arXiv:2302.03276v1 [quant-ph] 7 Feb 2023

鲁棒抵抗拉比误差和阻塞误差的全几何里德堡量子门

S.-L. Su,[1] Li-Na Sun,[1] B.-J. Liu,[2,*] L.-L. Yan,[1,†] M.-H. Yung,[2] W. Li,[3,‡] 和 M. Feng[4,5,6]
[1] *School of Physics, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China*
[2] *Department of Physics, Southern University of Science and Technology, Shenzhen, Guangdong 518055, China*
[3] *School of Physics and Astronomy, University of Nottingham, Nottingham NG7 2RD, United Kingdom*
[4] *State Key Laboratory of Magnetic Resonance and Atomic and Molecular Physics, Wuhan Institute of Physics and Mathematics, Innovation Academy of Precision Measurement Science and Technology, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China*
[5] *Research Center for Quantum Precision Measurement, Guangzhou Institute of Industry Technology, Guangzhou*, 511458, *China*
[6] *Department of Physics, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, China*
(日期：2023年2月8日)

我们提出了一种新颖的双量子比特门方案，其中里德堡原子受到由几何演化过程产生的设计脉冲作用。通过分别对控制原子和目标原子采用混合鲁棒非绝热与绝热几何操作，与传统双量子比特阻塞门相比，我们提高了双量子比特里德堡门对拉比控制误差和阻塞误差的鲁棒性。采用当前最先进实验参数得到的数值结果证实了上述鲁棒性。我们还评估了运动诱导退相干、偶极-偶极相互作用以及不完美激发诱导的泄漏误差所造成的影响，这些因素均可能降低门保真度。我们的方案为在中性原子系统中实现对系统控制误差（拉比误差）和阻塞误差具有容忍能力的几何量子计算提供了一条有前景的途径。

I. 引言

中性原子被激发至高能里德堡态时，具有很强的偶极-偶极相互作用 [1–4]。偶极-偶极相互作用诱导的里德堡阻塞在量子计算中有许多重要应用 [5, 6]。实验上，已观测到里德堡阻塞 [7, 8], ，并且还利用里德堡原子实现了量子受控非门和量子纠缠态 [9–17] 。此外，基于里德堡阻塞的环面码拓扑序也已得到预测 [18]。基于里德堡阻塞的量子逻辑门通常伴有阻塞误差 [19] ，其大小与 $(\Omega/V)^2$，成正比，其中 Ω 和 V 分别表示拉比频率和里德堡-里德堡相互作用强度。尽管可以通过增强里德堡-里德堡相互作用强度来减小阻塞误差，但由于相互作用增强会加大力学效应，量子计算方案的性能不可避免地会受到一定程度的影响 [20]。通过考虑合理的广义拉比频率 [21] ，或纳入包含里德堡态的暗态动力学 [22]，可以将阻塞误差降至最低。除了阻塞误差之外，控制误差也是导致保真度下降的常见因素，例如高拉比频率下由激光强度涨落引起的拉比频率误差 [23], ，这在里德堡量子计算中十分常见。

阿贝尔几何相位 [24, 25] 和非阿贝尔併率 [26–29] 仅取决于循环过程演化轨迹的整体性质。基于此，基于阿贝尔和非阿贝尔几何相位（併率）的几何量子逻辑门能够抵抗量子门演化过程中的局域噪声 [30–34]。早期的几何量子计算方案通常依赖绝热过程，以抑制哈密顿量不同瞬时本征态之间的跃迁 [35–39]。然而，绝热过程需要较长的演化时间才能满足绝热条件，因此尽管该方案能够抵抗系统性控制误差，仍可能受到退相干的影响。随后，人们提出了非绝热几何量子计算 [40–44] 和非绝热併合量子计算（NHQC） [45, 46] ，以缩短几何量子门的演化时间，从而增强方案抵抗退相干的鲁棒性 [47–52]。实验上，核磁共振系统 [53, 54], 、超导量子比特 [55–61]以及金刚石中的氮空位中心 [62–67] 方面取得的进展，证实了这些理论方案。然而，这些非绝热方案对实验控制误差较为敏感 [68], ，这限制了非绝热几何量子计算和非绝热几何量子计算（NHQC）的实际应用。最近，为解决这一问题，Liu 等人 [69] 提出了一种非绝热几何量子计算（NHQC）+ 方案，将非绝热几何量子计算与最优控制技术相结合，但代价是需要复杂的脉冲和较长的量子门时间 [70–76]。为了兼顾几何量子门的速度、灵活性和鲁棒性，研究人员在理论上提出了超鲁棒脉冲几何量子计算方案 [77] ，并在实验上予以实现[78]。

本文中，我们采用几何过程，在考虑参考文献

*电子邮箱：lbjie2010@163.com；现地址：马萨诸塞大学阿默斯特分校物理系，阿默斯特，马萨诸塞州 01003，美国
†电子邮箱：llyan@zzu.edu.cn
‡电子邮箱：weibin.Li@nottingham.ac.uk

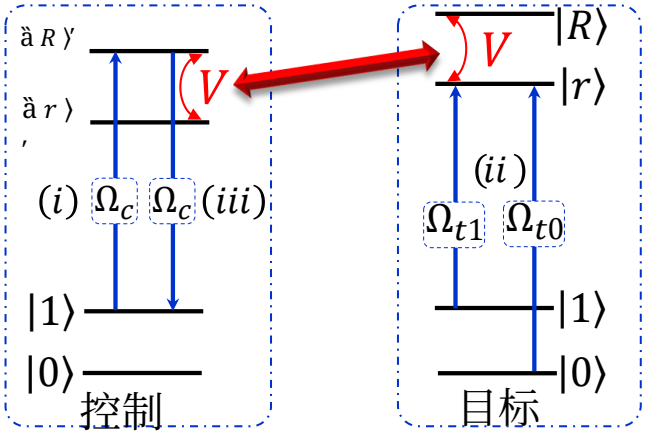

图 1. 构造 CNOT 门所需的控制（左）和目标（右）量子比特的能级。 $|0\rangle \equiv |6s_{1/2},\ f=3,\ m_f=0\rangle$和 $|1\rangle \equiv |6s_{1/2},\ f=4,\ m_f=0\rangle$ 是铯原子钟态中的两个长寿命基态。 $|R'\rangle \equiv |101s_{1/2},\ m=1/2\rangle$ 和$|r'\rangle \equiv |101p_{3/2},\ m=3/2\rangle$ 是控制原子的里德堡态，而 $|R\rangle \equiv |109p_{3/2},\ m=3/2\rangle$ 和 $|r\rangle \equiv |109s_{1/2},\ m=1/2\rangle$ 是目标原子的里德堡态。我们考虑沿量子化轴方向的静态斯塔克场 15.4 V/m ，它使里德堡原子对的能量简并，并导致与 $C_3 = 64.4$ GHz $\cdot\mu m^3$ [22]的共振相互作用。V 表示与 C_3 及原子间距离相关的里德堡-里德堡相互作用强度。对于控制原子，跃迁 $|1\rangle \leftrightarrow |R'\rangle$ 由激光共振驱动，其拉比频率随时间变化，为 $\Omega_c(t) \equiv |\Omega_c(t)|e^{i\varphi_c(t)}$。对于目标原子，跃迁 $|0\rangle(|1\rangle) \leftrightarrow |r\rangle$ 由激光共振驱动，其拉比频率随时间变化，为 $\Omega_{t0}(t)[\Omega_{t1}(t)]$ ，相位为$\varphi_{t0}(\varphi_{t1})$。

[22], 所述的暗态动力学的基础上，构造非平凡的双量子比特里德堡量子门。通过在控制原子和目标原子上结合稳健的非绝热与绝热几何操作，我们可以实现对拉比控制和阻塞误差均具有鲁棒性的双量子比特门。通过对当前实验条件下本方案与传统里德堡双量子比特方案的性能进行全面数值分析，我们发现，由激光拉比频率偏差引起的控制误差以及阻塞误差均可得到显著抑制。我们还考虑了运动诱导退相干，以及由偶极-偶极相互作用和激发不完美所导致的泄漏误差。本方案适用于里德堡实验平台，也颇具实用价值，因为它能够放宽一些严苛条件，例如极其稳定的拉比频率和极强的里德堡原子相互作用。

II. 模型

实现双量子比特 C非门的方案基于暗态方案 [22]，由图1所示的以下三个步骤组成。步骤（i）是施加共振激光，以实现 $|1\rangle \to |R'\rangle$ 控制原子的几何操作。在旋波近似和相互作用框架下，该步骤的哈密顿量可写为（$\hbar \equiv 1$）

$$H_c(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \Omega_c^* \\ \Omega_c & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

在基底 $\{|1\rangle,\ |R'\rangle\}$ 中，激光的控制参数为 $\Omega_c \equiv \Omega_c(t) = |\Omega_c(t)|e^{-i\varphi_c(t)}$。一般而言，由于时间排序算符，对于含时哈密顿量，难以解析求解动力学演化$U(t) = \mathcal{T}e^{-i\int_0^t H_c(t')dt'}$。

为实现鲁棒几何门，我们采用逆向工程方法 [79–81] ，选择一对态 $|\phi_k(t)\rangle$ ，使其满足含时薛定谔方程，

$$\begin{aligned} |\phi_1(t)\rangle &\equiv e^{i\gamma}\left[\cos(\theta/2)|1\rangle - \sin(\theta/2)e^{-i\eta}|R'\rangle\right], \\ |\phi_2(t)\rangle &\equiv e^{-i\gamma}\left[\sin(\theta/2)e^{i\eta}|1\rangle + \cos(\theta/2)|R'\rangle\right], \end{aligned} \tag{2}$$

其中 γ， η，以及 θ 均为含时参数。具体而言，我们发现激光的控制参数由以下耦合微分方程组决定 [见附录 A],

$$\begin{aligned} |\Omega_c(t)| &= \sqrt{\dot\theta^2 + \dot\eta^2\tan^2\theta}, \\ \varphi_c(t) &= \eta - \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\dot\eta\tan\theta}{\dot\theta}\right), \\ \dot\gamma(t) &= -\frac{\sin^2(\theta/2)}{\cos\theta}\dot\eta. \end{aligned} \tag{3}$$

经过一次循环演化，即$|\phi_k(\tau)\rangle = \exp\left[i(-1)^k\gamma(\tau)\right]|\phi_k(0)\rangle$ $(k = 1, 2)$，所获得的非绝热几何相位（阿哈罗诺夫–阿南丹相位） [25] 为

$$\gamma_g = \Delta\gamma + \int_0^\tau \langle\phi_1(t)|H(t)|\phi_1(t)\rangle\, dt\ , \tag{4}$$

其中 $\Delta\gamma = \gamma(\tau) - \gamma(0)$ 是全局相位，而式（4）右边的第二项表示动力学相位。要消除动力学相位，一个简单的选择是满足平行输运条件，$\langle\phi_k(t)|H(t)|\phi_k(t)\rangle = 0$。具体而言，我们发现控制参数需要满足以下条件

$$\dot\eta\sin\theta = 0\ . \tag{5}$$

于是，得到的幺正演化变为纯几何的，即$U(\tau) = e^{i\gamma_g}|\phi_1(0)\rangle\langle\phi_1(0)| + e^{-i\gamma_g}|\phi_2(0)\rangle\langle\phi_2(0)|$，它在基底 $\{|1\rangle,\ |R'\rangle\}$中不是对角的，

$$U(\tau) = e^{-i\gamma_g \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(c)}} \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{n} = [\sin\theta(0)\cos\eta(0)\ -\sin\theta(0)\sin\eta(0),\ \cos\theta(0)]$，$\sigma^{(c)} = [\sigma_x^{(c)},\ \sigma_y^{(c)},\ \sigma_z^{(c)}]$ 表示控制原子的泡利矩阵。注意，式（6）中的几何门对于实验拉比误差（即 $\Omega_C \to \Omega_C(1+\xi)$ 及其相对拉比频率偏差 ξ的鲁棒性，并不比标准动力学门 [68]更具优势。为进一步增强对该误差的

