arXiv:2302.03272v1 [math.CA] 7 Feb 2023

含速度控制的 Cucker-Smale 模型的渐近动力学

JUNHYEOK BYEON

Abstract. 我们研究带有速度控制函数的 Cucker-Smale 模型。Cucker-Smale 模型通过集群行为描述一致性的涌现。本文提出的模型涵盖了若干 Cucker-Smale 模型，例如速度限制模型、相对论模型和近似单位速度模型。我们阐述了所提出模型的集体行为，包括单簇或双簇集群、粘连和碰撞避免；这些行为取决于通信权重在原点处的正则性与奇异性。特别地，我们给出一个充分框架，以保证在强奇异通信下个体间距离具有正的下界。

1. Introduction

复杂系统的集体行为无处不在。在 [20], 举几个例子：羊群行为、鱼群行为和萤火虫同步 [5, 11, 26], 等。由于无人机（UAV）、机器人学和客户端网络设备等领域具有潜在的工程应用价值，多体系统的集体动力学已在控制理论等工程领域得到广泛研究。其中，Cucker-Smale（简称 CS）模型描述了自驱动粒子的集群行为；由于它将看似无关的现象统一起来，因此受到了广泛关注 [5, 30, 31, 32]。关于 CS 模型的动力学描述和流体力学描述，请分别参阅 [5, 10, 14, 21, 22, 26], [9],和 [24], 。

令 q_i 为第 i 个智能体（粒子）的位置。本文关注带速度控制的 CS 模型。以下常微分方程组描述了所提出模型中的智能体：

$$\begin{cases} \dot{q}_i = G(p_i), \quad t > 0, \quad i \in [N] := \{1, 2, \cdots, N\}, \\ \dot{p}_i = \dfrac{\kappa}{N} \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \psi(|q_k - q_i|)(G(p_k) - G(p_i)), \\ (q_i, p_i)\big|_{t=0+} = (q_i^0, p_i^0), \quad p_i, q_i \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中， ψ 和 $\kappa > 0$ 分别表示智能体之间的通信（核函数）及其强度。上式中， $G : \mathbb{R}^d \to I \subset \mathbb{R}^d$ 是速度控制函数，而 $G(p_i)$被解释为第 i个粒子的速度。特别地，当 G 为恒等函数时，模型（1.1）退化为标准 Cucker-Smale 模型。我们假设 $G = g(|p|)p/|p|$，其中 $|p| \mapsto g(|p|)$是凸函数或凹函数，且连续可微并且

Date: 2023年2月8日。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 34D05 34D09 82C22。

Key words and phrases. 一致性模型、聚类、涌现。1

具有不消失梯度地递增（详情请参见（2.2））。在模型（1.1）中， G 的存在可能会对智能体的行为产生巨大影响。例如，如果 G是有界函数，那么其有界性可体现为对智能体的速度限制。除速度限制外，还可以实现相对论效应或速度几乎达到单位值等影响。更多详情请参见例2.1。

本文的主要目的之一是确认模型 (1.1) 在速度控制的情况下，面对正则通信（$\lim_{x\searrow 0}\psi(x) < \infty$）或奇异通信（$\lim_{x\searrow 0}\psi(x) = \infty$）时，是否表现出与标准 CS 模型一致的行为。更具体地说，我们考虑以下三种通信：

$$\begin{aligned}
\text{Type I}:\ & \psi \in (L^\infty \cap C^{0,1})(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}_+),\\
& (\psi(r)-\psi(s))(r-s)\le 0, \quad \forall r,s\in\mathbb{R}_+,\\
\text{Type II}:\ & \psi(q)=\frac{1}{|q|^\alpha}, \quad \alpha\in(0,1), \quad q\neq 0,\\
\text{Type III}:\ & \psi(q)=\frac{1}{|q|^\alpha}, \quad \alpha\ge 1, \quad q\neq 0,
\end{aligned}$$

其中， $\mathbb{R}_+$ 是正实数的集合，而 $(L^\infty \cap C^{0,1})(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}_+)$ 分别表示从 $\mathbb{R}_+$ 到 $\mathbb{R}_+$的有界且 Lipschitz 连续函数空间。对于任意类型的核函数，在适当的初始条件下，我们可以预期出现群集。然而，对于第 II 型和第 III 型核函数，当两个粒子发生碰撞时，与 (1.1) 相关的向量场会变得无界。因此，不能借助标准柯西–利普希茨理论来处理解的存在性和唯一性。在先前的工作中， [28, 29], 的作者证明了第 II 型核函数在 $W^{2,1}$ 索伯列夫空间中的弱解存在且唯一，其中 $\alpha \in (0, 1/2)$，且 $G = \mathrm{Id}$。在这种情况下，两个智能体可能在有限时间内黏合。另一方面，由奇异通信 [8]的强奇异性（$\int_0^\varepsilon \psi(x)dx = \infty$）所引发的碰撞避免，保证了第 III 型核函数对应解的良定性。这种碰撞避免性质对于实际应用很有意义，从理论角度来看也值得期许（见注 4.2）。本文的第二个目的是针对奇异通信下解的良定性和碰撞避免性质，给出更完善的结果。

本文的主要结果分为三个方面。首先，对于 I 型耦合，我们研究了群集涌现的一些等价条件。设 (P, Q) 是 (2.1) 的一个解，并分别将 $D_P(t)$ 和 $D_Q(t)$ 定义为 $|p_i(t) - p_j(t)|$ 以及 $|q_i(t) - q_j(t)|$ 的最大值。若智能体形成单一群体（ $\sup_{t\ge 0} D_Q(t) < \infty$ ），并且其速度趋于一致（$\lim_{t\to\infty} D_P(t) = 0$），则称 (P, Q) 呈现（单簇）群集现象。于是有：

$$\begin{aligned}
(P,Q) \text{ exhibits flocking} \quad &\Leftrightarrow \quad D_P(t) \text{ decays exponentially}\\
&\Leftrightarrow \quad D_Q(t) \text{ is bounded.}
\end{aligned} \tag{1.2}$$

基于上述等价性，我们根据初始数据和系统参数给出了实现群集的一个充分条件：

$$\|P^0\| < \frac{\mathcal{M}\kappa}{M_{G'}}\int_{\|Q^0\|}^{+\infty}\psi(s)\,ds, \tag{1.3}$$

其中 $\|Q^0\|^2 := \sum_{i,\ j\in[N]} |q_i^0 - q_j^0|^2$, $\|P^0\|^2 := \sum_{i,\ j\in[N]} |p_i^0 - p_j^0|^2$，以及 $\mathcal{M}$, $M_{G'}$ 是由初始数据和速度控制函数 G所确定的正常数。作为应用，我们还给出了双簇集群的一个等价条件。

我们的第二个结果讨论了实数轴上 II 型通信情形下解的存在性、唯一性和正则性。更具体地说，当 (1.1) 的环境空间为$\mathbb{R}$ 且核函数具有如下形式 $\psi(x) = |x|^{-\alpha}$ ($\alpha \in$ (0,1)) 时，(1.1) 存在唯一的整体弱解 (P,Q)，其中 q_i 对每个 $i \in [N]$, $T \in \mathbb{R}_+$ 都属于索伯列夫空间 $W^{2,\ \gamma}([0,T])$，并且

$$\gamma \in \left[1, \frac{1}{\max\{1-K, \alpha\}}\right), \quad K := C\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right),$$

其中， C 是依赖于 G 和 α的正常数。这表明，对于任意 $\alpha \in \in$(0,1)，弱解都有良好定义，且其正则性会随着 α 减小而提高。特别是，当 α 接近 0 时， p_i接近利普希茨连续函数。注意，在这种情况下，(P,Q)总是无条件地呈现群集现象，且智能体可能在有限时间内粘合在一起。

我们的第三个结果讨论了 III 型核函数下的碰撞规避性质：如果初始数据是非碰撞的，那么就存在唯一的具有碰撞规避性质的全局经典解：

$$\inf_{t\in[0,T]} \min_{\substack{i,j\in[N]\\ i\neq j}} |q_i(t) - q_j(t)| > 0, \quad \forall T \in \mathbb{R}_+.$$

此外，如果进一步假设 $\alpha \neq 1$ 且群集涌现（即达到 (1.2) 或 (1.3) 中任一条件），那么智能体之间的相对距离存在严格正下界：

$$\inf_{t\geq 0} \min_{\substack{i,j\in[N]\\ i\neq j}} |q_i(t) - q_j(t)| \geq L_\infty > 0.$$

因此，对于任意初始数据和耦合强度 $\kappa > 0$，只要 α 充分接近 1，就能保证正 L_∞ 的存在。据作者所知，强奇异核下 L_∞ 的存在性问题仅得到部分解决，上述结果或可补充先前的结果（见注 4.2）。

本文其余部分安排如下。在第 2 节中，我们阐明速度控制函数的条件，并给出若干示例。随后，我们研究正则核（I 型）下方程 (1.1) 群集动力学的涌现。在第3节中，我们研究实数轴上弱奇异核（II 型）下方程 (1.1) 的存在性、唯一性和正则性。在第 4 节中，我们回顾强奇异核（III 型）下方程 (1.1) 的碰撞规避性质，并给出一个充分条件，以保证智能体之间的相对距离具有严格正下界。最后，第5节简要总结主要结果并讨论一些尚待解决的问题。

记号。本文通篇使用以下便于使用的记号：

$$\begin{aligned}
&\psi_{ij} := \psi(|q_i - q_j|), \quad [n] := \{1, 2, \cdots, n\} \text{ for } n \in \mathbb{N},\\
&\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \mid x \geq 0\}, \quad \mathbb{R}_+ := \{x \mid x > 0\}.
\end{aligned}$$

对于构型向量 $q_i \in \mathbb{R}^d$ 和 $p_i \in \mathbb{R}^d$，我们记

$$\begin{aligned}
&Q(t) := (q_1(t), \ldots, q_N(t)), \quad P(t) := (p_1(t), \ldots, p_N(t)),\\
&Q^0 := Q(0), \quad P^0 := P(0), \quad \mathcal{N} := (\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_N),
\end{aligned}$$

其中， ν_i 将在第3节中定义。对于 $S \subset [N]$，我们定义 $\{p_i - p_j\}_{i,\ j\in[N]}$ 和 $\{q_i - q_j\}_{i,\ j\in[N]}$ 子系统上的范数为

$$\begin{aligned}
&\|Q\|_S := \sqrt{\sum_{i,j\in S} |q_i - q_j|^2}, \quad \|P\|_S := \sqrt{\sum_{i,j\in S} |p_i - p_j|^2},\\
&\|Q\| := \|Q\|_{[N]} \quad \|P\| := \|P\|_{[N]},\\
&D_{P,S} := \max_{i,j\in S} |p_i - p_j|, \quad D_{Q,S} := \max_{i,j\in S} |p_i - p_j|,\\
&D_P := D_{P,[N]}, \quad D_Q := D_{Q,[N]}.
\end{aligned}$$

从 X到 Y的函数空间记作 $\mathcal{F}(X; Y)$。若 $Y = \mathbb{R}$，则记作 $\mathcal{F}(X) := \mathcal{F}(X; Y)$。量 $\|f\|_{L^p(X)}$，即 f在 X上的 L^p范数，定义为 $(\int_X f(x)dx)^{1/p}$（当 $p \in [1, \infty$时），当 $p = \infty$时则定义为 f 的本性上确界。若 f 在 X 上的 L^p 范数有限，则记作 $f \in L^p(X)$。$C^{0,1}(X)$是 X上的 Lipschitz 连续函数空间。对于 $X \subset \mathbb{R}$，索伯列夫空间 $W^{k,p}(X)$定义为由函数 $f \in L^p(X)$构成的空间，其中 f 及其直至 k 阶的弱导数在 X上的 L^p 范数有限。若对于 X的任意紧子集 C，都有 $f \in \mathcal{F}(C)$，则记作 $f \in \mathcal{F}_{\mathrm{loc}}(X)$。

2. Analysis under regular communications

本节研究 (1.1) 的基本性质，并给出一些技术引理。基于上述结果，我们给出单簇或双簇集群的若干条件。

2.1. 速度控制函数。本小节对速度控制函数 G 施加若干条件，并研究其对动力学的影响。我们回顾带速度控制的 CS模型:

$$\begin{cases}
\dot{q}_i = G(p_i), \quad t > 0, \quad i \in [N],\\
\dot{p}_i = \dfrac{\kappa}{N} \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \psi(|q_k - q_i|)(G(p_k) - G(p_i)),\\
(q_i, p_i)\big|_{t=0+} = (q_i^0, p_i^0), \quad p_i, q_i \in \mathbb{R}^d,
\end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $\kappa > 0$。在第 2 节中，我们假设

$$\psi \in (L^\infty \cap C^{0,1})(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+), \quad (\psi(r) - \psi(s))(r - s) \le 0, \quad \forall r, s \in \mathbb{R}_+.$$

在 (2.1) 中， G 假设为径向对称。更具体地说，我们假设:

$$\begin{aligned}
&G(p) = \begin{cases} g(|p|)\dfrac{p}{|p|} & , \quad \text{if} \quad p \neq 0,\\ 0 & , \quad \text{if} \quad p = 0, \end{cases} \qquad g \in C^1(\mathbb{R}_{\ge 0}), \quad g(0) = 0,\\
&0 < m_{g'} \le g' \le M_{g'} \text{ on any compact interval},\\
&g \text{ is convex or concave on } \mathbb{R}_+,
\end{aligned} \tag{2.2}$$

其中 $m_{g'}$ 和 $M_{g'}$ 可能依赖于一个紧区间。

例 2.1。我们介绍速度控制函数 G 的一些可能示例。

(1) CS模型。对 G 而言，最简单且最具启发性的例子是恒等映射 $G(p) = p$。在这种情况下，系统 (2.1) 表示一个标准 Cucker-Smale 模型 [15,16]。

(2) 速度限制模型。假设 G 有界，例如 $g(\mathbb{R}) = [0, M)$ $M < \infty$。那么我们有

$$|\dot{q}_i| = |G(p_i)| < M,$$

且智能体的最大速度始终有界于 M。对于模型 (2.1)，这一特性可能并不明显，因为在这种情况下最大速度始终会降低（见命题 2.1）。然而，尽管存在可能增大最大速度的额外作用力（例如，随机噪声 [4] 或黏合作用力 [2]），我们仍然可以保证速度限制。

