arXiv:2302.03278v2 [math.CO] 5 Feb 2024

奇棱柱的极值图*

何晓聪、李永涛*、冯丽华

中国中南大学数学与统计学院、HNP-LAMA，湖南长沙，410083

2024年2月6日

摘要：图 H 的图兰数 ex(n, H) 是不包含 H 作为子图的 n 阶图的最大边数。Simonovits 的一系列研究广泛探讨了正多面体的图兰数。本文将给出棱柱图 $C_{2k+1}^{\square}$ 的精确图兰数，该图定义为奇圈 C_{2k+1} 与边 K_2 的笛卡尔积。利用 Simonovits 的一个深刻定理以及 Yuan 的一项稳定性结果 [《欧洲组合学杂志》104 (2022年)], ，我们将确定每个 $k \geq 1$ 及充分大的 n 下 ex(n,$C_{2k+1}^{\square}$) 的精确值，并刻画极值图。此外，对于 $k = 1$ 的情形，受 Xiao、Katona、Xiao 和 Zamora 的一项近期结果启发 [《离散应用数学》307 (2022年)]，我们将确定每个 n 下 ex($n, C_3^{\square}$) 的精确值，而非仅对充分大的 n 确定其值。

关键词：图兰数，极值图，笛卡尔积。

美国数学学会分类：05C35。

1 引言

本文所考虑的所有图都是无向有限图，且既不含环也不含重边。图 G 的顶点集记为 $V(G)$，G 的边集记为 $E(G)$，G 中的边数记为 $e(G)$。令 K_n 表示 n 个顶点的完全图，令 K_s、t 表示部件大小分别为 s 和 t 的完全二部图。我们分别用 C_n 和 P_n 表示 n 个顶点的圈和路径。图兰图 $T_r(n)$ 是一个具有 n 个顶点的完全 r 部图，每个部的大小为 n_i，满足 $|n_i - n_j| \leq 1$ 对所有 $1 \leq i$、$j \leq r$ 均成立；也就是说，n_i 等于 $\lfloor n/r \rfloor$ 或 $\lceil n/r \rceil$。有时，我们将 $T_r(n)$ 称为平衡完全 r 部图。记 $G_1 \cup G_2$ 为图 G_1 和 G_2 的点不交并。为简便起见，对于 G 的 k 个副本的点不交并，我们记为 kG。记 $G_1 \otimes G_2$ 为通过将 G_1 的每个顶点与 G_2 的每个顶点相连而由 $G_1 \cup G_2$ 得到的图。对于顶点 $v \in V(G)$ 以及子图 $H \subseteq G$（可能为 $v \in V(H)$），我们用 $N_H(v)$ 表示 v 在 $V(H)$ 中的邻点集，并用 $d_H(v)$ 表示 $|N_H(v)|$。对于两个集合 A、$B \subseteq V(G)$，我们用 $G[A, B]$ 表示 G 的导出二部图，其中边连接 A 与 B；用 $e(A, B)$ 表示 $G[A, B]$ 的边数。我们用 $G[A]$ 表示由 A 导出的子图。将 G 的最小度记为 $\delta(G)$，将 G 的补图记为 $\overline{G}$。特别地，K_n 是空图，也称为具有 n 个顶点的独立集。G 的色数记为 $\chi(G)$，它是满足以下条件的最小整数 s：存在一种用 s 种颜色对顶点集 $V(G)$ 进行的着色，使相邻顶点具有不同的颜色。

*电子邮箱地址：hexc2018@qq.com（X. He）、ytli0921@hnu.edu.cn（Y. Li，通讯作者）、fenglh@163.com（L. Feng）。

1.1 正多面体的图兰数

设 G 和 H 为两个简单图。若 G 不包含与 H 同构的子图，则称 G 为 H-无图。例如，每个二部图都是无三角形图。 H 的 图兰数 记为 $\mathrm{ex}(n,H)$，它是 n 个顶点的 H-无图中所能具有的最大边数。此外，具有最大边数的 n 个顶点 H-无图称为 H 的极值图 。一般而言， H 可能有许多（而非仅一个）极值图。例如，本文的结果也呈现出这一现象。确定图兰数的问题是图论的基石之一。注意，平衡完全 r 部图 $T_r(n)$ 是 K_{r+1}-无图。1941年，图兰 [48] 证明了 $\mathrm{ex}(n, K_{r+1}) = e(T_r(n))$. 此外， $T_r(n)$ 是达到最大边数的唯一 K_{r+1}-无图。特别地，当 $r = 2$ 时，它给出

$$\mathrm{ex}(n, K_3) = \lfloor n^2/4 \rfloor, \tag{1}$$

该结果最早由 Mantel [39]证明；例如，参见专著 [3, 第 294] 页，其中介绍了其他证明和推广，以及综述 [27, 46] 中更多相关结果。

图兰 [48] 确定了四面体 K_4的极值图后，提出了以下类似问题：确定由正多面体的顶点和边构成的图的图兰数。例如，立方体 Q_8、八面体 O_6、十二面体 D_{20} 和二十面体 I_{12}；参见图1。

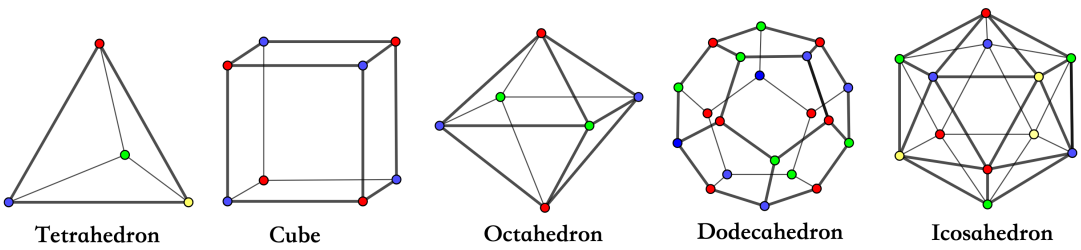


图1：五种正多面体

文献中对正多面体相关的图兰问题进行了广泛研究；例如，关于立方体 [19, 26, 32, 33, 41]，参见 Q_8; 关于八面体 [20]，参见 O_6; 关于十二面体 [43]，参见 D_{20}; 关于二十面体 [44] ，参见 I_{12}。特别地，尽管 Erdős 和 Simonovits [19] 证明了对于某个常数 $C > 0$，$\mathrm{ex}(n, Q_8) \le Cn^{8/5}$，但 Q_8 的图兰数下界仍然悬而未决。受上述结果启发，我们将研究棱柱图的图兰问题，它可以看作立方体 Q_8的一种变体图。回顾一下， $\chi(H)$表示 H的色数。著名的厄尔多斯–斯通–西蒙诺维茨定理 [17, 18] 指出

$$\mathrm{ex}(n, H) = \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1}\right)\binom{n}{2} + o(n^2). \tag{2}$$

这一结果确定了每个非二部图 H 的 $\mathrm{ex}(n, H)$ 的渐近值，而对于每个二部图 H，它则归结为 $\mathrm{ex}(n, H) = o(n^2)$。乍看之下，公式（2）为估计 $\mathrm{ex}(n, H)$ 这一问题给出了令人满意的答案。此外，在极值组合学中，如何更精确地界定误差项 $o(n^2)$ 是一个重要问题。尤其是，确定图 H 的精确图兰数是核心问题之一。

关于求特定图 H 的 $\mathrm{ex}(n, H)$ 的确切值，已有许多优美的结果。例如，最早由 Mantel [39] 给出的结果表明，$\mathrm{ex}(n, C_3) = \lfloor n^2/4 \rfloor$。Erdős、Füredi、

Gould 和 Gunderson [15], Chen、Gould、Pfender 和 Wei [8] 分别确定了相交三角形和团的确切图兰数。Liu [37] 确定了圈的边膨胀以及一大类树的图兰数，而 Ni、Kang、Shan 和 Zhu [40] 研究了钥匙圈图的边膨胀。2022年，Yuan [54] 研究了完全图和完全二部图的边膨胀的图兰数及极值图。应用 Erdős 和 Simonovits 的稳定性定理，Hou、Qiu 和 Liu [30, 31], 以及 Yuan [52] 分别独立确定了花图的图兰数。此外，Dzido [12], Dzido 和 Jastrzebski [13], 以及 Yuan [53]确定了轮图的图兰数。2022年，Xiao、Katona、Xiao 和 Zamora [49], 以及 Yuan [55] 刻画了路径幂的极值图。

1.2 棱柱图与笛卡尔积

除图1中的五种正多面体外，还有两种广为人知的多面体，称为棱锥和棱柱图；见图2。事实上，很容易观察到，棱锥实际上是轮图，Dzido [12], Dzido、Jastrzebski [13] 和 Yuan [53]对此进行了研究。不同于对棱锥（轮图）的研究，本文将关注棱柱图的图兰数，并刻画极值图。

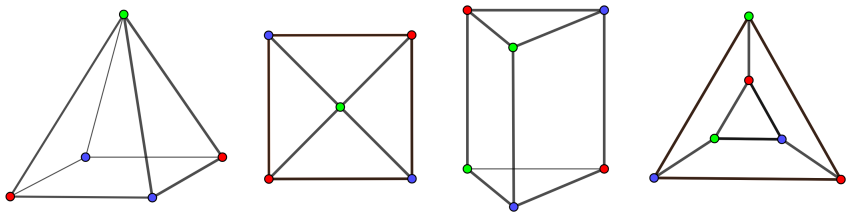


图2：四棱锥和三棱柱

可以从笛卡尔积的角度来考察棱柱图。图 G和 F的笛卡尔积记为 $G\square F$，其顶点集为 $V(G)\times V(F)$；其中，两个不同的顶点（g_1, f_1）和（g_2, f_2）在 $G\square F$中相邻，当且仅当 $g_1=g_2$和 $f_1f_2\in E(F)$，或 $f_1=f_2$和$g_1g_2\in E(G)$。2022年，Bradač、Janzer、Sudakov 和 Tomon [4] 研究了网格图 $P_t\square P_t$ 的图兰数，其中 P_t 是一个具有 t 个顶点的路径。更准确地说，他们证明，对于 $t\geq 2$，存在仅依赖于 t 的正数 C_1 和 C_2，使得 $C_1n^{3/2}\leq \mathrm{ex}(n,\ P_t\square P_t)\leq C_2n^{3/2}$。在本文中，我们将考察奇圈与一条边的笛卡尔积的图兰数。回顾一下，C_{2k+1} 是一个具有 $2k+1$ 个顶点的圈。注意，奇棱柱 $C^{\square}_{2k+1}:=C_{2k+1}\square K_2$是由两个阶为 $2k+1$ 的顶点不交的圈，以及一个将这两个圈中对应顶点配对的匹配组成的图。例如，图2中的第三个和第四个图就是三棱柱。正如所承诺的，我们将研究棱柱图 $C^{\square}_{2k+1}$的图兰数。由(2)中的Erdős–Stone–Simonovits定理，我们得到一个渐近值

$$\mathrm{ex}(n,C^{\square}_{2k+1})=\frac{n^2}{4}+o(n^2).$$

此外，一个自然的问题是改进误差项，并确定 $C^{\square}_{2k+1}$的精确图兰数。本文的结果解决了这一问题，并研究了 $\mathrm{ex}(n,\ C^{\square}_{2k+1})$ 的精确值。此外，我们还刻画了 $C^{\square}_{2k+1}$的极值图。