鲁棒性，应消除状态 $|\phi_1(t)\rangle$ 和 $|\phi_2(t)\rangle$ 之间的额外动力学效应，[77]，即$\int_0^\tau \langle\phi_1(t)|H(t)|\phi_2(t)\rangle\, dt = 0$。具体而言，控制参数应满足以下约束条件：

$$\int_0^\tau \frac{\dot{\theta}}{2} \exp\left(-i\int_0^t \frac{\dot{\eta}}{\cos\theta} dt'\right) dt = 0, \tag{7}$$

其中 $\tau = \tau_1$ 是步骤 (i) 的总时长。

表 I. 步骤 (i) 中实现超鲁棒几何量子操作的一组可能的激光振幅和相位参数。

	$t \in [0, \frac{\tau_1}{3}]$	$t \in (\frac{\tau_1}{3}, \frac{2\tau_1}{3}]$	$t \in (\frac{2\tau_1}{3}, \tau_1]$
$\varphi_c(t)$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$
$\|\Omega_c(t)\|$	$\frac{3\pi}{\tau_1}$	$\frac{3\pi}{\tau_1}$	$\frac{3\pi}{\tau_1}$

在步骤 (i) 中，我们对控制原子实施 $|1\rangle \to |R'\rangle$ 操作，这等价于在初始态为$U = \sigma_x$时实现非门（$|1\rangle$）。为满足鲁棒非门的方程（5）和（7）中的条件，可以设置

$$|\Omega_c(t)| = \dot{\theta},\ \varphi_c = \eta - \frac{\pi}{2}. \tag{8}$$

表 I中列出的一组参数满足方程（5）和（7）中的约束[见附录 B]。

在步骤(ii)中，我们实现了取决于控制原子状态、作用于目标原子的条件操作。目标原子的哈密顿量为

$$\begin{aligned} H_t(t) &= \frac{\Omega_{t0}(t)}{2}|0\rangle_t\langle r| + \frac{\Omega_{t1}(t)}{2}|1\rangle_t\langle r| + \text{H.c.} \\ &= \frac{\Omega_t(t)}{2}(\sin\frac{\Theta}{2}e^{i\varphi(t)}|0\rangle + \cos\frac{\Theta}{2}|1\rangle)_t\langle r| + \text{H.c.}, \end{aligned} \tag{9}$$

其中 $\Omega_{t1}\ t\ |e^{i\varphi_{t1}\ t}\ ^{t0}\quad \varphi_2\ t\quad =\quad ^{t0}\quad \varphi_{t1}\ t\quad ^{t1}_{\varphi_{t0}\ t}\quad =\quad (t)$ $=\quad |\Omega\ (t)|e^{i\varphi_{t0}(t)},\ \Omega\ (t)\ \Omega\ ()_(),\ (\ )\ (),\ (\ )$ $\varphi\ t\ +\ \varphi_2\ t\quad _t\ t\quad =\ |\ _t\ t\ |e^{i\varphi_2\ t}\quad |\ _t\ t\ |\ =\ (\ )\ (),$ $\Omega\ (\ )\ \Omega\ (\ )()$，且 $\Omega\ (\ )\sqrt{|\Omega_{t0}(t)|^2 + |\Omega_{t1}(t)|^2}$，$\tan(\Theta/2) = |\Omega_{t0}|/|\Omega_{t1}|$。若 Θ与时间无关，则目标原子的哈密顿量在基底 $\{|b\rangle_t \equiv \sin(\Theta/2)e^{i\varphi}|0\rangle + \cos(\Theta/2)|1\rangle,\ |d\rangle_t \equiv \cos(\Theta/2)|0\rangle - \sin(\Theta/2)e^{-i\varphi}|1\rangle,\ |r\rangle_t\}$下重写为

$$H_t(t) = \frac{\Omega_t}{2}|b\rangle_t\langle r| + \text{H.c.}, \tag{10}$$

其中，$|d\rangle$ 是系统中与动力学解耦的暗态。

现在考虑步骤 (ii) 的第一种情况。如果控制原子最初处于 $|0\rangle$态，则在步骤 (i) 之后它不会被激发。因此，动力学中不会涉及 RRI。随后，目标原子的演化由式 (10) 控制，其形式与$H_c(t)$ 相似。因此，可以采用步骤 (i) 中提到的类似方法，设计所需的超鲁棒几何子空间 $\{|b\rangle_t, |r\rangle_t\}$ 中的操作。具体而言，我们选择如下随时间变化的态

$$\begin{aligned} |\phi_{t1}(t)\rangle &\equiv e^{i\Upsilon}\left[\cos\left(\frac{\theta_t}{2}\right)|b\rangle_t - \sin\left(\frac{\theta_t}{2}\right)e^{-i\eta_t}|r\rangle\right], \\ |\phi_{t2}(t)\rangle &\equiv e^{-i\Upsilon}\left[\sin\left(\frac{\theta_t}{2}\right)e^{i\eta_t}|b\rangle_t + \cos\left(\frac{\theta_t}{2}\right)|r\rangle\right], \end{aligned} \tag{11}$$

其中，Υ、θ_t 和 η_t 是随时间变化的参数。与步骤 (i) 中的过程类似，步骤 (ii) 中控制参数的平行输运条件和超鲁棒条件为：

$$\begin{aligned} &\int_{\tau_1}^{\tau_1+\tau_2} \frac{\dot{\theta}_t}{2} \exp\left(-i\int_{\tau_1}^{\tau_1+t} \frac{\dot{\eta}_t}{\cos\theta_t} dt'\right) dt = 0, \\ &\dot{\eta}_t \sin\theta_t = 0\ . \end{aligned} \tag{12}$$

随时间变化的激光参数由下式确定：

$$|\Omega_t(t)| = \dot{\theta}_t, \quad \varphi_2(t) = \eta_t - \frac{\pi}{2}\ . \tag{13}$$

因此，子空间中的几何演化算符 $\{|b\rangle_t,\ |r\rangle_t\}$ 可由方程（6）给出，其中 $\boldsymbol{n}$ =[正弦 θ_t（0）余弦 η_t（0） $-$正弦 θ_t（0）正弦η_t（0），余弦 θ_t（0）]。

在此步骤中，我们实现几何操作$|b\rangle \to e^{i\pi}|b\rangle$，其 Υ（τ） $= \pi$，当初始态为$U = -|b\rangle_t\langle b| - |r\rangle_t\langle r|$ 时，它等价于 $|b\rangle_t$。若考虑解耦的暗态，此步骤中的演化算符将为 $U_{ii} = -|b\rangle_t\langle b| - |r\rangle_t\langle r| + |d\rangle_t\langle d|$。为使用超鲁棒脉冲实现这一目标，且不失一般性，我们将哈密顿量参数设计为表 II所示。

经过此步骤后，计算子空间中实现了操作 $U_t = -|b\rangle\langle b| + |d\rangle\langle d|$，可将其重新表示为

$$U_t = \begin{pmatrix} \cos(\Theta) & -e^{i\varphi}\sin(\Theta) \\ -e^{-i\varphi}\sin(\Theta) & -\cos(\Theta) \end{pmatrix} \tag{14}$$

在基底 $\{|0\rangle_t,\ |1\rangle_t\}$下。因此，可以设置不同组的参数 Θ 和 φ，以在目标原子上实现各种操作。具体而言，对于 $\sigma_z^{(t)}$（目标原子上的 σ_z 操作）操作，可选择 $\{\varphi,\ \Theta\} = \{0,\ 0\}$；对于 NOT 操作，可选择 $\{\varphi,\ \Theta\} = \{0,\ -\pi/2\}$；对于 Hadamard 操作，可选择 $\{\varphi,\ \Theta\} = \{0,\ -\pi/4\}$。

现在考虑步骤 (ii) 的第二种情况，即控制原子初始处于 $|1\rangle$ 态。在这种情况下，控制原子将在步骤 (i) 后被激发。随后，偶极-偶极相互作用哈密顿量

$$H_d = V|r'\rangle_c\langle R'| \otimes |R\rangle_t\langle r| + \text{H.c.} \tag{15}$$

也会参与控制整个系统的动力学。因此，步骤 (ii) 在双原子基下的总哈密顿量可以改写为

$$H_{ii} = \frac{\Omega_t(t)}{2}|R'b\rangle\langle R'r| + V|r'R\rangle\langle R'r| + \text{h.c.}, \tag{16}$$

表 II. 在步骤 (ii) 中实现超鲁棒几何量子操作的一组可能的激光振幅和相位参数。 τ_2 是步骤 (ii) 的总时间。 $|\Omega_t(t)| = (8\pi/\tau_2)\sin^2[2\pi(t-t')/(\tau_2/2)]$。

	$t \in [\tau_1,\ \tau_1+\frac{\tau_2}{4}]$	$t \in (\tau_1+\frac{\tau_2}{4},\ \tau_1+\frac{\tau_2}{2}]$	$t \in (\tau_1+\frac{\tau_2}{2},\ \tau_1+\frac{3\tau_2}{4}]$	$t \in (\tau_1+\frac{3\tau_2}{4},\ \tau_1+\tau_2]$
$\varphi_2(t)$	0	$\frac{3\pi}{2}$	0	$\frac{3\pi}{2}$
t'	τ_1	τ_1	$\tau_1+\tau_2/2$	$\tau_1+\tau_2/2$

其中态 $|mn\rangle \equiv |m\rangle_c \otimes |n\rangle_t$，并且本文后续将始终使用这种缩写形式。式（16）具有一个暗态

$$|d\rangle_2 = \frac{1}{\mathcal{N}}\left(V|R'b\rangle - \frac{\Omega_t^*}{2}|r'R\rangle\right), \tag{17}$$

其中，$\mathcal{N}$ 是暗态的归一化参数，另外两个是亮态

$$|b_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\mathcal{N}}\left(\frac{\Omega_t}{2}|R'b\rangle \pm \mathcal{N}|R'r\rangle + V|r'R\rangle\right) \tag{18}$$

其本征值分别为 0、$\pm\mathcal{N}$。这里 $\mathcal{N} = \sqrt{V^2+\Omega_t^2/4}$ 是归一化参数。

原则上，当初始态为 $|R'b\rangle$ 时，系统将沿着暗态 $|d_2\rangle$ 演化，并且在满足绝热条件的前提下，当 Ω_t 缓慢增加时，态 $|r'R\rangle$ 的布居将增加（[见附录C]）。当 Ω_t 初始和最终均设为零时，可以认为绝热过程结束时，$|R'b\rangle$ 中仍有布居。现在我们分析这一过程中累积的相位。暗态上累积的相位可分别归类为动力学相位 φ_{dy} 和几何相位 φ_{ge}，分别表示为 [见附录 D]

$$\varphi_{dy} = \int_{\tau_1}^{\tau_1+\tau_2} {}_2\langle d|H_{ii}|d\rangle_2 dt = 0 \tag{19}$$

and

$$\varphi_{ge} = i\int_{\tau_1}^{\tau_1+\tau_2} {}_2\langle d|\frac{\partial}{\partial t}|d\rangle_2 dt = \int_{\tau_1}^{\tau_1+\tau_2} \frac{\Omega_t^2\dot{\varphi}_2}{\Omega_t^2+4V^2}dt = 0. \tag{20}$$

也就是说，初始态 $|R'b\rangle$ 将保持不变且不会积累相位，因此演化算符可实现单位矩阵 I_t。为推导式（20），我们假设 V 为常数。然而，在实际情况下，V 由 C_3 和 d （$V = C_3/d^3$）决定，其中 C_3 是与原子和里德堡态相关的系数，而 d 是随时间线性变化的原子间距。也就是说，V 的值会随时间变化。在附录E中，我们清楚地表明，在这种情况下，几何相位仍为零。需要注意的是，尽管这种情况与传统的里德堡阻塞具有相似的效果，即当控制原子被激发时，目标原子的状态将保持不变，但其物理机制完全不同，而且性能优于阻塞机制，因为当前方案利用了在满足绝热条件时误差较小的绝热过程。

步骤（iii）是步骤（i）的逆操作。经过这三个步骤后，可实现如下操作

$$U = |0\rangle_c\langle 0| \otimes U_t + |1\rangle_c\langle 1| \otimes I_t. \tag{21}$$