(3) 物理模型。通过恰当选择 G，可以体现多种物理效应。例如，若引入洛伦兹因子 Γ，如下所示：

$$g^{-1} : [0, c) \mapsto \mathbb{R}, \quad g(v) := \Gamma \left(1 + \frac{\Gamma}{c^2}\right) v, \quad \Gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

那么模型 (2.1) 就变为相对论 Cucker-Smale（RCS）模型，该模型作为 CS 模型的相对论修正而被提出。关于 RCS 模型的推导及其涌现动力学，请参见 [3, 17]。除了相对论效应之外，固有速度或快度等物理概念也可以通过 [6, 25] 体现。

(4) 近似单位速度模型。文献中已经从航向角的角度研究了若干带有单位速度约束的 Vicsek 型模型。关于单位速度的 CS 模型，请参见 [13]。就 (2.1) 而言，这可以表示为在 $\mathbb{R}_+$ 上选择 $g_0 \equiv 1$。这不满足 (2.2)，但可以用满足 (2.2) 的函数进行近似。例如，对于 $g_\varepsilon(p) := \tanh(p/\varepsilon)$，我们预期

$$g_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} g_0 = 1 \ on \ \mathbb{R}_+,$$

因此，在 $\varepsilon \ll 1$ 下，我们形式上得到了一个速度接近单位值的模型。与 [13], 中的模型相比，上述模型并不严格具有单位速度，但其优点在于可以采用与标准 Cucker-Smale 模型一致的方法。

条件 (2.2) 的技术原因将在下面的命题中自然显现。

命题 2.1. 设 (P, Q) 是具有初始数据 (P^0, Q^0) 的方程 (2.1) 的整体解。则有以下结论。

(1) $\sum_{k=1}^N p_j$ 守恒：

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N p_j(t) = 0.$$

(2) p_i 的最大模随时间减小：

$$\max_{i \in [N]} |p_i(t)| \le \max_{i \in [N]} |p_i(s)|, \quad 0 \le s \le t.$$

特别地，

$$\sup_{t \ge 0} \max_{i \in [N]} |p_i(t)| = \max_{i \in [N]} |p_i^0| =: P_M^0. \tag{2.3}$$

（3）对于任意的 $t \in \mathbb{R}_+$ 和 $i, j \in [N]$，

$$m_{G'} |p_i(t) - p_j(t)| \le |G(p_i(t)) - G(p_j(t))| \le M_{G'} |p_i(t) - p_j(t)|,$$

其中

$$M_{G'} := \max\{g'(|p|) : |p| \le P_M^0\}, \quad m_{G'} := \min\{g'(|p|) : |p| \le P_M^0\}.$$

（4）存在一个满足下式的正常数 $\mathcal{M} = \mathcal{M}(P^0) > 0$

$$\mathcal{M}|p_i(t) - p_j(t)|^2 \le (p_i(t) - p_j(t)) \cdot (G(p_i(t)) - G(p_j(t)))$$

对任意 $t \in \mathbb{R}_+$ 和 $i, j \in [N]$。

证明。(1) 对 (2.1)$_2$ 关于 $i \in [N]$ 求和，并利用指标对称性可得

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N} p_j = \frac{\kappa}{N}\sum_{i,k=1}^{N} \psi(|q_k - q_i|)(G(p_k) - G(p_i)) = \frac{\kappa}{N}\sum_{i,k=1}^{N} \psi(|q_i - q_k|)(G(p_i) - G(p_k)) = 0.$$

(2) 定义 $M(t) \in \operatorname{argmax}_{i\in[N]}|p_i(t)|$。固定时间 t和指标 $M(t)$，并令 $\ell = M(t)$。于是有

$$\frac{d}{dt}|p_\ell|^2 = \frac{\kappa}{N}\sum_{k=1}^{N} \psi(|q_k - q_\ell|)p_\ell \cdot (G(p_k) - G(p_\ell)) \le 0,$$

这里的不等式由 M的极大性得出。这就证明了 (2.3)。

(3) G 在 p 处的雅可比矩阵为

$$G'(p) = \begin{cases} \dfrac{g(|p|)}{|p|}\mathrm{Id} + \left(g'(|p|) - \dfrac{g(|p|)}{|p|}\right)\dfrac{p\otimes p}{|p|^2} & , \quad \text{if} \quad p \neq 0, \\ g'(0)\mathrm{Id} & , \quad \text{if} \quad p = 0, \end{cases}$$

由于 $p \otimes p$ 的特征值为 0，且 $|p|^2$ 的特征值（计重数）为

$$\lambda_1 = \begin{cases} \dfrac{g(|p|)}{|p|}, & \text{if} \quad p \neq 0, \\ g'(0), & \text{if} \quad p = 0, \end{cases} \qquad \lambda_2 = g'(|p|)$$

由于 G'的对称性，最大特征值就是 G'的算子范数，并且根据式 (2)，该范数有界于 $M_{G'}$。因此，由中值定理可得

$$|G(p_i) - G(p_j)| \le M_{G'}|p_i - p_j|.$$

另一方面，逆雅可比矩阵 $(G^{-1})'$ 的算子范数为^1 $_{\text{最小值}\{\lambda_1,\lambda_2\}}$，它~~小于或等于~~$\frac{1}{m_{G'}}$。因此我们有

$$m_{G'}|p_i - p_j| \le |G(p_i) - G(p_j)| \le M_{G'}|p_i - p_j|.$$

(4) 在整个证明过程中，不失一般性地，我们假设 $|p_i| \ge |p_j|$。首先，假设 g 在 $\mathbb{R}_+$上是凸函数，因此 $|\cdot| \mapsto {}^{g}{}_{(|\cdot|)}|\cdot|$ 是一个递增~~函数。~~于是，

$$\begin{aligned} &(p_i - p_j)\cdot(G(p_i) - G(p_j)) \\ &\qquad = \frac{g(|p_j|)}{|p_j|}|p_i - p_j|^2 + \left(\frac{g(|p_i|)}{|p_i|} - \frac{g(|p_j|)}{|p_j|}\right)(p_i - p_j)\cdot p_i \\ &\qquad \ge m_{G'}|p_i - p_j|^2. \end{aligned}$$

现在假设 g 在 $\mathbb{R}_+$上是凹函数。由于 g 是递增的， g^{-1} 是凸函数，因此得到

$$\begin{aligned}
&(p_i-p_j)\cdot(G(p_i)-G(p_j))\\
&\quad=\frac{g^{-1}(|G(p_j)|)}{|G(p_j)|}|G(p_i)-G(p_j)|^2\\
&\qquad+\left(\frac{g^{-1}(|G(p_i)|)}{|G(p_i)|}-\frac{g^{-1}(|G(p_j)|)}{|G(p_j)|}\right)(G(p_i)-G(p_j))\cdot G(p_i)\\
&\quad\geq\frac{m_{G'}^2}{M_{G'}}|p_i-p_j|^2.
\end{aligned}$$

我们设定 $\mathcal{M}:=\min\{m_{G'},\frac{m_{G'}^2}{M_{G'}}\}$ 以完成证明。由于 $m_{G'}$ 和 $M_{G'}$ 仅依赖于P_0，因此 $\mathcal{M}$也仅依赖于此。□

注 2.1。

(1) 在 (2.2) 中， $m_{g'}$ 和 $M_{g'}$ 取决于区间。然而，由于 $|p_i|$在时间上是一致有界的，我们可以通过 $[0,P_M^0]$固定该区间，从而能够根据初始数据固定$m_{g'}$ 和 $M_{g'}$ ，即 $M_{G'}$ 和 $m_{G'}$。(2) 在命题 2.1 中，如果 (2.1) 的环境空间是一维的（ $d=1$ ），那么内积就只是数乘，而 (3) 无需对 g作凸性或凹性假设即可证明 (4)。

2.2. 渐近群集的出现。CS模型是用于描述集群行为的最成功模型之一，我们也可以期待 (2.1) 中出现涌现群集。下面回顾模型 (2.1) 的（渐近）群集定义。

定义 2.1. 设 (P,Q) 是方程 (2.1) 的一个整体解。

(1) 若 (P,Q) 满足下述条件，则称其呈现（单簇）群集:

$$\sup_{t\geq0}D_Q(t)<\infty,\quad\lim_{t\to\infty}D_P(t)=0.$$

(2) 若存在 $[N]$ 的一个非空真子集 S ，满足下述条件，则称 (P,Q) 呈现双簇集群:

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\geq0}\max\{D_{Q,S}(t),D_{Q,[N]-S}(t)\}<\infty,\quad\sup_{t\geq0}\min_{\substack{i\in S\\ j\notin S}}|q_i(t)-q_j(t)|=\infty,\\
&\lim_{t\to\infty}D_{P,S}(t)=\lim_{t\to\infty}D_{P,[N]-S}(t)=0.
\end{aligned}$$

在下面的引理中，我们估计任意一组智能体的相对距离，这一结果将在第 2 节、第3节和第 4 节中反复使用。

引理 2.1（子系统估计）。设 (P,Q) 是 (2.1) 的一个解。对于任意 $[l]\subset[N]$，有如下微分不等式。

(1)

$$\frac{d}{dt}\|P\|_{[l]}\leq-\frac{\kappa\mathcal{M}l}{N}\psi(\|Q\|_{[l]})\|P\|_{[l]}+\frac{2\kappa M_{G'}(N-l)P_M^0L_{\psi,[l]}}{N}\|Q\|_{[l]},$$

$$L_{\psi,[l]}(t):=\sup_{\substack{r,s\geq q_{[l]}(t),\\ r\neq s}}\left|\frac{\psi(r)-\psi(s)}{r-s}\right|<\infty,\quad q_{[l]}(t):=\min_{\substack{i'\in[l]\\ j'\notin[l]}}|q_{i'}(t)-q_{j'}(t)|.\tag{2.4}$$

(2)

$$\frac{d}{dt}\|P\|_{[l]} \le -\frac{\kappa\mathcal{M}l}{N}\psi(\|Q\|_{[l]})\|P\|_{[l]} + \frac{4\kappa P_M^0 M_{G'} l(N-l)}{N}\max_{\substack{i'\in[l]\\ j'\notin[l]}}\psi_{i'j'}.$$

证明。（1）为简便起见，令 $p_{ij} := p_i - p_j$。我们将 $\|P\|_{[l]}$ 展开为

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|P\|_{[l]}^2 &= \sum_{i,j\in[l]} p_{ij}\cdot\left(\frac{dp_i}{dt} - \frac{dp_j}{dt}\right)\\
&= \frac{\kappa}{N}\sum_{i,j\in[l]}\sum_{k=1}^{N}\underbrace{p_{ij}\cdot(\psi_{ki}(G(p_k)-G(p_i)) - \psi_{kj}(G(p_k)-G(p_j)))}_{=:\mathcal{A}_{ijk}}\\
&= \frac{\kappa}{N}\sum_{i,j,k\in[l]}\mathcal{A}_{ijk} + \frac{\kappa}{N}\sum_{i,j\in[l],k\notin[l]}\mathcal{A}_{ijk}\\
&=: \frac{\kappa\mathcal{I}_1}{N} + \frac{\kappa\mathcal{I}_2}{N}.
\end{aligned}$$

为了估计 $\mathcal{I}_1$，我们利用指标对称性，运用指标轮换技巧 $(i,j,k) \to (j,k,i)$，得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1 &= \sum_{i,j,k\in[l]}\psi_{ki}p_{ij}\cdot(G(p_k)-G(p_i)) - \sum_{i,j,k\in[l]}\psi_{kj}p_{ij}\cdot(G(p_k)-G(p_j))\\
&= \sum_{i,j,k\in[l]}\psi_{ki}p_{ij}\cdot(G(p_k)-G(p_i)) + \sum_{i,j,k\in[l]}\psi_{ki}p_{jk}\cdot(G(p_k)-G(p_i))\\
&= \sum_{i,j,k\in[l]}\psi_{ki}p_{ik}\cdot(G(p_k)-G(p_i))\\
&\le -\mathcal{M}\sum_{i,j,k\in[l]}\psi_{ki}|p_{ik}|^2 \le -\mathcal{M}l\psi(\|Q\|_{[l]})\|P\|_{[l]}^2.
\end{aligned}$$

为了估计 $\mathcal{I}_2$，我们利用 ψ 的利普希茨连续性，得到

$$|\psi_{ki}-\psi_{kj}| \le L_{\psi,[l]}(t)\big||q_k-q_i| - |q_k-q_j|\big| \le L_{\psi,[l]}(t)|q_i-q_j|,$$

其中 $L_{\psi,\ [l]}$ 是一个由 (2.4) 定义的非负函数。直接计算可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_2 &= \sum_{i,j\in[l],k\notin[l]} p_{ij}\cdot(\psi_{ki}(G(p_k)-G(p_i)) - \psi_{kj}(G(p_k)-G(p_j)))\\
&= \sum_{i,j\in[l],k\notin[l]} p_{ij}\cdot[\psi_{ki}(G(p_j)-G(p_i)) + (\psi_{ki}-\psi_{kj})(G(p_k)-G(p_j))]\\
&\le \sum_{i,j\in[l],k\notin[l]}(\psi_{ki}-\psi_{kj})p_{ij}\cdot(G(p_k)-G(p_j))\\
&\le 2M_{G'}P_M^0 L_{\psi,[l]}\sum_{i,j\in[l],k\notin[l]}|q_i-q_j||p_i-p_j|.\\
&\le 2M_{G'}(N-l)P_M^0 L_{\psi,[l]}\|P\|_{[l]}\|Q\|_{[l]},
\end{aligned}$$

其中我们使用了

$$0 \le \mathcal{M}|p_i-p_j|^2 \le p_{ij}(G(p_i)-G(p_j))$$

来得到第一个不等式。综合所有估计，我们得到

$$\frac{d}{dt}\|P\|_{[l]} \le -\frac{\kappa\mathcal{M}l}{N}\psi(\|Q\|_{[l]})\|P\|_{[l]} + \frac{2\kappa M_{G'}(N-l)P_M^0 L_{\psi,[l]}}{N}\|Q\|_{[l]}.$$