1.3 主要结果

本文的第一个结果可表述如下。

定理 1.1. 设 $k \geq 1$ 固定且 n 充分大，则

$$\mathrm{ex}(n, C^{\square}_{2k+1}) = \max_{n_a+n_b=n} \left\{ n_a(1+n_b) + \frac{1}{2}(j^2-3j) : j \in \{0,1,2\}, j \equiv n_a (\mathrm{mod}\ 3) \right\}.$$

此外，所有关于 $C^{\square}_{2k+1}$ 的极值图都具有如下形式：一个完全二部图K_{n_a,n_b} 并在大小为 n_a的部分中加入一个关于 P_4 的极值图。

有几类图 H 的 ex(n,H) 对所有整数 n都已被精确确定，包括团、匹配、路径、奇圈以及其他一些特殊图。具体而言，图兰 [48] 确定了所有 n下 ex(n,K_{r+1}) 的值；Erdős 和 Gallai [16] 确定了 ex(n,P_k) 和 ex(n,M_{2k})，其中 M_{2k}是一个有 $2k$ 个顶点的匹配。Füredi 和 Gunderson [23] 确定了所有 n和 $k \geq 2$下 ex(n,C_{2k+1}) 的值。布肖和凯特尔 [6] 确定了所有$n \geq 7k$下 ex(n,kP_3) 的值；后来，坎波斯和洛佩斯 [7], Yuan 和张 [50], 分别独立确定了所有整数 n和 k下 ex(n,kP_3) 的值。此外，别拉克和基耶利谢克 [2] 确定了所有 n 下 ex$(n,2P_5)$ 的值，Yuan 和张 [51] 也独立证明了这一结果。另外，兰、秦和石 [36] 确定了所有 n下 ex$(n,2P_7)$ 的值。

对于图2中的三棱柱，也就是定理 1.1 中 $k=1$ 的情形，我们将采用不同的方法，并去掉 n 充分大的条件。更确切地说，我们将确定所有 n 下的 ex$(n,\ C^{\square}_3)$，并给出 n 个顶点上边数最大的所有 $C^{\square}_3$-自由图。我们的结果将在以下两个定理中呈现：先给出图兰数，随后给出相应的极值图。

定理 1.2。 一个有 n 个顶点且 $C^{\square}_3$-自由的图 $(n \neq 5)$ 的最大边数为

$$\mathrm{ex}(n, C^{\square}_3) = \begin{cases} \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, & \textit{if } n \equiv 1,2,3 \ (\mathrm{mod}\ 6); \\ \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + \lceil \frac{n}{2} \rceil, & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

在展示定理 1.2 中的极值图之前，我们需要定义一些图，这些图最初见于 Xiao、Katona、Xiao 和 Zamora [49]。令 $K_{i,n-i}$ 为部集分别为 X 和 Y、大小分别为 $|X|=i$ 和 $|Y|=n-i$ 的完全二部图。一方面，若 $3 \mid i$，则在类 X 中嵌入 $\frac{i}{3}$ 个顶点不交三角形，同时保持类 Y 不变，从而得到一个有 n 个顶点的新图，记为 H^i_n。另一方面，若 $3 \nmid i$，则取一个满足 $3 \mid (i-j)$ 的整数 $j \in [1,i]$，并定义 $F^i{}_n{}^j$ 为从 $K_{i,n-i}$ 得到的图：在类 X 中嵌入一个有 j 个顶点的星图和 $\frac{i-j}{3}$ 个顶点不交三角形，其中星图与所有三角形均不相交。显然，对于任意 i 和 j，可以看出 H^i_n 和 $F^i{}_n{}^j$ 都是 $C^{\square}_{2k+1}$-自由的。此外，对于较小的 n，我们引入三个例外图 G_1, G_2 和 G_3；见图3。

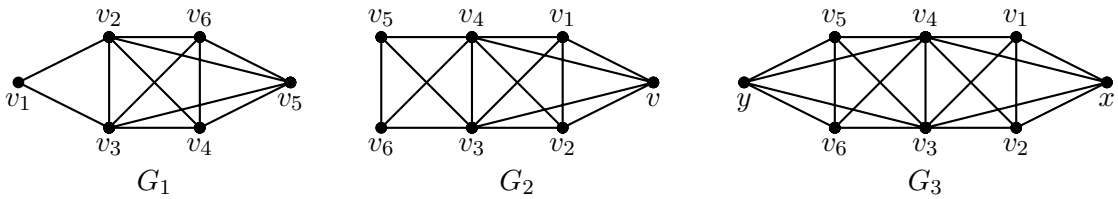


图3：图 G_1、G_2 和 G_3。

$C_3^{\square}$ 的极值图列于下表。

定理 1.3。 对于 $n \geq 6$，$C_3^{\square}$ 的极值图如下 $s.$

阶 n	6	7	8
极值图	G_1, H_6^3	G_2, $F_{1\,7}^4$, $F_{4\,7}^4$, H_7^3	G_3, $F_{1\,8}^4$, $F_{4\,8}^4$, $F_{2\,8}^5$, $F_{5\,8}^5$

此外，对于 $n \geq 9$，我们有以下极值图。

n 阶（模 6）	0	1	2	3	4	5
极值图	$H_n^{\frac{n}{2}}$	$F_n^{\lceil \frac{n}{2} \rceil, j}$ $H_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$	$F^{\frac{n}{2}\,j}$, $F_{\frac{n}{2}}^{n+1,j}$	$F_n^{\lceil \frac{n}{2} \rceil, j}$ $H_n^{\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1}$	$H_n^{\frac{n}{2}+1}$	$H_n^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$

其中，j 可取满足 $1 \leq j \leq i$ 和 $3 \mid (i-j)$的任意整数。

论文结构。 本文安排如下。第2节将介绍一些预备知识，包括关于路径的图兰型结果，以及 Simonovits 关于分解族包含线性森林的图的一个深层结构定理。第3节将给出定理 1.1 的证明。第4节中，为了确定每个$n \geq 6$下 $C_3^{\square}$的 n顶点极值图，我们将提供一些引理。随后，第5节分别给出定理1.2和1.3的证明。最后，第6节提出一些开放问题。

2 预备知识

2.1 路径的图兰型结果

首先，我们需要介绍 Erdős 和 Gallai 的一个结果 [16]。

定理 2.1 (Erdős 和 Gallai [16])。 一个 n 阶 P_k-自由图的最大边数为 $^{n}_{(k-2)\,2}$，即 $\mathrm{ex}(n, P_k) \leq {}^{n}_{(k-2)\,2}$；当且仅当 $(k-1)|n$ 且该图是 $^{n}_{k-1}$ 个 K_{k-1}的顶点不交并时，等号成立。

注意到，定理 2.1 中的界仅在 $(k-1)|n$ 的情形下是紧的。此外，对于一般情形，即 $n = (k-1)t + r$，Faudree 和 Schelp [28], 以及 Kopylov [35] 分别使用不同的方法改进了这一界。

定理 2.2 （Faudree 和 Schelp [28], Kopylov [35]）。 设 $n = (k-1)t + r$ 满足 $t \geq 1$ 且$0 \leq r \leq k-2$。则

$$\mathrm{ex}(n, P_k) = t\binom{k-1}{2} + \binom{r}{2}.$$

此外，每个关于 P_k 的 n 阶极值图都同构于以下两者之一

$$tK_{k-1} \cup K_r$$

or

$$(t-s-1)K_{k-1} \cup \left(K_{\frac{k-2}{2}} \otimes \overline{K}_{\frac{k}{2}+s(k-1)+r}\right)$$

当 k 为偶数时，某个 $s \in [0, t-1]$；以及 $r \in \{\frac{k}{2}, \frac{k-2}{2}\}$。

本文中，我们将采用情形 $k = 4$。

推论 2.3。 设 G 是一个有 n 个顶点的 P_4-自由图。那么

$$e(G) \le n + \frac{1}{2}(j^2 - 3j),$$

其中 $j \in \{0、1、2\}$，且 $j \equiv n$（模 3）。更准确地说，

(a) 若 $n = 3t$，则 $e(G) \le 3t$，当且仅当 $G = tC_3$ 时取等号；

(b) 若 $n = 3t+1$，则 $e(G) \le 3t$，当且仅当

$$G \in \{tC_3 \cup K_1\} \cup \{(t-\ell-1)C_3 \cup K_{1,3\ell+3} : 0 \le \ell \le t-1\}$$

；

(c) 若 $n = 3t+2$，则 $e(G) \le 3t+1$，当且仅当

$$G \in \{tC_3 \cup K_2\} \cup \{(t-\ell-1)C_3 \cup K_{1,3\ell+4} : 0 \le \ell \le t-1\}.$$

最近，Füredi、Kostochka、Luo 和 Verstraëte [24, 25], 以及 Ma 和 Ning [38]先后研究了（连通） P_k-free 图的稳定性结果。为证明定理 1.1，我们需要应用 Yuan [55]提出的以下变体。在原命题中，要求 $t \ge 3$。我们在此指出，通过类似的论证，该结果对于 $t = 2$ 也成立。

引理 *2.4*（*Yuan* [55]）。设 c 为正整数，且 n 充分大。给定一个 n顶点的P_k-自由图 G，满足 $e(G) \ge ex(n, P_k) - c$。令 $\ell = min\{n/(16c), n/(2k-2)\}$，且 $t = \lfloor k/2 \rfloor \ge 2$。若 k 为奇数，则 G 包含一个 ℓK_{t-1}的副本。若 k 为偶数，则 G 包含一个 ℓK_{k-1}的副本，或一个$K_{t-1,\ell}$的副本。

2.2 Simonovits 的深刻定理

分解族最初由 Simonovits [45], 引入，用于研究非二部图的图兰数。对于一个固定的图 H，式（2）中的误差项 $o(n^2)$ 可以通过图 H 的分解族进一步细化。此外，非二部图的分解族有助于确定其极值图更精细的结构。现在我们来给出图的分解族的定义。

定义 2.5 (Simonovits)。 设图 L 具有 $\chi(L) = p+1 \ge 2$。令 $M(L)$ 为满足以下条件的极小图族：存在一个依赖于 L 的整数 $t \ge 1$，使得$L \subseteq (M \cup K_t) \otimes T_{p-1}((p-1)t)$。我们称 $M(L)$ 为 L的分解族。

换言之，如果将图 M 的一个副本（但不包含其任何真子图）放入大型 p部图兰图 $T_p(pt)$ 的一个顶点部中，会产生图 L的一个副本，那么图 M 就属于 M(L)。例如，对于每个 $s \ge 1$ 和 $r \ge 2$，我们有 M(sK_{r+1}) = {sK_2}。此外，对于图1中的十二面体 D_{20} 和二十面体 I_{12}，文献 [43, 44] 证明了 M(D_{20}) = {$6K_2$}，且 M(I_{12}) = {P_6}。另外，对于图2中的轮图（棱锥），由文献 [53] 可知，M(W_{2k+1}) = {$K_{1,k}, C_{2k}$}，且 M(W_{2k}) = {K_2}，因为对于圈中的每条边 e， $\chi(W_{2k}) = 4$ 且$\chi(W_{2k} - e) = 3$。