一般来说，式（21）是一个非平凡的双量子比特门。可以选择不同的参数，分别实现受控 Z 门和受控非门。

III. 结果与讨论

本节通过数值结果表明，与传统阻塞方案相比，在考虑原子自发辐射的情况下，当前方案对拉比频率误差具有更强的鲁棒性，并且能够抵御阻塞误差。此外，与暗态方案相比，它对拉比频率误差也具有更强的鲁棒性。

A. 门性能

我们利用林德布拉德主方程对该方案在退相干条件下的性能进行数值模拟，其可写为

$$\dot{\rho} = -i\,[H,\ \rho] + \sum_{i=1}^{12}\Gamma_i\left(A_i\rho A_i^\dagger - \frac{1}{2}\{A_i^\dagger A_i\rho\}\right), \tag{22}$$

其中 Γ_i 表示与算符 A_i所描述的耗散过程相关的衰减率或退相位率。在我们的方案中，
$A_1 = |0\rangle_c\langle R'|$, $A_2 = |1\rangle_c\langle R'|$, $A_3 = |0\rangle_c\langle r'|$,
$A_4 = |1\rangle_c\langle r'|$, $A_5 = |0\rangle_t\langle R|$, $A_6 = |1\rangle_t\langle R|$, $A_7 = |0\rangle_t\langle r|$和
$A_8 = |1\rangle_t\langle r|$ 表示激发态的衰减过程。
$A_9 = |R'\rangle_c\langle R'| - |0\rangle_c\langle 0| - |1\rangle_c\langle 1|$, $A_{10} = |r'\rangle_c\langle r'| - |0\rangle_c\langle 0| - |1\rangle_c\langle 1|$, $A_{11} = |R\rangle_t\langle R| - |0\rangle_t\langle 0| - |1\rangle_t\langle 1|$和
$A_{12} = |r\rangle_t\langle r| - |0\rangle_t\langle 0| - |1\rangle_t\langle 1|$ 表示退相位过程。在图2中，我们绘制了针对特定初始态组构造的量子门的布居数和保真度。对于所选能级，退相干参数设为 $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 2\pi \times 0.425$ kHz、$\Gamma_3 = \Gamma_4 = 2\pi \times 0.213$ kHz、$\Gamma_5 = \Gamma_6 = 2\pi \times 0.169$ kHz、$\Gamma_7 = \Gamma_8 = 2\pi \times 0.336$ kHz [83]。对于退相位率，我们暂时将其设为 $\Gamma_9 = \Gamma_{10} = \Gamma_{11} = \Gamma_{12} = 2\pi \times 1$ kHz（0 K），并利用关系式 $n \sim \tau^3$ 进行评估。原子间距设为 6 μm，这会对图1图注所考虑的选定里德堡态产生 $V = 2\pi \times 298$ MHz 的里德堡-里德堡相互作用强度。结果表明，最终布居数和最终保真度与由所构造量子门支配的动力学结果吻合良好。

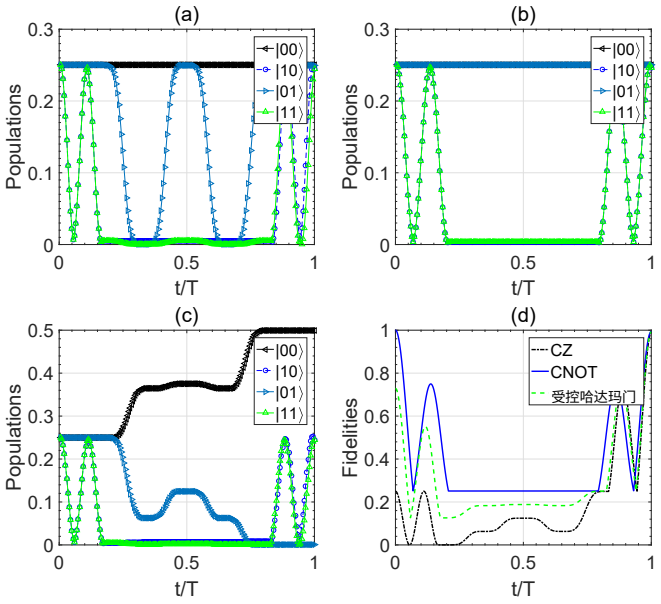

FIG.初始态 $|\psi\rangle = (|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)/2$下所构造逻辑门的布居数和保真度。(a)[(b)、(c)] 受控 Z 门（受控非门、受控哈达玛门）的布居数。(d) 所构造量子门的保真度。参数取值如下：$\Omega = 2\pi \times 8$ MHz，$|\Omega_c(t)| = \Omega$，$V = 2\pi \times 298$ MHz；对于所选里德堡能级，原子间距设为 6 μm。$\varphi_c(t)$见式（3）。$\varphi_{t1}(t) = \varphi_2(t)$见式（13），$\varphi_{t0}(t) = \varphi_{t1}(t) + \varphi(t)$。$\Omega_{t0} = |\Omega_t(t)|\sin(\Theta/2)$，$\Omega_{t1} = |\Omega_t(t)|\cos(\Theta/2)$。$\varphi(t)$和 Θ是由我们要构造的具体量子逻辑门决定的参数。Γ_i 见正文。对于受控 Z 门、受控非门和受控哈达玛门，Max$[|\Omega_{t1}(t)|]$ 设为$2\Omega/3$。

B. 对拉比控制误差的鲁棒性

在理论构造量子逻辑门时，我们通常假设拉比频率是恒定的。然而，在实际情况下，由于激光强度的波动，拉比频率会产生一些误差。从这一点出发，为了更好地展示量子门的超鲁棒性，我们假设哈密顿量可写为如下形式。在步骤 (i) 和 (iii) 中，哈密顿量为 $H_c^{\text{error}} = (1+\xi)H_c(t)$，而在步骤 (ii) 中，哈密顿量为 $H_t^{\text{error}} = (1+\epsilon)H_t(t)$，其中 ξ 和 ϵ是与拉比频率误差相关的参数。在下文中，我们使用平均保真度 [84, 85]

$$F(\Xi, U) = \frac{\sum_j \text{tr}\left(UU_j^\dagger U^\dagger \Xi(U_j)\right) + d^2}{d^2(d+1)} \tag{23}$$

用于评估当前方案的性能，其中U_j是泡利矩阵张量 II，$I\sigma_x$，$\cdots$ $\sigma_z\sigma_z$，U是理想相位门，$d = 4$ 表示双量子比特门，而Ξ 是通过求解主方程得到的保迹量子操作。

在图 3(a)、(b)和(c)中，我们绘制了当前方案、暗态方案 [22] 以及传统阻塞方案 [5]，以展示它们对拉比频率误差 ξ 以及 ϵ 为[0, 20%]的鲁棒性。可以看出，正如参考文献 [22]，中所讨论的，尽管暗态方案在不存在拉比频率误差时的非保真度可以达到 10^{-5} 或更低，但存在拉比频率误差时，暗态方案的鲁棒性并不优于当前方案。结果表明，与另外两种方案相比，当前方案具有超强鲁棒性。

为考虑衰减和退相位过程，我们选用与图2中相同的拉比频率、衰减率和退相位率。假设原子间距为 6 μ m，对于图 $V = 2\pi\times298$MHz，这对应于图1图注中所考虑的里德堡态下的里德堡-里德堡相互作用强度。采用这些实验参数，图 [22], 分别绘出了当前方案、暗态方案 [5] 和传统方案的保真度，见图3的(d)、(e)和(f)。结果表明，在没有拉比频率误差时，我们的方案并无优势，即暗态方案、当前方案和传统阻塞方案的平均保真度分别为0.9975、0.9915和0.9982。这是因为我们的方案需要更长的演化时间，从而加剧了耗散的影响。然而，当每一步的拉比误差接近20%时，我们方案的保真度仍可达到0.99，而其他两种方案的保真度仅接近0.95。此外，图4还分别绘出了受控非门和CHadamard门的平均保真度，这也表明我们的方案在拉比频率误差和耗散下具有鲁棒性。需要指出的是，我们在此未考虑运动诱导退相干；如后文的实验考量所示，这无疑会降低平均保真度。

现在，我们将当前方案与参考文献 [86, 87] 中提出的工作进行比较。为获得哈密顿量动力学，参考文献 [86, 87]在推导有效哈密顿量的过程中两次采用了二阶微扰理论。当前方案没有对哈密顿量使用微扰理论，这意味着动力学过程可能更快。在操作步骤方面，参考文献 [86, 87] 中的方案只需一步，而当前方案需要三步。对于最优几何量子计算方法，参考文献 [86] 采用了零系统误差方法 [88]，而参考文献 [87] 考虑了时间最优技术 [89]。在我们的方案中，采用了可将误差限制在四阶的超鲁棒脉冲。参考文献 [86] 旨在实现多量子比特门，参考文献 [87] 构造了三量子比特门，而我们构造的是鲁棒双量子比特门。

