}s^2) g(p_{\mathrm{WM}};f_{\mathrm{M}}^{\mathrm{D}}(p'_{\mathrm{WM}}),\rho_{\mathrm{M}}^{-1}s^2)\}\\
&\qquad \times g(p'_{\mathrm{WW}};\mu_{\mathrm{WW}j},\rho_{\mathrm{W}}^{-1}\sigma_{\mathrm{WW}j}^2) g(p'_{\mathrm{WM}};\mu_{\mathrm{WM}j},\rho_{\mathrm{M}}^{-1}\sigma_{\mathrm{WM}j}^2)\mathrm{d}p'_{\mathrm{WW}}\mathrm{d}p'_{\mathrm{WM}},\\
&\simeq\sum_j q_{\mathrm{W}j}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \{h(\mu_{\mathrm{WW}j}) g(p_{\mathrm{WW}};f_{\mathrm{W}}^{\mathrm{C}}(p'_{\mathrm{WW}}),\rho_{\mathrm{W}}^{-1}s^2) g(p_{\mathrm{WM}};f_{\mathrm{M}}^{\mathrm{C}}(p'_{\mathrm{WM}}),\rho_{\mathrm{M}}^{-1}s^2)\\
&\qquad +(1-h(\mu_{\mathrm{WW}j})) g(p_{\mathrm{WW}};f_{\mathrm{W}}^{\mathrm{D}}(p'_{\mathrm{WW}}),\rho_{\mathrm{W}}^{-1}s^2) g(p_{\mathrm{WM}};f_{\mathrm{M}}^{\mathrm{D}}(p'_{\mathrm{WM}}),\rho_{\mathrm{M}}^{-1}s^2)\}\\
&\qquad \times g(p'_{\mathrm{WW}};\mu_{\mathrm{WW}j},\rho_{\mathrm{W}}^{-1}\sigma_{\mathrm{WW}j}^2) g(p'_{\mathrm{WM}};\mu_{\mathrm{WM}j},\rho_{\mathrm{M}}^{-1}\sigma_{\mathrm{WM}j}^2)\mathrm{d}p'_{\mathrm{WW}}\mathrm{d}p'_{\mathrm{WM}},\\
&=\sum_j q_{\mathrm{W}j}\{h(\mu_{\mathrm{WW}j}) g(p_{\mathrm{WW}};f_{\mathrm{W}}^{\mathrm{C}}(\mu_{\mathrm{WW}j}),\rho_{\mathrm{W}}^{-1}(s^2+(\Delta f_{\mathrm{W}}^{\mathrm{C}})^2\sigma_{\mathrm{WW}j}^2)) g(p_{\mathrm{WM}};f_{\mathrm{M}}^{\mathrm{C}}(\mu_{\mathrm{WM}j}),\rho_{\mathrm{M}}^{-1}(s^2+(\Delta f_{\mathrm{M}}^{\mathrm{C}})^2\sigma_{\mathrm{WM}j}^2))\}\\
&\qquad +(1-h(\mu_{\mathrm{WW}j})) g(p_{\mathrm{WW}};f_{\mathrm{W}}^{\mathrm{D}}(\mu_{\mathrm{WW}j}),\rho_{\mathrm{W}}^{-1}(s^2+(\Delta f_{\mathrm{W}}^{\mathrm{D}})^2\sigma_{\mathrm{WW}j}^2)) g(p_{\mathrm{WM}};f_{\mathrm{M}}^{\mathrm{D}}(\mu_{\mathrm{WM}j}),\rho_{\mathrm{M}}^{-1}(s^2+(\Delta f_{\mathrm{M}}^{\mathrm{D}})^2\sigma_{\mathrm{WM}j}^2))\}.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

该方程给出了 $(q_{\mathrm{W}j},\mu_{\mathrm{WW}j},\sigma_{\mathrm{WW}j}^2,\mu_{\mathrm{WM}j},\sigma_{\mathrm{WM}j}^2)$ 的约束。接下来，当 $A=\mathrm{M}$ 时，以类似方式可得

$$
\begin{aligned}
&\sum_j q_{\mathrm{M}j} g(p_{\mathrm{MW}};\mu_{\mathrm{MW}j},\rho_{\mathrm{W}}^{-1}\sigma_{\mathrm{MW}j}^2) g(p_{\mathrm{MM}};\mu_{\mathrm{MM}j},\rho_{\mathrm{M}}^{-1}\sigma_{\mathrm{MM}j}^2)\\
&=\int_0^1\int_0^1 \{h(p'_{\mathrm{WM}}) g(p_{\mathrm{MW}};f_{\mathrm{W}}^{\mathrm{C}}(p'_{\mathrm{MW}}),\rho_{\mathrm{W}}^{-1}s^2) g(p_{\mathrm{MM}};f_{\mathrm{M}}^{\mathrm{C}}(p'_{\mathrm{MM}}),\rho_{\mathrm{M}}^{-1}s^2)\\
&\qquad +(1-h(p'_{\mathrm{WM}})) g(p_{\mathrm{MW}};f_{\mathrm{W}}^{\mathrm{D}}(p'_{\mathrm{MW}}),\rho_{\mathrm{W}}^{-1}s^2) g(p_{\mathrm{MM}};f_{\mathrm{M}}^{\mathrm{D}}(p'_{\mathrm{MM}}),\rho_{\mathrm{M}}^{-1}s^2)\}\\
&\qquad \times \sum_j q_{\mathrm{M}j} g(p'_{\mathrm{MW}};\mu_{\mathrm{MW}j},\rho_{\mathrm{W}}^{-1}\sigma_{\mathrm{MW}j}^2) g(p'_{\mathrm{MM}};\mu_{\mathrm{MM}j},\rho_{\mathrm{M}}^{-1}\sigma_{\mathrm{MM}j}^2)\mathrm{d}p'_{\mathrm{MW}}\mathrm{d}p'_{\mathrm{MM}}\\
&=\sum_j q_{\mathrm{M}j}\int_0^1\int_0^1 \{h(p'_{\mathrm{WM}}) g(p_{\mathrm{MW}};f_{\mathrm{W}}^{\mathrm{C}}(p'_{\mathrm{MW}}),\rho_{\mathrm{W}}^{-1}s^2) g(p_{\mathrm{MM}};f_{\mathrm{M}}^{\mathrm{C}}(p'_{\mathrm{MM}}),\rho_{\mathrm{M}}^{-1}s^2)\\
&\qquad +(1-h(p'_{\mathrm{WM}})) g(p_{\mathrm{MW}};f_{\mathrm{W}}^{\mathrm{D}}(p'_{\mathrm{MW}}),\rho_{\mathrm{W}}^{-1}s^2) g(p_{\mathrm{MM}};f_{\mathrm{M}}^{\mathrm{D}}(p'_{\mathrm{MM}}),\rho_{\mathrm{M}}^{-1}s^2)\}\\
&\qquad \times \sum_j q_{\mathrm{M}j} g(p'_{\mathrm{MW}};\mu_{\mathrm{MW}j},\rho_{\mathrm{W}}^{-1}\sigma_{\mathrm{MW}j}^2) g(p'_{\mathrm{MM}};\mu_{\mathrm{MM}j},\rho_{\mathrm{M}}^{-1}\sigma_{\mathrm{MM}j}^2)\mathrm{d}p'_{\mathrm{MW}}\mathrm{d}p'_{\mathrm{MM}}\\
&\simeq\sum_j q_{\mathrm{M}j}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \{h(\mu_{\mathrm{WM}j}) g(p_{\mathrm{MW}};f_{\mathrm{W}}^{\mathrm{C}}(p'_{\mathrm{MW}}),\rho_{\mathrm{W}}^{-1}s^2) g(p_{\mathrm{MM}};f_{\mathrm{M}}^{\mathrm{C}}(p'_{\mathrm{MM}}),\rho_{\mathrm{M}}^{-1}s^2)\\
&\qquad +(1-h(\mu_{\mathrm{WM}j})) g(p_{\mathrm{MW}};f_{\mathrm{W}}^{\mathrm{D}}(p'_{\mathrm{MW}}),\rho_{\mathrm{W}}^{-1}s^2) g(p_{\mathrm{MM}};f_{\mathrm{M}}^{\mathrm{D}}(p'_{\mathrm{MM}}),\rho_{\mathrm{M}}^{-1}s^2)\}\\
&\qquad \times \sum_j q_{\mathrm{M}j} g(p'_{\mathrm{MW}};\mu_{\mathrm{MW}j},\rho_{\mathrm{W}}^{-1}\sigma_{\mathrm{MW}j}^2) g(p'_{\mathrm{MM}};\mu_{\mathrm{MM}j},\rho_{\mathrm{M}}^{-1}\sigma_{\mathrm{MM}j}^2)\mathrm{d}p'_{\mathrm{MW}}\mathrm{d}p'_{\mathrm{MM}}\\
&=\sum_j q_{\mathrm{M}j}\{h(\mu_{\mathrm{WM}j}) g(p_{\mathrm{MW}};f_{\mathrm{W}}^{\mathrm{C}}(\mu_{\mathrm{MW}j}),\rho_{\mathrm{W}}^{-1}(s^2+(\Delta f_{\mathrm{W}}^{\mathrm{C}})^2\sigma_{\mathrm{MW}j}^2)) g(p_{\mathrm{MM}};f_{\mathrm{M}}^{\mathrm{C}}(\mu_{\mathrm{MM}j}),\rho_{\mathrm{M}}^{-1}(s^2+(\Delta f_{\mathrm{M}}^{\mathrm{C}})^2\sigma_{\mathrm{MM}j}^2))\}\\
&\qquad +(1-h(\mu_{\mathrm{WM}j})) g(p_{\mathrm{MW}};f_{\mathrm{W}}^{\mathrm{D}}(\mu_{\mathrm{MW}j}),\rho_{\mathrm{W}}^{-1}(s^2+(\Delta f_{\mathrm{W}}^{\mathrm{D}})^2\sigma_{\mathrm{MW}j}^2)) g(p_{\mathrm{MM}};f_{\mathrm{M}}^{\mathrm{D}}(\mu_{\mathrm{MM}j}),\rho_{\mathrm{M}}^{-1}(s^2+(\Delta f_{\mathrm{M}}^{\mathrm{D}})^2\sigma_{\mathrm{MM}j}^2))\}.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