以下引理可由定义直接推出。

引理 2.6。 设图 L 满足 $\chi(L) = p+1 \ge 2$。若图 G 是由 p 部图兰图 $T_p(n)$ 在一个部中嵌入 $M(L)$ 的一个极值图得到的，则 G 是 L-自由的。因此，我们得到 $\mathrm{ex}(n, L) \ge e(T_p(n)) + \mathrm{ex}(\lceil n/p \rceil, M(L))$。

在定理 1.1 的证明中，我们将使用以下定理，该定理归功于 Simonovits 的一个深刻定理 [43, 第 371] 页。粗略地说，它指出：如果分解族$\mathcal{M}(L)$ 包含一个线性森林（其中每个连通分支都是一条路径），那么 L 的极值图具有非常简单且对称的结构。

定理 2.7 (Simonovits [43])。设 L 是一个给定的图，且满足 $p = \chi(L) - 1$。如果分解族 $M(L)$ 包含一个线性森林，那么存在 $r = r(L)$ 和 $n_0 = n_0(r)$，使得当 $n \geq n_0$ 时，每个 n 顶点的、关于 L 的极值图 G 都属于满足以下条件的图族。*(a)* 从 G 中删除至多 r 个顶点后，剩余图 G' 满足

$$G' = G^1 \otimes G^2 \otimes \cdots \otimes G^p,$$

其中图 G^i 对每个 $1 \leq i \leq p$ 都满足 $||V(G^i)| - n/p| \leq r$。

(b) 对每个 $1 \leq i \leq p$，图 G^i 由若干顶点互不相交的、两两不同构的连通图 $H_i^j s$ 的副本组成，且满足 $|V(H_i^j)| \leq r$。任意两个副本，例如 F_1 和 F_2，都是 H_i^j 的对称子图：存在一个同构映射 $\psi: F_1 \to F_2$，使得对于每个 $x \in V(F_1)$ 以及$y \in G - F_1 - F_2$，当且仅当 $\psi(x)y$ 是一条边时，xy 才是一条边。

定理 2.7 有助于我们刻画棱柱图 $C_{2k+1}^{\square}$ 的所有极值图的近似结构。我们指出，Yuan [55] 也曾利用该定理研究路径幂的图兰问题。特别地，关于分解族$\mathcal{M}(L)$ 含有匹配的图 L，请参阅 [54]。

3 定理 1.1 的证明

下面的引理很简单，但在我们的证明中起着重要作用。

引理 3.1. 分解族 $M(C_{2k+1}^{\square}) = \{P_4\}$。

证明. 色数 $\chi(C_{2k+1}^{\square}) = 3$。当 t 充分大时，容易看出，将一个 P_4 嵌入 $K_{t,t}$ 的一个部集中会得到一个 $C_{2k+1}^{\square}$ 的副本，而嵌入 P_4 的真子图则无法产生这样的副本。因此，$P_4 \in \mathrm{M}(C_{2k+1}^{\square})$。我们声称 $\mathrm{M}(C_{2k+1}^{\square}) = \{P_4\}$。反设 $\mathrm{M}(C_{2k+1}^{\square}) \neq \{P_4\}$。设 $H \in \mathrm{M}(C_{2k+1}^{\square})$ 是一个不同于 P_4 的图，且 H 不含有与 P_4 同构的子图。注意到 $C_{2k+1}^{\square}$ 是 3- 正则的。因此，H 是若干个 K_2、K_1、2、K_1、3 和三角形的不交并。当 t 充分大时，设 V_1 和 V_2 是 $K_{t,t}$ 的两个部集。将 H 的一个副本嵌入 V_1 会得到一个 $C_{2k+1}^{\square}$。我们将新图记为 $K_{t,t} + H$。由于 V_2 是 K_t 的独立集，故可知 H 没有三角形连通分支。注意到 $C_{2k+1}^{\square}$ 中恰有两个 C_{2k+1} 的副本，且 V_2 是一个独立集。因此，H 不含有 K_2 作为连通分支。由于 C_{2k+1} 是一个奇圈，H 中必有一个 $K_{1,2}$ 连通分支，记作 uvw，使得 uv 是某个 C_{2k+1} 的一条边，且 vw 是 $C_{2k+1}^{\square}$ 中两个 C_{2k+1} 之间的一条边。设 $x \notin \{u, w\}$ 是 v 的一个邻点，并设 $y, z \neq v$ 是 w 的两个邻点。那么 xy 或 xz 是 $C_{2k+1}^{\square}$ 的一条边。注意到 $\{x, y, z\} \subseteq V_2$，且 V_2 是一个独立集。xy 和 xz 都不是 $K_{t,t} + H$ 的边，矛盾。因此，这样的 H 不存在，且 $\mathrm{M}(C_{2k+1}^{\square}) = \{P_4\}$。

□

引理 3.2。设 $G = G^1 \otimes G^2$ 满足 $|V(G^i)| = n_i \geq 2k + 1$，其中 $i = 1, 2$。

(a) 令 G' 为由 G 添加一个新顶点 y 得到的图，其中 $|N_{G^i}(y)| \geq 3$，对 $i = 1, 2$。如果 $G^1 \cup G^2$ 有一条与 $N_G(y)$ 关联的边，那么 G' 包含 $C_{2k+1}^{\square}$ 的一个副本。*(b)* 如果 G^1 和 G^2 都含有一条边，那么 G 包含 $C_{2k+1}^{\square}$ 的一个副本。

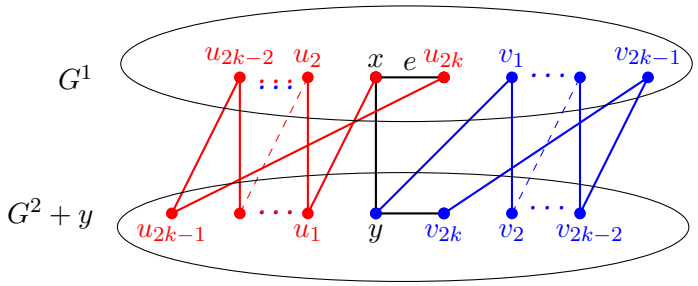


图4：图 G'。

证明。 (a) 不失一般性，我们可以假设 G^1 含有一条边 e，它与一个顶点 $x \in N_G(y)$ 关联；见图4。由于 $|N_{G^1}(y)| \geq 3$，令 $v_1 \in V(G^1)$ 为 y 的一个邻点，使得 v_1 不是 e 的端点。令 $v_{2k} \in V(G^2)$ 为与 y 相邻的一个顶点。于是，$yv_1v_2 \dots v_{2k}$ 和 $xu_1u_2 \dots u_{2k}$ 是 G' 中 C_{2k+1} 的两个副本；分别见图4中的蓝色圈和红色圈。注意，上述两个圈连同匹配 $\{xy,\ u_1v_1,\ u_2v_2,\ \dots,\ u_{2k}v_{2k}\}$ 构成 $C^{\square}_{2k+1}$ 的一个副本。因此，我们得到 $C^{\square}_{2k+1} \subseteq G'$，如所需。

(b) 我们可以假设 $e_1 \in E(G^1)$ 和 $e_2 \in E(G^2)$。与情形 (a) 类似，可以找到一条包含边 e_1 的红色圈 C_{2k+1}，以及一条包含 e_2 的蓝色圈。事实上，奇棱柱 $C^{\square}_{2k+1}$ 包含在 $K_{2k+1,2k+1} + \{e_1, e_2\}$ 中。结合 $(K_{2k+1,2k+1} + \{e_1, e_2\}) \subseteq G$，我们便在 G 中得到一个 $C^{\square}_{2k+1}$ 的副本。证明完毕。 □

以下由 Erdős [14] 和 Simonovits [42] 证明的著名引理，是极值图问题中的一个有力工具；例如参见 [3] 第 6 章中的推论 4.3。

引理 3.3 (Erdős [14] 和 Simonovits [42])。 设 H 是一个具有 $\chi(H) = p + 1 \geq 3$ 的图。如果 G 是 n 个顶点上的 H 的极值图，那么 $\delta(G) = (1 - 1/p)n + o(n)$。

现在，我们可以给出定理 1.1 的证明了。

定理 1.1 的证明。 设 G 是一个具有 n 个顶点且不含 $C^{\square}_{2k+1}$ 的图，并且其边数最多。我们的目标是证明，G 可由完全二部图 $K_{n_a,\ n_b}$ （其中$n_a + n_b = n$）得到：将一个针对 P_4 的 n_a 顶点极值图嵌入大小为 n_a 的部分中。首先，由引理 2.6 和 3.1 可知

$$e(G) \geq \max\{n_a n_b + \mathrm{ex}(n_a, P_4) : n_a + n_b = n\}. \tag{3}$$

简单计算可得

$$e(G) \geq e(T_2(n)) + \frac{n}{2} + O(1).$$

现在，我们将应用定理 2.7。删除 G 中至多 r 个顶点后，所得图 G' 可写成积 $G' = G^1 \otimes G^2$，其中对每个 $i \in \{1,2\}$，都有 $n/2 - r \leq |V(G^i)| \leq n/2 + r$。此外，$G^i$ 的每个连通分支至多含有 r 个顶点。我们将被删除顶点的集合记为 D。于是 $|D| \leq r$。根据引理 3.2 (b)，G^1 和 G^2 不可能都含有边。因此，我们可以假设 G^2 是一个大小为 $n/2 + o(n)$ 的独立集。根据定理 2.7，对于每个 $i = 1,2$，G^i 的孤立顶点是 G 的对称子图。因此，对于任意顶点 $z \in D$，根据定理 2.7 中的对称性，G^i 的孤立顶点要么都与 z 相邻，要么都不与 z 相邻。

我们将 D 划分为以下两个集合：若 $x \in D$ 不与 G^2 的顶点相连，则令其属于 D_2；否则，令其属于 D_1。令 $A_i = V(G^i) \cup D_i$，并对$i = 1,2$，记 $|A_i| = n_i$。显然，我们有 $V(G) = A_1 \cup A_2$。根据定理 2.7 的对称性，每个 A_1 中的顶点都与 G^2 中的所有顶点相连。根据引理 3.3，我们得到 $\delta(G) \geq n/2 + o(n)$。注意，$G^2$ 是空图，且 $|D_2| \leq r$。因此，G^2 中的每个顶点都与 A_1 中的 $n/2 + o(n)$ 个顶点相邻。此外，D_2 中的每个顶点都与 G^1 中的 $n/2 - o(n)$ 个顶点相邻。

断言 1. $G[A_i]$ 不包含 P_4 的副本，对每个 $i \in \{1,2\}$均如此。

断言 *1* 的证明. 根据上述讨论，我们知道 A_1 与 V（G^2）之间的边构成一个完全二部子图。由定义 2.5 和引理 3.1 可知，$G[A_1]$ 是 P_4-自由的。