C. 阻塞误差鲁棒性分析

在传统阻塞方案中，当 RRI 强度不够强时，所构建门的保真度会降低，从而产生阻塞误差。该阻塞误差与下式的平方成正比

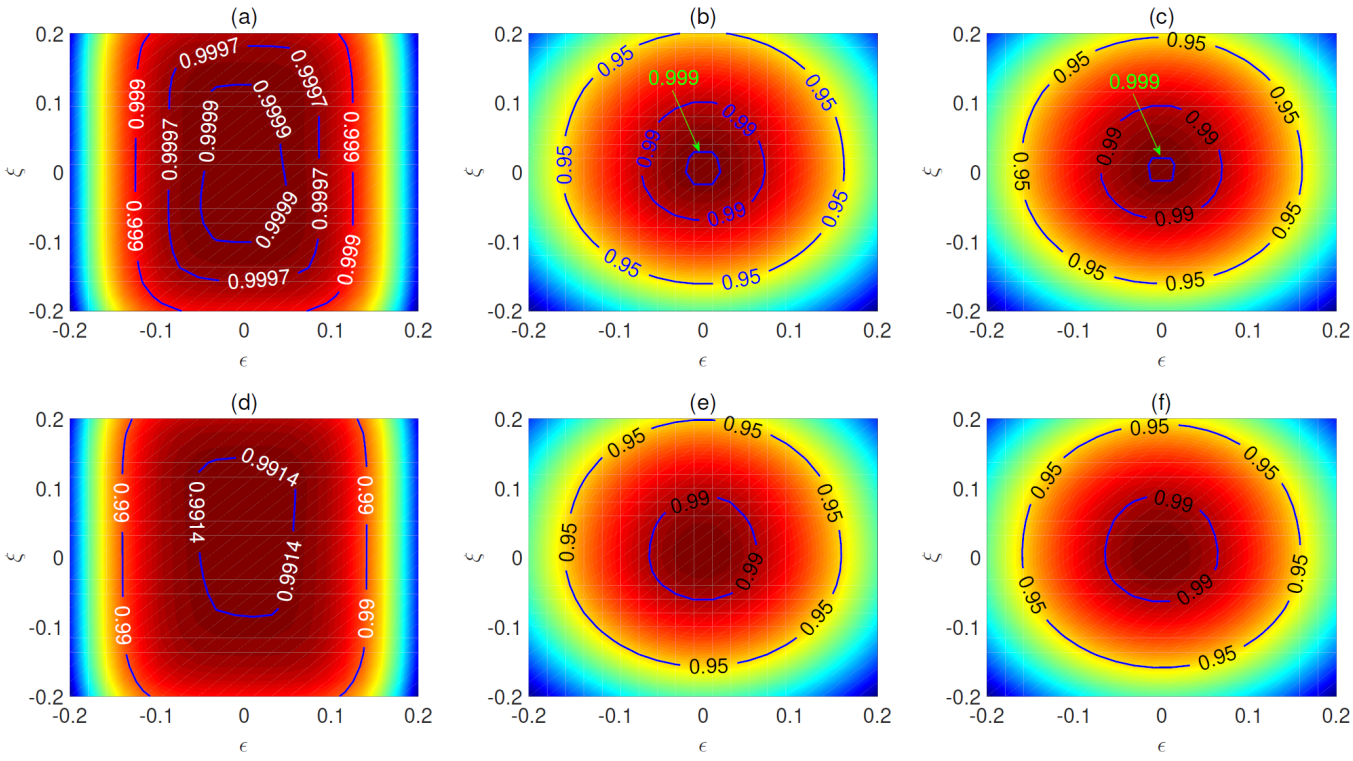

图3. 基于当前超鲁棒方案（a）[（d）], 暗态方案 [22]（b）[（e）], 和传统阻塞方案 [5]（c）[（f）], 的 CZ 门保真度，分别为未考虑（考虑）耗散的情况。在面板（a）[（d）], 中，参数的选取与图 2 $\Gamma_i = 0$ [ ] | $_t$ t | = $4\pi/\tau_2$ $^2[2\pi\ t-\tau_1\ /\ \tau_2/2\ ]\ \tau_1 <$ （a）相同（或不同）。$t \leqslant \tau_1 + \tau_2$ [22] [ ], $_t$ = 在面板（b）（e）中，Ω ( ) ( ) sin ( ) ( ) ( )，该方案详见参考文献。在面板（c）（f）中，Ω Ω，相应的阻塞方案见参考文献 [5, 82]。在面板（a）、（b）和（c）中，$\Gamma_i = 0$。在面板（d）和（e）中，$\Gamma_1 = \Gamma_2 = 2\pi \times 0.425$ kHz，$\Gamma_3 = \Gamma_4 = 2\pi \times 0.213$ kHz，$\Gamma_5 = \Gamma_6 = 2\pi \times 0.169$ kHz，$\Gamma_7 = \Gamma_8 = 2\pi \times 0.336$ kHz，$\Gamma_9 = \Gamma_{10} = \Gamma_{11} = \Gamma_{12} = 2\pi \times 1$ kHz。在面板（f）中，由于阻塞方案采用三能级结构，我们分别对控制原子取 $|R'\rangle$，对目标原子取 $|r\rangle$。因此，$\Gamma_3 = \Gamma_4 = \Gamma_5 = \Gamma_6 = \Gamma_{10} = \Gamma_{11} = 0$，其余速率与面板（d）相同。

Ω/V [19, 21]，其中 Ω 为拉比频率，V 为 RRI 强度。因此，当 $V \sim \Omega$ 时，阻塞误差会大到足以降低该方案的性能。

在图5中，我们展示了弱里德堡-里德堡相互作用强度下 CZ门的平均保真度。可以看出，对于传统阻塞方案，阻塞误差会显著影响其性能。而对于我们的方案，即使里德堡-里德堡相互作用强度较弱且拉比频率误差较大，平均保真度仍然很高，这表明该方案对阻塞误差和拉比频率误差都具有鲁棒性。

IV. 实验考量

A. 激发过程和具体激光参数

激发至里德堡态可通过单光子过程实现 [90, 91]。在这种情况下，由于选择定则，里德堡态应视为 $|np\rangle$ 能级。在该方案中，我们考虑双光子激发过程。如图6所示，能级选为 $|0\rangle \equiv |f = 3,\ \ m_f = 0\rangle$和 $|1\rangle \equiv |f = 4,\ \ m_f = 0\rangle$，铯原子的两个长寿命钟态。$|R'\rangle \equiv |101s_{1/2},\ \ m = 1/2\rangle$和$|r'\rangle \equiv |101p_{3/2},\ \ m = 3/2\rangle$ 是控制原子的两个里德堡态，而 $|R\rangle \equiv |109p_{3/2},\ \ m = 3/2\rangle$ 和$|r\rangle \equiv |109s_{1/2},\ \ m = 1/2\rangle$ 是目标原子的里德堡态。在电场 $E = 15.4$ V/m [22]下，可在 $C_3 = 64.4$ GHz 处实现共振偶极-偶极相互作用。或者，实验中也可以选择其他里德堡能级。例如，也可以选择 $|R'\rangle \equiv |112s_{1/2},\ \ m = 1/2\rangle$、$|r'\rangle \equiv |111p_{3/2},\ \ m = 3/2\rangle$、$|R\rangle \equiv |101p_{3/2},\ \ m = 3/2\rangle$ 和$|r\rangle \equiv |101s_{1/2},\ \ m = 1/2\rangle$。在电场 $E = 5.36$ V/m [22] 下，可在 $C_3 = 65.3$ GHz 处实现共振偶极-偶极相互作用。

激光参数如下。对于控制原子，$|1\rangle \to |P\rangle$ 和 $|P\rangle \to |R'\rangle$ 的波长分别设为 852 和 509 nm。拉比频率分别设为 $\Omega_{r1} = 2\pi \times 245$ MHz 和 $\Omega_{b1} = 2\pi \times 80$ MHz，失谐为 1.225 GHz。为实现这一目标，红色激光的功率和束腰分别为 1 μW 和 3.6 μm，蓝色激光的功率和束腰分别为 80 mW 和 3 μm。对于目标原子，波长与控制原子相同，$|0\rangle \to |r\rangle$ 过程也相同。拉比频率随时间变化，我们

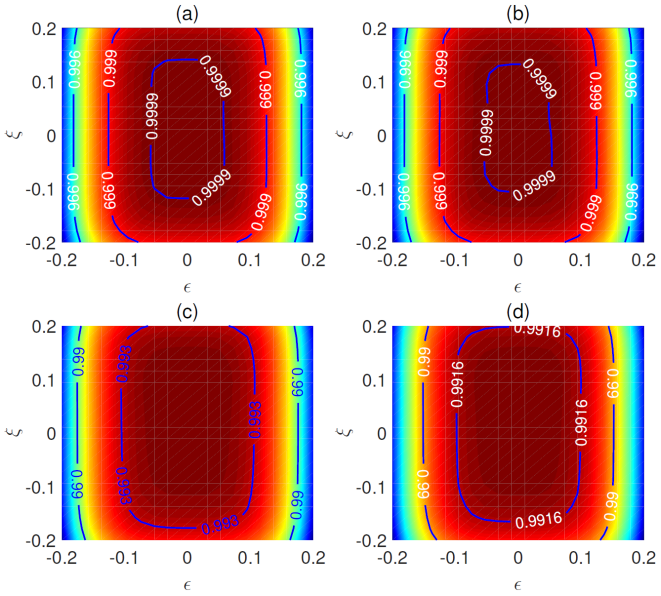

图4. 基于当前超鲁棒方案的受控非门（a）[（c）] 和受控哈达玛门（b）[（d）]，未考虑（考虑）耗散。参数与图2（b）和（c）中的设置相同，但（a）和（b）图除外， Γ_i 设为零。

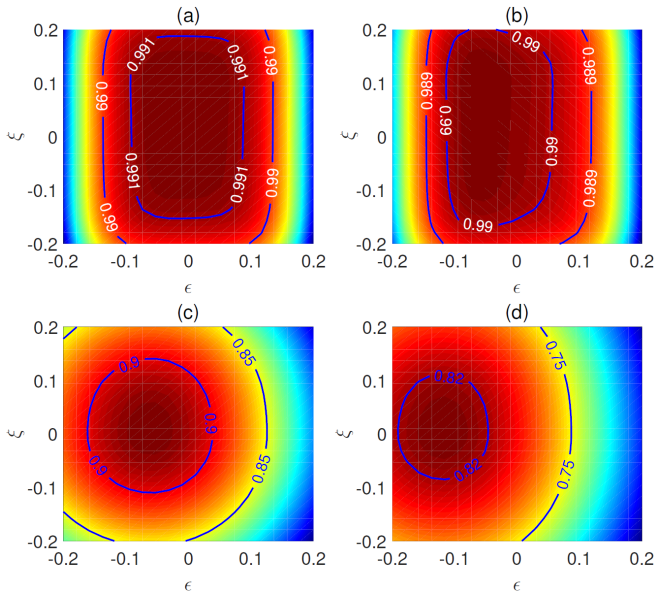

图 5 $V \sim \frac{V}{2}$ 考虑耗散时，超鲁棒 CZ 门在最大 [|Ω|] (a) 和最大 [|Ω|] (b) 条件下的保真度。考虑耗散时，传统阻塞方案在 $V \sim 2\max[|\Omega|]$ (c)和 $V \sim \max[|\Omega|]$ (d)条件下的保真度。其余参数与图3相同。

此处仅考虑如何达到最大值；时间依赖特性可通过调整一些激光参数（如功率）来实现。拉比频率分别设为 $\Omega_{r1} = 2\pi \times 245$ MHz 和 $\Omega_{b1} = 2\pi \times 80$ MHz。失谐设为 1.225 GHz。为实现这一目标，功率和束腰分别为1 μ W 和 3.6 μm（红色激光）以及 80 mW 和 2.7 μm（蓝色激光）（对于 CZ门，$\Omega_{r0} = \Omega_{b0} = 0$用于目标原子）。原子间距为 6 μm。该方案所用激光的脉冲形状如图 7 所示。

B. 双光子激发过程的有效性及较大拉比误差的影响

对于通往里德堡态的激发过程，我们在此考虑的是有效双光子过程。因此，有必要讨论采用本文所用参数时激发过程的有效性。我们在此考虑双光子激发过程 $|g\rangle \xrightarrow[\text{resonant}]{\Omega_r, \Delta_r} |\mathcal{P}\rangle \xrightarrow{\Omega_b} |\mathcal{R}\rangle$ （完整过程）和有效过程 $|g\rangle \xrightarrow{\Omega_b/(2\Delta)} |\mathcal{R}\rangle$ （有效过程）。在图8（a）中，我们使用参数（Ω_r，Ω_b，Δ）$= 2\pi \times$（245 MHz，80MHz 1.225 GHz）模拟了完整过程和有效过程，可以看出二者吻合得非常好。在图8（b）中，我们绘出了考虑耗散时，采用完整过程和有效过程计算所得的所提出 CNOT 门的平均保真度，结果同样证明了

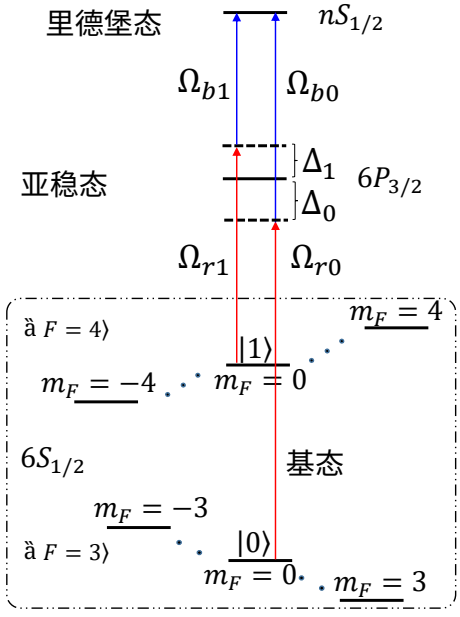

图 6. 所考虑的 ^{133}铯原子的能级。Ω_{ri} 和 Ω_{bi} $(i = 0, 1)$分别表示失谐为 Δ_i时双光子过程 $|i\rangle \rightarrow |ns_{1/2}\rangle$ 的拉比频率。并且应满足$\Delta_i \gg \{\Omega_{ri}, \Omega_{ti}\}$。对于控制原子，从 $|0\rangle$ 到 $|nS_{1/2}\rangle$ 的双光子过程不存在，且参数满足$\Omega_c = \Omega_{r1}\Omega_{b1}/(2\Delta_1)$。对于目标原子，参数满足$\Omega_{ti} = \Omega_{ri}\Omega_{bi}/(2\Delta_i)$。

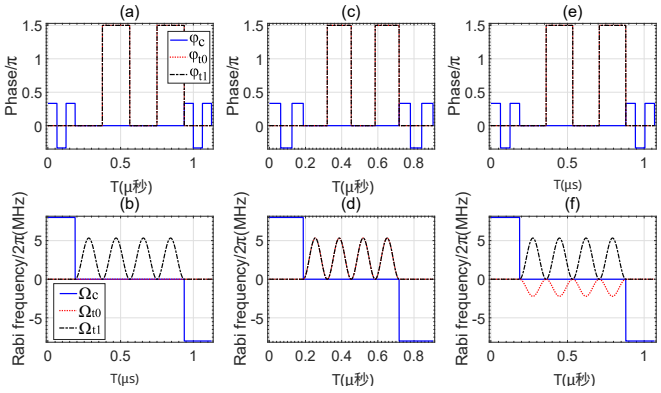

图7. 拉比频率及相应相位的形状。(a)[(c) (e)] CZ（CNOT、受控哈达玛门）门的激光相位。(b)[(d) (f)], CZ（CNOT、受控哈达玛门）的拉比频率。需要注意的是，目标原子的拉比频率最大值可以是任意的，前提是激光功率和光束腰参数在实验允许范围内，且满足绝热条件。