这个方程给出了 $(q_{\mathrm{M}j},\mu_{\mathrm{MW}j},\sigma_{\mathrm{MW}j}^2,\mu_{\mathrm{MM}j},\sigma_{\mathrm{MM}j}^2)$ 的约束。为求解 (16)，我们考虑一个解集 $\{(\mu_{\mathrm{WW}j},\mu_{\mathrm{WM}j})\}_{j\circ}$ 根据 (16) 的均衡条件，必须对该集合中的所有元素应用 C映射和 D映射，才能恢复相等的集合。换言之，条件

由下式给出

$$\{(\mu_{\mathrm{WW}j},\mu_{\mathrm{WM}j})\}_j=\{(f_{\mathrm{W}}^{\mathrm{C}}(\mu_{\mathrm{WW}j}),f_{\mathrm{M}}^{\mathrm{C}}(\mu_{\mathrm{WM}j}))\}_j\cup\{(f_{\mathrm{W}}^{\mathrm{D}}(\mu_{\mathrm{WW}j}),f_{\mathrm{M}}^{\mathrm{D}}(\mu_{\mathrm{WM}j}))\}_j. \tag{18}$$

类似地，要得到　　式 (17) 的均衡条件，我们应考虑满足以下条件的解集 $\{(\mu_{\mathrm{MW}j},\mu_{\mathrm{MM}j})\}_j$　　g

$$\{(\mu_{\mathrm{MW}j},\mu_{\mathrm{MM}j})\}_j=\{(f_{\mathrm{W}}^{\mathrm{C}}(\mu_{\mathrm{MW}j}),f_{\mathrm{M}}^{\mathrm{C}}(\mu_{\mathrm{MM}j}))\}_j\cup\{(f_{\mathrm{W}}^{\mathrm{D}}(\mu_{\mathrm{MW}j}),f_{\mathrm{M}}^{\mathrm{D}}(\mu_{\mathrm{MM}j}))\}_j. \tag{19}$$

这里，之间管圈量的待解决的问题，但这些问题本质上介于式 (18) 和式 (19)
是

$$\{(\mu_{j,\mathrm{W}},\mu_{j,\mathrm{M}})\}_j=\{(f_{\mathrm{W}}^{\mathrm{C}}(\mu_{j,\mathrm{W}}),f_{\mathrm{M}}^{\mathrm{C}}(\mu_{j,\mathrm{M}}))\}_j\cup\{(f_{\mathrm{W}}^{\mathrm{D}}(\mu_{j,\mathrm{W}}),f_{\mathrm{M}}^{\mathrm{D}}(\mu_{j,\mathrm{M}}))\}_j. \tag{20}$$

此外，由于 $\mathrm{W},\mathrm{M}\in\mathcal{S}$，我们可以将问题推广为

$$\{(\mu_{j,S_{01}},\cdots,\mu_{j,S_{16}})\}_j=\{(f_{S_{01}}^{\mathrm{C}}(\mu_{j,S_{01}}),\cdots,f_{S_{16}}^{\mathrm{C}}(\mu_{j,S_{16}}))\}_j\cup\{(f_{S_{01}}^{\mathrm{D}}(\mu_{j,S_{01}}),\cdots,f_{S_{16}}^{\mathrm{D}}(\mu_{j,S_{16}}))\}_j. \tag{21}$$

现在，对于所有 $S_k\in\mathcal{S}$ and，让我们考虑一个满足以下条件的集合 $\{\mu_{j,S_k}\}_{j\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$

$$\mu_{+1,S_k}=f_{S_k}^{\mathrm{C}}(\mu_{-1,S_k})=f_{S_k}^{\mathrm{C}}(\mu_{-2,S_k})=\cdots, \tag{22}$$

$$\mu_{+(j+1),S_k}=f_{S_k}^{\mathrm{C}}(\mu_{+j,S_k}), \tag{23}$$

$$\mu_{-1,S_k}=f_{S_k}^{\mathrm{D}}(\mu_{+1,S_k})=f_{S_k}^{\mathrm{D}}(\mu_{+2,S_k})=\cdots, \tag{24}$$

$$\mu_{-(j+1),S_k}=f_{S_k}^{\mathrm{D}}(\mu_{-j,S_k}), \tag{25}$$

（这些方程的证明将在后文给出）。该集合 $\{\mu_{j,S_k}\}_{j\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$ 给出了问题 (21) 的一个解，因此也解决了 (16) 和 (17)。在 (22)-(25) 中，我们一致地标记每个 $\mu_{j,\ S_k}$，使得依次应用 C映射（分别为 D映射） $j(>0)$ 次后得到标记 $+j$（分别为 $-j$）（见图 1 的示意图）。下文将证明，对于所有 k，这样的 $\{\mu_{j,S_k}\}_{j\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$ 确实存在。

1. C映射和 D映射都不是常数的情况：首先，我们考虑 $\Delta f_{S_k}^{\mathrm{C}}\neq 0$ 和 $\Delta f_{S_k}^{\mathrm{D}}\neq 0$的情况。$k=06$、07、09、10 这四种规范对应于这种情况。在此情况下，C映射和 D映射具有相同的不动点（位于 $1/2$）。只有该不动点所对应的位置能在均衡时实现。事实上，如果我们对所有 $j\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$代入 $\mu_{j,\ S_k}=1/2$，则 (22)-(25) 可以同时满足，且不会产生任何矛盾。