反设 $G[A_2]$ 包含 P_4的一个副本。由于 $A_2 = V$（G^2）$\cup D_2$ 和 E（G^2）为空，上述 P_4 的副本必包含在 $G[D_2]$中。任意选取一个由 $A_2 \backslash V$（P_4）的 $4k$个顶点组成的集合 U，由引理 3.3 可知，这些 $4k$ 个顶点与V（P_4）的顶点在 G^1中至少有 $n/2 - o$（n）个公共邻居。由定义 2.5 和引理 3.1 可知，在由集合 $U \cup V$（P_4）及其公共邻域诱导的 G 子图中存在一个 $C^{\square}_{2k+1}$ 的副本，因此 G 包含 $C^{\square}_{2k+1}$的一个副本，矛盾。证明完毕。 □

由于 $|D| \leq r$，由 (3) 可得 $e(G[A_1]) \geq \mathrm{ex}(|A_1|, P_4) - O(1)$。因此，由引理 2.4，$G[A_1]$包含 $K_{1,\ell}$ 或 ℓK_3的一个副本，其中 $\ell = \Theta(n)$。接下来，我们将证明分为两种情况。为方便起见，我们记 $N(U) := \bigcap_{u \in U} N(u)$ 为集合 U 中顶点的公共邻域，并记 $N_A(U) := N(U) \cap A$。

情况1. $G[A_1]$ 包含 ℓK_3的一个副本。我们断言，A_2 是 G中的一个独立集。反设 $G[A_2]$ 包含一条边 xy。那么 xy 包含于 $G[D_2]$ 中，因为 $V(G^2)$ 是一个独立集，且 D_2 与 $V(G^2)$ 之间没有边。令 U_2 为由 x、y 以及 $A_2\backslash\{x, y\}$ 中任意 $2k-1$ 个顶点组成的顶点集。由引理 3.3，U_2 中的这 $2k+1$ 个顶点在 A_1中至少有 $|A_1| - o(n)$ 个公共邻居。换言之，A_1 中有 $o(n)$ 个顶点不属于 $N_{A_1}(U_2)$。由于 $G[A_1]$ 有 ℓ 个两两不相交的 K_3 副本和 $\ell = \Theta(n)$，我们得到在 $N_{A_1}(U_2)$ 中存在一个三角形。因此，我们可以选取一个由 $N_{A_1}(U_2)$ 中 $2k+1$ 个顶点组成的集合 U_1，使得 $G[U_1]$ 包含 K_3的一个副本。注意，$G[U_1]$ 包含一条边，且 $G[U_2, U_1]$ 构成一个完全二部子图。由引理 3.2 (b)，可得 G 包含 $C^{\square}_{2k+1}$的一个副本，矛盾。因此，$G[A_2]$中没有边。记 $|A_1| = n_1$ 和 $|A_2| = n_2$。于是，由断言 1 可知

$$e(G) = n_1 n_2 + e(A_1) \leq \max\left\{n_a n_b + \mathrm{ex}(n_a, P_4) : n_a + n_b = n\right\}.$$

结合 (3)，我们得到关于 $e(G)$的所需界。此外，棱柱图 $C^{\square}_{2k+1}$ 的极值图可由完全二部图$K_{n_a,\ n_b}$ 得到：将一个 n_a顶点的 P_4 极值图嵌入到大小为 n_a的部分中。此外，应用推论 2.3 也可以刻画 P_4 的极值图。

情况2。 $G[A_1]$ 包含一个$K_{1,\ell}$的副本。令 u 为$K_{1,\ell}$的中心顶点。那么 u 在 A_1中至少有 $\ell = \Theta(n)$个邻点。回顾一下，A_1 的每个顶点都与 G^2的所有顶点相连。我们对每个 $i \in \{1, 2\}$记 $\ell_i = |N_{A_i}(u)|$。那么 $\ell_i = \Theta(n)$。

断言2。 $G[A_1 \backslash \{u\}]$ 中不存在与 $N_{A_1}(u)$中的顶点相 *incident* 的边。相应地，$G[A_2]$ 中不存在与 $N_{A_2}(u)$ 中的顶点相 *incident* 的边。

证明。若 $G[A_1 \setminus \{u\}]$ 中存在一条与 $N_{A_1}(u)$中的顶点相 incident 的边，则 $G[A_1]$ 包含 P_4的一个副本，这与断言 1 矛盾。因此， $G[A_1 \setminus \{u\}]$ 中不存在与 $N_{A_1}(u)$中的顶点相 incident 的边。若 $G[A_2]$ 中存在一条边 xy ，且它与 $N_{A_2}(u)$中的顶点相 incident，则$x, y \in D_2$ ，因为 G^2 没有边，并且 D_2 与 $V(G^2)$之间没有边。令 E_2 为一个顶点集，由 x、 y 以及 $N_{G^2}(u)$中的任意 $2k$ 个顶点组成。由此可知， E_2 中的这些 $2k+2$ 个顶点在 A_1中有$|A_1| - o(n)$个公共邻居。由于 u 在 A_1中有 $\ell_1 = \Theta(n)$个邻点，我们知道

$$|N_{A_1}(E_2) \cap N_{A_1}(u)| \geq |N_{A_1}(E_2)| + |N_{A_1}(u)| - |A_1| \geq \ell_1 - o(n) \geq 2k + 1.$$

因此，我们可以选取由 $2k+1$ 个 $N_{A_1}（E_2）\cap N_{A_1}（u）$ 组成的集合 E_1 。注意，$|N_{E_1}（u）| = 2k+1$, $|N_{E_2}（u）| \geq 2k+1$ 以及 $G[E_1, E_2]$ 构成一个完全二部图。由引理3.2(a)，集合 E_1、 E_2和顶点 u诱导出的图包含$C^{\square}_{2k+1}$的一个副本。这就产生了矛盾。因此， $G[A_2]$ 中没有边与 $N_{A_2}（u）$ 中的顶点关联。

□

由断言2，我们得到

$$\begin{aligned} e(A_1) &= e(N_{A_1}(u) \cup \{u\}) + e(A_1 \setminus (N_{A_1}(u) \cup \{u\})) \\ &\leq \ell_1 + \mathrm{ex}(n_1 - 1 - \ell_1, P_4) \leq \ell_1 + (n_1 - 1 - \ell_1) \leq \mathrm{ex}(n_1, P_4), \end{aligned} \tag{4}$$

其中，第一个不等式由断言 1 得出，其余不等式由推论 2.3 得出。应用断言2，我们得到

$$e(A_2) = e(A_2 \setminus N_{A_2}(u)) \leq \mathrm{ex}(n_2 - \ell_2, P_4) \leq n_2 - \ell_2. \tag{5}$$

由于 u 在 A_2中有 $n_2 - \ell_2$ 个非邻点，我们对 A_1 与 A_2之间的边数作如下估计，

$$e(A_1, A_2) \leq n_1 n_2 - (n_2 - \ell_2). \tag{6}$$

注意， $e（G）= e（A_1，A_2）+ e（A_1）+ e（A_2）$。结合（4）、（5）和（6），我们得到

$$e(G) \leq n_1 n_2 + \mathrm{ex}(n_1, P_4) \leq \max\{n_a n_b + \mathrm{ex}(n_a, P_4) : n_a + n_b = n\}. \tag{7}$$

因此，由 (3) 可得 $e(G) = \max\{\mathrm{ex}(n_a, P_4) + n_a n_b : n_a + n_b = n\}$。

此外，利用推论 2.3，我们得到

$$e(G) = \max_{n_a + n_b = n} \left\{ n_a(1 + n_b) + \frac{1}{2}(j^2 - 3j) : j \in \{0, 1, 2\}, j \equiv n_a (\mathrm{mod}\ 3) \right\}.$$

最后，我们将刻画极值图。若 (7) 中等号成立，则由上述证明可知，(4)、(5) 和 (6) 中都必须取等号。记 $t_1 := n_1 - 1 - \ell_1$和 $t_2 := n_2 - \ell_2$。那么对于 $i = 1,2$，我们有

$$\mathrm{ex}(t_i, P_4) = t_i. \tag{8}$$

此外，在 (6) 中取等号可知， $A_1 \setminus \{u\}$ 中的每个顶点都与A_2中的每个顶点相邻。由推论 2.3，若 $t_i > 0$, 则 $t_i \equiv 0$ (mod 3)，因此 $t_i \geq 3$。此外，推论 2.3 还意味着，至少有 3 个顶点的 P_4 的极值图包含 P_3 的一个副本。若 t_1 和 t_2都不为零，则由 (8)， $G[A_1 \setminus \{u\}]$ 和 $G[A_2]$ 都包含 P_2 的一个副本。因此由引理 3.2 (b)， G 包含 $C^{\square}_{2k+1}$ 的一个副本，这就产生了矛盾。故 t_1 和 t_2 中至多一个不为零。首先，若 $t_1 \neq 0$ 和 $t_2 = 0$, 则 $A_2 = N_{A_2}(u)$，且 A_2 是 G中的一个独立集。回顾断言 1，$G[A_1]$ 是 P_4-自由的。于是， G 可由K_{n_1, n_2} 通过将 P_4 的一个极值图嵌入到其中的

部分 A_1得到。其次，若 $t_1 = 0$ 和 $t_2 \neq 0$，则 u 与 $A_1 \setminus \{u\}$中的所有顶点相邻。将顶点 u 移至集合 A_2，并记 $B_1 := A_1\setminus\{u\}$以及 $B_2 := A_2 \cup\{u\}$。回顾断言 2， $G[A_1\setminus\{u\}]$中没有边与 $N_{A_1}(u) = A_1\setminus\{u\}$中的顶点关联，因此 B_1是一个独立集。此外， $G[B_1, B_2]$ 是一个完全二部图，且 $G[B_2]$ 是 P_4-自由的，所求即得。最后，若$t_1 = t_2 = 0$，则 $G[A_1, A_2]$ 是一个完全二部图， $G[A_1]$ 是一个星图K_{1,n_1-1}，而 $G[A_2]$ 是一个空图，符合要求。综上，每个$C^{\square}_{2k+1}$ 的极值图都是由一个 n_a-顶点的 P_4 极值图与一个 n_b-顶点的独立集作联图得到的。 □

4 三棱柱的若干引理

本节将讨论三棱柱图。对于定理 1.1 的情形 $k = 1$ ，我们将去掉要求图的阶 n 足够大的条件。通过一种截然不同的方法，我们将确定对于每个整数 $n \geq 6$，所有 n 阶棱柱图的极值图。

4.1 路径幂的一个结果

路径 P_k 上 k 个顶点的 p 次幂，记作 P_k^p，是由 P_k 得到的图：将 P_k 中距离不超过 p 的每一对顶点相连；见图5。



图5：分别为三棱柱 $C^{\square}_3$ 和图 P_6^2

为了研究 ex(n, $C^{\square}_3$)，我们需要用到 Xiao、Katona、Xiao 和 Zamora [49] 的一个结果，他们分别确定了 ex(n, P_5^2) 和 ex(n, P_6^2) 的精确值。关于长路径的幂，参见 Yuan [55]，其中还有更多结果。此外，图兰数 ex(n, P_4^2) 可由 Dirac [11], 的一个一般结果推得。该结果指出，若 $r \geq 3$， $n \geq r+1$，且 G 是一个有 n 个顶点、边数超过 $e(T_{r-1}(n))$ 的图，则 G 包含 K^-_{r+1}的一个副本，其中 K^-_{r+1} 是从 K_{r+1} 中删去任意一条边后得到的图。令 $r = 3$，并注意到 $P_4^2 = K_4^-$，即可得到对每个整数 $n \geq 4$，ex(n, P_4^2) $= \lfloor n^2/4 \rfloor$。

B在给出定理1.2和1.3的证明之前，我们需要以下结果 ts.