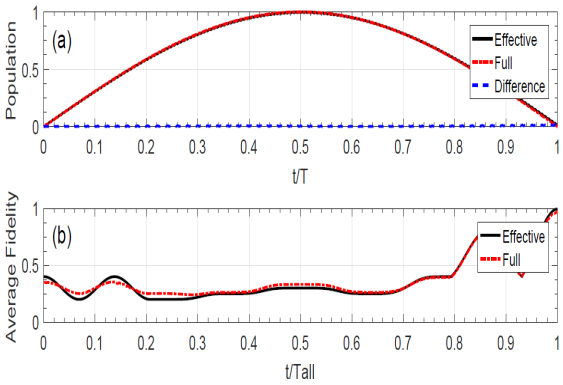

图8. (a) 不考虑耗散时，双光子（完整过程）和有效过程的激发态布居数随演化时间的变化。点线表示这两个过程的差值。(b) 基于有效过程和完整双光子激发过程的 CNOT门平均保真度。衰减率取值与图4中的相同。中间态 $|\mathcal{P}\rangle$ 的衰减率取为 $2\pi \times 3.2$ MHz。

有效模型。

双光子过程较大的拉比频率要求激光具有较窄的束腰，这可能使拉比误差超过正文中讨论的 20%。针对这一点，我们在图9中绘出了存在耗散且拉比误差高达 40 % 时所构造量子门的平均保真度。当 ϵ 和 ξ 均高达 40 % 时，在大多数参数区域内，保真度仍高于 96%（未考虑运动诱导退相干），这进一步证明了该方案的鲁棒性。

事实上，在我们的方案中，铯原子也可以采用单光子激发过程到达里德堡态 [133]。需要注意的是，在这种情况下，通常无法到达非常高的里德堡态。例如，实验中可以实现 $n = 64$ [90]。

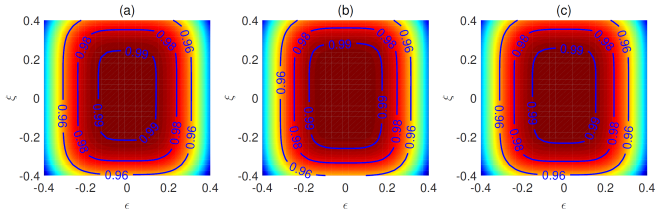

图9. (a)[(b), (c)]最大拉比误差为 40% 时，所提出的 CZ（受控非门、受控哈达玛门）的平均保真度。参数与图 3(d)[图 4(c)、图4(d)]。

表III. 里德堡态的泄漏误差。此处，我们参考文献 [22, 92]的思路，考虑两组能量相邻的里德堡态所对应的两个泄漏通道。泄漏通道一为 $|R'r\rangle \leftrightarrow |101p_{3/2},\ m=-1/2;\ 109p_{1/2},\ m=-1/2\rangle$，该通道的强度和失谐分别为 $2\pi\times120$ 和 $2\pi\times65$ MHz。泄漏通道二为$|r'R\rangle \leftrightarrow |99d_{5/2},\ m=5/2;\ 108d_{5/2},\ m=5/2\rangle$，该通道的强度和失谐分别为 $2\pi\times156.8$ 和 $2\pi\times190$ MHz。

	CZ[a]	受控非门[a]	受控哈达玛门[a]
最大	8.08×10^{-5}	8.11×10^{-5}	8.05×10^{-5}
平均	3.01×10^{-5}	3.02×10^{-5}	3.01×10^{-5}

[a] 结果是通过四阶龙格-库塔方法得到的。

C. 偶极-偶极相互作用导致的向邻近里德堡态的泄漏误差

从实际角度出发，我们在此考虑里德堡态泄漏误差 [92]。该误差定义为 $P = 1 - |\langle\Psi'|\psi(t)\rangle|^2$，其中 $|\Psi'\rangle = |R'\rangle_c \otimes |1\rangle_t$ 是初始态，$|\psi(t)\rangle$ 是哈密顿量在步骤 (ii) 中演化后的系统态。对于我们选定的里德堡能级，可能的泄漏通道包括 $|101s_{1/2},\ m=1/2;\ 109s_{1/2},\ m=1/2\rangle \leftrightarrow |101p_{3/2}, m=-1/2;\ 109p_{1/2},\ m=-1/2\rangle$ 和$|101p_{3/2},\ m=3/2;\ 109p_{3/2},\ m=3/2\rangle \leftrightarrow |99d_{5/2}, m=5/2;\ 108d_{5/2}, m=5/2\rangle$ [22]。表 III 展示了在初始态上执行这三个量子门时的最大和平均泄漏误差，结果表明泄漏误差可以忽略不计。

D. 激发过程不完善导致的相邻里德堡态激发误差

现在我们考虑向相邻里德堡态的泄漏误差。如图10所示，我们考虑主量子数从 $n = 97$ 到 104 的情况。能量失谐 $\delta_k^{\text{Leakage}} = E_k^{\text{leakage state}} - E_{|101S_{1/2}\rangle}$ 是影响激发误差的主要因素，其中$E_k^{\text{leakage state}}$ 表示图 k中的第10个泄漏态的能量。向第 k个态的泄漏概率可近似表示为

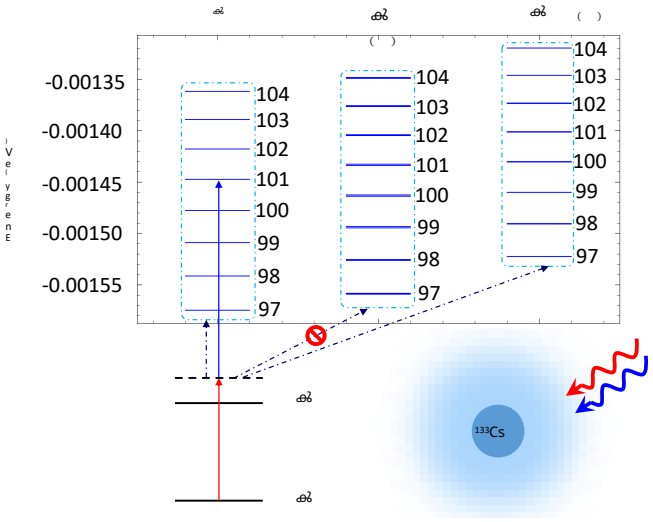

图10. 控制原子的主要可能激发泄漏通道（点划线围成的左右矩形中的状态是可能的泄漏态）。理想激发态为 $|101S_{1/2}\rangle$，我们考虑的主量子数范围为97至104。相关数据由 Python 中的程序包 [93]获取。目标原子也可以绘制出类似的过程。

$P_{\text{error}} \approx \Omega^2/(\delta_k^{\text{Leakage}})^2$（详情见附录F ），其中 Ω 表示从基态到理想里德堡态的有效双光子拉比频率。因此，总激发误差可表示为

$$P_{\text{error}}^{\text{excitation}} \approx x \times \sum_k \left(\frac{\boldsymbol{d}_{|6P\rangle\to k\text{th state}}}{\boldsymbol{d}_{|6P\rangle\to|101(109)S_{1/2}\rangle}}\Omega\right)^2/(\delta_k^{\text{Leakage}})^2, \tag{24}$$

其中 $x = 3$ $(x = 2)$ 表示控制误差鲁棒操作期间控制（目标）原子的激发次数，且 $\boldsymbol{d}$ 是相关的跃迁偶极矩。将图 10 中的数据和相关偶极矩代入后，可以得到控制原子和目标原子的 $P_{\text{error}}^{\text{excitation}}$之和约为 8×10^{-4}，当 Ω $= 2\pi \times 8$ MHz 时。如果进一步考虑所有具有较大失谐的激发泄漏通道，则结果的数量级保守估计为 10^{-3}，这大于第 IVC节所讨论的由偶极-偶极相互作用导致的里德堡态泄漏。

E. 运动诱导退相干的影响

到目前为止，我们主要关注拉比控制误差和阻塞误差的影响。然而，正如参考文献 [17], 所述，将中性原子从基态激发至里德堡态时，原子运动会引发退相干误差，这也是限制保真度的另一个因素，而且几何相位可能无法抵御这种误差 [94]。分析此类运动影响的最准确方法是采用量子力学处理 [95]。在本小节中，我们将原子的运动视为弹道运动 [96] ，并提出使用自旋回波来抑制其影响。

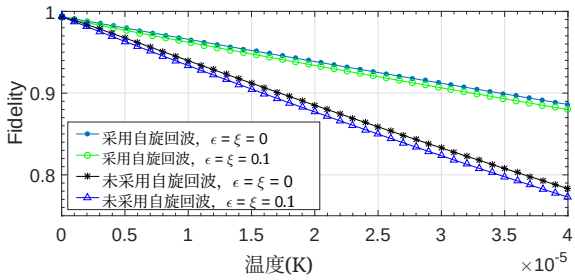

图 11. 考虑耗散时，CNOT门的平均保真度随温度的变化。参数与图 4（c）相同。

这将为实验提供一些参考。

我们以控制原子为例分析这一过程，目标原子也适用类似的过程。为简单起见，这里不考虑温度对原子自发辐射的影响。考虑原子运动时，拉比频率应修正为 $\Omega_c e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}t}$（对于中间态大失谐的双光子过程，可通过二阶微扰理论计算），其中 $\boldsymbol{k}$ 是有效波矢， $\boldsymbol{v}$ 是原子速度，可近似计算为$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{k_b\mathcal{T}/m}$ 其中 k_b、 $\mathcal{T}$ 和 m 分别为玻尔兹曼参数、原子温度和原子质量。原子的初始位置不予考虑，因为可以将其设为相对位置，因此不会影响该过程 [96]。第一种策略是自旋回波方法 [15], ：对于控制原子，我们在第一步和第三步的中点改变多普勒失谐；对于目标原子，也在第二步的中点改变多普勒失谐。这可以通过调制波矢的方向实现。在图11中，我们以受控非门为例，展示该方案在考虑自旋回波技术时对多普勒频移的表现。结果表明，采用自旋回波技术后，该方案的性能显著提升。具体而言，当原子温度约为 10 μK（35 μK）时，平均保真度从 0.93（0.8）提升至 0.97（0.9）。我们不得不承认，由于我们的控制误差鲁棒脉冲需要更长的演化时间，其保真度略低于参考文献 [16],中的数值。另一方面，当系统误差约为 10% 时，我们的方案仍能维持在这一水平附近，这正是本研究的主要特点。

在上述分析中，我们将速度视为常数，但实际上，速度会在一定范围内随机变化，这无疑会降低该方案的保真度。在这种情况下，当原子的温度为 10 μK 时，我们分别考虑每一步中原子速度的高斯分布，并在这一过程中采用自旋回波技术，通过数值方法求解主方程。图 12 的结果表明，即使存在单独的

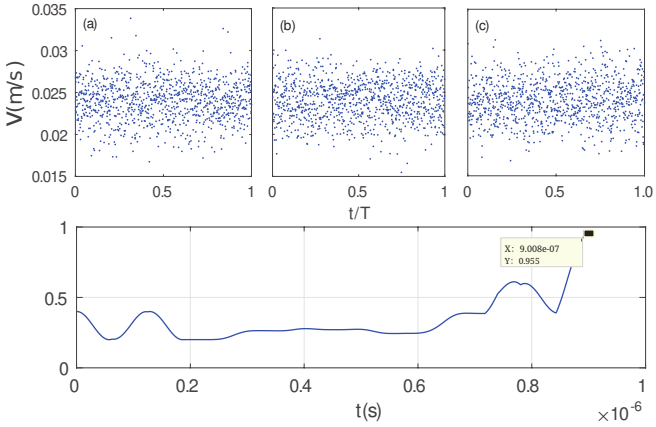

图 12. (a)[(c)] 步骤 (i) 中控制原子的随机速度[(iii)]。(b) 步骤 (ii) 中目标原子的随机速度随时间的变化。原子温度设为 $\mathcal{T} = 10\ \mu$K，平均速度按 $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{k_b \mathcal{T}/m}$ 计算，变化量设为 $0.1|\boldsymbol{v}|$。(d) 考虑自旋回波时，含拉比误差（控制误差）为 10 % 的 CNOT门平均保真度随演化时间的变化。其余参数与图 4(c) 相同。