2. 当 C映射和 D映射均为常值映射时：其次，我们考虑 $\Delta f_{S_k}^{\mathrm{C}}=0$ 和 $\Delta f_{S_k}^{\mathrm{D}}=0$的情况。 $k=01$、04、13、16这四种规范属于这种情况。由于 $f_{S_k}^{\mathrm{C}}$ 是常值映射，将该映射的映射值代入$\mu_{+j,\ S_k}$，对于所有 $j=1$、2、 $\cdots$，(22)和(23)均成立。同理，由于 $f_{S_k}^{\mathrm{D}}$ 是常值映射，将映射值代入$\mu_{-j,\ S_k}$，对于所有 $j=1$、2、 $\cdots$，(24)和(25)均成立。因此，不会产生矛盾。

3. 仅当 C映射为常值映射时：第三，我们考虑 $\Delta f_{S_k}^{\mathrm{C}}=0$和 $\Delta f_{S_k}^{\mathrm{D}}\neq 0$的情况。$k=02$、03、14、15这四种规范属于这种情况。由于 $f_{S_k}^{\mathrm{C}}$是常值映射，将该映射的映射值代入$\mu_{+j,\ S_k}$，对于所有 $j=1$、2、 $\cdots$，(22)和(23)均成立。接着，我们将$\mu_{-1,\ S_k}$定义为 D映射对所有相同值$\mu_{+1,\ S_k}=\mu_{+2,\ S_k}=\cdots$的映射值，这样(24)便成立。最后，我们依次将 D映射应用于$\mu_{-1,\ S_k}$，从而依次定义$\mu_{-2,\ S_k}$、 $\mu_{-3,\ S_k}$和$\cdots$。因此，不会产生矛盾。

4. 仅当 D映射为常值映射时：最后，我们考虑 $\Delta f_{S_k}^{\mathrm{C}}\neq 0$和 $\Delta f_{S_k}^{\mathrm{D}}=0$的情形。四种规范 $k=05$、08、09、12 对应于此情形。由于 $f_{S_k}^{\mathrm{D}}$是常值映射，将该映射的映射值代入 $\mu_{-j,\ S_k}$后，对于所有 $j=1$、2、 $\cdots$，(24)、(25) 均成立。接着，我们将 $\mu_{+1,\ S_k}$定义为 D映射对所有相同值 $\mu_{-1,\ S_k}=\mu_{-2,\ S_k}=\cdots$进行映射所得的值，此时 (24) 成立。最后，我们依次将 C映射应用于 $\mu_{+1,\ S_k}$，从而依次定义 $\mu_{+2,\ S_k}$、 $\mu_{+3,\ S_k}$、 $\cdots$。因此，不会产生矛盾。

如表2所总结，集合 $\{\mu_{j,S_k}\}_{j\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$可以用解析方式描述。此外，我们还将 $\sigma_{j,\ S_k}^2$定义为与均值 $\mu_{j,\ S_k}$对应的高斯分布的方差。与上述均值类似，我们求得方差如下：

$$(\sigma_{\mathrm{WW}j}^2,\sigma_{\mathrm{WM}j}^2)=(\sigma_{\mathrm{MW}j}^2,\sigma_{\mathrm{MM}j}^2)=(\sigma_{j,\mathrm{W}}^2,\sigma_{j,\mathrm{M}}^2). \tag{26}$$

集合 $\{\sigma_{j,S_k}^2\}_{j\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$ 应满足的递推关系为

$$\sigma_{+1,S_k}^2=s^2+(\Delta f_{S_k}^{\mathrm{C}})^2\sigma_{-1,S_k}^2=s^2+(\Delta f_{S_k}^{\mathrm{C}})^2\sigma_{-2,S_k}^2=\cdots, \tag{27}$$

$$\sigma_{+(j+1),S_k}^2=s^2+(\Delta f_{S_k}^{\mathrm{C}})^2\sigma_{+j,S_k}^2, \tag{28}$$

$$\sigma_{-1,S_k}^2=s^2+(\Delta f_{S_k}^{\mathrm{D}})^2\sigma_{+1,S_k}^2=s^2+(\Delta f_{S_k}^{\mathrm{D}})^2\sigma_{+2,S_k}^2=\cdots, \tag{29}$$

$$\sigma_{-(j+1),S_k}^2=s^2+(\Delta f_{S_k}^{\mathrm{D}})^2\sigma_{-j,S_k}^2, \tag{30}$$

S_k	$\mu_{+j,\ S_k}$	$\mu_{-j,\ S_k}$	$\sigma^2_{+j,\ S_k}$	$\sigma^2_{-j,\ S_k}$
S_{01}	$1-e_2$	$1-e_2$	$\frac{e_2\ (1-e_2)}{N}$	$\frac{e_2\ (1-e_2)}{N}$
S_{02}	$1-e_2$	$\frac{1+\ (1-2e_2)\ ^{j+1}}{2}$	$\frac{e_2(1-e_2)}{N}$	$\frac{1-\ (1-2e_2)\ ^{2(j+1)}}{4N}$
S_{03}	$1-e_2$	$\frac{1-\{-\ (1-2e_2)\ \}^{j+1}}{2}$	$\frac{e_2(1-e_2)}{N}$	$\frac{1-\ (1-2e_2)\ ^{2(j+1)}}{4N}$
S_{04}	$1-e_2$	e_2	$\frac{e_2(1-e_2)}{N}$	$\frac{e_2(1-e_2)}{N}$
S_{05}	$\frac{1+(1-2e_2)^{j+1}}{2}$	$1-e_2$	$\frac{1-\ (1-2e_2)\ ^{2(j+1)}}{4N}$	$\frac{e_2(1-e_2)}{N}$
S_{07}	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4N}$	$\frac{1}{4N}$
S_{08}	$\frac{1-(1-2e_2)^{j+1}}{2}$	e_2	$\frac{1-\ (1-2e_2)\ ^{2(j+1)}}{4N}$	$\frac{e_2(1-e_2)}{N}$
S_{09}	$\frac{1-\{-\ (1-2e_2)\ \}^{j+1}}{2}$	$1-e_2$	$\frac{1-\ (1-2e_2)\ ^{2(j+1)}}{4N}$	$\frac{e_2(1-e_2)}{N}$
S_{12}	$\frac{1+\{-\ (1-2e_2)\ \}^{j+1}}{2}$	e_2	$\frac{1-\ (1-2e_2)\ ^{2(j+1)}}{4N}$	$\frac{e_2(1-e_2)}{N}$
S_{13}	e_2	$1-e_2$	$\frac{e_2(1-e_2)}{N}$	$\frac{e_2(1-e_2)}{N}$
S_{14}	e_2	$\frac{1-\ (1-2e_2)\ ^{j+1}}{2}$	$\frac{e_2(1-e_2)}{N}$	$\frac{1-\ (1-2e_2)\ ^{2(j+1)}}{4N}$
S_{15}	e_2	$\frac{1+\{-\ (1-2e_2)\ \}^{j+1}}{2}$	$\frac{e_2(1-e_2)}{N}$	$\frac{1-\ (1-2e_2)\ ^{2(j+1)}}{4N}$
S_{16}	e_2	e_2	$\frac{e_2(1-e_2)}{N}$	$\frac{e_2(1-e_2)}{N}$

表2：高斯函数的解析解。由于结果与 S_{07}（补充信息）相同，因此省略 S_{06}、 S_{10} 和 S_{11} 。

且该解存在 对所有 S_k（这些方程的解见表2）。表2显示 $\{(\mu_{j,\ S_k}, \sigma^2_{j,\ S_k})\}_{j\in\mathbb{Z}\setminus\{0}$ }.