定理 4.1 (Xiao 等人 [49])。 一个 n 顶点的 P_6^2-自由图的最大边数($n \neq 5$) 为

$$\mathrm{ex}(n, P_6^2) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, & \text{if } n \equiv 1, 2, 3 \pmod 6, \\ \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

定理 4.2(Xiao 等人 [49])。 设 $n \geq 6$。 P_6^2 的极值图如下 .
当 $n \equiv 1$（模 6）时，则 $F^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}, n \quad j$和 $H_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$；当 $n \equiv 2$（模 6）时，则 $F^{\frac{n}{2}}, n \quad j$和 $F^{\frac{n}{2}+1}, n \quad j$；当 $n \equiv 3$（模 6）时，则 $F^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}, n \quad j$和 $H_n^{\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1}$；

当 $n \equiv 0$、4、5（模 6）时，则分别为$H_n^{\frac{n}{2}}$、 $H_n^{\frac{n}{2}+1}$和 $H_n^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$，其中 j可取满足条件 $j \leq i$ 和 $3 \mid (i-j)$的所有值。

将上述定理与定理1.2和1.3进行比较，会发现图 $C_3^{\square}$和P_6^2 的图兰数完全相同，尽管它们的结构各不相同，这令人惊讶。此外，值得注意的是，除了图3所示的三个小图 G_1， G_2 和 G_3之外，$C_3^{\square}$和P_6^2 的极值图也完全相同。

事实上， $C_3^{\square}$和 P_6^2之间存在一个关键关系：$\mathcal{M}(C_3^{\square}) = \mathcal{M}(P_6^2) = \{P_4\}$，其中$\mathcal{M}(L)$是定义 2.5 中给出的 L 的分解族。从某种意义上说，上述现象表明，一个图的分解族可能决定该图的图兰数，并且还支配着极值图的结构。

4.2 含有 P_6^2 作为子图的 $C_3^{\square}$-自由图

在给出定理1.2和1.3的证明之前，我们先为一类特殊的 $C_3^{\square}$-自由图介绍一些有用的引理，这类图包含二次幂图 P_6^2 作为子图。

引理 4.3. 设 G 是一个有 $C_3^{\square}$-自由图，且有 6 个顶点。若 G 包含 P_6^2的一个副本，则 $e(G) \leq 12$，且当且仅当 $G = G_1$时等号成立。

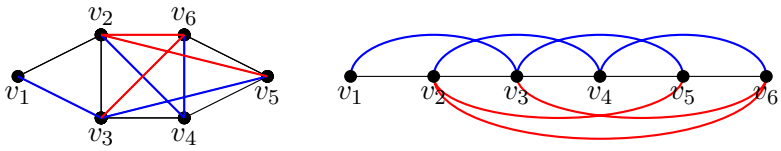


图6：图 G_1的两种画法

证明. 证明采用分类讨论的标准论证。由于 G 有 6 个顶点，且 P_6^2 包含于 G中，我们可以假设 $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_6\}$，其中 v_1v_3, v_2v_4, v_3v_5和 v_4v_6是 G的边。显然，我们有 $9 \leq e(G) \leq 15$。为了证明 $e(G) \leq 12$，只需证明当 K_6 是 $C_3^{\square}$-自由图时， G 中至少缺少三条边。

首先，我们断言 v_1v_6 不能是 G的一条边。否则，若 $v_1v_6 \in E(G)$，则两个三角形 $v_1v_2v_3$ 和 $v_6v_4v_5$与三条边 v_1v_6, v_2v_4, v_3v_5 共同构成 $C_3^{\square}$的一个副本，这就产生了矛盾。因此，我们得到 $2 \leq d_G(v_1) \leq 4$。

情况1。 $d_G(v_1) = 2$。更准确地说，我们有 v_1v_4， v_1v_5， $v_1v_6 \notin E(G)$，且 G 至少缺少 K_6中的三条边。显然，我们有 $e(G) \leq 12$。若 $e(G) = 12$，则 v_2v_5， v_2v_6 和 v_3v_6 是G的边。在这种情况下，我们得到 $G = G_1$，如所需。

情况2。 $d_G(v_1) = 3$。换句话说，我们有 $v_1v_4 \in E(G)$ 或 $v_1v_5 \in E(G)$。在前一种情况下，若 $v_1v_4 \in E(G)$，则 $v_2v_6 \notin E(G)$。否则，若 $v_2v_6 \in E(G)$，则两个三角形 $v_1v_2v_3$ 和 $v_4v_6v_5$连同边 v_1v_4、v_2v_6、 v_3v_5 构成了 $C_3^{\square}$的一个副本，产生矛盾。因此，我们得出结论： v_1v_6、 v_1v_5 和 v_2v_6 不是 G的边，由此得到 $e(G) \leq 12$。若 $e(G) = 12$，则 v_1v_4、 v_2v_5、 v_3v_6是 G的边，它们与两个三角形 $v_1v_2v_3$和 $v_4v_5v_6$一起构成了 $C_3^{\square}$的一个副本，产生矛盾。因此 $e(G) \leq 11$。

在后一种情况下，即 $v_1v_5 \in E(G)$和 v_1v_4， $v_1v_6 \notin E(G)$，我们可以得到 $v_2v_6 \notin E(G)$和 $v_3v_6 \notin E(G)$。否则，如果 $v_2v_6 \in E(G)$，那么三角形 $v_1v_2v_3$和 $v_5v_6v_4$及其边 v_1v_5， v_2v_6， v_3v_4构成 $C_3^{\square}$的一个副本，这就产生了矛盾。如果 $v_3v_6 \in E(G)$，那么三角形 $v_1v_2v_3$和 $v_5v_4v_6$及其边 v_1v_5， v_2v_4， v_3v_6构成 $C_3^{\square}$的一个副本，这就产生了矛盾。因此，我们有 $e(G) \leq 11$。

情形 3。 $d_G(v_1) = 4$。在这种情况下，我们有 v_1v_4，$v_1v_5 \in E(G)$。类似于情况2的后一种情形，我们同样得到 $v_2v_6 \notin E(G)$ 和 $v_3v_6 \notin E(G)$。回顾一下，$v_1v_6 \notin E(G)$。因此，我们得到 $e(G) \leq 12$。如果 $e(G) = 12$，那么 $v_2v_5 \in E(G)$。通过反转 $v_1v_2 \cdots v_6$ 的顺序，不难看出 G 与 G_1 同构，正如所要求的那样。 □

下文中，我们始终假设

$$P_6^2 \subseteq G. \tag{9}$$

假设子图 P_6^2 是由 $P_6 = v_1v_2 \cdots v_6$ 得到的：将 $V(P_6)$ 中距离不超过 2 的每一对顶点连接起来。可以验证，每个顶点 $v \in V(G) \setminus V(P_6^2)$ 至多与 P_6^2 的一个副本中的 4 个顶点相邻。否则，若存在一个顶点在 P_6^2 中有 5 个邻点，那么我们就能在 G 中找到 $C_3^{\square}$ 的一个副本，这就产生了矛盾。

在条件 (9) 下，以下断言显然成立。

断言 3. 如果 $v \in V(G) \setminus V(P_6^2)$ 恰好与 P_6^2 中的 *4* 个顶点相邻，那么 v 和 P_6^2 之间恰有 *4* 种邻接关系（在图同构意义下）；见图 *7*。

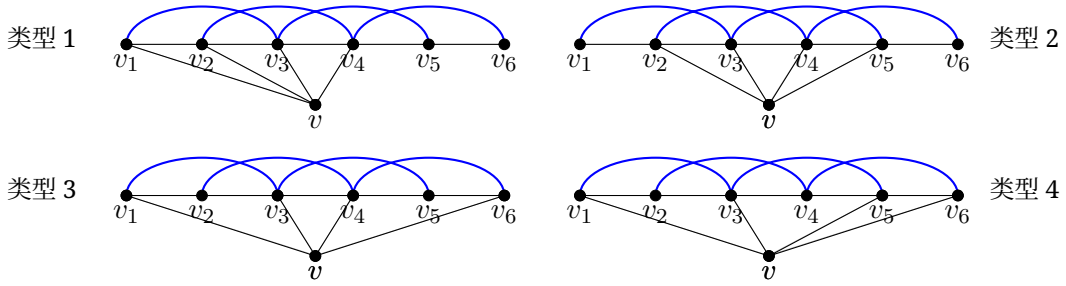


图 7：满足 $|N(v) \cap V(P_6^2)| = 4$ 的顶点 v 的四种类型

此外，下面的引理可以通过逐个情形验证。

引理 4.4。 $V(G) \setminus V(P_6^2)$ 中至多有2个顶点恰好与 $V(P_6^2)$的 *4* 个顶点相邻。此外，若 $x, y \in V(G) \setminus V(P_6^2)$ 是这样两个顶点，则 $\{x, y\}$ 与 P_6^2 之间只有2个邻接关系，并且 $xy \notin E(G)$；见图 *8*。

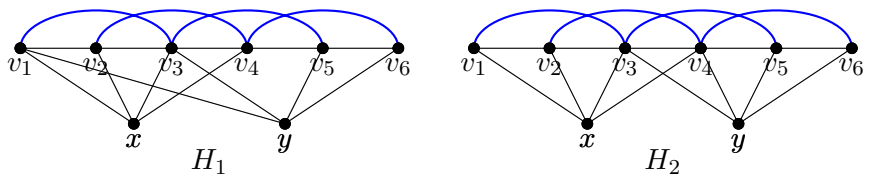


图 8：分别为 8 阶图 H_1 和 H_2。

证明。首先，我们证明，如果 x、y 是同一类型中的两个顶点，那么 G 包含 $C_3^{\square}$ 的一个副本，除非它们属于类型 1，此时如图 8 中的 H_2 所示。事实上，如果 x、y 属于类型 1，那么要么 $N_{P_6^2}(x) = N_{P_6^2}(y) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$，要么 $N_{P_6^2}(x) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ 且 $N_{P_6^2}(y) = \{v_6, v_5, v_4, v_3\}$。对于前一种情况，三角形 v_1v_3x 和 v_2v_4y 连同三条边 v_1y、v_3v_4、xv_2 构成 $C_3^{\square}$ 的一个副本，这与矛盾相矛盾；对于后一种情况，这是可能的，如图 8 中的 H_2 所示。如果 x、y 属于类型 2，则由对称性可得 $N_{P_6^2}(x) = N_{P_6^2}(y) = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$。于是三角形

v_2v_3x 和 v_4v_5y 连同边 v_2y、v_3v_5、xv_4 构成 $C_3^{\square}$ 的一个副本。如果 x、y 属于类型 3，则 $N_{P_6^2}(x) = N_{P_6^2}(y) = \{v_1, v_3, v_4, v_6\}$。因此，三角形 v_1v_3x 和 v_4v_6y 构成 $C_3^{\square}$ 的一个副本，因为 v_1y、v_3v_4、xv_6 是 G 的边。如果 x、y 属于类型 4，那么要么 $N_{P_6^2}(x) = N_{P_6^2}(y) = \{v_1, v_3, v_5, v_6\}$，要么 $N_{P_6^2}(x) = \{v_1, v_3, v_5, v_6\}$ 且 $N_{P_6^2}(y) = \{v_6, v_4, v_2, v_1\}$。对于前一种情况，可以看到三角形 v_1v_3x 和 v_5v_6y 构成 $C_3^{\square}$ 的一个副本，因为 v_1y、xv_6、v_3v_5 是 G 中的边。对于后一种情况，可以看出 G 包含 $C_3^{\square}$ 的一个副本，该副本由三角形 v_1v_3x 和 v_6v_4y 以及三条边 v_1y、xv_6 和 v_3v_4 见证。