随机速度且耗散下的控制误差为 10%，平均保真度仍可达到 0.955。我们还对控制误差为 20% 且存在随机速度的情况进行了模拟，结果表明平均保真度可达到 0.934。这些结果表明，在现实实验条件下，该方案对控制误差具有鲁棒性。

F. 其他实际考量

实验中，拉比频率以及 RRI 的数值将低于上述设定和讨论的数值。我们在考虑耗散的情况下，模拟了这种情形的影响，见图13；模拟采用了实验中实现的参数 [16]，基态到里德堡态的激发拉比频率为 $2\pi \times 3.5$ MHz，RRI 分别为 $2\pi \times 24$ MHz。由图13(a)[(b), (c)]，可见，在 RRI 存在 20% 波动的前提下，当控制原子和目标原子的拉比误差接近 20% 时，CZ（CNOT 和受控哈达玛门）的平均保真度仍分别高于 0.978（0.98，0.98）。同时，由图 13(d)[(e), (f)], 可见，在控制原子和目标原子的拉比误差为 10% 的前提下，当 RRI 存在 20% 波动时，CZ（CNOT 和受控哈达玛门）的平均保真度仍分别高于 0.98（0.985，0.981）。

V. 结论

总之，我们提出了一种基于几何相位和暗态动力学、利用里德堡原子构建双比特量子逻辑门的方法。结果表明，一方面，即使

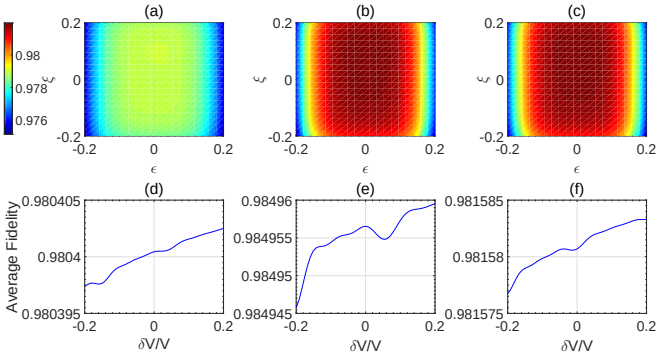

图 13. 受控 Z 门（受控非门和受控哈达玛门）的平均保真度随拉比误差变化的关系 (a)[(b)、(c)] 以及 RRI 方差变化的关系 (d)[(e)、(f)], 。对于图 (a)、(b) 和 (c)，RRI 的方差设为 20%。对于图 (d)、(e) 和 (f)，控制原子和目标原子的拉比误差设为 10%。最大拉比频率和 RRI 根据实验选取 [16]。其他参数和脉冲形状（此处 τ_1 和 τ_2应根据最大拉比频率重新计算）与图 3相同。

里德堡-里德堡相互作用强度与拉比频率相当（这可能会在传统阻塞方案中引发严重的阻塞误差），该方案仍然可行。另一方面，当控制误差达到 10% 时，该方案的平均保真度也不会显著降低。尽管考虑单个原子具有随机速度时产生的运动诱导退相干会降低平均保真度，但这并不影响该方案在具有较大拉比误差和阻塞误差的里德堡实验平台上的应用。

致谢

本工作得到广东省重点研发计划项目（项目编号：2020B0303300001、2018B030326001）、国家自然科学基金委员会（项目编号：12274376、11835011、11734018、11875160）、广东省自然科学基金（项目编号：2017B030308003）、深圳市科技创新委员会（项目编号：JCYJ20170412152620376、JCYJ20170817105046702、KYTDPT20181011104202253）、深圳市经济贸易和信息化委员会（项目编号：201901161512）以及广东省重点实验室（项目编号：2019B121203002）的资助。W. L. 感谢英国皇家学会通过国际交流费用分担奖（编号 IEC\NSFC\181078）提供支持。L.-N. 感谢 J.-Z. Xu 的讨论。

附录 A：公式（3）的推导

由于随时间变化的态 $|\phi_k(t)\rangle$ 遵循薛定谔方程，我们可以写出时间演化

算符：

$$U(t,0)=\mathbf{T}e^{-i\int_0^t H_c(t')dt'}=\sum_{k=1,2}|\phi_k(t)\rangle\langle\phi_k(0)|\ , \quad \text{(A1)}$$

其中，$\mathbf{T}$ 是时间排序算符。另一方面，哈密顿量 $H_c(t)$ 与演化算符 $U(t,\ 0)$ 之间的关系为：

$$H_c(t)=i\dot{U}(t,0)U^{\dagger}(t,0)\ . \quad \text{(A2)}$$

结合公式(A1)、公式(A2)和公式(2)，哈密顿量 $H_c(t)$可写为

$$\begin{aligned}H_c(t)\ &=i\textstyle\sum_{k=1,2}|\dot{\phi}_k(t)\rangle\langle\phi_k(t)|\\ &=\begin{pmatrix}-\dot{\eta}\sin^2\frac{\theta}{2}-\dot{\gamma}\cos\theta & \frac{1}{2}e^{i\eta}(i\dot{\theta}+M)\\ \frac{1}{2}e^{-i\eta}(-i\dot{\theta}+M) & \dot{\eta}\sin^2\frac{\theta}{2}+\dot{\gamma}\cos\theta\end{pmatrix},\end{aligned} \quad \text{(A3)}$$

其中 $M=2\dot{\gamma}\sin\theta-\dot{\eta}\sin\theta$。注意，公式(A3)应与公式(1)相等，因此不难得出公式(3)。

附录 B：表中参数的演示。I 满足公式（7）

$$\begin{aligned}&\int_0^{\tau_1}\frac{\dot{\theta}}{2}\exp\left(-i\int_0^t\frac{\dot{\eta}}{\cos\theta}dt'\right)dt\\ &=\int_0^{\tau_{1-}/3}\frac{\dot{\theta}}{2}\exp\left(-i\int_0^t\frac{\dot{\eta}}{\cos\theta}dt'\right)dt+\int_{\tau_{1-}/3}^{\tau_{1+}/3}\frac{\dot{\theta}}{2}\exp\left(-i\int_0^t\frac{\dot{\eta}}{\cos\theta}dt'\right)dt+\int_{\tau_{1+}/3}^{2\tau_{1-}/3}\frac{\dot{\theta}}{2}\exp\left(-i\int_0^t\frac{\dot{\eta}}{\cos\theta}dt'\right)dt\\ &+\int_{2\tau_{1-}/3}^{2\tau_{1+}/3}\frac{\dot{\theta}}{2}\exp\left(-i\int_0^t\frac{\dot{\eta}}{\cos\theta}dt'\right)dt+\int_{2\tau_{1+}/3}^{\tau_1}\frac{\dot{\theta}}{2}\exp\left(-i\int_0^t\frac{\dot{\eta}}{\cos\theta}dt'\right)dt\\ &=\int_0^{\tau_{1-}/3}\frac{\dot{\theta}}{2}\exp\left(-i\int_0^{\tau_{1-}/3}\frac{\dot{\eta}}{\cos\theta}dt'\right)dt+\int_{\tau_{1-}/3}^{\tau_{1+}/3}\frac{\dot{\theta}}{2}\exp\left(-i\int_0^{\tau_{1-}/3}\frac{\dot{\eta}}{\cos\theta}dt'-i\int_{\tau_{1-}/3}^{\tau_{1+}/3}\frac{\dot{\eta}}{\cos\theta}dt'\right)dt\\ &+\int_{\tau_{1+}/3}^{2\tau_{1-}/3}\frac{\dot{\theta}}{2}\exp\left(-i\int_0^{\tau_{1-}/3}\frac{\dot{\eta}}{\cos\theta}dt'-i\int_{\tau_{1-}/3}^{\tau_{1+}/3}\frac{\dot{\eta}}{\cos\theta}dt'-i\int_{\tau_{1+}/3}^{2\tau_{1-}/3}\frac{\dot{\eta}}{\cos\theta}dt'\right)dt\\ &+\int_{2\tau_{1-}/3}^{2\tau_{1+}/3}\frac{\dot{\theta}}{2}\exp\left(-i\int_0^{\tau_{1-}/3}\frac{\dot{\eta}}{\cos\theta}dt'-i\int_{\tau_{1-}/3}^{\tau_{1+}/3}\frac{\dot{\eta}}{\cos\theta}dt'-i\int_{\tau_{1+}/3}^{2\tau_{1-}/3}\frac{\dot{\eta}}{\cos\theta}dt'-i\int_{2\tau_{1-}/3}^{2\tau_{1+}/3}\frac{\dot{\eta}}{\cos\theta}dt'\right)dt\\ &+\int_{2\tau_{1+}/3}^{\tau_1}\frac{\dot{\theta}}{2}\exp\left(-i\int_0^{\tau_{1-}/3}\frac{\dot{\eta}}{\cos\theta}dt'-i\int_{\tau_{1-}/3}^{\tau_{1+}/3}\frac{\dot{\eta}}{\cos\theta}dt'-i\int_{\tau_{1+}/3}^{2\tau_{1-}/3}\frac{\dot{\eta}}{\cos\theta}dt'-i\int_{2\tau_{1-}/3}^{2\tau_{1+}/3}\frac{\dot{\eta}}{\cos\theta}dt'-i\int_{2\tau_{1+}/3}^{\tau_1}\frac{\dot{\eta}}{\cos\theta}dt'\right)dt\\ &=\frac{\pi}{2}+0+\frac{\pi}{2}e^{-i\frac{2\pi}{3}}+0+\frac{\pi}{2}e^{-i\frac{4\pi}{3}}=0.\end{aligned} \quad \text{(B1)}$$

表 II 中的参数也可以用类似的方法证明满足该条件。

附录 C：步骤（ii）的绝热条件

绝热条件为

$$|\langle b_{\pm}|\frac{\partial}{\partial t}|d\rangle_2|\ll|\pm\mathcal{N}-0| \quad \text{(C1)}$$

方程（C1）的左侧可计算为

$$|\langle b_{\pm}|\frac{\partial}{\partial t}|d\rangle_2|=\frac{|\sqrt{2}V\frac{\partial\Omega_t^*}{\partial t}|}{4\mathcal{N}^2} \quad \text{(C2)}$$

因此，方程（C1）可简化为

$$\left|\frac{\partial\Omega_t^*}{\partial t}\right|\ll\frac{2\sqrt{2}\mathcal{N}^3}{V} \quad \text{(C3)}$$

我们可以选择参数，使得 $|\Omega_t|\dot{\varphi}_2\equiv 0$ （事实上，表 II 中的参数满足这一条件）。也就是说，拉比频率绝对值的变化率应满足

$$\frac{\partial|\Omega_t|}{\partial t}\ll\frac{2\sqrt{2}\mathcal{N}^3}{V}. \quad \text{(C4)}$$