我们还计算了一组高斯函数的质量，即 $\{q_{\mathrm{W}j}\}_{j\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$ 和 $\{q_{\mathrm{M}j}\}_{j\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$。将表2中的值代入（16），得到以下关系式

$$q_{\mathrm{W}+1} = \sum_{j=1}^{\infty} h(\mu_{-j,\mathrm{W}}) q_{\mathrm{W}-j}, \tag{31}$$

$$q_{\mathrm{W}+j} = h(\mu_{+(j-1),\mathrm{W}}) q_{\mathrm{W}+(j-1)} \quad (j = 2, \cdots, \infty), \tag{32}$$

$$q_{\mathrm{W}-1} = \sum_{j=1}^{\infty} (1 - h(\mu_{+j,\mathrm{W}})) q_{\mathrm{W}+j}, \tag{33}$$

$$q_{\mathrm{W}-j} = (1 - h(\mu_{-(j-1),\mathrm{W}})) q_{\mathrm{W}-(j-1)} \quad (j = 2, \cdots, \infty). \tag{34}$$

类似地，将表2中的值代入（17），得到

$$q_{\mathrm{M}+1} = \sum_{j=1}^{\infty} h(\mu_{-j,\mathrm{M}}) q_{\mathrm{W}-j}, \tag{35}$$

$$q_{\mathrm{M}+j} = h(\mu_{+(j-1),\mathrm{M}}) q_{\mathrm{W}+(j-1)} \quad (j = 2, \cdots, \infty), \tag{36}$$

$$q_{\mathrm{M}-1} = \sum_{j=1}^{\infty} (1 - h(\mu_{+j,\mathrm{M}})) q_{\mathrm{W}+j}, \tag{37}$$

$$q_{\mathrm{M}-j} = (1 - h(\mu_{-(j-1),\mathrm{M}})) q_{\mathrm{W}-(j-1)} \quad (j = 2, \cdots, \infty). \tag{38}$$

（31）—（38）包含无穷求和。由于这些无穷求和无法解析计算，因此在对（31）—（38）进行数值计算时，应对求和设置截断。

主文稿中的图2-B展示了 $\Phi^*_{\mathrm{W}}(p_{\mathrm{WW}}, p_{\mathrm{WM}})$的一个示例。在此示例中，$\{(\mu_{j,\ \mathrm{W}}, \mu_{j,\ \mathrm{M}})\}_{j\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$ 中的元素对于不同的 j 均各不相同，因此本研究中的标记对于描述声誉结构至少是必要的。该图还表明，所得解析解能够很好地近似形象矩阵的模拟结果。

S3 期望收益的计算

为了考察进化过程，我们根据善意度的联合概率分布（即 Φ^*_{W} 和 Φ^*_{M}），推导野生型 W 和突变体 M 的期望收益。在突变体罕见的极限情况下 $\delta \to 0$，野生型 u_{W} 和突变体 u_{M} 的期望收益为

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{W}} &= (b - c)\bar{p}_{\mathrm{WW}}, \\ u_{\mathrm{M}} &= b\bar{p}_{\mathrm{MW}} - c\bar{p}_{\mathrm{WM}}, \end{aligned} \tag{39}$$

这里，$\bar{p}_{AA'}$ 表示 p_{AA}的平均优度，即可描述为

$$\begin{aligned} \bar{p}_{\mathrm{WW}} &= \int_0^1 \int_0^1 p_{\mathrm{WW}} \Phi^*_{\mathrm{W}}(p_{\mathrm{WW}}, p_{\mathrm{WM}}) \mathrm{d}p_{\mathrm{WW}} \mathrm{d}p_{\mathrm{WM}}, \\ \bar{p}_{\mathrm{WM}} &= \int_0^1 \int_0^1 p_{\mathrm{WM}} \Phi^*_{\mathrm{W}}(p_{\mathrm{WW}}, p_{\mathrm{WM}}) \mathrm{d}p_{\mathrm{WW}} \mathrm{d}p_{\mathrm{WM}}, \\ \bar{p}_{\mathrm{MW}} &= \int_0^1 \int_0^1 p_{\mathrm{MW}} \Phi^*_{\mathrm{M}}(p_{\mathrm{MW}}, p_{\mathrm{MM}}) \mathrm{d}p_{\mathrm{MW}} \mathrm{d}p_{\mathrm{MM}}, \end{aligned} \tag{40}$$

这一平均优度可通过对 Φ^*_A（$p_{A\mathrm{W}}$，$p_{A\mathrm{M}}$）进行高斯近似来解析计算。根据进化稳定策略的条件，当 $u_{\mathrm{W}} > u_{\mathrm{M}}$时，突变体能够入侵野生型种群。

突变规范能够入侵野生型规范的区域如图2所示。从该图中，我们可以得到给定 b/c时的入侵能力，如主文稿中的图3-A所示。

wild-type \ mutant	01	02	03	04	05	07	08	09	12	13	14	15	16
01		always	always	always	always	always	always	always	always	always	always	always	always
02	> 5.964		< 6.811	< 6.434	< 13.13	< 11.58	< 10.99	< 12.92	< 10.63	< 12.71	< 11.58	< 12.28	< 11.44
03	> 4.376	> 6.352		< 1.920	never	< 1.306	< 1.441	< 1.134	< 1.457	< 1.261	< 1.402	< 1.306	< 1.424
04	> 1.250	> 1.250	> 1.250		> 1.250		< 1.250	> 1.250	< 1.250		< 1.250	< 1.250	< 1.250
05	never	never	never	< 2.789		always	always	always	always	always	always	always	always
07	never	never	never		never		always	never	always		always	always	always
08	> 11.44	> 10.99	> 10.63	> 6.434	> 11.58	> 11.58		> 12.28	> 6.811	> 12.71	> 13.13	> 12.92	< 5.964
09	never	never	always	always	never	always	always		always	always	always	always	always
12	> 1.424	> 1.441	> 1.457	> 1.920	> 1.402	> 1.306	< 6.352	> 1.306		> 1.261	always	> 1.134	< 4.376
13	never	never	never		never		always	never	always		always	always	always
14	never	never	never	> 2.789	never	never	always	never	always	never		never	always
15	never	never	never	never	never	never	always	never	never	never	always		always
16	never	never	never	never	never	never	never	never	never	never	never	never	

图 S 2：进化过程中的可能入侵区域。行和列分别表示野生型规范和突变规范。矩阵显示突变体入侵野生型的 b/c（> 1）区域。对于某些野生型规范与突变规范组合，无论 b/c（> 1）为何，突变体总能或始终无法成功入侵野生型。计算基于 $e_1 = 0$ 和 $e_2 = 0.1$。

S4　公共声誉中的均衡状态计算

本节基于先前的研究 [28]，推导公共评估下的声誉均衡分布。无论声誉是公开共享还是私人持有，基本设定都相同。我们假设种群规模为 N，其中包含遵循规范 M 的突变体和遵循规范 W 的野生型个体 $\neq$ M。每回合随机选出一名给予者和一名接受者。给予者会对好接受者选择合作，对坏接受者选择背叛。在此，给予者以概率 $0 \leq e_1 < 1/2$ 错误地选择与其原本意图相反的行为。随后，所有个体都会更新对给予者的声誉。公开声誉和私人声誉情形的区别在于观察者更新声誉的方式。我们假设每种规范各选一名突变体观察者和一名野生型观察者作为代表，各自根据其规范给予者良好或不良的声誉。在此，每名代表观察者都会独立地犯下赋值错误，即以概率 $0 < e_2 < 1/2$ 错误地赋予与其原本意图相反的声誉。（ [28] 中未假设存在这种评估错误。）随后，所有遵循相同规范的个体都会复制其代表赋予给予者的声誉。因此，即使某个个体的声誉被错误赋予，所有遵循相同规范的个体也会共享这一声誉。换言之，在任意给定时刻，每个个体都有两种声誉：一种由所有突变体个体共享，另一种由种群中的所有野生型个体共享。