(2) 我们如下估计 $\mathcal{I}_2$。

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_2 &\le \sum_{i,j\in[l],k\notin[l]}(\psi_{ki}-\psi_{kj})p_{ij}\cdot(G(p_k)-G(p_j))\\ &\le 2\max_{\substack{i'\in[l]\\ j'\notin[l]}}\psi_{i'j'}\sum_{i,j\in[l],k\notin[l]}|p_i-p_j||G(p_k)-G(p_j)|\\ &\le 4P_M^0 M_{G'}l(N-l)\max_{\substack{i'\in[l]\\ j'\notin[l]}}\psi_{i'j'}\|P\|_{[l]}.\end{aligned}$$

结合对 $\mathcal{I}_1$ 的估计，我们有

$$\frac{d}{dt}\|P\|_{[l]} \le -\frac{\kappa\mathcal{M}l}{N}\psi(\|Q\|_{[l]})\|P\|_{[l]} + \frac{4\kappa P_M^0 M_{G'}l(N-l)}{N}\max_{\substack{i'\in[l]\\ j'\notin[l]}}\psi_{i'j'}.$$

□

特别地，选择 $[l]=[N]$ 可得关于群集涌现的如下结果。

定理 2.1（渐近集群的出现）。设 (P,Q) 是 (2.1) 的一个解。

(1) 以下三个陈述等价。(a) (P,Q) 表现出群集行为；$\sup_{t\ge0} D_Q(t) < \infty$，$\lim_{t\to0} D_P(t) = 0$。(b) D_P 指数衰减；$D_P(t) \le Be^{-Ct}$，$B,C>0$。

(c) 智能体空间有界；$\sup_{t\ge0} D_Q(t) < \infty$。

（2）假设

$$\|P^0\| < \frac{\mathcal{M}\kappa}{M_{G'}}\int_{\|Q^0\|}^{+\infty}\psi(s)\,ds.$$

则（P，Q）表现出群集行为。特别地，如果 $\|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}=\infty$，则群集行为无条件发生。

证明。定义函数 $\mathcal{L}$ 如下

$$\mathcal{L}(t) := \frac{\mathcal{M}\kappa}{M_{G'}}\int_{\|Q^0\|}^{\|Q(t)\|}\psi(s)\,ds + \|P(t)\|.$$

我们断言 $\dot{\mathcal{L}} \le 0$。首先注意到

$$\left|\frac{d}{dt}\|Q\|_{[l]}^2\right| = 2\left|\sum_{i,j\in[l]}(q_i-q_j)\cdot(G(p_i)-G(p_j))\right| \le 2M_{G'}\|P\|_{[l]}\|Q\|_{[l]}. \tag{2.5}$$

接着我们选取 $[l]=[N]$ 并应用引理 2.1，得到

$$\frac{d}{dt}\|P\| \le -\kappa\mathcal{M}\psi(\|Q\|)\|P\|. \tag{2.6}$$

由此便证明了该断言：

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{L}}{dt} &= \frac{\mathcal{M}\kappa}{M_{G'}}\psi(\|Q(t)\|)\frac{d\|Q(t)\|}{dt} + \frac{d\|P(t)\|}{dt} \\ &\leq \mathcal{M}\kappa\psi(\|Q(t)\|)\|P(t)\| - \mathcal{M}\kappa\psi(\|Q(t)\|)\|P(t)\| = 0.\end{aligned}$$

（• 证明（1））从（a）到（c）以及从（b）到（a）的蕴含关系是显然的。假设（c）成立。由于有限维空间中的任意范数都是等价的，我们只需对范数 $\|\cdot\|$ 证明该结论。我们有

$$\frac{d}{dt}\|P\| \leq -\kappa\mathcal{M}\psi(\|Q\|)\|P\| \leq -\kappa\mathcal{M}\psi\left(\sup_{t\geq 0}\|Q(t)\|\right)\|P\| \leq -C\|P\|$$

对于某个与 C 时间无关的正常数。这就得到

$$\|P(t)\| \leq e^{-tC}\|P^0\|.$$

（• 证明（2））由于 $\mathcal{L}$ 随时间递减，我们有

$$\frac{\mathcal{M}\kappa}{M_{G'}}\int_{\|Q^0\|}^{\|Q(t)\|}\psi(s)\,ds + \|P(t)\| = \mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0) = \|P^0\| < \frac{\mathcal{M}\kappa}{M_{G'}}\int_{\|Q^0\|}^{+\infty}\psi(s)\,ds. \tag{2.7}$$

这证明了 $\sup_{t\geq 0}\|Q(t)\| < \infty$，从而 $\sup_{t\geq 0} D_Q(t) < \infty$。因此，群集涌现。

□

特别地，定理 2.1 表明，如果发生群集，则相对状态以指数速率收敛。因此，如果智能体之间的距离足够大，它们就不会发生碰撞。

Coro引理 2.1. 假设存在一个正常数 $0 < M < \infty$ 满足

$$\frac{M_{G'}\|P^0\|}{\kappa\mathcal{M}} < \min\left\{\int_{\|Q^0\|}^{M}\psi(r)dr, \psi(M)\min_{i,j\in[N]}|q_i^0 - q_j^0|\right\}. \tag{2.8}$$

那么我们有

$$\inf_{t\geq 0}\min_{i,j\in[N]}|q_i(t) - q_j(t)| > 0.$$

证明。由 (2.7) 和 (2.8)，我们有 $\sup_{t\geq 0}\|Q(t)\| < M < \infty$。由此可得

$$\begin{aligned}|q_i(t) - q_j(t)| &\geq |q_i^0 - q_j^0| - \int_0^t |G(p_i(s)) - G(p_j(s))|ds \\ &\geq |q_i^0 - q_j^0| - M_{G'}\int_0^t D_P(s)ds \\ &\geq |q_i^0 - q_j^0| - M_{G'}\int_0^t \|P(s)\|ds \\ &\geq |q_i^0 - q_j^0| - M_{G'}\|P^0\|\int_0^t \exp\left(-\kappa\mathcal{M}\int_0^s \psi(\|Q(\tau)\|)d\tau\right)ds \quad (\because (2.6)) \\ &\geq |q_i^0 - q_j^0| - M_{G'}\|P^0\|\int_0^t \exp\left(-\kappa\mathcal{M}\int_0^s \psi(M)d\tau\right)ds \\ &\geq |q_i^0 - q_j^0| - \frac{M_{G'}\|P^0\|}{\kappa\mathcal{M}\psi(M)} > 0.\end{aligned}$$

□

注2.2。假设核函数具有如下形式

$$\psi(|q|) = |q|^{-\alpha}, \quad \alpha > 1.$$

在这种情况下，即使 $\psi \notin (L^\infty \cap C^{0,\ 1})(\mathbb{R}_+;\ \mathbb{R}_+)$，推论2.1中的结论仍然成立。事实上，先验条件可放宽为

$$\|P^0\| < \frac{\mathcal{M}\kappa}{M_{G'}} \int_{\|Q^0\|}^{+\infty} \psi(s)\, ds.$$

证明将在定理4.1中给出。

2.3. 双簇集群的应用。定理 2.1 揭示了空间有界性与群集涌现之间的密切关系。同样，空间有界性在双簇集群中也起着至关重要的作用。

命题 2.2. 设 (P, Q) 是 (2.1) 的一个解。则以下两个陈述等价。

(1) (P, Q) 呈现双簇集群。(2) 存在 $\{A, B\}$ 对 $[N]$ 的一个划分，满足

$$\sup_{t\geq 0} \max\{D_{Q,A}(t), D_{Q,B}(t)\} < \infty, \quad \sup_{t\geq 0} \min_{\substack{i\in A\\ j\in B}} |q_i(t) - q_j(t)| = \infty.$$

为证明命题 2.2，我们先引入一个预备引理。

引理 2.2. 设 (P, Q) 是 (2.1) 的一个解。假设存在一个划分 $\{A, B\}$ of $[N]$，满足

$$\sup_{t\geq 0} \max\{D_{Q,A}(t), D_{Q,B}(t)\} < \infty.$$

那么，只要两个群生成不同的簇，这两个群就会分离：

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} \min_{i\in A, j\in B} |q_i(t) - q_j(t)| = \infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \min_{i\in A, j\in B} |q_i(t) - q_j(t)| = \infty.$$

证明. 只需证明

$$\liminf_{t\to\infty} \min_{i\in A, j\in B} |q_i(t) - q_j(t)| = \infty.$$

反设

$$\liminf_{t\to\infty} \min_{i\in A, j\in B} |q_i(t) - q_j(t)| = M_{AB} < \infty.$$

那么存在一个满足以下条件的时间序列 $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$t_1 < t_2 < \cdots, \quad \lim_{n\to\infty} t_n = \infty, \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \min_{i\in A, j\in B} |q_i(t_n) - q_j(t_n)| < 1 + M_{AB}.$$

由于每个群体都是空间有界的，我们有

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \max_{i,j\in[N]} |q_i(t_n) - q_j(t_n)| < 1 + M_{AB} + \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \|Q(t)\|_A + \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \|Q(t)\|_B =: M'_{AB} < \infty.$$

那么对于任意 $T > 0$,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in(t_n, t_n+T)} D_Q(t) \leq M'_{AB} + 2TM_{G'}P_M^0 =: M'_{AB,T} < \infty,$$

由于根据命题 2.1， $p_i(t)$（分别地， $\dot{q}_i(t) = (G(p_i(t)))$）有上界 P_M^0（分别地， $M_{G'}P_M^0$）。因此，若对于某个有限的 T，$(t_1, \infty) \subset \cup_{n\in\mathbb{N}}(t_n, t_n + T)$，则根据定理 2.1，必然会出现群集。由于 A 和 B 生成不同的簇，这种情况不可能发生，由此得到

$$\limsup_{n\to\infty}(t_{n+1} - t_n) = \infty.$$

取一个子序列后，不妨设 $\lim_{n\to\infty}(t_{n+1} - t_n) = \infty$。令 ℓ 为使 $|p_i|$达到最大值的指标。我们回顾

$$\frac{d}{dt}|p_\ell|^2 = \frac{2\kappa}{N}\sum_{k=1}^{N}\psi_{k\ell}p_\ell \cdot (G(p_k) - G(p_\ell)) \le \frac{2\kappa}{N}\psi(D_Q)\sum_{k=1}^{N} p_\ell \cdot (G(p_k) - G(p_\ell)). \tag{2.9}$$

由于当每个 p_i 方向相同（即 $\cos(p_i, p_j) = 1$）时，(2.9) 中右端的最大值可以达到，我们进一步估计

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|p_\ell|^2 &\le \frac{2\kappa}{N}\psi(D_Q)\sum_{k=1}^{N} p_\ell \cdot \left(\frac{g(|p_k|)}{|p_\ell|}p_\ell - \frac{g(|p_\ell|)}{|p_\ell|}p_\ell\right)\\
&\le \frac{2\kappa m_{G'}}{N}\psi(D_Q)\sum_{k=1}^{N}|p_\ell|\,(|p_k| - |p_\ell|)\\
&= -\frac{2\kappa m_{G'}}{N}\psi(D_Q)|p_\ell|\left(N|p_\ell| - \sum_{k=1}^{N}|p_k|\right)\\
&= -2\kappa m_{G'}\psi(D_Q)|p_\ell|\left(|p_\ell| - \frac{1}{N}\left|\sum_{k=1}^{N}p_k\right|\right) \qquad (\because \text{余弦}(p_i, p_j) = 1)\\
&=: -2\kappa m_{G'}\psi(D_Q)|p_\ell|\left(|p_\ell| - |p_{\text{ave}}^0|\right).
\end{aligned}$$

注意 p_{ave}^0 是一个常数向量，因为 $\sum_{k=1}^{N} p_k$ 的导数为零。因此我们有

$$\frac{d}{dt}\left(|p_\ell| - |p_{\text{ave}}^0|\right) = \frac{d}{dt}|p_\ell| \le -\kappa m_{G'}\psi(D_Q)\left(|p_\ell| - |p_{\text{ave}}^0|\right),$$

由此得到

$$0 \le |p_\ell(t)| - |p_{\text{ave}}^0| \le \exp\left(-\kappa m_{G'}\int_s^t \psi(D_Q(u))du\right)(|p_\ell(s)| - |p_{\text{ave}}^0|), \quad s \le t,$$

其中，第一个不等式来自 ℓ 的极大性。现在固定 T 并取 $N \gg 1$，使得对每个 $n \ge N$，区间 $(t_n, t_n + T)$ 两两不相交。于是

$$0 \le |p_\ell(t_n + T)| - |p_{\text{ave}}^0| \le \exp\left(-\kappa m_{G'}T\psi(M'_{AB,T})\right)(|p_\ell(t_n)| - |p_{\text{ave}}^0|), \quad n \ge N.$$

另一方面，根据命题 2.1， $|p_\ell|$ 无条件递减。因此，

$$\begin{aligned}
0 \le |p_\ell(t_{n+1} + T)| - |p_{\text{ave}}^0| &\le \exp\left(-\kappa m_{G'}T\psi(M'_{AB,T})\right)(|p_\ell(t_{n+1})| - |p_{\text{ave}}^0|)\\
&\le \exp\left(-\kappa m_{G'}T\psi(M'_{AB,T})\right)(|p_\ell(t_n + T)| - |p_{\text{ave}}^0|)\\
&\le \exp\left(-\kappa m_{G'}2T\psi(M'_{AB,T})\right)(|p_\ell(t_n)| - |p_{\text{ave}}^0|).
\end{aligned}$$

接着，通过直接归纳可得

$$0 \le |p_\ell(t^*)| - |p_{\text{ave}}^0| \le \exp\left(-\kappa m_{G'}(m+1)T\psi(M'_{AB,T})\right)(|p_\ell(t_n)| - |p_{\text{ave}}^0|), \quad t^* \ge t_{n+m} + T,$$

因此

$$\lim_{t\to\infty} |p_\ell(t)| = |p^0_{\text{ave}}|.$$

我们再次利用 ℓ 的极大性，并应用夹逼定理，得到

$$N|p^0_{\text{ave}}| = \left|\sum_{k=1}^N p_k(t)\right| \le \sum_{k=1}^N |p_k(t)| \le N\,|p_\ell(t)|\,,\ \text{so that}\ \lim_{t\to\infty}\sum_{k=1}^N \frac{1}{N}\,|p_k(t)| = |p^0_{\text{ave}}|.$$