其次，考虑 x、y 是不同类型的顶点的情形。更具体地说，如果 x 属于类型 1 且 y 属于类型 2，那么 G 中有一个由三角形 xv_1v_2、yv_3v_4 以及边 v_1v_3、v_2y、xv_4 构成的 $C_3^{\square}$ 副本。如果 x 属于类型 1 且 y 属于类型 3，那么三角形 xv_1v_2、yv_3v_4 以及边 v_1y、v_2v_3、xv_4 在 G 中构成一个 $C_3^{\square}$ 副本。如果 x 属于类型 1 且 y 属于类型 4，那么由对称性，我们得到以下两种情形之一：$N_{P_6^2}(x) = v_1$、v_2、v_3、v_4，以及 $N_{P_6^2}(y) = v_1$、v_3、v_5、v_6；或者 $N_{P_6^2}(x) = v_6$、v_5、v_4、v_3，以及 $N_{P_6^2}(y) = v_1$、v_3、v_5、v_6。为了避免在 G 中出现 $C_3^{\square}$ 的副本，前一种情形是可能的，如图 8 中的 H_1 所示。对于后一种情形，可以在三角形 xv_4v_6、yv_3v_5 上，利用边 xv_3、v_4v_5、v_6y 找到一个 $C_3^{\square}$ 副本。如果 x 属于类型 2 且 y 属于类型 3，那么 G 包含一个 $C_3^{\square}$ 副本，该副本由三角形 xv_2v_4、yv_1v_3 以及边 xv_3、v_2v_1、v_4y 构成。如果 x 属于类型 2 且 y 属于类型 4，那么将三角形 xv_3v_4、yv_5v_6 与边 v_3y、v_4v_6、xv_5 结合，G 中有一个 $C_3^{\square}$ 副本。如果 x 属于类型 3 且 y 属于类型 4，那么可以在三角形 xv_1v_3、yv_5v_6 上，利用边 xv_6、v_1y、v_3v_5 找到一个 $C_3^{\square}$ 副本。

此外，还可以进一步验证，$V(G) \setminus V(P_6^2)$不包含三个与 P_6^2中的4个顶点相邻的顶点。否则，若存在这样的三个顶点，即在图 H_1 或 H_2中向 P_6^2添加一个度为4的顶点，则可以验证 G中存在 $C_3^{\square}$ 的一个副本。最后，若 xy 是 G的一条边，则 $H_1 + xy$ 或 $H_2 + xy$ 中会存在 $C_3^{\square}$的一个副本。事实上，在这两种情况下，该副本都会出现在三角形 v_2v_4x 和 v_3v_5y上，其边为 v_2v_3、v_4v_5、xy。因此，我们得到 $xy \notin E(G)$。 □

引理 4.5. 若 G 包含 H_1 作为子图，则 $e(G[V(P_6^2)]) \leq 10$，当且仅当v_3v_6 是 G中的一条边时等号成立。

证明。注意到 $e(P_6^2) = 9$。换言之，我们需要证明，为避免在 G 中出现 $C_3^{\square}$ 的副本，至多可以在 P_6^2 中添加一条非边。注意，

$$E(K_6) \setminus E(P_6^2) = \{v_1v_4, v_1v_5, v_1v_6, v_2v_5, v_2v_6, v_3v_6\}. \tag{10}$$

若 $v_1v_4 \in E(G[V(P_6^2)])$，则 G 含有两个三角形 v_1v_4x 和 v_3v_5y，它们与匹配 $\{v_1y, v_4v_5, xv_3\}$ 一起构成 $C_3^{\square}$ 的一个副本，矛盾。若 $v_1v_5 \in E(G[V(P_6^2)])$，则三角形 v_1v_2x 和 $v_3v_4v_5$ 与匹配 $\{v_1v_5, v_2v_3, xv_4\}$ 一起构成 $C_3^{\square}$ 的一个副本，矛盾。若 $v_1v_6 \in E(G[V(P_6^2)])$，则有两个三角形 v_1v_3x 和 $v_4v_5v_6$，将它们与匹配 $\{v_1v_6, v_3v_5, xv_4\}$ 结合起来，可得 $C_3^{\square}$ 的一个副本，矛盾。事实上，只要 $v_1v_6 \in E(G)$，就可以找到 $C_3^{\square}$ 的一个副本，而无需使用顶点 x；这一点已在引理 4.3 证明的第二段中说明。若 $v_2v_5 \in E(G[V(P_6^2)])$，则三角形 v_1v_2x 和 $v_3v_4v_5$ 与匹配 $\{v_1v_3, v_2v_5, xv_4\}$ 一起构成 $C_3^{\square}$ 的一个副本，矛盾。若 $v_2v_6 \in E(G[V(P_6^2)])$，则 G 含有 $C_3^{\square}$ 的一个副本，它由两个三角形 v_2v_3x 和 $v_4v_5v_6$ 以及匹配 $\{v_2v_6, v_3v_5, xv_4\}$ 组成。因此，唯一可能的情形是 $v_3v_6 \in E(G[V(P_6^2)])$，于是可得 $e(G[V(P_6^2)]) \leq 10$。 □

类似地，我们可以证明以下引理。

引理 4.6。若 G 包含 H_2 作为子图，则 $e(G[V(P_6^2)]) \leq 11$，且当且仅当 v_1v_4 和 v_3v_6 都是 G中的边时，等号成立。

证明。我们需要检查式（10）中给出的 $E(G[V(P_6^2)])$ 的每条非边。若 $v_1v_5 \in E(G[V(P_6^2)])$，则三角形 v_1v_2x 和 $v_3v_4v_5$ 与匹配 $\{v_1v_5, v_2v_4, xv_3\}$ 构成 $C_3^{\square}$ 的一个副本，矛盾。若 $v_1v_6 \in E(G[V(P_6^2)])$，则利用引理 4.5 证明中的相同论证，可以得到 $C_3^{\square}$ 的一个副本，矛盾。此外，将三角形 v_1v_3x，v_4v_6y 与匹配 $\{v_1v_6, v_3y, xv_4\}$ 结合起来，还可以找到 $C_3^{\square}$ 的另一个副本。若 $v_2v_5 \in E(G[V(P_6^2)])$，则引理 4.5 的证明给出 $C_3^{\square}$ 的一个副本，矛盾。另外，由三角形 v_2v_3x 和 v_4v_5y 以及连接它们的匹配 $\{v_2v_5, v_3y, xv_4\}$，还可得到 $C_3^{\square}$ 的另一个副本。最后，若 $v_2v_6 \in E(G[V(P_6^2)])$，则在 G 中存在 $C_3^{\square}$ 的一个副本，它由三角形 v_2v_3x, v_4v_6y 及匹配 $\{v_2v_6, v_3y, xv_4\}$ 构成。因此，只有 $v_1v_4, v_3v_6 \in E(G[V(P_6^2)])$ 这种情况是可能的，且仅在这种情况下，我们才有 $e(G[V(P_6^2)]) = 11$。 □

5 定理1.2和1.3的证明

本节将证明定理1.2和1.3，具体如下。

定理 1.2 的证明。为方便记号，我们记

$$f(n) := \begin{cases} \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, & \text{if } n \equiv 1, 2, 3 \pmod 6, \\ \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

首先，当 $n \equiv 0$，4，5（模 6）时，我们有 $\mathrm{ex}(n, C_3^{\square}) \geq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + \lceil \frac{n}{2} \rceil$，这分别由 G_1、$H_n^{\frac{n}{2}}$、$H_n^{\frac{n}{2}+1}$ 和 $H_n^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ 的构造得出。此外，当 $n \equiv 1$，2，3（模 6）时，下界 $\mathrm{ex}(n, C_3^{\square}) \geq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ 由 G_2、G_3 和 $\underbrace{F^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}_{j}$，$n$ 的定义得出。因此，接下来只需证明以下不等式

$$\mathrm{ex}(n, C_3^{\square}) \leq f(n). \tag{11}$$

我们通过对 n 进行归纳来证明 (11)。设 G 是一个 n-顶点 $C_3^{\square}$-自由图。我们需要证明 $e(G) \leq f(n)$。由于归纳步骤将从 $n-6$ 到 n，我们必须证明模 6 的每个剩余类中的基例。

§ 基例 §

当 $1 \leq n \leq 4$ 时，显然 K_n 是边数最多的 $C_3^{\square}$-自由图，并且可以验证 $e(K_n) = f(n)$。此外，当 $n = 6$ 时，根据定理 4.1，只要 G 是 P_6^2-自由的，就有 $e(G) \leq 12$；根据引理 4.3，只要 G 含有一个 P_6^2 的副本，就有 $e(G) \leq 12$。于是总有 $e(G) \leq 12 = f(6)$，如所需。这里我们指出，当 $n = 5$ 时，我们有

$$\mathrm{ex}(5, C_3^{\square}) = e(K_5) = 10 > 9 = f(5). \tag{12}$$

这是一个反例。因此我们要求 $n \neq 5$。

接下来，我们将证明关于 $n = 11$ 的命题。首先，如果 $P_6^2 \not\subseteq G$，那么根据定理 4.1，结论立即成立。下文中，我们假设 $P_6^2 \subseteq G$。在此条件下，我们的目标是证明

$$e(G) < f(11) = 36. \tag{13}$$

首先，如果 $V(G) \setminus V(P_6^2)$ 在 G 中构成 K_5 的一个副本，那么每个 $v_i \in V(P_6^2)$ 至多与 K_5 中的 2 个顶点相邻，否则就会存在 $C_3^{\square}$ 在 G 中的一个副本。由引理 4.3 可得 $e(G[V(P_6^2)]) \leq 12$。因此，我们有 $e(G) \leq 12 + 12 + 10 = 34 < 36 = f(11)$。

其次，如果 $V(G)\backslash V(P_6^2)$ 构成 K_5^- 的一个副本，那么我们假设 $V(K_5^-) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ 且 $u_4u_5 \notin E(K_5^-)$。下面两个事实可以验证。第一个事实断言，对于每个$i \in \{1, \ldots, 6\}$，顶点 v_i 至多与 K_5^- 中的 3 个顶点相邻，且当且仅当 $N_{K_5^-}(v_i) = \{u_1, u_2, u_3\}$ 时等号成立，否则将得到 $C_3^{\square} \subseteq G$。第二个事实表明，$\{v_1, v_2, v_3\}$ 与 $V(K_5^-)$ 之间至多有 7 条边，否则可以得到 $C_3^{\square} \subseteq G$。$\{v_4, v_5, v_6\}$ 与 K_5^- 之间也有类似的结果。因此，$V(P_6^2)$ 与 $V(K_5^-)$ 之间的边数至多为 14。回顾引理 4.3，$e(G[V(P_6^2)]) \leq 12$。因此，我们得到$e(G) \leq 12 + 14 + 9 = 35 < f(11)$。