这里我们具体考虑这样一种情形：遵循规范 M $= S_{16}$(ALLB) 的少数突变体入侵遵循规范 W $\neq$M 的野生型种群。我们采用相同的定义来描述 $p_{AA'}$，即在遵循规范 A 的个体看来，遵循规范 A' 的使用者所赋予个体的良好度。由于声誉是公开的，$p_{AA'}$只能是 1（所有人都将该个体评为好）或 0（所有人都将该个体评为坏）。下面我们将推导 $\bar{p}_{AA'}$，即在遵循规范 A' 的使用者看来，遵循规范 A 的使用者拥有良好声誉的概率。

由于突变规范是 ALLB，突变体给予者良好声誉的概率始终为 $a_{\mathrm{M}}^{\mathrm{GC}} = a_{\mathrm{M}}^{\mathrm{BC}} = a_{\mathrm{M}}^{\mathrm{GD}} = a_{\mathrm{M}}^{\mathrm{BD}} = e_2$。因此我们得到 $\bar{p}_{\mathrm{WM}} = \bar{p}_{\mathrm{MM}} = e_2$。

接下来，我们要计算野生型看来，$\bar{p}_{\mathrm{WW}}$ 和 $\bar{p}_{\mathrm{MW}}$ 的均衡平均良好度。首先，计算 $\bar{p}_{\mathrm{WW}}$；当给予者和观察者都遵循规范 W 时，这一量与情形相关。请注意，由于突变体很少，我们可以假设接受者遵循规范 W。 $\bar{p}_{\mathrm{WW}}$ 应满足

$$\bar{p}_{\mathrm{WW}} = \bar{p}_{\mathrm{WW}}\{(1-e_1)a_{\mathrm{W}}^{\mathrm{GC}} + e_1 a_{\mathrm{W}}^{\mathrm{GD}}\} + (1-\bar{p}_{\mathrm{WW}})\{e_1 a_{\mathrm{W}}^{\mathrm{BC}} + (1-e_1)a_{\mathrm{W}}^{\mathrm{BD}}\}, \tag{41}$$

等式左右两侧相等，说明在更新所选给予者的声誉前后，良好个体的比例保持平衡。在右侧，第一项和第二项中的 $\bar{p}_{\mathrm{WW}}$ 和 $1-\bar{p}_{\mathrm{WW}}$ 分别表示：从规范 W 的视角来看，随机选取的规范 W 的接受者是好人或坏人的概率。当接受者是好人时，给予者以 $(1-e_1)$ 和 e_1 的概率选择合作或背叛。接着，$a_{\mathrm{W}}^{\mathrm{GC}}$和 $a_{\mathrm{W}}^{\mathrm{GD}}$表示合作或背叛的给予者获得规范 W 的观察者赋予的良好声誉的概率。当接受者是坏人时，给予者以 e_1 和 $(1-e_1)$ 的概率选择合作或背叛。接着，$a_{\mathrm{W}}^{\mathrm{BC}}$和 $a_{\mathrm{W}}^{\mathrm{BD}}$表示合作或背叛的给予者获得规范 W 的观察者赋予的良好声誉的概率。解为

$$\bar{p}_{\mathrm{WW}} = \frac{(1-e_1)a_{\mathrm{W}}^{\mathrm{BD}} + e_1 a_{\mathrm{W}}^{\mathrm{BC}}}{1-\{(1-e_1)(a_{\mathrm{W}}^{\mathrm{GC}} - a_{\mathrm{W}}^{\mathrm{BD}}) + e_1(a_{\mathrm{W}}^{\mathrm{GD}} - a_{\mathrm{W}}^{\mathrm{BC}})\}}. \tag{42}$$

其次，计算 $\bar{p}_{\mathrm{MW}}$，它与给予者采用规范 M、观察者采用规范 W 的情形有关。注意，由于突变体很少，我们再次可以假设接受者采用规范 W。 $\bar{p}_{\mathrm{MW}}$ 应满足

$$\bar{p}_{\mathrm{MW}} = \bar{p}_{\mathrm{WW}}\{h(e_2)a_{\mathrm{W}}^{\mathrm{GC}} + (1-h(e_2))a_{\mathrm{W}}^{\mathrm{GD}}\} + (1-\bar{p}_{\mathrm{WW}})\{h(e_2)a_{\mathrm{W}}^{\mathrm{BC}} + (1-h(e_2))a_{\mathrm{W}}^{\mathrm{BD}}\}. \tag{43}$$

这里，右侧第一项和第二项中的 $\bar{p}_{\mathrm{WW}}$ 和$(1-\bar{p}_{\mathrm{WW}})$分别表示从规范 W 的角度看，接受者为好人的概率。在两项中，$h(e_2)(= e_2(1-e_1)+(1-e_2)e_1)$和$1-h(e_2)$表示规范 M 下的给予者实施合作或背叛的概率，该概率与从规范 W 的角度看接受者是好人还是坏人无关。第一项中的 $a_{\mathrm{W}}^{\mathrm{GC}}$和 $a_{\mathrm{W}}^{\mathrm{GD}}$表示合作的给予者和背叛的给予者分别获得规范 W 的观察者良好声誉的概率。第二项中的 $a_{\mathrm{W}}^{\mathrm{BC}}$和 $a_{\mathrm{W}}^{\mathrm{BD}}$表示合作的给予者和背叛的给予者分别获得规范 W 的观察者良好声誉的概率。

我们在表3中总结了解 $\bar{p}_{\mathrm{WW}}$ 和 $\bar{p}_{\mathrm{MW}}$。

$\bar{p}_{\mathrm{VW}}\vert_{e_1=0}$	$\bar{p}_{\mathrm{MW}}\vert_{e_1=0}$
$1-e_2$	$1-e_2$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e_2-e_2^2$
$1-e_2$	$3e_2-5e_2^2+2e_2^3$
$\frac{1}{2}$	$2e_2-2e_2^2$
$1-e_2$	$1-e_2-e_2^2+2e_2^3$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$1-e_2$	$3e_2-6e_2^2+4e_2^3$
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}e_2-e_2^2$
$\frac{1}{2}$	$1-\frac{3}{2}e_2+e_2^2$
e_2	$3e_2-6e_2^2+4e_2^3$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
e_2	$2e_2-3e_2^2+2e_2^3$
$\frac{1}{2}$	$1-2e_2+2e_2^2$
e_2	$2e_2-3e_2^2+2e_2^3$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e_2+e_2^2$
e_2	e_2

, $>$ or $<$) signs show the

根据表3，我们可以看到公共声誉与私人声誉情形下的声誉结构有何不同。规范 S_{03}(SS) 和 S_{07}(SJ) 的声誉结构见主文稿中的图3-D和E，而 S_{08}(SH) 的声誉结构见图3。

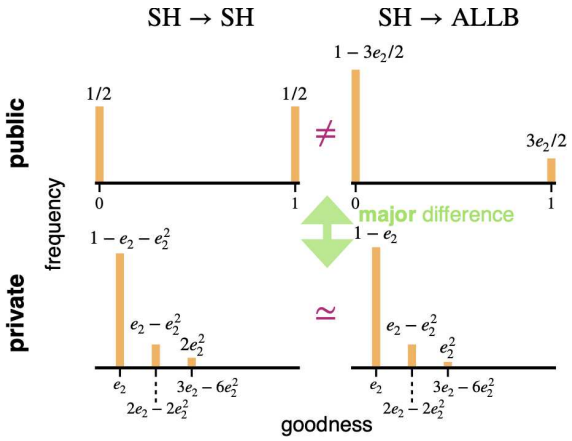

图 S 3：野生型SH如何为自身规范和突变型ALLB规范赋予声誉的示意图。每个图板中，横轴和纵轴分别表示良好度及其频率。柱形的位置和高度仅在 e_2^2 阶上准确。比较上方图板与下方图板可见，SH赋予的声誉在公共声誉和私人声誉情形下存在显著差异。在私人声誉情形下，SH仍能区分自身规范与ALLB，但差异仅为 e_2^2 阶。