现在我们声称

$$\lim_{t\to\infty} p_k(t) = p^0_{\text{ave}}, \quad k\in[N]. \tag{2.10}$$

足　以证明对每个 k，$\lim_{t\to\infty}|p_k(t)| = |p^0_{\text{ave}}|$。反设不然，则存在　　ce

$$\limsup_{t\to\infty}|p_k(t)| \le \limsup_{t\to\infty}|p_\ell(t)| = |p^0_{\text{ave}}|, \quad k\in[N],$$

存在一个常数 P_m，满足

$$\liminf_{t\to\infty}\min_{i\in[N]}|p_i(t)| < P_m < |p^0_{\text{ave}}|,$$

并且存在一个时间序列 $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得

$$0<s_1<s_2<\cdots, \quad \lim_{n\to\infty} s_n=\infty, \quad \min_{i\in[N]}|p_i(s_n)| < P_m.$$

由此得到

$$|p^0_{\text{ave}}| = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \lim_{n\to\infty}|p_i(s_n)| \le \frac{1}{N}P_m + \lim_{n\to\infty}\frac{N-1}{N}|p_\ell(s_n)| < |p^0_{\text{ave}}|$$

这就导出了矛盾，从而验证了断言 (2.10)。最后，由于群集现象不会发生，根据定理 2.1，我们有

$$\|P(t_n)\| \ge \frac{\mathcal{M}\kappa}{M_{G'}}\int_{\|Q(t_n)\|}^{+\infty}\psi(s)\,ds$$

对任意 t_n 均成立。根据 t_n 的定义，$\|Q(t_n)\|$ 在 n 上一致有界，令 $Q_M<\infty$ 为其上界。由 (2.10) 可知，$\|P(t_n)\|$ 收敛于零，因此我们得到

$$0 < \frac{\mathcal{M}\kappa}{M_{G'}}\int_{Q_M}^{+\infty}\psi(s)\,ds \le \frac{\mathcal{M}\kappa}{M_{G'}}\int_{\|Q(t_n)\|}^{+\infty}\psi(s)\,ds \le \|P(t_n)\| \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

由此完成反证法证明。 □

命题 2.2 的证明。显然，(1) 蕴含 (2)。假设 (2) 成立。根据引理 2.1，我们有

$$\frac{d}{dt}\|P\|_A \le -\frac{\kappa\mathcal{M}l}{N}\psi(\|Q\|_A)\|P\|_A + \frac{4\kappa P^0_M M_{G'} l(N-l)}{N}\max_{\substack{i'\in A\\ j'\in B}}\psi_{i'j'}.$$

根据对（2）的假设和引理 2.2，可得

$$\inf_{t\in\mathbb{R}_+}\left(\frac{\kappa\mathcal{M}l}{N}\psi(\|Q(t)\|_A)\right) \ge C_1>0, \quad \lim_{t\to\infty}\max_{\substack{i'\in A\\ j'\in B}}\psi_{i'j'}=0,$$

对于某个 正常数 C_1。因此，对于任意 $\varepsilon>0$，存在一个时间 T，使得

$$\frac{d}{dt}\|P(t)\|_A \le -C_1\|P(t)\|_A + \varepsilon, \quad \forall t>T(\varepsilon)>0.$$

然后，根据比较原理，我们有

$$0 \le \limsup_{t\to\infty} \|P\|_A \le \frac{\varepsilon}{C_1}.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 的选择是任意的，我们得到 $\|P(t)\|_A \xrightarrow{t\to\infty} 0$。 $\|P(t)\|_B \xrightarrow{t\to\infty} 0$ 的证明类似。□

例2.2。在本例中，我们简要概述一个实现双簇集群的示例。为方便起见，令 $G = \mathrm{Id}$，使得 $m_{G'} = M_{G'} = \mathcal{M} = 1$。假设 $D_Q^0 \neq 0$。则由 [12,定理 5.1]，，在某个准备充分的初始构型下，存在一个指标集 $[l]$ （重新排序后），它是 $[N]$ 的非空真子集，以及一个正常数 C，使得

$$\min_{i\in[l]\ j\notin[l]} |q_i(t) - q_j(t)| \ge Ct.$$

这导致

$$\int_0^t \max_{i\in[l],j\notin[l]} \psi(q_i(s) - q_j(s))ds \le \int_0^t \psi(Cs)ds \le \frac{\|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}}{C}.$$

然后，对引理 2.1 中的第二个估计进行积分可得

$$\|P(t)\|_{[l]} + \frac{\kappa l}{N}\int_{\|Q^0\|_{[l]}}^{\|Q(t)\|_{[l]}} \psi(r)dr \le \|P^0\|_{[l]} + \frac{4\kappa P_M^0 l(N-l)\|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}}{CN}.$$

因此，如果群组 $[l]$ 中的速度偏差很小，并且 C 足够大，即满足

$$\frac{N}{\kappa l}\|P^0\|_{[l]} + \frac{4P_M^0(N-l)\|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}}{C} < \int_{\|Q^0\|_{[l]}}^{\infty} \psi(r)dr,$$

于是我们有 $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} \|Q(t)\|_{[l]} < \infty$。类似地，当$C > 0$较大时，我们有 $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} \|Q(t)\|_{[N]-[l]} < \infty$，这意味着会形成双簇集群。请注意，对于适当选取的初始数据， C 可以充分大。详情请参见 [12]。

3. Analysis under weakly singular communications on the real line

本节考虑如下形式的核函数：

$$\psi(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}, \quad \alpha \in (0,1).$$

在这种情况下，粒子可能发生碰撞（碰撞示例见 [7]），且向量场会发散。如下文定义和定理 [28, 29]所述，对这类解的描述并不直接。

定义3.1. 设 B_i 和 ψ_n 定义为

$$B_i(t) := \{k \in [N] : x_k(t) \neq x_i(t) \ \text{or}\ v_k(t) \neq v_i(t)\},$$

$$\psi_n(s) := \begin{cases} \psi(s) & \text{if} \quad s \ge (n-1)^{-\frac{1}{\alpha}} \\ \text{smooth and monotone} & \text{if} \quad n^{-\frac{1}{\alpha}} \le s \le (n-1)^{-\frac{1}{\alpha}} \\ n & \text{if} \quad s \le n^{-\frac{1}{\alpha}} \end{cases}$$

并设$0 = T_0 \le T_1 \le T_{N_s}$为所有粘连时间的集合（即对于某个 i， $x_i(t) - x_j(t) = v_i(t) - v_j(t)$），且 $T_{N_s+1} := T$为给定的正数。对于 $n \in \{0, \cdots, N_s\}$，在每个区间 $[T_n, T_{n+1}]$上，考虑以下问题

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i, \\ \dot{v}_i = \frac{1}{N}\sum_{k\in B_i(T_n)}(v_k - v_i)\psi_n(|x_k - x_i), \\ x_i \equiv x_j \quad \text{if} \quad j \notin B_i(T_n), \end{cases} \tag{3.1}$$

对于 $t \in [T_n, T_{n+1}]$，给定初始数据 $x(T_n)$ $v(T_n)$。若且唯若对于所有 $n = 0$、$\cdots$、N_s 以及任意小的 $\varepsilon > 0$，函数 $x \in (C^1([0,T]))^{Nd}$ 是 $W^{2,1}([T_n, T_{n+1} - \varepsilon])$ 中 (3.1) 的弱解，则称 (x, v) 在时间区间 $[0,T]$ 上关于权重 $\psi(s) = s^{-\alpha}$ 满足 (3.1)。

命题 3.1。

(1) 给定 $\alpha \in (0, 1/2)$。那么对于所有 $T > 0$ 及任意初始数据，存在唯一的 $x \in W^{2,1}([0,T]) \subset C^1([0,T])$，它关于通信权重$\psi(s) = \frac{1}{|x|^\alpha}$ 在 $W^{2,1}([0,T])$ 中弱满足 (2.1)。(2) 给定 $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$。那么存在唯一一个按定义3.1意义下的解。

虽然在奇异核下描述碰撞解并非易事，但若将 (2.1) 限制在实数轴上，我们可以将其转化为一阶模型，其分析也可能揭示二阶模型中解的性质。本节关注配备弱奇异核的实数轴上的模型 (2.1)：

$$\begin{cases} \dot{q}_i = G(p_i), \quad t > 0, \quad i \in [N], \\ \dot{p}_i = \dfrac{\kappa}{N}\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\psi(q_k - q_i)(G(p_k) - G(p_i)), \qquad \psi(s) = \dfrac{1}{|s|^\alpha}, \quad \alpha \in (0,1). \\ (q_i, p_i)\big|_{t=0+} = (q_i^0, p_i^0), \quad p_i, q_i \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.2}$$

若 ψ 具有正则性，且 (P, Q) 是 (3.2) 的经典解，则有如下关系：

$$\int_0^t \psi(q_k(s) - q_i(s))(G(p_k(s)) - G(p_i(s)))ds = \int_0^{q_k(t)-q_i(t)} \psi(s)ds.$$

因此， P 是以下方程的一个解

$$\dot{q}_i = G(\nu_i + \frac{\kappa}{N}\sum_{k=1}^{N}\Psi(q_k - q_i)), \tag{3.3}$$

前提是两个系统通过以下关系耦合：

$$\Psi(r) := \int_0^r \psi(x)dx, \quad \nu_i := p_i^0 - \frac{\kappa}{N}\sum_{k=1}^{N}\Psi(q_k^0 - q_i^0). \tag{3.4}$$

另一方面，反过来也成立：如果 Ψ 可微，那么在条件 (3.4) 下，(3.3) 的解也是 (3.2) 的解，因此这两个模型等价。如果 ψ 弱奇异，

这种情况下，我们有

$$\psi(q)=\frac{1}{|q|^{\alpha}}\ (\alpha\in(0,1)) \quad \Longrightarrow \quad \Psi(q)=\int_0^q \psi(r)dr=\operatorname{sgn}(q)\frac{|q|^{1-\alpha}}{1-\alpha}. \tag{3.5}$$

由于 Ψ 连续，皮亚诺定理保证 (3.3) 存在一个经典解。然而，这未必是 (3.2) 的经典解，因为 (3.2) 的解比 (3.3) 要求更高的正则性，但 Ψ （因而 $\dot{q}_i$）的正则性在原点处失效。

例 3.1. 考虑一个由两个粒子组成的系统，其中

$$G=\mathrm{Id}, \quad \psi(q)=\frac{1}{\sqrt{q}}, \quad \Psi(q)=2\operatorname{sgn}(q)\sqrt{|q|}.$$

于是，(3.3) 具有如下形式

$$\dot{q}_1=\nu_1+\frac{\kappa}{2}\Psi(q_2-q_1), \quad \dot{q}_2=\nu_2+\frac{\kappa}{2}\Psi(q_1-q_2).$$

If 设定 $\nu_1=\nu_2=0$ 和 $q_1^0\geq q_2^0$ 后，我们得到 (3.3) 的如下经典解 .

$$q_i=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left((q_1^0+q_2^0)+\kappa^2\big(t-\dfrac{1}{\kappa}\sqrt{|q_1^0-q_2^0|}\big)^2\right), & \text{if } i=1,\ t<\dfrac{1}{\kappa}\sqrt{|q_1^0-q_2^0|},\\ \dfrac{1}{2}\left((q_1^0+q_2^0)-\kappa^2\big(t-\dfrac{1}{\kappa}\sqrt{|q_1^0-q_2^0|}\big)^2\right), & \text{if } i=2,\ t<\dfrac{1}{\kappa}\sqrt{|q_1^0-q_2^0|},\\ \dfrac{q_1^0+q_2^0}{2}, & \text{if } i=1,2,\ t\geq\dfrac{1}{\kappa}\sqrt{|q_1^0-q_2^0|}.\end{cases}$$

然而，由于 $\dot{q}_i$ 不可微，我们无法得到 (3.2) 的经典解。

上述例子表明，当 ψ 具有奇异性时，两个模型在经典情形下并不等价；(3.3) 的解不一定是二阶可微的。因此，若要使两个模型等价，就需要扩展 (3.2) 中解的概念。事实证明，索伯列夫空间 $W^{2,\,1}$ 是一个合适的函数空间，如下述定理所述。

Theo命题 3.1. 设 (P,Q) 是 (3.2) 的一个解。则下列断言成立 *s.*

(1) 模型 (3.2) 存在唯一的全局（弱）解，其中 $q_i\in W^{2,\,\gamma}([0,T])$ 对每个$i\in[N]$, $T\in\mathbb{R}_+$均成立，并且

$$\gamma\in\left[1,\frac{1}{\max\{1-K,\alpha\}}\right), \quad K:=\frac{m_{G'}2^{1-2\alpha}(1-\alpha)}{NM_{G'}\alpha}.$$

(2) 无条件地涌现群集：

$$\sup_{t\geq0}\max_{i,j\in[N]}|q_i(t)-q_j(t)|<\infty, \quad \max_{i,j\in[N]}|p_i(t)-p_j(t)|\lesssim e^{-Ct}, \quad C>0.$$

注 3.1. 下面我们列出关于定理 3.1 的一些评论。

(1) 定理 3.1 指出， q_i 始终连续可微，而 p_i 几乎处处可微；随着 α减小， p_i 的正则性会提高。粗略地说，当 α 接近 1 时， p_i 接近一个绝对连续函数；当 α 接近 0 时， p_i 接近一个 Lipschitz 连续函数。事实上，如果只发生粘连而不发生碰撞（见定义 3.2），那么如例 3.1 所述， p_i 确实可以是 Lipschitz 函数。

(2) 对于奇异核，(3.2) 与 (3.3) 的等价性并非显而易见。当核函数 ψ 是正则的时，这种等价性本质上基于以下变量替换公式:

$$\int_0^t \psi(q_k(s)-q_i(s))(G(p_k(s))-G(p_i(s)))ds = \int_0^{q_k(t)-q_i(t)} \psi(s)ds.$$

上述公式成立的条件是 ψ 连续，且 $t \mapsto q_k(t) - q_i(t)$ 连续可微。然而，如果 ψ 仅为非负可测函数，即便 $t \mapsto q_k(t) - q_i(t)$ 绝对连续，变量替换公式仍要求 $q_k - q_i$ 具有单调性，或 ψ 可积且 $\psi(q_k(s)-q_i(s))(G(p_k(s))-G(p_i(s)))$ 可积（见引理 3.2）。因此，由于碰撞时刻附近可能出现病态行为，无法直接应用变量替换公式。