附录 D：方程（19）和（20）的推导

对于式（19），由于 $|d\rangle_2$ 是 H_{ii}的暗态，因此可以得到 $H_{ii}|d\rangle_2 = 0$，从而 $\varphi_{dy} = 0$。对于式（20），

$$\begin{aligned}\int_{\tau_1}^{\tau_1+\tau_2} \frac{\Omega_t^2\dot{\varphi}_2}{\Omega_t^2+4V^2}dt =& \int_{\tau_1}^{\tau_1+\frac{\tau_{2-}}{4}} \frac{\Omega_t^2\dot{\varphi}_2}{\Omega_t^2+4V^2}dt + \int_{\tau_1+\frac{\tau_{2-}}{4}}^{\tau_1+\frac{\tau_{2+}}{4}} \frac{\Omega_t^2\dot{\varphi}_2}{\Omega_t^2+4V^2}dt + \int_{\tau_1+\frac{\tau_{2+}}{4}}^{\tau_1+\frac{\tau_{2-}}{2}} \frac{\Omega_t^2\dot{\varphi}_2}{\Omega_t^2+4V^2}dt + \int_{\tau_1+\frac{\tau_{2-}}{2}}^{\tau_1+\frac{\tau_{2+}}{2}} \frac{\Omega_t^2\dot{\varphi}_2}{\Omega_t^2+4V^2}dt \\ &+ \int_{\tau_1+\frac{\tau_{2+}}{2}}^{\tau_1+\frac{3\tau_{2-}}{4}} \frac{\Omega_t^2\dot{\varphi}_2}{\Omega_t^2+4V^2}dt + \int_{\tau_1+\frac{3\tau_{2-}}{4}}^{\tau_1+\frac{3\tau_{2+}}{4}} \frac{\Omega_t^2\dot{\varphi}_2}{\Omega_t^2+4V^2}dt + \int_{\tau_1+\frac{3\tau_{2+}}{4}}^{\tau_1+\tau_2} \frac{\Omega_t^2\dot{\varphi}_2}{\Omega_t^2+4V^2}dt \\ =& \int_{\tau_1}^{\tau_1+\frac{\tau_{2-}}{4}} \frac{\Omega_t^2\times 0}{\Omega_t^2+4V^2}dt + \int_{\tau_1+\frac{\tau_{2-}}{4}}^{\tau_1+\frac{\tau_{2+}}{4}} \frac{0\times\dot{\varphi}_2}{0+4V^2}dt + \int_{\tau_1+\frac{\tau_{2+}}{4}}^{\tau_1+\frac{\tau_{2-}}{2}} \frac{\Omega_t^2\times 0}{\Omega_t^2+4V^2}dt + \int_{\tau_1+\frac{\tau_{2-}}{2}}^{\tau_1+\frac{\tau_{2+}}{2}} \frac{0\times\dot{\varphi}_2}{0+4V^2}dt \\ &+ \int_{\tau_1+\frac{\tau_{2+}}{2}}^{\tau_1+\frac{3\tau_{2-}}{4}} \frac{\Omega_t^2\times 0}{\Omega_t^2+4V^2}dt + \int_{\tau_1+\frac{3\tau_{2-}}{4}}^{\tau_1+\frac{3\tau_{2+}}{4}} \frac{0\times\dot{\varphi}_2}{0+4V^2}dt + \int_{\tau_1+\frac{3\tau_{2+}}{4}}^{\tau_1+\tau_2} \frac{\Omega_t^2\times 0}{\Omega_t^2+4V^2}dt \\ =& 0.\end{aligned} \tag{D1}$$

附录 E：当 V 随时间变化时，对方程（20）中几何相位的重新推导

在实际情况下，V 与原子间距d 有关，而 d 与时间 t呈线性关系。我们设定 $d = a * t$，其中 a 是一个与时间无关的参数。因此我们可以得到 $V(t) = C_3/(a^3t^3)$。在此基础上，我们计算几何相位：

$$\varphi_{ge} = i\int_{\tau_1}^{\tau_1+\tau_2} {}_2\langle d|\frac{\partial}{\partial t}|d\rangle_2 dt = \int_{\tau_1}^{\tau_1+\tau_2} \frac{a^6t^6\Omega_t^2\dot{\varphi}_2}{a^6t^6\Omega_t^2+4(C_3)^2}dt. \tag{E1}$$

考虑具体的脉冲后，几何相位可计算为

$$\begin{aligned}\varphi_{ge} =& \int_{\tau_1}^{\tau_1+\frac{\tau_{2-}}{4}} \frac{a^6t^6\Omega_t^2\dot{\varphi}_2}{a^6t^6\Omega_t^2+4(C_3)^2}dt + \int_{\tau_1+\frac{\tau_{2-}}{4}}^{\tau_1+\frac{\tau_{2+}}{4}} \frac{a^6t^6\Omega_t^2\dot{\varphi}_2}{a^6t^6\Omega_t^2+4(C_3)^2}dt + \int_{\tau_1+\frac{\tau_{2+}}{4}}^{\tau_1+\frac{\tau_{2-}}{2}} \frac{a^6t^6\Omega_t^2\dot{\varphi}_2}{a^6t^6\Omega_t^2+4(C_3)^2}dt + \int_{\tau_1+\frac{\tau_{2-}}{2}}^{\tau_1+\frac{\tau_{2+}}{2}} \frac{a^6t^6\Omega_t^2\dot{\varphi}_2}{a^6t^6\Omega_t^2+4(C_3)^2}dt \\ &+ \int_{\tau_1+\frac{\tau_{2+}}{2}}^{\tau_1+\frac{3\tau_{2-}}{4}} \frac{a^6t^6\Omega_t^2\dot{\varphi}_2}{a^6t^6\Omega_t^2+4(C_3)^2}dt + \int_{\tau_1+\frac{3\tau_{2-}}{4}}^{\tau_1+\frac{3\tau_{2+}}{4}} \frac{a^6t^6\Omega_t^2\dot{\varphi}_2}{a^6t^6\Omega_t^2+4(C_3)^2}dt + \int_{\tau_1+\frac{3\tau_{2+}}{4}}^{\tau_1+\tau_2} \frac{a^6t^6\Omega_t^2\dot{\varphi}_2}{a^6t^6\Omega_t^2+4(C_3)^2}dt \\ =& \int_{\tau_1}^{\tau_1+\frac{\tau_{2-}}{4}} \frac{a^6t^6\Omega_t^2\times 0}{a^6t^6\Omega_t^2+4(C_3)^2}dt + \int_{\tau_1+\frac{\tau_{2-}}{4}}^{\tau_1+\frac{\tau_{2+}}{4}} \frac{0\times\dot{\varphi}_2}{0+4(C_3)^2}dt + \int_{\tau_1+\frac{\tau_{2+}}{4}}^{\tau_1+\frac{\tau_{2-}}{2}} \frac{a^6t^6\Omega_t^2\times 0}{a^6t^6\Omega_t^2+4(C_3)^2}dt + \int_{\tau_1+\frac{\tau_{2-}}{2}}^{\tau_1+\frac{\tau_{2+}}{2}} \frac{0\times\dot{\varphi}_2}{0+4(C_3)^2}dt \\ &+ \int_{\tau_1+\frac{\tau_{2+}}{2}}^{\tau_1+\frac{3\tau_{2-}}{4}} \frac{a^6t^6\Omega_t^2\times 0}{a^6t^6\Omega_t^2+4(C_3)^2}dt + \int_{\tau_1+\frac{3\tau_{2-}}{4}}^{\tau_1+\frac{3\tau_{2+}}{4}} \frac{0\times\dot{\varphi}_2}{0+4(C_3)^2}dt + \int_{\tau_1+\frac{3\tau_{2+}}{4}}^{\tau_1+\tau_2} \frac{a^6t^6\Omega_t^2\times 0}{a^6t^6\Omega_t^2+4(C_3)^2}dt \\ =& 0.\end{aligned} \tag{E2}$$

附录 F：单通道的近似激发误差

为简单起见，我们将所有可能的不完美激发过程视为一系列二能级系统，每个系统由任意一个泄漏态和基态构成。哈密顿量可写为

$$H_{\text{leakage}} = \delta|R_L\rangle\langle R_L| + \Omega/2(|g\rangle\langle R_L| + \text{H.c.}), \tag{F1}$$

其中 δ 表示失谐，Ω 表示拉比频率，$|g\rangle$ 是基态（$|0\rangle$ 或 $|1\rangle$），而 $|R_L\rangle$ 是泄漏态。可以得到该态的布居数 $|R_L\rangle$

$$P_{R_L} = |\frac{i\Omega e^{-\frac{1}{2}i\delta t}\sin\left(\frac{1}{2}t\sqrt{\delta^2+\Omega^2}\right)}{\sqrt{\delta^2+\Omega^2}}|^2. \tag{F2}$$

为简便起见，我们可以通过考虑 $\Omega/\delta \ll 1$ 以及一个 π 共振情况下的脉冲时间 $t = \pi/\Omega$，得到级数展开。然后，方程（F2）可简化为（为简便起见，我们令 $m = \Omega/\delta$ ）

$$P_{R_L} \approx \left(m^2 - m^4 + m^6 + O\left(m^7\right)\right) \sin^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{m^2}}\pi + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{m^2}}\pi m^2 - \frac{1}{16}\left(\sqrt{\frac{1}{m^2}}\pi\right) m^4 + \frac{1}{32}\sqrt{\frac{1}{m^2}}\pi m^6 + O\left(m^8\right)\right). \tag{F3}$$

由于 (sin)^2 的最大值为 1，且 $m^2 \ll 1$，可由方程（F3）推导出以下关系式

$$P_{R_L} \leq m^2 = (\Omega/\delta)^2. \tag{F4}$$

[1] T. F. Gallagher, 《里德堡原子》，第 3 卷（剑桥大学出版社，2005）。[2] M. Saffman、T. G. Walker 和 K. Mølmer, 《现代物理评论》82，2313（2010）。[3] D. Comparat 和 P. Pillet, 《美国光学学会杂志B辑》27，A208（2010）。[4] L. B´eguin、A. Vernier、R. Chicireanu、T. Lahaye 和 A. Browaeys, 《物理评论快报》110，263201（2013）。[5] D. Jaksch、J. I. Cirac、P. Zoller、S. L. Rolston、R. Cˆot´e 和 M. D. Lukin, 《物理评论快报》85，2208（2000）。[6] M. D. Lukin、M. Fleischhauer、R. Cote、L. M. Duan、D. Jaksch、J. I. Cirac 和 P. Zoller, 《物理评论快报》87，037901（2001）。[7] E. Urban、T. A. Johnson、T. Henage、L. Isenhower、D. Yavuz、T. Walker 和 M. Saffman, 《自然物理》5，110（2009）。[8] A. Ga¨etan、Y. Miroshnychenko、T. Wilk、A. Chotia、M. Viteau、D. Comparat、P. Pillet、A. Browaeys 和 P. Grangier, 《自然物理》5，115（2009）。[9] L. Isenhower、E. Urban、X. L. Zhang、A. T. Gill、T. Henage、T. A. Johnson、T. G. Walker 和 M. Saffman, 《物理评论快报》104，010503（2010）。[10] X. L. Zhang、L. Isenhower、A. T. Gill、T. G. Walker 和 M. Saffman, 《物理评论A辑》82，030306（2010）。[11] T. Wilk、A. Ga¨etan、C. Evellin、J. Wolters、Y. Miroshny-chenko、P. Grangier 和 A. Browaeys, 《物理评论快报》104，010502（2010）。[12] K. M. Maller、M. T. Lichtman、T. Xia、Y. Sun、M. J. Piotrowicz、A. W. Carr、L. Isenhower 和 M. Saffman, 《物理评论A辑》92，022336（2015）。[13] Y. Zeng、P. Xu、X. He、Y. Liu、M. Liu、J. Wang、D. J. Papoular、G. V. Shlyapnikov 和 M. Zhan, 《物理评论快报》119，160502（2017）。[14] C. J. Picken、R. Legaie、K. McDonnell 和 J. D. Pritchard, 《量子科学与技术》4，015011（2018）。[15] H. Levine、A. Keesling、A. Omran、H. Bernien、S. Schwartz、A. S. Zibrov、M. Endres、M. Greiner、V. Vuleti´c 和 M. D. Lukin, 《物理评论快报》121，123603（2018）。[16] H. Levine、A. Keesling、G. Semeghini、A. Omran、T. T. Wang、S. Ebadi、H. Bernien、M. Greiner、V. Vuleti´c、H. Pichler 和 M. D. Lukin, 《物理评论快报》123，170503（2019）。[17] T. M. Graham、M. Kwon、B. Grinkemeyer、Z. Marra、X. Jiang、M. T. Lichtman、Y. Sun、M. Ebert 和 M. Saffman, 《物理评论快报》123，230501（2019）。[18] R. Verresen、M. D. Lukin 和 A. Vishwanath, 《物理评论X》11，031005（2021）。[19] M. Saffman 和 T. G. Walker, 《物理评论A辑》72，022347 (2005年). [20] W. Li, C. Ates, and I. Lesanovsky, 《物理评论快报》110, 213005 2013( ). [21] X.-F. Shi, 《物理评论应用》7, 064017 (2017). [22] D. Petrosyan, F. Motzoi, M. Saffman, and K. Mølmer, 《物理评论A辑》96, 042306 (2017). [23] A. M. Kale, 高年级论文（专业），加州理工学院 (2020), 10.7907/8mee-md98; I. S. Madjarov, J. P. Covey, A. L. Shaw, J. Choi, A. Kale, A. Cooper, H. Pichler, V. Schkolnik, J. R. Williams, and M. Endres, 《自然·物理》16, 857 (2020). [24] M. V. Berry, 《伦敦皇家学会会刊：数学与物理科学辑》392, 45 (1984). [25] Y. Aharonov and J. Anandan, 《物理评论快报》58, 1593 (1987). [26] P. Zanardi and M. Rasetti, 《物理快报A辑》264, 94 (1999). [27] J. Anandan, 《物理快报A辑》133, 171 (1988). [28] F. Wilczek and A. Zee, 《物理评论快报》52, 2111 (1984). [29] E. Sj¨oqvist, 《物理学》1, 35 (2008). [30] S.-L. Zhu and P. Zanardi, 《物理评论A辑》72, 020301 (2005). [31] G. De Chiara and G. M. Palma, 《物理评论快报》91, 090404 2003( ). [32] P. J. Leek, J. M. Fink, A. Blais, R. Bianchetti, M. G¨oppl, J. M. Gambetta, D. I. Schuster, L. Frunzio, R. J. Schoelkopf, and A. Wallraff, 《科学》318, 1889 (2007). [33] S. Filipp, J. Klepp, Y. Hasegawa, C. Plonka-Spehr, U. Schmidt, P. Geltenbort, and H. Rauch, 《物理评论快报》102, 030404 (2009). [34] S. Berger, M. Pechal, A. A. Abdumalikov, C. Eichler, L. Steffen, A. Fedorov, A. Wallraff, and S. Filipp, 《物理评论A辑》87, 060303 (2013). [35] J. A. Jones, V. Vedral, A. Ekert, and G. Castagnoli, 《自然》403, 869 (2000). [36] L.-M. Duan, J. I. Cirac, and P. Zoller, 《科学》292, 1695 (2001). [37] L.-A. Wu, P. Zanardi, and D. A. Lidar, 《物理评论快报》95, 130501 (2005). [38] H. Wu, E. M. Gauger, R. E. George, M. M¨ott¨onen, H. Riemann, N. V. Abrosimov, P. Becker, H.-J. Pohl, K. M. Itoh, M. L. W. Thewalt, and J. J. L. Morton, 《物理评论A辑》87, 032326 (2013). [39] Y.-Y. Huang, Y.-K. Wu, F. Wang, P.-Y. Hou, W.-B. Wang, W.-G. Zhang, W.-Q. Lian, Y.-Q. Liu, H.-Y. Wang, H.-Y. Zhang, L. He, X.-Y. Chang, Y. Xu, and L.-M. Duan, 《物理评论快报》122, 010503 (2019). [40] W. Xiang-Bin and M. Keiji, 《物理评论快报》87, 097901 (2001). [41] S.-L. Zhu and Z. D. Wang, 《物理评论快报》89, 097902