S5 数值算法与误差估计

本节介绍如何以足够高的精度计算 (31)-(34) 和 (35)-(38)。我们不计算 (31)-(34)，而是要计算

$$Q_{\mathrm{W}+1} := 1, \tag{44}$$
$$Q_{\mathrm{W}+j} := h(\mu_{+(j-1),\mathrm{W}})Q_{\mathrm{W}+(j-1)} \quad (j = 2, \cdots, \infty), \tag{45}$$
$$Q_{\mathrm{W}-1} := \sum_{j=1}^{\infty}(1 - h(\mu_{+j,\mathrm{W}}))Q_{\mathrm{W}+j}, \tag{46}$$
$$Q_{\mathrm{W}-j} := (1 - h(\mu_{-(j-1),\mathrm{W}}))Q_{\mathrm{W}-(j-1)} \quad (j = 2, \cdots, \infty), \tag{47}$$

（该计算过程的示意图见图 4）。通过这些方程，我们通过将 $Q_{\mathrm{W}j}$ 重新缩放为 $q_{\mathrm{W}j}$，得到

$$q_{\mathrm{W}j} = \frac{Q_{\mathrm{W}j}}{\sum_{k=\pm1}^{\pm\infty} Q_{\mathrm{W}k}}, \tag{48}$$

其满足（31）—（34）。我们还应得到平均优度

$$\bar{p}_{\mathrm{W}A} = \frac{\sum_{j=\pm1}^{\pm\infty} Q_{\mathrm{W}j}\mu_{j,A}}{\sum_{j=\pm1}^{\pm\infty} Q_{\mathrm{W}j}}, \tag{49}$$

以获得图2。

在实际的计算机模拟中，我们将（44）—（47）近似为

$$\hat{Q}_{\mathrm{W}+1} := 1, \tag{50}$$
$$\hat{Q}_{\mathrm{W}+j} := h(\mu_{+(j-1),\mathrm{W}})\hat{Q}_{\mathrm{W}+(j-1)} \quad (j = 2, \cdots, j_{\max}), \tag{51}$$
$$\hat{Q}_{\mathrm{W}+j} := 0 \quad (j = j_{\max} + 1, \cdots, \infty), \tag{52}$$
$$\hat{Q}_{\mathrm{W}-1} := \sum_{j=1}^{\infty}(1 - h(\mu_{+j,\mathrm{W}}))\hat{Q}_{\mathrm{W}+j} = \sum_{j=1}^{j_{\max}}(1 - h(\mu_{+j,\mathrm{W}}))\hat{Q}_{\mathrm{W}+j}, \tag{53}$$
$$\hat{Q}_{\mathrm{W}-j} := (1 - h(\mu_{-(j-1),\mathrm{W}}))\hat{Q}_{\mathrm{W}-(j-1)} \quad (j = 2, \cdots, j_{\max}), \tag{54}$$
$$\hat{Q}_{\mathrm{W}-j} := 0 \quad (j = j_{\max} + 1, \cdots, \infty), \tag{55}$$

当 $j_{\max}(= 10^4)$ 足够大时（该计算的示意见图 4）。下文将说明，通过计算得到的 $\hat{} Q_{\mathrm{W}j}$ 能很好地近似 $Q_{\mathrm{W}j}$。请注意，在以下计算中，我们利用了这一事实：

$$e_2 \le \mu_{j,A} \le 1 - e_2 \tag{56}$$

对于所有 $j = \pm1$、$\cdots$、$\pm\infty$ 和 A，均成立。

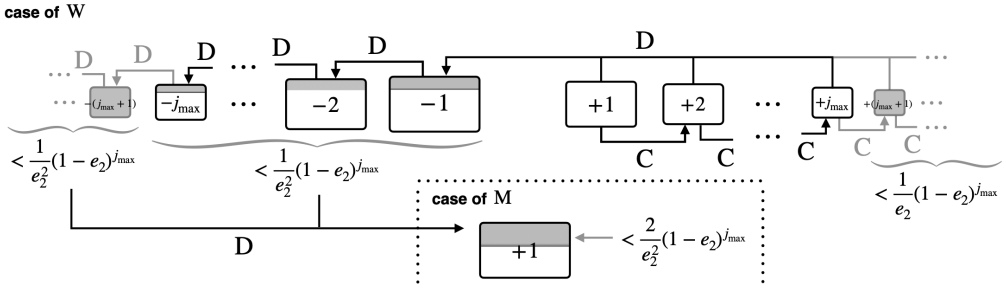

图 S 4：数值算法及质量误差估计示意图。黑色和灰色箭头展示了式 (44)–(47) 的理论计算过程，而在式 (50)–(55) 的计算中，只有黑色箭头相关。每个方框表示 $Q_{\mathrm{W}j}$ 的大小。每个方框中的灰色部分表示近似误差 $\hat{}$ 的大小，即 $Q_{\mathrm{W}j} - Q_{\mathrm{W}j}$。除 $Q_{\mathrm{W}j}$ 外，点线围成的区域表示 $Q_{\mathrm{M}+1}$ 的计算。

根据定义，我们得到

$$Q_{\mathrm{W}+j} - \hat{Q}_{\mathrm{W}+j} = 0 \quad (j = 1, \cdots, j_{\max}). \tag{57}$$

于是，我们得到

$$Q_{\mathrm{W}+j} = Q_{\mathrm{W}+1} \prod_{k=1}^{j-1} \mu_{+k,\mathrm{W}} \leq (1-e_2)^{j-1}, \tag{58}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=j_{\max}+1}^{\infty} (Q_{\mathrm{W}+j} - \hat{Q}_{\mathrm{W}+j}) = \sum_{j=j_{\max}+1}^{\infty} Q_{\mathrm{W}+j} \leq \sum_{j=j_{\max}+1}^{\infty} (1-e_2)^{j-1} = \frac{1}{e_2}(1-e_2)^{j_{\max}}. \tag{59}$$

于是，我们有

$$Q_{\mathrm{W}-1} = \sum_{j=1}^{\infty} Q_{\mathrm{W}+j}(1-\mu_{+j,\mathrm{W}}) = \underbrace{\sum_{j=1}^{j_{\max}} Q_{\mathrm{W}+j}(1-\mu_{+j,\mathrm{W}})}_{=\hat{Q}_{\mathrm{W}-1}} + \sum_{j=j_{\max}+1}^{\infty} Q_{\mathrm{W}+j}(1-\mu_{+j,\mathrm{W}}) \leq \hat{Q}_{\mathrm{W}-1} + \frac{1}{e_2}(1-e_2)^{j_{\max}}, \tag{60}$$

$$\Rightarrow Q_{\mathrm{W}-j} = Q_{\mathrm{W}-1} \prod_{k=1}^{j-1}(1-\mu_{-k,\mathrm{W}}) = \underbrace{\hat{Q}_{\mathrm{W}-1} \prod_{k=1}^{j-1}(1-\mu_{-k,\mathrm{W}})}_{=\hat{Q}_{\mathrm{W}-j}} + (Q_{\mathrm{W}-1} - \hat{Q}_{\mathrm{W}-1}) \prod_{k=1}^{j-1}(1-\mu_{-k,\mathrm{W}}) \leq \hat{Q}_{\mathrm{W}-j} + \frac{1}{e_2}(1-e_2)^{j_{\max}+j-1}, \tag{61}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{j_{\max}} (Q_{\mathrm{W}-j} - \hat{Q}_{\mathrm{W}-j}) \leq \frac{1}{e_2^2}(1-e_2)^{j_{\max}}, \tag{62}$$