最后，我们将考虑剩余的情形

$$e(V(G) \setminus V(P_6^2)) \leq 8.$$

由引理 4.4，我们分以下三种可能的情形进行讨论。

情况1. $V(G) \setminus V(P_6^2)$中恰有 2 个顶点，记为 x和 y，它们各自与 $V(P_6^2)$中的 4 个顶点相邻。由引理 4.4，我们得到，要么 $H_1 \subseteq G$，要么 $H_2 \subseteq G$。

子情形 1.1. 若 $H_1 \subseteq G$，则由引理 4.5 可知 $e(G[V(P_6^2)]) \leq 10$。因此，我们有 $e(G) \leq 10 + (4 + 4 + 3 + 3 + 3) + 8 = 35 < f(11)$，符合要求。

子情形 1.2. 若 $H_2 \subseteq G$，则由引理 4.6 可得 $e(G[V(P_6^2)]) \leq 11$，当且仅当 v_1v_4和 v_3v_6都是 G的边时，等号成立。若 $V(G) \setminus (V(P_6^2) \cup \{x, y\})$中存在一个顶点，它至多与 $V(P_6^2)$中的 2 个顶点相邻，则 $e(G) \leq 11 + (4 + 4 + 2 + 3 + 3) + 8 = 35 < f(11)$，符合要求。若 $V(G) \setminus (V(P_6^2) \cup \{x, y\})$中的每个顶点都与 $V(P_6^2)$中的 3 个顶点相邻，则进一步可见 $e(G[V(P_6^2)]) \leq 10$。否则，若 $e(G[V(P_6^2)]) = 11$，则引理 4.6 推出v_1v_4，$v_3v_6 \in E(G)$。$V(G) \setminus (V(P_6^2) \cup \{x, y\})$中任何一个在 $V(P_6^2)$中的度为 3 的顶点都可能导致出现 $C_3^{\square}$的副本，从而产生矛盾。因此，我们有 $e(G) \leq 10 + (4 + 4 + 3 \times 3) + 8 = 35 < f(11)$。

情况2。恰有一个顶点 $v \in V(G) \setminus V(P_6^2)$，它与 $V(P_6^2)$ 的4个顶点相邻。根据断言 3，v 是图 7 中四种类型之一。无论哪种情况，根据引理 4.3，我们都可以得到 $G[V(P_6^2)] \neq G_1$，进而得到 $e(G[V(P_6^2)]) \leq 11$。否则，若 $G[V(P_6^2)] = G_1$，则 v_2v_5、v_2v_6和 v_3v_6 是 G 的边。注意，顶点集 $\{v_2, v_3, \ldots, v_6\}$ 在 G 中构成完全图 K_5 的一个副本。由于 v 在 P_6^2 上有4个邻点，我们知道 v 至少有3个邻点包含在集合 $\{v_2, v_3, \ldots, v_6\}$ 中。一个显然的事实是：若 v 在 K_5 上至少有 3 个邻点，则 $\{v\} \cup V(K_5)$ 含有 $C_3^{\square}$ 的一个副本。因此，G 含有 $C_3^{\square}$ 的一个副本。所以，我们有 $e(G) \leq 11 + (4 + 3 \times 4) + 8 = 35 < f(11)$，证毕。

情形 3. $V(G) \setminus V(P_6^2)$ 的所有顶点至多与 $V(P_6^2)$ 中的 3 个顶点相邻。再次根据引理 4.3，可得 $e(G) \leq 12 + 15 + 8 = 35 < f(11)$。总之，我们完成了基例 $n = 11$ 中 (13) 的证明。

§ 归纳步骤 §

接下来，我们将证明归纳步骤。假设对于所有整数$\ell \leq n - 1$ 和 $\ell \neq 5$，(11) 均成立。现在考虑情形 $n \geq 7$。设 G 是一个有 n个顶点、边数最多的 $C_3^{\square}$-自由图。我们需要证明 $e(G) \leq f(n)$。归纳步骤将从 $n - 6$ 开始，到 n结束。经过计算，我们可以得到

$$f(n) = f(n - 6) + 3n - 6. \tag{14}$$

首先，若 $P_6^2 \nsubseteq G$，则由定理 4.1 可得 $e(G) \leq f(n)$，如所求。接下来，我们假设 $P_6^2 \subseteq G$，然后给出一个 ***stronger*** 结果

$$e(G) \leq f(n) - 1, \tag{15}$$

除了 $n=7$，8。由引理 4.4 可知，$V(G)\setminus V(P_6^2)$ 中至多有 2 个顶点恰好与 $V(P_6^2)$ 中的 4 个顶点相邻。接下来，我们将分三种情况给出证明。

情形 A. 如果 $V(G)\setminus V(P_6^2)$ 中恰有 2 个顶点与 P_6^2 的 4 个顶点相邻，设为 x 和 y，那么根据引理 4.4，可得 $H_1\subseteq G$ 或 $H_2\subseteq G$。

S子情形 A.1. 假设 $H_1\subseteq G$。那么引理 4.5 给出 $e(G[V(P_6^2)])\leq 10$.

如果 $e(G[V(P_6^2)])\leq 9$，那么 $e(G)\leq 9+8+3(n-8)+\mathrm{ex}(n-6,C_3^{\square})\leq 3n-7+f(n-6)<f(n)$，正如所需。以下我们假设 $e(G[V(P_6^2)])=10$。那么引理 4.5 意味着$G[V(P_6^2)]$ 是通过添加边 v_3v_6 得到的 P_6^2。

如果存在一个顶点 $V(G)\setminus(V(P_6^2)\cup\{x,y\})$，它与 P_6^2 中至多 2 个顶点相邻，那么 $e(G)\leq 10+8+2+3(n-9)+\mathrm{ex}(n-6,C_3^{\square})\leq 3n-7+f(n-6)<f(n)$，其中最后一个不等式由 (14) 得出。

如果 $V(G)\setminus(V(P_6^2)\cup\{x,y\})$ 中的所有顶点都与 P_6^2 中的 3 个顶点相邻，那么很容易验证它们在 P_6^2 上有相同的邻点；见图9。接下来，我们证明 $V(G)\setminus V(P_6^2)$ 是 G 中的一个独立集。事实上，由引理 4.4 可知 $xy\notin E(G)$。在图9中，如果 xz 是 G 的一条边，那么结合三角形 $xv_3z,v_4v_5v_6$ 和边 v_3v_6,xv_4,zv_5，可知 G 含有 $C_3^{\square}$ 的一个副本，矛盾。如果 yz 是 G 的一条边，那么三角形 $v_3yz,v_4v_5v_6$ 和边 v_3v_4,yv_5,zv_6 构成 $C_3^{\square}$ 的一个副本，矛盾。如果 zw 是 G 的一条边，那么三角形 $v_3zw,v_4v_5v_6$ 和边 v_3v_4,zv_5,wv_6 上将出现 $C_3^{\square}$ 的一个副本，矛盾。总之，我们得到 $G=H_3$；见图9。因此，我们有 $e(G)=10+8+3(n-8)<f(n)$，证毕。

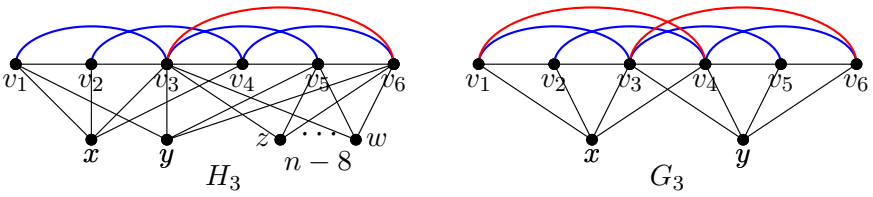


图9：图 H_3 和 G_3，分别如下。

S情形 A.2. 假设 $H_2\subseteq G$。由引理 4.6，得到 $e(G[V(P_6^2)])\leq 1$ 1.

若 $e(G[V(P_6^2)])\leq 9$，则 $e(G)\leq 9+8+3(n-8)+\mathrm{ex}(n-6,\ C_3^{\square})\leq 3n-7+f(n-6)<f(n)$，其中最后一个不等式由式 (14) 得出。

若 $10\leq e(G[V(P_6^2)])\leq 11$，则根据引理 4.6 的证明，我们知道 $v_1v_4\in E(G)$ 或 $v_3v_6\in E(G)$。我们需要证明以下断言。

断言4. 若 H_2 是 G 的子图，且 $z\in V(G)|(V(P_6^2)\cup\{x,y\})$ 是一个与 P_6^2 中的三个顶点相邻的顶点，则 $zx\notin E(G)$ 和 $zy\notin E(G)$。

断言的证明。证明很直接。 □

如果 $V(G)\setminus(V(P_6^2)\cup\{x,y\})$ 有一个顶点，例如 z，它至多与 P_6^2 中的 2 个顶点相邻，那么 $e(G)\leq 11+8+2+3(n-9)+\mathrm{ex}(n-6,C_3^{\square})\leq 3n-6+f(n-6)=f(n)$。接下来，我们进一步证明 $e(G)<f(n)$。否则，若等号 $e(G)=f(n)$ 成立，则上述不等式必为等号。更确切地说，我们得到 $e(G[V(P_6^2)])=11$，$V(P_6^2)\cup\{x,y,z\}$ 之外的每个顶点在 P_6^2 上恰有 3 个邻点，并且导出子图 $G[V(G)\setminus V(P_6^2)]$ 是 $C_3^{\square}$ 的一个 $(n-6)$ 阶极值图。根据断言4，我们看到 $V(P_6^2)\cup\{x,y,z\}$ 之外的每个顶点都不可能与 $\{x,y\}$ 中的任何顶点相邻。因此，在子图 $G[V(G)\setminus V(P_6^2)]$, 中，顶点 x(和 y) 至多有一个邻点，且唯一可能的邻点是 z。然而，根据归纳法，我们

可以看到，$C_3^{\square}$ 的阶至少为 3 的极值图不含任何度至多为 1 的顶点。这就产生了矛盾。换言之，子图 $G[V(G) \setminus V(P_6^2)]$ 不可能是 $C_3^{\square}$ 的极值图。于是我们得到 $e(G) < f(n)$，这正是 (15) 中所需的结论。

如果 $V(G) \setminus\setminus (V(P_6^2) \cup \{x, y\})$ 的所有顶点都与 P_6^2 的 3 个顶点相邻，那么根据断言4，$\{x, y\}$ 与 $V(G) \setminus\setminus (V(P_6^2) \cup \{x, y\})$ 之间不存在边。换言之，x、y 是导出子图 $G[V(G) \setminus\setminus V(P_6^2)]$ 中的两个孤立顶点。因此，$e(G) \leq 11 + 8 + 3(n-8) + \mathrm{ex}(n-8, C_3^{\square}) \leq 3n - 5 + f(n-8) < f(n)$，其中，只要 $n \neq 13$，第二个不等式由归纳法得到；最后一个不等式则可通过直接计算验证 $n \neq 8$。