(3) 在 [27], 中，作者提出了一个框架，可在弱原子意义下严格推导具有弱奇异通信的模型 (2.1)（在 $G = \mathrm{Id}$ 条件下）的动力学描述。为此，解应具有 $W^{2,1}$ 的正则性，因此推导仅限于 $\alpha \in (0, 1/2)$ 的情形（见命题 (3.1)）。定理 3.1 指出，对于实数轴上的任意 $\alpha \in (0, 1)$，都可以推导出一个弱原子解。

在建立 (3.2) 与 (3.3) 的等价性之前，我们先回顾 (3.3) 的动力学。记

$$\mathcal{N} := (\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_N), \quad \Psi(r) := \int_0^r \psi(x)dx, \quad \nu_i := p_i^0 - \frac{\kappa}{N}\sum_{k=1}^N \Psi(q_k^0 - q_i^0).$$

命题 3.2. [7] 假设通信权重具有如下形式的弱奇异性:

$$\psi(q) = \frac{1}{|q|^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad q \neq 0,$$

并令 Q 为具有初始数据 $(Q^0, \mathcal{N})$ 的 (3.3) 的一个解。对于固定指标 i 和 j（$i \neq j$），假设

$$q_i^0 > q_j^0.$$

则以下三分法成立。

(1) 若 $\nu_i > \nu_j$，则 q_i 和 q_j 不会在有限时间内发生碰撞:

$$q_i(t) > q_j(t) \quad for\ all\ \ t \geq 0.$$

(2) 若 $\nu_i < \nu_j$，则 q_i 和 q_j 恰好发生一次碰撞，即存在时间 t^* 使得

$$q_i(t) > q_j(t) \quad for\ \ 0 \leq t < t^*, \quad q_i(t^*) = q_j(t^*) \quad and \quad q_i(t) < q_j(t) \quad for\, t > t^*.$$

(3) 如果 $\nu_i = \nu_j$，那么 q_i 和 q_j 将在有限时间内发生碰撞，并且两个粒子在首次碰撞后会粘在一起。(4) 如果 $\nu_i \neq \nu_j$，那么我们有

$$\liminf_{t\to\infty} |q_i(t) - q_j(t)| > 0.$$

因此，除非 $(p_i^0 - p_j^0)(\nu_i - \nu_j) > 0$，否则两个粒子 p_i和 p_j会在某个时间发生重叠；并且当且仅当 $\nu_i = \nu_j$时，它们最终会“粘连”。容易看出

$$\nu_i = \nu_j \quad \Longleftrightarrow \quad p_i(t) = p_j(t) \quad \text{implies} \quad \dot{p}_i(t) = \dot{p}_j(t),$$

如例 3.1 所示。如果核函数是正则的，那么命题 3.2 中的 (1)、(2) 和 (4) 仍然成立，但 (3) 不会发生；智能体永远不会粘连，除非它们在初始状态 [7, 18]时就已经粘连。因此，这种“有限时间内粘连”刻画了奇异核 [28, 29]。接下来，我们将明确粘连及相关概念的定义：

Defi义 3.2. 设 Q 是方程 (3.3) 的一个经典解。考虑两个智能体 q_i 和 q_j.

(1) 若 q_i 和 q_j 在时间 t 碰撞，则称它们发生碰撞

$$q_i(t) = q_j(t) \quad but \quad \dot{q}_i(t) \neq \dot{q}_j(t).$$

(2) 若 q_i 和 q_j 在时间 t 粘连，则称它们粘连

$$q_i(t) = q_j(t) \quad and \quad \dot{q}_i(t) = \dot{q}_j(t).$$

根据命题 3.2，如果粒子在某个时刻发生粘连，那么此后它们将一直粘连。因此，如果 N 个智能体中有一些在时间 t 粘连，系统便立即转变为由加权 N'（$< N$）个智能体组成的系统。为描述这一现象，我们定义碰撞指标集、粘连指标集及其时间集如下：

$$\begin{aligned} &C_i(t) := \{j \in [N] \mid q_i \text{ and } q_j \text{ collide at time } t\}, \\ &S_i(t) := \{j \in [N] \mid q_i \text{ and } q_j \text{ stick at time } t\}, \\ &\mathcal{T} := \bigcup_{i\in[N]} \left(\{t \in \mathbb{R}_+ : |C_i(t)| \neq 0\} \cup \{t \in \mathbb{R}_+ : |S_i| \text{ is discontinuous at } t\}\right). \end{aligned} \tag{3.6}$$

注意，C_i、S_i 和 $\mathcal{T}$ 取决于方程 (3.3) 的解，而当两个粒子开始粘连时，S_i 会发生不连续。

命题 3.3. 假设给定了方程组 (3.3) 的一组初始数据 $(Q^0, \mathcal{N})$。

(1) 方程组 (3.3) 对每个 i 都有唯一的全局经典（即 $q_i(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$）解。特别地，对于每个 $i \in [N]$ 和 $t \in \mathbb{R}_+$，$C_i(t), S_i(t)$ 和 $\mathcal{T}$ 都有定义。(2) 对每个 $i \in [N]$，除有限多个 $t \in \mathbb{R}_+$ 外，$|C_i(t)|$ 均为零。(3) 对每个 $i \in [N]$ 和 $0 \le s \le t < \infty$，都有 $S_i(s) \subset S_i(t)$。特别地，$|S_i|$ 是右连续的递增阶梯函数。(4) $\mathcal{T}$ 的基数有限。

证明. 若证明了 (1)，则其余结论可由命题 3.2 和 (1) 直接推出。因此我们着重证明 (1)。皮亚诺定理保证了全局经典解的存在性。因此，只需验证唯一性。假设存在两个解 $Q = (q_1, \cdots, q_N)$ 和 $Q' = (q'_1, \cdots, q'_2)$，它们具有相同的初始数据 $(Q^0, \mathcal{N}) = (q_1^0, \cdots, q_N^0, \nu_1, \cdots, \nu_N)$，且既不发生碰撞也不粘连（即 $\prod_{i,\ j\in[N]}(q_i^0 - q_j^0) \neq 0$）。分别令 $(C_i, S_i, \mathcal{T})$ 和 $(C'_i, S'_i, \mathcal{T}')$ 为相对于$_{i\neq j}Q$ 和 Q'，按 (3.6) 定义的量。由命题 3.2，存在有限多个时间 $\{t_i\}_{i\in[M]}$ sayisfting

$$[0, \infty) = \bigcup_{c=0}^{M} [t_c, t_{c+1}), \quad 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_M = +\infty, \quad M < \infty,$$

使得 $\{t_1, \cdots, t_{M-1}\} = \mathcal{T}$。类似地，我们相对于$Q'$设定 $[0, \infty) = \bigcup_{c=0}^{M'} [t'_c, t'_{c+1})$。现在我们使用归纳论证来证明，在 $[0, t_c)$上，对于每个$c = 1$、2、$\cdots$、M，都有 $t_c = t'_c$ 和 $Q = Q'$ 。

• (c=1) 由于 Ψ除原点外局部满足利普希茨条件，且在 $t \in [0,\min\{t_1, t_1'\})$中不会于 0 处计算 Ψ ，常微分方程的标准理论保证 $Q(t) = Q'(t)$ 在$[0,\min\{t_1, t_1'\})$中成立。不失一般性，设 $t_1 \le t_1'$。由于我们已经得到经典解的整体存在性， Q 和 Q' 都唯一延拓到 $[0, t_1]$ ，且二者相同。特别地，如果 q_i 和q_j 在 t_1处相撞或开始粘连，那么 q_i' 和 q_j'也会如此。因此，我们在 $[0, t_1] = [0, t_1']$中有 $t_1 = t_1'$ 和 $Q = Q'$ 。

• （归纳步骤）假设 $t_n = t_n'$对于 $n = 1, 2, \cdots, c$且假设解在 $[0, t_c)$ 中唯一，因此 $S_k(t)$ 和 $C_k(t)$ 对每个 $k \in [N]$ 属于 $t \in [0, t_c)$ 都有定义。我们声称

$$\text{for any } t^* \in [t_c, \min\{t_{c+1}, t_{c+1}'\}), \text{ we have } Q = Q' \text{ in } [0, t^*].$$

为用反证法证明这一点，假设

$$Q(T) \neq Q'(T) \quad \text{for some } T \in (t_c, t^*]. \tag{3.7}$$

令 $D(t) := \max_{i\in[N]} |q_i(t) - q_i'(t)|$ 和 $M = M(t)$ 为满足$D(t) = |q_M(t) - q_M'(t)|$的时间相关指标。固定时间 $t \in (t_c, t^*]$和指标 $M(t) = \ell$。不失一般性地，若假设 $q_\ell(t) \ge q_\ell'(t)$，则有

$$\begin{aligned}\dot q_\ell(t) - \dot q_\ell'(t) &= G(\nu_i + \frac{\kappa}{N}\sum_{k=1}^N \Psi(q_k(t) - q_\ell(t))) - G(\nu_i + \frac{\kappa}{N}\sum_{k=1}^N \Psi(q_k'(t) - q_\ell'(t)))\\ &= \frac{\kappa G'(\tilde q_i)}{N}\sum_{k=1}^N \big(\Psi(q_k(t) - q_\ell(t)) - \Psi(q_k'(t) - q_\ell'(t))\big), \quad t \in (t_c + \varepsilon, t^*],\end{aligned}$$

其中 w 最后一个等号用到了中值定理。由 M 的定义可得 s

$$q_k(t) - q_k'(t) \le q_\ell(t) - q_\ell'(t) \iff q_k(t) - q_\ell(t) \le q_k'(t) - q_\ell'(t).$$

由于 Ψ 递增，我们有 $\dot q_\ell(t) - \dot q_\ell'(t) \le 0$。由整体解的存在性可知，每个$\dot q_i$ 和 $\dot q_i'$ 在 $[t_c, t^*)$ 中均一致有界。因此，对于几乎每个$t \in [t_c, t^*)$，我们有 $D(t) \le 0$ ，并且

$$0 \le D(t^*) \le D(t_c) = 0,$$

其中等式由归纳假设得出。因此，采用与 $c = 1$ 情形相同的论证，我们有 $t_{c+1} = t_{c+1}'$ ，并且 $D(t) \equiv 0$ 在 $(t_c, t_{c+1}]$上成立。由归纳法，我们得出$D \equiv 0$ 在 $(t_c, t^*]$上成立。这与 (3.7) 矛盾，从而完成了对初始数据不重叠情形的证明。对于发生碰撞或粘连的初始数据，可令 $t_1 = 0$。□

引理 3.1. 设 $(P, \mathcal{N})$ 是方程 (3.3) 的一个解，其通信函数具有 (3.5) 的形式。当 $\varepsilon > 0$充分小时，以下结论成立。

(1) 如果 p_i 和 p_j 在 $T > 0$ 处相撞，则

$$C\varepsilon \le |q_i(T \pm \varepsilon) - q_j(T \pm \varepsilon)|,$$

其中某个正常数为 $C > 0$。

(2) 如果 p_i 和 p_j 停留在 $T > 0$,

$$D_1\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} \le |q_i(T - \varepsilon) - q_j(T - \varepsilon)| \le D_2\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}},$$

其中

$$D_1 = \left(\frac{2\kappa m_{G'}\alpha}{N(1-\alpha)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad D_2 = \left(\frac{\kappa M_{G'} 2^{\alpha}\alpha}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

证明。在整个证明过程中，我们令

$$\mathcal{T} = \{t_1, t_2, \cdots, t_c\}, \quad t_1 < t_2 < \cdots < t_c, \quad t_0 = 0,$$

其中 $\mathcal{T}$ 定义如命题 3.3。

（• （1）的证明）。不失一般性，令 $\nu_i > \nu_j$ 和 $q_j^0 > q_i^0$。设 q_i 在 $t_C \in \mathcal{T}$ 时与 q_j 碰撞。首先，我们利用中值定理观察到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(q_i - q_j)|_{t=t_C} &= G\left(\nu_i + \frac{\kappa}{N}\sum_{k=1}^{N}\Psi(q_k - q_i)\right)\Big|_{t=t_C} - G\left(\nu_j + \frac{\kappa}{N}\sum_{k=1}^{N}\Psi(q_k - q_j)\right)\Big|_{t=t_C} \\ &= G'(y_{ij})(\nu_i - \nu_j) \geq m_{G'}(\nu_i - \nu_j) =: v_{ij} > 0.\end{aligned} \tag{3.8}$$

由解的连续性，对于某个 $\delta > 0$ ，我们有

$$\frac{v_{ij}}{2} \leq G(p_i(t)) - G(p_j(t)), \quad t \in [t_C - \delta, t_C + \delta].$$

因此，当 $q_i\left(t_C\right) - q_j\left(t_C\right) = 0$ 时，对于任意 $0 < \varepsilon \leq \delta$，我们得到

$$|q_i(t_C \pm \varepsilon) - q_j(t_C \pm \varepsilon)| \geq \left|\int_0^{\varepsilon} G(p_i(t_C \pm s)) - G(p_j(t_C \pm s))ds\right| \geq \frac{\varepsilon v_{ij}}{2}.$$

（• （2）的证明）。假设经过适当重排指标后， $q_1, q_2, \cdots, q_{l-1}, q_l$ 在时间 $t_S \in \mathcal{T}(S \in [c])$ 同时开始粘合，并令

$$q_1(t) < q_2(t) < \cdots < q_{l-1}(t) < q_l(t), \quad \text{for any } t \in (t_{S-1}, t_S).$$

令 $i := j + 1(i, j \in [l])$。我们两次使用中值定理，得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(q_i - q_j) &= G\left(\nu_i + \frac{\kappa}{N}\sum_{k=1}^{N}\Psi(q_k - q_i)\right) - G\left(\nu_j + \frac{\kappa}{N}\sum_{k=1}^{N}\Psi(q_k - q_j)\right) \\ &= \frac{\kappa G'(y_{ij})}{N}\left(\sum_{k=1}^{N}\big(\Psi(q_k - q_i) - \Psi(q_k - q_j)\big)\right) \\ &= \frac{\kappa G'(y_{ij})}{N}\left(\sum_{k=1}^{N}\psi(z_{ijk})(q_j - q_i)\right) \\ &= -\left(\frac{\kappa G'(y_{ij})}{N}\sum_{k=1}^{N}\psi(z_{ijk})\right)(q_i - q_j),\end{aligned}$$