我们还得到

$$Q_{\mathrm{W}-1} = \sum_{j=1}^{\infty} Q_{\mathrm{W}+j}(1-\mu_{+j,\mathrm{W}}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} Q_{\mathrm{W}+j} \leq \frac{1}{e_2}, \tag{63}$$

$$\Rightarrow Q_{\mathrm{W}-j} = Q_{\mathrm{W}-1} \prod_{k=1}^{j-1}(1-\mu_{-k,\mathrm{W}}) \leq \frac{1}{e_2}(1-e_2)^{j-1}, \tag{64}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=j_{\max}+1}^{\infty} (Q_{\mathrm{W}-j} - \hat{Q}_{\mathrm{W}-j}) = \sum_{j=j_{\max}+1}^{\infty} Q_{\mathrm{W}-j} \leq \sum_{j=j_{\max}+1}^{\infty} \frac{1}{e_2}(1-e_2)^{j-1} = \frac{1}{e_2^2}(1-e_2)^{j_{\max}}. \tag{65}$$

根据上述误差估计，我们可以得到式（48）和（49）的上下界:

$$\frac{\hat{Q}_{\mathrm{W}j}}{\sum_{j=\pm 1}^{\pm j_{\max}} \hat{Q}_{\mathrm{W}j} + \frac{3}{e_2^2}(1-e_2)^{j_{\max}}} \leq q_{\mathrm{W}j} \leq \frac{\hat{Q}_{\mathrm{W}j} + \frac{1}{e_2}(1-e_2)^{j_{\max}}}{\sum_{j=\pm 1}^{\pm j_{\max}} \hat{Q}_{\mathrm{W}j}}. \tag{66}$$

$$\frac{\sum_{j=\pm 1}^{\pm j_{\max}} \hat{Q}_{\mathrm{W}j}\mu_{j,A}}{\sum_{j=\pm 1}^{\pm j_{\max}} \hat{Q}_{\mathrm{W}j} + \frac{3}{e_2^2}(1-e_2)^{j_{\max}}} \leq \bar{p}_{\mathrm{W}A} \leq \frac{\sum_{j=\pm 1}^{\pm j_{\max}} \hat{Q}_{\mathrm{W}j}\mu_{j,A} + \frac{3}{e_2^2}(1-e_2)^{j_{\max}}}{\sum_{j=\pm 1}^{\pm j_{\max}} \hat{Q}_{\mathrm{W}j}}. \tag{67}$$

这里，我们使用了

$$\hat{Q}_{\mathrm{W}j} \le Q_{\mathrm{W}j} = \hat{Q}_{\mathrm{W}j} + (Q_{\mathrm{W}j} - \hat{Q}_{\mathrm{W}j}) \tag{68}$$

$$\le \hat{Q}_{\mathrm{W}j} + \underbrace{\max_j (Q_{\mathrm{W}j} - \hat{Q}_{\mathrm{W}j})}_{=Q_{\mathrm{W}-1}-\hat{Q}_{\mathrm{W}-1} \le \frac{1}{e_2}(1-e_2)^{j_{\max}}} \le \hat{Q}_{\mathrm{W}j} + \frac{1}{e_2}(1-e_2)^{j_{\max}}, \tag{69}$$

$$\sum_{j=\pm 1}^{\pm j_{\max}} \hat{Q}_{\mathrm{W}j} \le \sum_{j=\pm 1}^{\pm \infty} Q_{\mathrm{W}j} = \sum_{j=\pm 1}^{\pm j_{\max}} \hat{Q}_{\mathrm{W}j} + \sum_{j=\pm 1}^{\pm \infty} (Q_{\mathrm{W}j} - \hat{Q}_{\mathrm{W}j}) \tag{70}$$

$$= \sum_{j=\pm 1}^{\pm j_{\max}} \hat{Q}_{\mathrm{W}j} + \underbrace{\sum_{j=1}^{j_{\max}+1} (Q_{\mathrm{W}j} - \hat{Q}_{\mathrm{W}-j})}_{\le \frac{1}{e_2^2}(1-e_2)^{j_{\max}}} + \underbrace{\sum_{j=j_{\max}+1}^{\infty} (Q_{\mathrm{W}+j} - \hat{Q}_{\mathrm{W}+j})}_{\le \frac{1}{e_2}(1-e_2)^{j_{\max}}} + \underbrace{\sum_{j=j_{\max}+1}^{\infty} (Q_{\mathrm{W}-j} - \hat{Q}_{\mathrm{W}-j})}_{\le \frac{1}{e_2^2}(1-e_2)^{j_{\max}}} \tag{71}$$

$$\le \sum_{j=\pm 1}^{\pm j_{\max}} \hat{Q}_{\mathrm{W}j} + \frac{3}{e_2^2}(1-e_2)^{j_{\max}}, \tag{72}$$

$$\sum_{j=\pm 1}^{\pm j_{\max}} \hat{Q}_{\mathrm{W}j}\mu_{j,A} \le \sum_{j=\pm 1}^{\pm \infty} Q_{\mathrm{W}j}\mu_{j,A} \le \sum_{j=\pm 1}^{\pm j_{\max}} \hat{Q}_{\mathrm{W}j}\mu_{j,A} + \sum_{j=\pm 1}^{\pm \infty} (Q_{\mathrm{W}j} - \hat{Q}_{\mathrm{W}j}) \tag{73}$$

$$\le \sum_{j=\pm 1}^{\pm j_{\max}} \hat{Q}_{\mathrm{W}j}\mu_{j,A} + \frac{3}{e_2^2}(1-e_2)^{j_{\max}}. \tag{74}$$

同样地，考虑（35）—（38）并计算

$$Q_{\mathrm{M}+1} := \sum_{j=1}^{\infty} h(\mu_{-j,\mathrm{M}}) Q_{\mathrm{W}-j}, \tag{75}$$

$$Q_{\mathrm{M}+j} := h(\mu_{+(j-1),\mathrm{M}}) Q_{\mathrm{W}+(j-1)} \quad (j = 2, \cdots, \infty), \tag{76}$$

$$Q_{\mathrm{M}-1} := \sum_{j=1}^{\infty} (1 - h(\mu_{+j,\mathrm{M}})) Q_{\mathrm{W}+j}, \tag{77}$$

$$Q_{\mathrm{M}-j} := (1 - h(\mu_{-(j-1),\mathrm{M}})) Q_{\mathrm{W}-(j-1)} \quad (j = 2, \cdots, \infty). \tag{78}$$

通过这些方程，我们通过将 $Q_{\mathrm{M}j}$ 重新缩放为 $q_{\mathrm{W}j}$，得到

$$q_{\mathrm{M}j} = \frac{Q_{\mathrm{M}j}}{\sum_{k=\pm 1}^{\pm \infty} Q_{\mathrm{M}k}}, \tag{79}$$

其满足（35）—（38）。我们还需要获得平均优度

$$\bar{p}_{\mathrm{M}A} = \frac{\sum_{j=\pm 1}^{\pm \infty} Q_{\mathrm{M}j}\mu_{j,A}}{\sum_{j=\pm 1}^{\pm \infty} Q_{\mathrm{M}j}}, \tag{80}$$