(2002年). [42] J. T. Thomas, M. Lababidi, and M. Tian, 《物理评论A辑》84, 042335 (2011). [43] P. Z. Zhao, X.-D. Cui, G. F. Xu, E. Sj¨oqvist, and D. M. Tong, 《物理评论A辑》96, 052316 (2017). [44] T. Chen and Z.-Y. Xue, 《物理评论应用》10, 054051 (2018). [45] E. Sj¨oqvist, D. M. Tong, L. M. Andersson, B. Hessmo, M. Johansson, and K. Singh, 《新物理学杂志》14, 103035 (2012). [46] G. F. Xu, J. Zhang, D. M. Tong, E. Sj¨oqvist, and L. C. Kwek, 《物理评论快报》109, 170501 (2012). [47] M. Johansson, E. Sj¨oqvist, L. M. Andersson, M. Ericsson, B. Hessmo, K. Singh, and D. M. Tong, 《物理评论A辑》86, 062322 2012( ). [48] Z.-Y. Xue, J. Zhou, and Z. D. Wang, 《物理评论A辑》92, 022320 2015( ). [49] V. Azimi Mousolou, 《物理评论A辑》96, 012307 (2017). [50] J. Jing, C.-H. Lam, and L.-A. Wu, 《物理评论A辑》95, 012334 2017( ). [51] N. Ramberg and E. Sj¨oqvist, 《物理评论快报》( ). [52] P. Z. Zhao, K. Z. Li, G. F. Xu, and D. M. Tong, 《物理评论A辑》101, 062306 (2020). [53] G. Feng, G. Xu, and G. Long, 《物理评论快报》110, 190501 2013( ). [54] Z. Zhu, T. Chen, X. Yang, J. Bian, Z.-Y. Xue, and X. Peng, 《物理评论应用》12, 024024 (2019). [55] Y. Xu, Z. Hua, T. Chen, X. Pan, X. Li, J. Han, W. Cai, Y. Ma, H. Wang, Y. P. Song, Z.-Y. Xue, and L. Sun, 《物理评论快报》124, 230503 (2020). [56] P. Zhao, Z. Dong, Z. Zhang, G. Guo, D. Tong, and Y. Yin, 《中国科学：物理学、力学和天文学》64, 250362 (2021). [57] C. Song, S.-B. Zheng, P. Zhang, K. Xu, L. Zhang, Q. Guo, W. Liu, D. Xu, H. Deng, K. Huang, D. Zheng, X. Zhu, and H. Wang, 《自然·通讯》8, 1061 (2017). [58] Z. Han, Y. Dong, B. Liu, X. Yang, S. Song, L. Qiu, D. Li, J. Chu, W. Zheng, J. Xu, T. Huang, Z. Wang, X. Yu, X. Tan, D. Lan, M.-H. Yung, and Y. Yu, "实验实现通用时间最优非阿贝尔几何量子门," (2020), arXiv:2004.10364 [量子物理学]. [59] A. A. Abdumalikov Jr, J. M. Fink, K. Juliusson, M. Pechal, S. Berger, A. Wallraff, and S. Filipp, 《自然》496, 482 (2013). [60] S. Danilin, A. Vepsalainen, and G. S. Paraoanu, ( ). [61] D. Egger, M. Ganzhorn, G. Salis, A. Fuhrer, P. M¨uller, P. Barkoutsos, N. Moll, I. Tavernelli, and S. Filipp, 《物理评论应用》11, 014017 (2019). [62] C. Zu, W.-B. Wang, L. He, W.-G. Zhang, C.-Y. Dai, F. Wang, and L.-M. Duan, 《自然》514, 72 (2014). [63] K. Nagata, K. Kuramitani, Y. Sekiguchi, and H. Kosaka, 《自然·通讯》9, 3227 (2018). [64] S. Arroyo-Camejo, A. Lazariev, S. W. Hell, and G. Bal- asubramanian, 《自然·通讯》5, 4870 (2014). [65] Y. Sekiguchi, N. Niikura, R. Kuroiwa, H. Kano, and H. Kosaka, 《自然·光子学》11, 309 (2017). [66] B. B. Zhou, P. C. Jerger, V. O. Shkolnikov, F. J. Here- mans, G. Burkard, and D. D. Awschalom, 《物理评论快报》119, 140503 (2017). [67] N. Ishida, T. Nakamura, T. Tanaka, S. Mishima, H. Kano, R. Kuroiwa, Y. Sekiguchi, and H. Kosaka, 《光学快报》43, 2380 (2018). [68] S.-B. Zheng, C.-P. Yang 和 F. Nori, 《物理评论A辑》93, 032313（2016）。[69] B.-J. Liu、X.-K. Song、Z.-Y. Xue、X. Wang 和 M.-H. Yung, 《物理评论快报》123，100501（2019）。[70] Y.-H. Kang、Z.-C. Shi、B.-H. Huang、J. Song 和 Y. Xia, 《物理评论A辑》101，032322（2020）。[71] C.-Y. Guo、L.-L. Yan、S. Zhang、S.-L. Su 和 W. Li, 《物理评论A辑》102, 042607（2020）。[72] F.-Q. Guo、J.-L. Wu、X.-Y. Zhu、Z. Jin、Y. Zeng、S. Zhang、L.-L. Yan、M. Feng 和 S.-L. Su, 《物理评论A辑》102，062410（2020）。[73] Y.-H. Chen、W. Qin、R. Stassi、X. Wang 和 F. Nori, 物理评论研究3，033275（2021）。[74] T. Yan、B.-J. Liu、K. Xu、C. Song、S. Liu、Z. Zhang、H. Deng、Z. Yan、H. Rong、K. Huang、M.-H. Yung、Y. Chen 和 D. Yu, 《物理评论快报》122，080501（2019）。[75] M.-Z. Ai、S. Li、Z. Hou、R. He、Z.-H. Qian、Z.-Y. Xue、J.-M. Cui、Y.-F. Huang、C.-F. Li 和 G.-C. Guo, 《物理评论应用》14, 054062（2020）。[76] Y. Dong、S.-C. Zhang、Y. Zheng、H.-B. Lin、L.-K. Shan、X.-D. Chen、W. Zhu、G.-Z. Wang、G.-C. Guo 和 F.-W. Sun, 《物理评论应用》16，024060（2021）。[77] B.-J. Liu、Y.-S. Wang 和 M.-H. Yung, 物理评论研究3, L032066（2021）。[78] S. Li、B.-J. Liu、Z. Ni、L. Zhang、Z.-Y. Xue、J. Li、F. Yan、Y. Chen、S. Liu、M.-H. Yung, *et al.*, arXiv预印本 arXiv:2106.03474（2021）。[79] G. Dridi、K. Liu 和 S. Gu´erin, 《物理评论快报》125，250403（2020）。[80] D. Daems、A. Ruschhaupt、D. Sugny 和 S. Gu´erin, 《物理评论快报》111，050404（2013）。[81] B.-J. Liu 和 M.-H. Yung, 《量子科学与技术》6，025002（2021）。[82] M. Saffman、T. G. Walker 和 K. Mølmer, 《现代物理评论》82, 2313（2010）。[83] I. I. Beterov、I. I. Ryabtsev、D. B. Tretyakov 和 V. M. Entin, 《物理评论A辑》79，052504（2009）。[84] A. G. White、A. Gilchrist、G. J. Pryde、J. L. O'Brien、M. J. Bremner 和 N. K. Langford, 《美国光学学会杂志B辑》24，172（2007）。[85] M. A. Nielsen, 《物理学》303, 249（2002）。[86] J.-L. Wu、Y. Wang、J.-X. Han、Y. Jiang、J. Song、Y. Xia、S.-L. Su 和 W. Li, 《物理评论应用》16, 064031（2021）。[87] L.-N. Sun、L.-L. Yan、S.-L. Su 和 Y. Jia, 《物理评论应用》16，064040（2021）。[88] A. Ruschhaupt、X. Chen、D. Alonso 和 J. G. Muga, 《新物理学杂志》14, 093040（2012）。[89] X. Wang、M. Allegra、K. Jacobs、S. Lloyd、C. Lupo 和 M. Mohseni, 《物理评论快报》114, 170501（2015）。[90] Y.-Y. Jau、A. Hankin、T. Keating、I. Deutsch 和 G. Biedermann, 《自然物理》12，71（2016）。[91] A. M. Hankin、Y.-Y. Jau、L. P. Parazzoli、C. W. Chou、D. J. Armstrong、A. J. Landahl 和 G. W. Biedermann, 《物理评论A辑》89，033416（2014）。[92] L. S. Theis、F. Motzoi、F. K. Wilhelm 和 M. Saffman, 《物理评论A辑》94，032306（2016）。[93] E. Robertson、N. ˇSibali´c、R. Potvliege 和 M. Jones, 《计算物理通讯》261，107814（2021）。[94] W. Dong、F. Zhuang、S. E. Economou 和 E. Barnes, PRX量子2, 030333（2021）。[95] F. Robicheaux、T. M. Graham 和 M. Saffman, 《物理评论A辑》103，022424（2021）。[96] X.-F. Shi, 《物理评论应用》13，024008（2020）。