其中 z_{ijk} 位于 $q_k - q_i$ 和 $q_k - q_j$ 之间。注意，第二中值定理成立，因为 i 和 j 是连续的，因此 Ψ 在区间 $(q_k - q_i, q_k - q_j)$ 上可微。特别地，对于 $k \in \{i, j\}$， z_{ijk} 具体为

$$\psi(z_{ijj}) = \psi(z_{iji}) = \frac{\Psi(q_i - q_j)}{q_i - q_j} = \frac{1}{(1-\alpha)(q_i - q_j)^{\alpha}}.$$

因此，我们有

$$\frac{d}{dt}(q_i-q_j)\le-\frac{\kappa m_{G'}}{N}(\psi(z_{ijj})+\psi(z_{iji}))(q_i-q_j)=-C_1(q_i-q_j)^{1-\alpha},\quad C_1:=\frac{2\kappa m_{G'}}{N(1-\alpha)},$$

且 $C_1>0$ 与初始数据无关。现在回顾以下常微分方程:

$$\dot{x}=-C_1x^{1-\alpha},\quad x(0)=x^0>0\quad\Longrightarrow\quad x(t)=(C_1\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{(x^0)^\alpha}{C_1\alpha}-t\right)^{\frac{1}{\alpha}},\quad t\in\left(0,\frac{(x^0)^\alpha}{C_1\alpha}\right).$$

因此，根据比较原理，对于任意充分小的 $\delta>0$，有

$$q_i(t_S-\varepsilon)-q_j(t_S-\varepsilon)\le(C_1\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{(q_i(t_S-\delta)-q_j(t_S-\delta))^\alpha}{C_1\alpha}-(\delta-\varepsilon)\right)^{\frac{1}{\alpha}},\quad\varepsilon\in[0,\delta].\tag{3.9}$$

现在我们断言

$$q_i(t_S-\varepsilon)-q_j(t_S-\varepsilon)\ge(C_1\alpha\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}},\quad\varepsilon\in[0,\delta].\tag{3.10}$$

假设 (3.10) 不成立。那么对于某个 $\varepsilon^*\in[0,\delta]$，有

$$q_i(t_S-\varepsilon^*)-q_j(t_S-\varepsilon^*)<(C_1\alpha\varepsilon^*)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

那么，在 $\delta=\varepsilon^*$ 下，(3.9) 得出

$$q_i(t_S-\varepsilon)-q_j(t_S-\varepsilon)<(C_1\alpha\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}},\quad\varepsilon\in[0,\varepsilon^*].$$

于是，当 t 该不等式为严格不等式，且 $(C_1\alpha\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}|_{\varepsilon=0}=0$，因此存在 $\varepsilon^{**}\in(0,\varepsilon^*]$ 满足

$$q_i(t_S-\varepsilon^{**})-q_j(t_S-\varepsilon^{**})=0.$$

然而，由于 t_S 是 q_i 且 q_j 开始粘合的时刻，这就显得不太自然，验证 (3.10) 即可。由于 i 和 $j=i-1$ 的选取是任意的，且 C_1 与指标无关，因此有

$$\min_{i\ne j,i,j\in[l]}|q_i(t_S-\varepsilon)-q_j(t-\varepsilon)|\ge(C_1\alpha\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}=:D_1\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}.$$

现在任取 i'、$j'\in[l]$，使得 $i'>j'$。由于 $\psi(|r|)$ 关于 $|r|$递减，因此有

$$\Psi(q_k-q_{j'})-\Psi(q_k-q_{i'})=\int_{q_k-q_{i'}}^{q_k-q_{j'}}\psi(r)dr\le\int_{-\frac{q_{i'}-q_{j'}}{2}}^{\frac{q_{i'}-q_{j'}}{2}}\psi(r)dr=\frac{2^\alpha}{1-\alpha}(q_{i'}-q_{j'})^{1-\alpha}.$$

应用中值定理可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(q_{i'}-q_{j'})&=\frac{\kappa G'(y_{i'\ell})}{N}\left(\sum_{k=1}^N\big(\Psi(q_k-q_{i'})-\Psi(q_k-q_{j'})\big)\right)\\&\ge-\frac{\kappa M_{G'}2^\alpha}{1-\alpha}(q_{i'}-q_{j'})^{1-\alpha}=:-C_2(q_{i'}-q_{j'})^{1-\alpha},\quad t\in(t_S-\varepsilon,t_S),\end{aligned}$$

其中 $C_2>0$ 为正常数，且与 i' 和 j'无关。然后，我们采用类似的方法推导 (3.10)，得到

$$q_{i'}(t_S-\varepsilon)-q_{j'}(t_S-\varepsilon)\le(C_2\alpha\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}},\quad\varepsilon\in[0,\delta],$$

因此

$$\max_{i\ne j,i,j\in[l]}|q_i(t_S-\varepsilon)-q_j(t-\varepsilon)|\le(C_2\alpha\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}=:D_2\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}.$$

□

引理 3.2. 假设 $0 \le f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ 和 u 在 $[a,b]$ 上绝对连续。若 $(f\circ u)\times u' \in L^1([a,b])$，则

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(x)dx = \int_a^b f(u(t))u'(t)dt.$$

证明。首先假设 $0\le f$ 有界且可测。对于某个常数 c，定义

$$F(x) := \int_c^x f(t)dt,$$

那么，由 f 的有界性可知 $F \in C^{0,\,1}(\mathbb{R})$。因此 $F\circ u$ 绝对连续，且

$$(F\circ u)'(t) = f'(u(t))u'(t),$$

对于几乎处处的 $t\in[a,b]$，因此我们有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(u(t))u'(t)dt &= \int_a^b (F\circ u)'(t)dt = (F\circ u)(b) - (F\circ u)(b)\\ &= F(u(b)) - F(u(a)) = \int_{u(a)}^{u(b)} F'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)dx.\end{aligned}$$

现在假设 $0\le f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$。定义逼近函数 f_n 如下

$$f_n(x) := \begin{cases} f(x), & \text{if } 0\le f(x)\le n,\\ 0, & \text{if } f(x) > n.\end{cases}$$

那么，由于 f_n 有界，我们有

$$\int_a^b f_n(u(t))u'(t)dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f_n(x)dx.$$

由 f 和 $f(u(t))|u'(t)|$的可积性，根据控制收敛定理可得所需结果。□

因此，只要对于每个 $i,j\in[N]$，$\psi(q_i-q_j)(G(p_i)-G(p_j))$ 局部可积，我们就可以证明 (3.2) 与 (3.3) 等价。更确切地说，设$\Psi(\cdot)$ 是 ψ 的一个原函数：

$$\Psi(x) := \int_0^x \psi(y)dy, \quad x\in\mathbb{R},$$

只要 ψ 局部可积即可。设 (P,Q) 是 (3.2) 的一个解，其中 $p_i\in W^{2,\,1}([0,T])$ 对任意 $T>0$ 均成立。于是可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Psi(q_k(t)-q_i(t)) &= \frac{d}{dt}\int_{q_k(0)-q_i(t)}^{q_k(t)-q_i(t)} \psi(y)dy\\ &= \frac{d}{dt}\int_0^t \psi(q_k(t)-q_i(t))(G(q_k(t))-G(q_i(t)))dt \qquad (\because \text{Lemma 3.2})\\ &= \psi(q_k(t)-q_i(t))(G(p_k(t))-G(p_i(t))),\end{aligned}$$

对于几乎处处的 t。因此，由 (3.2) 可得

$$\frac{d}{dt}\left(p_i - \frac{\kappa}{N}\sum_{k=1}^N \Psi(q_k(t)-q_i(t))\right) = 0, \quad i\in[N],$$

对于几乎处处的 t。现在，我们对上式关于 t 积分，得到

$$p_i(t) = p_i^0 - \frac{\kappa}{N}\sum_{k=1}^{N}\Psi(q_k^0 - q_i^0) + \frac{\kappa}{N}\sum_{k=1}^{N}\Psi(q_k(t) - q_i(t))$$
$$=: \nu_i + \frac{\kappa}{N}\sum_{k=1}^{N}\Psi(q_k(t) - q_i(t)).$$

反之，如果每个 q_i 都连续可微，且 $\dot{q}_i$ 在任意有限时间区间内绝对连续，那么通过直接求导，我们可以对几乎所有 t 从 (3.3) 得到 (3.2)。

现在我们可以证明定理 3.1 了。

定理 3.1 的证明。设 $\mathcal{T} = (t_1, t_2, \cdots, t_c)$ 和 $t_0 = 0, t_{c+1} = \infty$，其中 t_i 关于指标递增。令 $[l]$ 为一组在 $t_S \in \mathcal{T}$ 时粘连的指标，如引理 3.1 的证明中所述。对于任意 $\varepsilon > 0, k \in [c]$ 和 $i, j \in [N]$，我们有以下两种情况之一：

$$q_i(t) \equiv q_j(t) \text{ for } t \geq t_k, \quad \text{or} \quad \inf_{t\in(t_k+\varepsilon, t_{k+1}-\varepsilon)} |q_i(t) - q_j(t)| > C > 0, \tag{3.11}$$

根据命题 3.2，存在某个常数 $C > 0$。因此，当 s 时，$\Psi(q_i(s) - q_j(s))$ 关于 s 连续可微，其中 $|s - t_k| > \varepsilon$，$t_k \in \mathcal{T}$。因此，根据引理 3.2，(3.2) 和 (3.3) 在时间 $T \in (t_k + \varepsilon, t_{k+1} - \varepsilon)$ 上等价。现在考虑满足以下条件的有界正则通信 ψ

$$\psi(x) = \tilde{\psi}(x), \quad x \in (C, \infty),$$

及其原函数 $\tilde{\Psi}(x) := \int_0^x \tilde{\psi}(r)dr$。令 $T \in (t_k + \varepsilon, t_{k+1} - \varepsilon)$。对于 (3.11) 的前一种情形，我们有

$$\Psi(q_i(T) - q_j(T)) - \Psi(q_i(t_k+\varepsilon) - q_j(t_k+\varepsilon)) = 0 = \tilde{\Psi}(q_i(T) - q_j(T)) - \tilde{\Psi}(q_i(t_k+\varepsilon) - q_j(t_k+\varepsilon)).$$

对于 (3.11) 的后一种情形，由于 ψ 和 $\tilde{\psi}$ 在 (C, ∞) 中相同，我们有

$$\Psi(q_i(T) - q_j(T)) - \Psi(q_i(t_k + \varepsilon) - q_j(t_k + \varepsilon)) = \int_{q_i(t_k+\varepsilon)-q_j(t_k+\varepsilon)}^{q_i(T)-q_j(T)} \psi(r)dr$$
$$= \int_{q_i(t_k+\varepsilon)-q_j(t_k+\varepsilon)}^{q_i(T)-q_j(T)} \tilde{\psi}(r)dr = \tilde{\Psi}(q_i(T) - q_j(T)) - \tilde{\Psi}(q_i(t_k + \varepsilon) - q_j(t_k + \varepsilon)).$$

由此得到

$$\begin{aligned}
p_i(T) &= \nu_i + \frac{\kappa}{N}\sum_{k=1}^{N}\Psi(q_k(T) - q_i(T)) \\
&= p_i(t_k + \varepsilon) - \frac{\kappa}{N}\sum_{k=1}^{N}\Psi(q_k(t_k + \varepsilon) - q_i(t_k + \varepsilon)) + \frac{\kappa}{N}\sum_{k=1}^{N}\Psi(q_k(T) - q_i(T)) \\
&= p_i(t_k + \varepsilon) - \frac{\kappa}{N}\sum_{k=1}^{N}\tilde{\Psi}(q_k(t_k + \varepsilon) - q_i(t_k + \varepsilon)) + \frac{\kappa}{N}\sum_{k=1}^{N}\tilde{\Psi}(q_k(T) - q_i(T)) \\
&= p_i(t_k + \varepsilon) + \frac{\kappa}{N}\sum_{k=1}^{N}\int_{t_k+\varepsilon}^{T}\tilde{\psi}(q_k(s) - q_i(s))(G(p_k(s)) - G(p_i(s)))ds.
\end{aligned}$$

˜因此，即使我们在时间 $t_S+\varepsilon$ 将 (3.2) 的核函数从 ψ 改为 ψ， p_i 仍然是一个关于时间的微分方程的解（$t_k+\varepsilon$， $t_{k+1}-\varepsilon$）。现在考虑一个微分方程

$$\dot{\tilde{q}}_i = G(\tilde{\nu}_i + \frac{\kappa}{N}\sum_{k=1}^{N}\tilde{\Psi}(\tilde{q}_k(t)-\tilde{q}_i(t))), \quad \tilde{\nu}_i := \tilde{p}_i^0 - \frac{\kappa}{N}\sum_{k=1}^{N}(\tilde{\Psi}(\tilde{q}_k^0-\tilde{q}_i^0)), \quad \tilde{q}_i^0=\tilde{q}_i(0),$$

其中 $\tilde{q}_i^0 = q_i(t_k+\varepsilon)$ $\tilde{p}_i^0 = p_i(t_k+\varepsilon)$。由于 (3.11) 对 $\tilde{q}_i$也成立，根据相同的论证，˜我们也可以将 ψ 替换为 ψ。换言之，对于 $t\in(t_k+\varepsilon,t_{k+1}-\varepsilon)$，解的取值与 ψ 在原点附近的取值无关。因此，我们可以假设 ψ 是正则的，并对任意 $t\notin\mathcal{T}$使用引理 2.1。由于 $\varepsilon>0$ 的选取是任意的，我们得到

$$\frac{d}{dt}\|P\|_{[l]} \le -\frac{\kappa m_{G'} l}{N}\psi(\|Q\|_{[l]})\|P\|_{[l]} + \frac{2\kappa M_{G'}(N-l)P_M^0 L_{\psi,[l]}}{N}\|Q\|_{[l]},$$
$$L_{\psi,[l]}(t) := \sup_{\substack{r,s\ge q_{[l]}(t),\\ r\neq s}}\left|\frac{\psi(r)-\psi(s)}{r-s}\right| < \infty, \quad q_{[l]}(t) := \min_{\substack{i'\in[l]\\ j'\notin[l]}}|q_{i'}(t)-q_{j'}(t)|,$$