以便得到图2。

在实际的计算机模拟中，我们将（75）—（78）近似为

$$\hat{Q}_{\mathrm{M}+1} := \sum_{j=1}^{\infty} h(\mu_{-j,\mathrm{M}}) \hat{Q}_{\mathrm{W}-j} = \sum_{j=1}^{j_{\max}} h(\mu_{-j,\mathrm{M}}) \hat{Q}_{\mathrm{W}-j}, \tag{81}$$

$$\hat{Q}_{\mathrm{M}+j} := h(\mu_{+(j-1),\mathrm{M}}) \hat{Q}_{\mathrm{W}+(j-1)} \quad (j = 2, \cdots, j_{\max}), \tag{82}$$

$$\hat{Q}_{\mathrm{M}+j} := 0 \quad (j = j_{\max}+1, \cdots, \infty), \tag{83}$$

$$\hat{Q}_{\mathrm{M}-1} := \sum_{j=1}^{\infty} (1 - h(\mu_{+j,\mathrm{M}})) \hat{Q}_{\mathrm{W}+j} = \sum_{j=1}^{j_{\max}} (1 - h(\mu_{+j,\mathrm{M}})) \hat{Q}_{\mathrm{W}+j}, \tag{84}$$

$$\hat{Q}_{\mathrm{M}-j} := (1 - h(\mu_{-(j-1),\mathrm{M}})) \hat{Q}_{\mathrm{W}-(j-1)} \quad (j = 2, \cdots, j_{\max}), \tag{85}$$

$$\hat{Q}_{\mathrm{M}-j} := 0 \quad (j = j_{\max}+1, \cdots, \infty), \tag{86}$$

其中 $j_{\max}(=10^4)$ 足够大。

通过完全相同的计算，我们得到

$$Q_{\mathrm{M}+j} - \hat{Q}_{\mathrm{M}+j} = 0 \quad (j = 2, \cdots, j_{\max}), \tag{87}$$

$$\sum_{j=j_{\max}+1}^{\infty} (Q_{\mathrm{M}+j} - \hat{Q}_{\mathrm{M}+j}) \le \frac{1}{e_2}(1-e_2)^{j_{\max}}, \tag{88}$$

$$\sum_{j=1}^{j_{\max}} (Q_{\mathrm{M}-j} - \hat{Q}_{\mathrm{M}-j}) \le \frac{1}{e_2^2}(1-e_2)^{j_{\max}}, \tag{89}$$

$$\sum_{j=j_{\max}+1}^{\infty} (Q_{\mathrm{M}-j} - \hat{Q}_{\mathrm{M}-j}) \le \frac{1}{e_2^2}(1-e_2)^{j_{\max}}. \tag{90}$$

与 $Q_{\mathrm{W}j}$ 的差异仅存在于 $j=+1$中，因为

$$Q_{\mathrm{M}+1} = \sum_{j=1}^{\infty} Q_{\mathrm{W}-j}\mu_{-j,\mathrm{M}} = \underbrace{\sum_{j=1}^{j_{\max}} \hat{Q}_{\mathrm{W}-j}\mu_{-j,\mathrm{M}}}_{=\hat{q}_{\mathrm{M}+1}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{j_{\max}} (Q_{\mathrm{W}-j} - \hat{Q}_{\mathrm{W}-j})\mu_{-j,\mathrm{M}}}_{\le \frac{1}{e_2^2}(1-e_2)^{j_{\max}}} + \underbrace{\sum_{j=j_{\max}+1}^{\infty} \hat{Q}_{\mathrm{W}-j}\mu_{-j,\mathrm{M}}}_{\le \frac{1}{e_2^2}(1-e_2)^{j_{\max}}} \tag{91}$$

$$\le \hat{Q}_{\mathrm{M}+1} + \frac{2}{e_2^2}(1-e_2)^{j_{\max}}, \tag{92}$$

（有关该计算的示意，请参见图 4 中点状线所围成的区域）。

F根据上述误差估计，我们可以得到（79）和（80）的上下界 a s

$$\frac{\hat{Q}_{\mathrm{M}j}}{\sum_{j=\pm1}^{\pm j_{\max}} \hat{Q}_{\mathrm{M}j} + \frac{5}{e_2^2}(1-e_2)^{j_{\max}}} \le q_{\mathrm{M}j} \le \frac{\hat{Q}_{\mathrm{M}j} + \frac{2}{e_2^2}(1-e_2)^{j_{\max}}}{\sum_{j=\pm1}^{\pm j_{\max}} \hat{Q}_{\mathrm{M}j}}, \tag{93}$$

$$\frac{\sum_{j=\pm1}^{\pm j_{\max}} \hat{Q}_{\mathrm{M}j}\mu_{j,A}}{\sum_{j=\pm1}^{\pm j_{\max}} \hat{Q}_{\mathrm{M}j} + \frac{5}{e_2^2}(1-e_2)^{j_{\max}}} \le \bar{p}_{\mathrm{M}A} \le \frac{\sum_{j=\pm1}^{\pm j_{\max}} \hat{Q}_{\mathrm{M}j}\mu_{j,A} + \frac{5}{e_2^2}(1-e_2)^{j_{\max}}}{\sum_{j=\pm1}^{\pm j_{\max}} \hat{Q}_{\mathrm{M}j}}. \tag{94}$$

这里，我们使用了

$$\hat{Q}_{\mathrm{M}j} \le Q_{\mathrm{M}j} = \hat{Q}_{\mathrm{M}j} + (Q_{\mathrm{M}j} - \hat{Q}_{\mathrm{M}j}) \tag{95}$$

$$\le \hat{Q}_{\mathrm{M}j} + \underbrace{\max_j (Q_{\mathrm{M}j} - \hat{Q}_{\mathrm{M}j})}_{=Q_{\mathrm{M}+1} - \hat{Q}_{\mathrm{M}+1} \le \frac{1}{e_2^2}(1-e_2)^{j_{\max}}} \le \hat{Q}_{\mathrm{M}j} + \frac{1}{e_2^2}(1-e_2)^{j_{\max}}, \tag{96}$$

$$\sum_{j=\pm1}^{\pm j_{\text{最大值}}} \hat{Q}_{\mathrm{M}j} \le \sum_{j=\pm1}^{\pm\infty} Q_{\mathrm{M}j} = \sum_{j=\pm1}^{\pm j_{\max}} \underbrace{\hat{Q}_{\mathrm{M}j} + (Q_{\mathrm{M}+1} - Q_{\mathrm{M}+1})}_{\le \frac{2}{e_2^2}(1-e_2)^{j\text{最大值}}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{j_{\max}} (Q_{\mathrm{M}-j} - Q_{\mathrm{M}-j})}_{\le \frac{1}{e_2^2}(1-e_2)^{j_{\max}}} \tag{97}$$

$$+ \underbrace{\sum_{j=j\text{最大值}+1}^{\infty} (Q_{\mathrm{M}+j} - Q_{\mathrm{M}+j})}_{\le \frac{1}{e_2}(1-e_2)^{\ j\text{最大值}}} + \underbrace{\sum_{j=j\text{最大值}+1}^{\infty} (Q_{\mathrm{M}-j} - Q_{\mathrm{M}-j})}_{\le \frac{1}{e_2^2}(1-e_2)^{\ j\text{最大值}}} \tag{98}$$

$$\le \sum_{j=\pm1}^{\pm j_{\max}} \hat{Q}_{\mathrm{M}j} + \frac{5}{e_2^2}(1-e_2)^{j_{\max}}, \tag{99}$$

$$\sum_{j=\pm1}^{\pm j_{\max}} \hat{Q}_{\mathrm{M}j}\mu_{j,A} \le \sum_{j=\pm1}^{\pm\infty} Q_{\mathrm{M}j}\mu_{j,A} \le \sum_{j=\pm1}^{\pm j_{\max}} \hat{Q}_{\mathrm{M}j}\mu_{j,A} + \sum_{j=\pm1}^{\pm\infty} (Q_{\mathrm{M}j} - \hat{Q}_{\mathrm{M}j}) \tag{100}$$

$$\le \sum_{j=\pm1}^{\pm j_{\max}} \hat{Q}_{\mathrm{M}j}\mu_{j,A} + \frac{5}{e_2^2}(1-e_2)^{j_{\max}}. \tag{101}$$