对于 $t\notin\mathcal{T}$。由于 p_i 和 p_j 在 t_S粘连，引理 3.1 得出

$$D_1\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} \le |q_i(t_S-\varepsilon)-q_j(t_S-\varepsilon)| \le D_2\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}},$$

其中

$$D_1 = \left(\frac{2\kappa m_{G'}\alpha}{N(1-\alpha)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad D_2 = \left(\frac{\kappa M_{G'}2^\alpha\alpha}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

由于 $[l]$ 是由粘连粒子组成的集合，索引为 $i\in[l]$ 和 $j\notin[l]$ 的粒子 p_i 和 p_j 在时间 t_S要么发生碰撞，要么彼此分离。因此，对于 $0<\delta\ll 1$，引理 3.1 得出

$$L_{\psi,[l]}(t_S-\delta) \le \left|\frac{d}{dx}\frac{1}{x^\alpha}\right|\Bigg|_{x=C\delta} = \alpha C^{-\alpha-1}\delta^{-\alpha-1}$$
$$\|Q(t_S-\delta)\|_{[l]} \le \sqrt{(l^2-l)\times(D_2\delta^{\frac{1}{\alpha}})^2} \le lD_2\delta^{\frac{1}{\alpha}}.$$

因此，对于 $0<\delta\ll 1$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|P(t_S-\delta)\|_{[l]} &\le -\frac{\kappa m_{G'}l^{1-\alpha}D_2^{-\alpha}}{N}\delta^{-1}\|P(t-\delta)\|_{[l]} + \frac{2\kappa M_{G'}(N-l)P_M^0}{N}C^{-1-\alpha}\delta^{-1-\alpha}lD_2\delta^{\frac{1}{\alpha}}\\ &=: -K_1\delta^{-1}\|P(t-\delta)\|_{[l]} + K_2\delta^{-1-\alpha+\frac{1}{\alpha}}.\end{aligned}$$

那么，对于固定的 $\varepsilon>0$ 和 $t_*<t-\varepsilon$，Gr¨onwall 不等式给出

$$\begin{aligned}\|P(t-\varepsilon)\|_{[l]} &\le \exp\left(-K_1\int_{t^*}^{t_S-\varepsilon}\frac{1}{t_S-s}ds\right)\\ &\quad\times\left[\|P(t^*)\|_{[l]} + K_2\int_{t^*}^{t_S-\varepsilon}\exp\left(K_1\int_{t^*}^{s}\frac{1}{t_S-u}du\right)(t_S-s)^{-1-\alpha+\frac{1}{\alpha}}ds\right]\\ &= \frac{\varepsilon^{K_1}}{(t_s-t^*)^{K_1}}\times\left[\|P(t^*)\| + K_2(t_s-t^*)^{K_1}\int_{t^*}^{t_S-\varepsilon}(t_S-s)^{-1-\alpha+\frac{1}{\alpha}-K_1}ds\right]\\ &\lesssim \begin{cases}\varepsilon^{K_1}(\log(t_S-t^*)-\log\varepsilon), & \text{if } -\alpha+\frac{1}{\alpha}-K_1=0,\\ \varepsilon^{K_1}((t_s-t^*)^{-\alpha+\frac{1}{\alpha}-K_1}-\varepsilon^{-\alpha+\frac{1}{\alpha}-K_1}), & \text{if } -\alpha+\frac{1}{\alpha}-K_1\neq 0.\end{cases}\end{aligned}$$

因此，如果 q_i 和 q_j 在时间 t_S开始黏合，那么对于 $\varepsilon \ll 1$,

$$\begin{aligned}\psi(q_i-q_j)(G(p_i)-G(p_j))|_{t=t_S-\varepsilon} &\le M_{G'}\psi((D_1\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}))D_{P,[l]}(t-\varepsilon)\\ &\le M_{G'}\psi((D_1\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}))\|P(t-\varepsilon)\|_{[l]}\\ &\lesssim \begin{cases}\varepsilon^{K_1-1}(1-\log\varepsilon), & \text{if } -\alpha+\frac{1}{\alpha}-K_1=0,\\ |\varepsilon^{K_1-1}-\varepsilon^{-1-\alpha+\frac{1}{\alpha}}|, & \text{if } -\alpha+\frac{1}{\alpha}-K_1\neq 0.\end{cases}\end{aligned}$$

当 $G(p_i(t))-G(p_j(t))\equiv 0$ 对于 $t\ge t_S$ 时，我们有

$$\psi(q_i-q_j)(G(p_i)-G(p_j))|_{[t_S-\varepsilon,t_S+\varepsilon]}\in L^p,\quad \text{where}\quad p\in\left[1,\frac{1}{\max\{0,1-K_1,1+\alpha-1/\alpha\}}\right).$$

此外，若 $1+\alpha-1/\alpha\le 0$ 且 $1\le K_1$，则我们可以选择 $p=\infty$。注意， K_1 关于 l（同时粘连的粒子数）递增，因此

$$K_1=\frac{\kappa m_{G'}l^{1-\alpha}D_2^{-\alpha}}{N}=\frac{m_{G'}l^{1-\alpha}(1-\alpha)}{NM_{G'}2^{\alpha}\alpha}\ge\frac{m_{G'}2^{1-2\alpha}(1-\alpha)}{NM_{G'}\alpha}=:K.$$

If q_i and q_j 在时间 t_S发生碰撞，其中 $\nu_i>\nu_j$。通过与 (3.8) 中类似的计算，我们有

$$m_{G'}(\nu_i-\nu_j)\le G(p_i(t_S))-G(p_j(t_S))\le M_{G'}(\nu_i-\nu_j),$$

并且 $G(p_i(t_S))-G(p_j(t_S))$ 在 t_S 的某个邻域内是非零有界的。结合引理 3.1，可得

$$\psi(q_i-q_j)(G(p_i)-G(p_j))|_{t=t_S\pm\varepsilon}\lesssim\varepsilon^{-\alpha}.$$

在这种情况下，我们有

$$\psi(q_i-q_j)(G(p_i)-G(p_j))|_{[t_S-\varepsilon,t_S+\varepsilon]}\in L^p,\quad \text{where}\quad p\in\left[1,\frac{1}{\alpha}\right).$$

若 p_i 和 p_j 在 t_S时既不发生碰撞也不粘连，则 $\psi(q_i-q_j)(G(p_i)-G(p_j))$ 在 t_S 附近有界。另一方面，对于满足 $|s-t_c|>\varepsilon$, $t_c\in\mathcal{T}$ 的s， $\psi(q_i(s)-q_j(s))(G(p_i(s))-G(p_j(s)))$ 有界。综合这些结果，我们得出

$$\sum_{i=1}^{N}\psi(q_i-q_j)(G(p_i)-G(p_j))\in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+),\quad \text{where}\quad p\in\left[1,\frac{1}{\max\{1-K,\alpha\}}\right).$$

这就证明了定理 3.1 的第一个断言。

为了证明第二个断言，我们考虑由初始数据 $(P(T),Q(T))$ 出发的方程 (3.2) 的解，其中 $T>t_c$。于是，根据命题 3.2，我们有以下两种情况之一:

$$q_i(t)\equiv q_j(t)\text{ for }t>T,\quad\text{or}\quad\inf_{t\ge T}|q_i(t)-q_j(t)|>C>0,$$

对某个常数 $C>0$。因此，正如我们在证明开始时所做的那样， $t>T$ 的解值独立于原点附近 ψ 的取值。因此，我们可以假设 ψ 是正则的，并应用定理 2.1。由于对于任意 $r>0$， $\int_r^\infty\psi(x)dx=\infty$ ，我们得出群集无条件地出现。□

4. Analysis under strongly singular communications

本节中，我们考虑强奇异通信，其在原点附近不可积。一个典型例子是

$$\psi(q) = \frac{1}{|q|^\alpha}, \quad \text{where} \quad \alpha \geq 1. \tag{4.1}$$

与上一节一样，解的适定性与碰撞引起的奇异性直接相关。对于强奇异核的情形，这个问题可以通过强奇异核所谓的“碰撞规避性质”来处理。

命题 4.1。假设

$$\psi \in (C^{0,1}_{\mathrm{loc}} \cap L^1_{\mathrm{loc}})(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}_+), \quad (\psi(r)-\psi(s))(r-s) \leq 0, \quad \forall r,s \in \mathbb{R}_+,$$

并令 Q 为方程 (2.1) 的一个解，其初始数据 (P^0,Q^0) 无碰撞。若对于任意 $\varepsilon > 0$，$\int_0^\varepsilon \psi(r)dr = \infty$，则存在唯一的具有碰撞规避性质的全局经典解：

$$\inf_{t\in[0,T]} \min_{\substack{i,j\in[N]\\ i\neq j}} |q_i(t)-q_j(t)| > 0, \quad \forall T \in \mathbb{R}_+.$$

此外，若环境空间是一维的（$d=1$），则有

$$\inf_{t\geq 0} \min_{\substack{i,j\in[N]\\ i\neq j}} |q_i(t)-q_j(t)| > 0.$$

证明。尽管可以通过直接修改 [6, 定理 5.2] 和[7, 定理 3.1], 来证明该命题，但这里我们给出一个更简单的证明。由于 Q^0 是非碰撞的，根据标准的柯西–利普希茨理论，在首次碰撞时间τ之前，解是适定的（即最小的 $\tau > 0$，使得对于某些 i、j、$i \neq j$，有 $q_i(\tau) = q_j(\tau)$）。为建立全局适定性，我们首先注意到，碰撞不会在任何有限时间内发生。假设首次碰撞时间 $\tau \in \mathbb{R}_+$ 存在，并令 q_i 为一个发生碰撞的粒子。通过指标重排，不妨定义指标集 $[l] \subset [N]$ 为

$$[l] := \{j \in [N] \mid q_i(\tau) = q_j(\tau)\} \neq \emptyset.$$

于是，对于任意 $\varepsilon > 0$，我们可以在时间 $t \in [0, \tau-\varepsilon)$ 应用引理 2.1 中的第二个估计。根据 $[l]$ 的定义，存在两个正常数 C_1、$C_2 > 0$ 满足

$$\frac{d}{dt}\|P\|_{[l]} \leq -C_1\psi(\|Q\|_{[l]})\|P\|_{[l]} + C_2\|Q\|_{[l]}, \quad t \in [0,\tau-\varepsilon). \tag{4.2}$$

现在定义泛函

$$\tilde{\mathcal{L}}(t) := \frac{C_1}{M_{G'}} \int_{\|Q^0\|_{[l]}}^{\|Q(t)\|_{[l]}} \psi(s)\, ds.$$

然后，$|\mathcal{L}(t)| + \|P(t)\|_{[l]}$ 具有线性增长或次线性增长；存在一个正常数C 满足

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|\tilde{\mathcal{L}}(t)| + \frac{d}{dt}\|P(t)\|_{[l]} &\leq \left|\frac{d}{dt}\tilde{\mathcal{L}}(t)\right| + \frac{d}{dt}\|P(t)\|_{[l]} \\ &= \left|\frac{C_1}{M_{G'}}\psi(\|Q(t)\|_{[l]})\frac{d}{dt}\|Q(t)\|_{[l]}\right| + \frac{d}{dt}\|P(t)\|_{[l]} \leq C_2\|Q\|_{[l]} < C < \infty,\end{aligned}$$

其中第二个不等式使用了 (2.5) 和 (4.2)。因此，如果发生碰撞，则存在一个常数 C 满足

$$\infty = \lim_{t \nearrow \tau} |\tilde{\mathcal{L}}(t)| \lesssim C(1+\tau) < \infty,$$

这就产生了矛盾。因此，碰撞不可能在任何有限时间内发生，这证明了全局经典解的存在性和唯一性。

现在假设 $d = 1$。由（2.1）可推导出一个积分方程

$$G^{-1}(\dot{q}_i(t)) = G^{-1}(\dot{q}_i(0)) + \frac{\kappa}{N}\int_0^t \sum_{k=1}^N \alpha_{ki}(s)(G^{-1}(\dot{q}_k(s)) - G^{-1}(\dot{q}_i(s)))ds, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

其中，修正核 α_{ki} 定义为

$$\alpha_{ki}(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } \dot{q}_k(t) = \dot{q}_i(t), \\ \phi(q_k(t) - q_i(s)) \times \dfrac{\dot{q}_k(t) - \dot{q}_i(t)}{G^{-1}(\dot{q}_k(t)) - G^{-1}(\dot{q}_i(t))} & \text{if } \dot{q}_k(t) \neq \dot{q}_i(t). \end{cases}$$

因此， α_{ki} 关于指标是非负、可测且对称的。由于有限时间内不会发生碰撞，解在全局有定义，并且 [23, 定理1] 保证了对每个 i、$j \in [N]$（$i \neq j$）都成立的如下关于 t 的一致有界性 U：

$$\begin{aligned} \left|\int_{q_i^0 - q_j^0}^{q_i(t)-q_j(t)} \psi(r)dr\right| &= \left|\int_0^t \psi(q_i(s) - q_j(s))(\dot{q}_i(s) - \dot{q}_j(s))ds\right| \\ &= \left|\int_0^t \alpha_{ij}(s)(G^{-1}(\dot{q}_i(s)) - G^{-1}(\dot{q}_j(s)))ds\right| \\ &\leq \int_0^\infty \alpha_{ij}(s)|(G^{-1}(\dot{q}_i(s)) - G^{-1}(\dot{q}_j(s))|ds =: U < \infty. \end{aligned}$$

由于 ψ 在原点附近不可积，我们得出

$$\sup_{t\geq 0} \max_{\substack{i,j\in[N] \\ i\neq j}} \left|\int_{q_i^0 - q_j^0}^{q_i(t)-q_j(t)} \psi(r)dr\right| \leq U \quad \Longrightarrow \quad \inf_{t\geq 0} \min_{\substack{i,j\in[N] \\ i\neq j}} |q_i(t) - q_j(t)| > 0.$$

□

注记 4.1.

(1) 根据命题 4.1，核函数的原点在有限时间内不会被取到。因此，在命题 4.1 的相同假设下，尽管 ψ 不是 Lipschitz 连续的，定理 2.1 的结果仍然成立。(2) 尽管命题 4.1 的证明相当简单，但无法推导出智能体之间的显式下界。有关下界的显式表达式，请参见 [6, 定理 5.2] 的证明。(3) 如果核函数在原点处弱奇异（即，对于某个 $\varepsilon > 0$, $\int_0^\varepsilon \psi(r)dr < \infty$），则可能发生碰撞，正如上一节所述。

对于任意维数的欧氏空间， [33] 的作者通过采用适当的势能，推导出了在 $\alpha > 2$ 和 $G = \mathrm{Id}$：条件下相对距离严格为正的下界存在性：

$$\min_{i,j\in[N]} |q_i^0 - q_j^0| > 0 \quad \Rightarrow \quad \inf_{t\geq 0} \min_{i,j\in[N]} |q_i(t) - q_j(t)| \geq L_\infty > 0,$$

该势能具有耗散结构。不幸的是，势能的耗散性严重依赖于伽利略不变性，而由于速度控制函数的存在，(2.1)不具备这种不变性。为此，我们为 L_∞的存在性提供了另一种刻画。

定理4.1. 设 (P,Q) 是方程 (2.1) 的一个解，其核函数具有 (4.1) 的形式。假设 Q 是非碰撞的，并进一步假设

(1) $\alpha \neq 1$，且 (2) (P,Q) 呈

现群集。

那么，个体间距离存在严格正下界：

$$\inf_{t\geq 0}\min_{\substack{i,j\in[N]\\ i\neq j}}|q_i(t)-q_j(t)|>0.$$

证明. 根据命题 4.1，定理 2.1 的结论对具有 (4.1) 形式的核函数同样成立。因此，存在一个常数 $C>0$，满足

$$\max_{i,j}|p_i(t)-p_j(t)|\lesssim e^{-tC},\quad t\in\mathbb{R}_+,$$

并且对于任意指标，极限 $\lim_{t\to\infty}|q_i(t)-q_j(t)|$ 总是存在。特别地，若 $\lim_{t\to\infty}|q_i(t)-q_j(t)|=0$，则有

$$\begin{aligned}|q_i(t)-q_j(t)| &= \left|\int_\infty^t(\dot q_i(t)-\dot q_j(t))dt\right| = \left|\int_t^\infty(\dot q_j(t)-\dot q_i(t))dt\right|\\ &\leq M_{G'}\int_t^\infty|p_i(s)-p_j(s)|ds\lesssim\int_t^\infty e^{-sC}ds\lesssim e^{-tC}.\end{aligned}\tag{4.3}$$

现在，对于某个指标 i，假设存在一个集合 $[l]\subset[N]$，其定义如下：

$$[l]:=\{j\in[N]\mid\lim_{t\to\infty}(q_i(t)-q_j(t))=0\}\neq\emptyset.$$

由 (4.3) 可知，存在正常数 B、$C>0$，满足 $\|Q(t)\|_{[l]}\leq Be^{-tC}$。因此，当 $t\gg 1$ 充分大时，我们得到

$$\left|\int_{\|Q^0\|_{[l]}}^{\|Q(t)\|_{[l]}}\psi(s)ds\right| = \int_{\|Q(t)\|_{[l]}}^{\|Q^0\|_{[l]}}\psi(s)ds\geq\int_{Be^{-tC}}^{\|Q^0\|_{[l]}}\psi(s)ds=\frac{B^{1-\alpha}e^{tC(\alpha-1)}-\|Q^0\|_{[l]}^{1-\alpha}}{\alpha-1}.$$

由于 $|p_i(t)-p_j(t)|$ 的极限总是存在且有限时间内不会发生碰撞，因此存在正常数 U，满足

$$\sup_{t\geq 0}\sup_{\substack{i\in[l]\\ j\notin[l]}}\psi(q_i-q_j)<U<\infty.$$

˜因此，在命题 4.1 的证明中定义的 $|\mathcal{L}|$ 呈线性增长或次线性增长，这就导致矛盾：

$$e^{tC(\alpha-1)}-1\lesssim\left|\int_{\|Q^0\|_{[l]}}^{\|Q(t)\|_{[l]}}\psi(s)ds\right|\lesssim 1+t.$$

因此，我们得出 $[l]=\emptyset$，如所期望的。 □

注4.2. (1) 设 (P,Q) 是方程 (2.1) 的一个解，其初始数据 (P^0,Q^0) 为无碰撞初始数据。推论 2.1指出，较大的 κ 不仅会导致群集，还会使智能体之间保持严格间距；

$$\min_{\substack{i,j\in[N]\\ i\neq j}} \inf_{t\geq 0} |q_i(t)-q_j(t)| > 0 \tag{4.4}$$

此外，当通信形式为 $\psi(x)=|x|^{-\alpha}$ 时，[33] 中的定理指出，对于任意 $\kappa>0$，在 $\alpha>2$ 和 $G=$Id 下均可实现 (4.4)。然而，据作者所知，在 $\alpha\in[1,2]$ 条件下得到 (4.4) 的进一步结果尚缺失。同时，定理 2.1 和定理4.1表明，当 α 接近 1 时，κ 可以任意小。因此，定理4.1或可补充先前的结果。

(2) 如果能够保证相对状态具有严格正下界，就像我们在定理 3.1 的证明中所做的那样，那么我们可以对核函数进行正则化。例如，作为一种应用，我们也可以将 [19] 中的稳定性估计结果应用于奇异核，尽管该定理的证明要求核函数具有利普希茨连续性。另一方面，我们可以放宽 [1]，中稳定性估计的先验条件，因为其中一些条件旨在确保相对状态之间具有严格下界。

（3）在许多采用奇异核的多体系统中，
通常需要确保相对距离具有严格正下界，
即智能体之间的个体间距离具有严格正下界。例如，这可以保证 ω-极限集的良定性，
从而使我们能够应用动力系统理论，例如 LaSalle不变原理
。

5. CONCLUSION

本文提出了带有速度控制函数的 CS 一致性模型，并给出了实现单簇或双簇集群涌现的若干条件。当通信具有奇异性时，该模型会表现出常规通信中没有的一些有趣性质，例如粘连或碰撞避免，这取决于核函数在原点附近的可积性。如果通信是弱奇异的，粒子可能在有限时间内粘连或发生碰撞，从而导致正则性丧失。我们研究了此类解在实数轴上的存在性、唯一性和正则性。另一方面，当通信具有强奇异性时，只要初始数据是非碰撞的，粒子就不会在有限时间内发生碰撞。然而，对于一般初始数据，相对距离是否存在严格正下界仍是一个有待解决的问题。我们证明，若奇异性不是临界的（$\alpha\neq 1$），且能够保证群集，则具有强奇异性的典型通信函数（$\psi(|q|)=|q|^{-\alpha},\ \alpha\geq 1$）会使智能体之间的距离具有严格正下界。未来仍有若干值得研究的问题。例如，放宽智能体之间严格间距的先验条件，是尚待解决的问题之一。另一方面，我们对粘连解的研究仅限于实数轴，若能将结果推广到更一般的空间，将会很有意义。

REFERENCES

[1] H. Ahn: *Uniform stability of the Cucker–Smale and thermodynamic Cucker–Smale ensembles with singular kernels.* Netw. Heterog. Media. ( ) **17** 5 2022 753 ( ), . [2] H. Ahn, J. Byeon, S.-Y. Ha 和 J. Yoon: *On the relativistic flocks over the unit sphere and the hyperboloid in a bonding force field* . J. Math. Phys. ( ), Paper No. **64** 2023 012705 . [3] H. Ahn, S.-Y. Ha 和 J. Kim: *Nonrelativistic limits of the relativistic Cucker-Smale model and its kinetic counterparts* . J. Math. Phys. ( ), Paper No. **63** 2022 082701 .

[4] S. Ahn 和 S.-Y. Ha: *Stochastic flocking dynamics of the Cucker–Smale model with multiplicative white noises.* J. Math. Phys. **51** 2010 103301 ( ), Paper No. [5] G. Albi, N. Bellomo, L. Fermo, S.-Y. Ha, J. Kim, L. Pareschi, D. Poyato 和 J. Soler: *Vehicular traffic crowds and swarms. From kinetic theory and multiscale methods to applications and research perspectives* . 数学模型与方法在应用科学中 **29** 2019 1901 2005 的应用 ( ), –。[6] J. Byeon, S.-Y. Ha 和 J. Kim: *Emergence of state-locking for the first-order nonlinear consensus model on the real line* 。[7] J. Byeon, S.-Y. Ha 和 J. Kim: *Asymptotic flocking dynamics of a relativistic Cucker-Smale flock under singular communications* **63** 2022 012702 . J. Math. Phys. ( ), Paper No. . [8] J. A. Carrillo, Y.-P. Choi, P. B. Mucha 和 J. Peszek, *Sharp conditions to avoid collisions in singular Cucker-Smale interactions* **37** 2017 317 328 。非线性分析：现实世界应用 ( ), –。[9] J. A. Carrillo, Y.-P. Choi, E. Tadmor 和 C. Tan: *Critical thresholds in 1D Euler equations with non-local forces* **26** 2016 185 206 。数学模型与方法在应用科学中的应用 ( ), –。[10] J. A. Carrillo, M. Fornasier, J. Rosado 和 G. Toscani: *Asymptotic flocking dynamics for the kinetic Cucker-Smale model* **42** 2010 218 236 。SIAM 数学分析杂志 ( ), –。[11] J. A. Carrillo, M. Fornasier, G. Toscani 和 F. Vecil, *Particle kinetic and hydrodynamic models of swarming. Mathematical modeling of collective behavior in socio-economic and life sciences.* 2010 , , ( ), 第 297–336 页, 建模、仿真、科学、工程与技术, Birkhauser Boston, Inc., 美国马萨诸塞州波士顿。[12] J. Cho, S.-Y. Ha, F. Huang, C. Jin 和 D. Ko: *Emergence of bi-cluster flocking for the Cucker–Smale model.* **26** 06 2016 1191 1218 应用科学中的数学模型与方法, ( ) ( ), -。[13] S. Choi 和 S.-Y. Ha: *Emergence of flocking for a multi-agent system moving with constant speed.* 数学科学通讯 **14** (2016), 953–972。[14] Y.-P. Choi, S.-Y. Ha 和 Z. Li: *Emergent dynamics of the Cucker-Smale flocking model and its variants.* 活性粒子。第 **1** 卷：理论、模型与应用进展, 299–331, 建模、仿真、科学、工程与技术, Birkhauser/Springer, 瑞士查姆, 2017。[15] F. Cucker 和 S. Smale: *Emergent behavior in flocks.* IEEE 自动控制汇刊 52 (2007), 852–862。[16] F. Cucker 和 S. Smale: *On the mathematics of emergence.* 日本数学杂志 2 (2007), 197–227。[17] S.-Y. Ha, J. Kim 和 T. Ruggeri: *From the relativistic Vlasov–Maxwell–Boltzmann system to the relativistic Cucker–Smale flocking.* **235** 2020 1661 1706 理性力学与分析档案 ( ), –。[18] S.-Y. Ha, J. Kim, J. Park 和 X. Zhang: *Complete cluster predictability of the Cucker-Smale flocking model on the real line* **231** 2019 319 365 。理性力学与分析档案 ( ), –。[19] S.-Y. Ha, J. Kim 和 X. Zhang: *Uniform stability of the Cucker-Smale model and its application to the mean-field limit.* **11** 5 2018 1157 动力学及相关模型, ( ) ( ), 。[20] S.-Y. Ha, J. Park 和 X. Zhang: *A first-order reduction of the Cucker-Smale model on the real line and its clustering dynamics* **16** 2018 1907 1931 。数学科学通讯 ( ), –。[21] S.-Y. Ha 和 J.-G. Liu: *A simple proof of Cucker-Smale flocking dynamics and mean field limit.* 数学科学通讯 7 (2009), 297–325。[22] S.-Y. Ha 和 E. Tadmor: *From particle to kinetic and hydrodynamic description of flocking.* 动力学及相关模型 1 (2008), 415–435。[23] J. M. Hendrickx 和 J.N. Tsitsiklis: *Convergence of type-symmetric and cut-balanced consensus seeking systems.* **58** 1 2012 214 218 IEEE Trans. Automat. Contr. ( ) ( ), -。[24] J. Kim: *First-order reduction and emergent behavior of the one-dimensional kinetic Cucker-Smale equation* **302** 2021 496 532 。J. Differential Equations ( ), –。[25] C. H. Min, H. Ahn, S.-Y. Ha 和 M. Kang: *Sufficient conditions for asymptotic phase-locking to the generalized Kuramoto model* **16** 1 2023 97 132 。动力学及相关模型, ( ) ( ), -。[26] S. Motsch 和 E. Tadmor: *Heterophilious dynamics enhances consensus.* SIAM 评论 56 (2014), 577–621。[27] P. B. Mucha 和 J. Peszek, *The Cucker-Smale equation: singular communication weight measure-valued solutions and weak-atomic uniqueness* , 。理性力学与分析档案 ( ), –。[28] J. Peszek, *Discrete Cucker–Smale flocking model with a weakly singular weight.* SIAM 数学分析杂志, (2015), 47(5), 3671-3686。[29] J. Peszek, *Existence of piecewise weak solutions of a discrete Cucker–Smale's flocking model with a singular communication weight* **227** 2018 273 308 , 2014 257 8 2900 2925 J. Differential Equations, ( ), ( ), -。[30] A. Pikovsky, M. Rosenblum 和 J. Kurths: *Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences.* 剑桥大学出版社, 剑桥, 2001。

[31] J. Toner 和 Y. Tu： *Flocks, herds, and schools: A quantitative theory of flocking.*《物理评论E》58 (1998)，4828-4858。[32] T. Vicsek 和 A. Zefeiris： *Collective motion.*《物理报告》517 (2012)，71-140。[33] X. Yin、D. Yue 和 Z. Chen：《IEEE自动控制汇刊》65(7) (2019)，3112-3119。

（JUNHYEOK BYEON）Department of Mathematical Sciences
Seoul National University, Seoul 08826, Republic of Korea
Email address: giugi2486@snu.ac.kr