特别地，对于 $n = 8$，我们得到 $V(G) = V(P_6^2) \cup \{x, y\}$ 以及

$$e(G) \leq 11 + 8 = 19 = f(8), \tag{16}$$

其中，等号成立当且仅当通过添加两条边 v_1v_4 和 v_3v_6，由 H_2 得到 G；见图 9 中的 G_3。在等号成立的情形下，我们得到 $G = G_3$ 和 $e(G_3) = 19 = f(8)$。此外，对于 $n = 13$，回顾（12），$\mathrm{ex}(5, C_3^{\square}) = e(K_5) = 10$，于是 $e(G) \leq 11 + 8 + 3 \times 5 + \mathrm{ex}(5, C_3^{\square}) = 44 < 48 = f(13)$，正如所需。

情形B。如果恰有一个顶点 $v \in V(G) \setminus V(P_6^2)$ 与 P_6^2 中的 4 个顶点相邻，那么根据断言 3，我们知道 v 是图 7 中的四种类型之一。

首先，我们断言 $e(G[V(P_6^2)]) \leq 11$。否则，若 $e(G[V(P_6^2)]) = 12$，则引理 4.3 意味着 v_2v_5，v_2v_6 和 v_3v_6 是 G 的边。注意，顶点集 $\{v_2, v_3, \ldots, v_6\}$ 在 G 中构成了 K_5 的一个副本。由于 v 在 P_6^2 上有 4 个邻点，因此 v 在这个 K_5 的副本上至少有 3 个邻点，这就导致 G 中出现 $C_3^{\square}$ 的一个副本，产生矛盾。

子情形 B.1. 若 v 在图 7 中属于类型 2、类型 3 或类型 4，则我们还可以进一步证明 $e(G[V(P_6^2)]) \leq 10$。更确切地说，若 v 属于类型 2，则在 P_6^2 中添加任意一条非边到 G 都能得到 $C_3^{\square}$ 的一个副本，因此 $e(G[V(P_6^2)]) = 9$；若 v 属于类型 3，则 v_2v_5 是 G 中唯一可能的边，因此 $e(G[V(P_6^2)]) \leq 10$；若 v 属于类型 4，则 v_3v_6 是唯一可能的边，因此 $e(G[V(P_6^2)]) \leq 10$。因此，我们得到 $e(G) \leq 10 + 4 + 3(n-7) + \mathrm{ex}(n-6, C_3^{\square}) \leq 3n - 7 + f(n-6) < f(n)$。

子情形 B.2。假设 v 在图 7中属于类型 1。在此类型中，我们将证明

$$v_1v_5, v_1v_6, v_2v_5, v_2v_6 \notin E(G). \tag{17}$$

事实上，如果 $v_1v_5 \in E(G)$，那么 G 含有一个 $C_3^{\square}$的副本，它由三角形 vv_1v_2、$v_3v_4v_5$以及边 v_1v_5、v_2v_3、vv_4构成。如果 $v_1v_6 \in E(G)$，那么三角形 vv_1v_3、$v_4v_5v_6$和边 v_1v_6、v_3v_5、vv_4 在 G中构成一个 $C_3^{\square}$的副本。如果 $v_2v_5 \in E(G)$，那么 G 包含一个 $C_3^{\square}$的副本，该副本由三角形 vv_1v_2、$v_3v_4v_5$ 以及边 v_1v_3、v_2v_5、vv_4构成。如果 $v_2v_6 \in E(G)$，那么将三角形 vv_2v_3、$v_4v_5v_6$与边 v_2v_6、v_3v_5、vv_4 组合即可得到 $C_3^{\square} \subseteq G$。至此，(17) 的证明完成。因此，为了避免在 G中出现 $C_3^{\square}$的副本，$V(P_6^2)$ 上的可能边为 v_1v_4和 v_3v_6；见图 10。

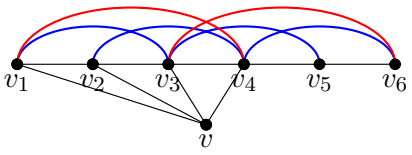


图 10：v属于类型 1，且 $e(G[V(P_6^2)]) = 11$

首先，如果 $e(G[V(P_6^2)]) \le 10$，那么 $e(G) \le 10+4+3(n-7)+\mathrm{ex}(n-6, C_3^{\square}) \le 3n-7+f(n-6) < f(n)$，如所需。接下来，我们假设 $e(G[V(P_6^2)]) = 11$。由 (17) 可知，v_1v_4，$v_3v_6 \in E(G)$；见图 10。

如果存在一个属于 $V(G)\setminus(V(P_6^2)\cup\{v\})$ 的顶点，它与 P_6^2 中至多 2 个顶点相邻，那么 ( ) 和 ( ) 之间至多有 $4+2+3\ n-8 \quad V\ P_6^2 \quad V\ G \quad V\ P_6^2 \quad e\ G$ ≤( ) 条边 \( )。因此，我们得到 ( ) ( ) ex(,) $11+4+2+3\ n-8 + \quad n-6\ C_3^{\square} \le 3n-7+f\ n-6 < f\ n$ ( ) ( )。

如果 $V(G)\setminus(V(P_6^2)\cup\{v\})$ 的所有顶点都与 P_6^2 中的 3 个顶点相邻，那么 $V(P_6^2)$ 和 $V(G)\setminus V(P_6^2)$ 之间恰有 $4+3(n-7)$ 条边。由于每个顶点 $x \in V(G)\setminus(V(P_6^2)\cup\{v\})$ 在 P_6^3 上有 3 个邻点，我们可以验证 $vx \notin E(G)$。否则，可以在 $G \quad v \quad G[V\ G \quad V\ P_6^2\ ] \quad e\ G$ ≤ 中找到 $11+4+3\ n-7 + \quad n-7\ C_3^{\square} \le 3n-6+f\ n-7 < f\ n$ $C_3^{\square}$ 的一个副本。因此， 是导出子图 ( ) \( ) 中的一个孤立顶点。于是 ( ) ( ) ex(,) ( ) ( )，其中第二个不等式在 $n \ne 12$ 时由归纳法得出，而最后一个不等式在 $n \ne 7$ 时可通过计算得到。

特别地，对于 $n=7$，我们有 $V(G) = V(P_6^2)\cup\{v\}$ 以及

$$e(G) \le 11+4 = 15 = f(7), \tag{18}$$

当且仅当通过添加边 v_1v_4 和 v_3v_6 后， G 是类型1图时，等号成立；见图 10。在等号成立的情形下，我们看到 $G = G_2$ 和 $e(G_2) = 15 = f(7)$。此外，对于 $n=12$，回顾 (12)，$\mathrm{ex}(5, C_3^{\square}) = e(K_5) = 10$，于是我们有 $e(G) \le 11+4+3\times5+\mathrm{ex}(5, C_3^{\square}) = 40 < 42 = f(12)$，这正如 (15) 中所要求的。

情形 C。假设 $V(G)\setminus V(P_6^2)$ 没有一个顶点在 P_6^2 上拥有 4 个邻点。根据引理 4.3，我们有 $e(G[V(P_6^2)]) \le 12$。我们分两种子情形给出证明。

子情形 C.1. $V(G)\setminus V(P_6^2)$ 中存在一个顶点，其相邻的 P_6^2 中的顶点至多有 2 个。因此， $V(P_6^2)$ 与 $V(G)\setminus V(P_6^2)$ 之间的边数至多为 $2+3(n-7)$，因为 $V(G)\setminus V(P_6^2)$ 中的其他顶点各自至多与 P_6^2 中的 3 个顶点相邻。n因此，我们得到 $7 + \quad n-6\ C_3^{\square} \le 3n-7+f\ n-6 < f\ n$ $(G) \le 12+2+3($) ex(,) ( ) ( )。

子情形 C.2. $V(G)\setminus V(P_6^2)$ 中的所有顶点都恰好与 P_6^2 中的 3 个顶点相邻。

若 $e(G[V(P_6^2)]) \le 11$，则 $e(G) \le 11+3(n-6)+\mathrm{ex}(n-6, C_3^{\square}) \le 3n-7+f(n-6) < f(n)$，其中第二个不等式由归纳法得出。

如果 $e(G[V(P_6^2)]) = 12$，那么根据引理 4.3，我们知道 $G[V(P_6^2)] = G_1$，因此 v_2v_5， v_2v_6 和v_3v_6 是 G 的边。注意， $G[\{v_2,\ v_3,\ \ldots\ldots,\ v_6\}]$ 构成了 K_5 的一个副本；参见图 11。接下来我们证明，对于每个 $y \in V(G)\setminus V(P_6^2)$，

$$N_{P_6^2}(y) = \{v_1, v_2, v_3\}. \tag{19}$$

任取顶点 $x \in V(G)\setminus V(P_6^2)$。若 $N_{P_6^2}(x) \subseteq \{v_2, v_3, \ldots, v_6\}$，则由对称性，不妨设 $N_{P_6^2}(x) = \{v_3, v_4, v_5\}$，于是 G 包含一个 $C_3^{\square}$副本，它由三角形 xv_3v_4、 $v_2v_5v_6$ 以及边 xv_5、 v_3v_2、 v_4v_6组成，矛盾。因此，我们得到 $N_{P_6^2}(x) \not\subseteq \{v_2, v_3, \ldots, v_6\}$。不失一般性，我们可以假设 $x \in V(G)\setminus V(P_6^2)$ 是一个满足 $N_{P_6^2}(x) = \{v_1, v_2, v_3\}$ 的顶点。此外，若 $V(G)\setminus V(P_6^2)$ 包含一个不同于 x 的顶点 y，使得 $N_{P_6^2}(y) \ne N_{P_6^2}(x)$，则由对称性，不妨设 $N_{P_6^2}(y) = \{v_1, v_2, v_4\}$ 或 $N_{P_6^2}(y) = \{v_1, v_4, v_5\}$。在前一种情况下，容易看出三角形 xv_1v_3、 yv_2v_4 以及边 xv_2、 v_1y、 v_3v_4 构成一个 $C_3^{\square}$副本。事实上，将两个三角形 yv_1v_2、 $v_3v_4v_5$ 与边 yv_4、 v_1v_3、 v_2v_5组合起来，还可以找到另一个不使用顶点 x 的副本。在后一种情况下，我们同样可以看到， G 含有一个 $C_3^{\square}$副本，该副本由三角形 $v_1v_2v_3$、 yv_4v_5 以及边 v_1y、 v_2v_4、 v_3v_5组成。这是矛盾。因此，我们完成了(19)和 $H_4 \subseteq G$的证明；见图 11。

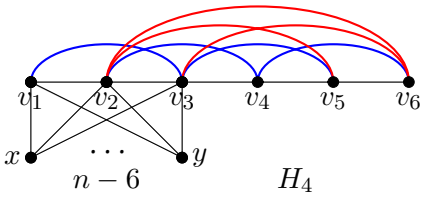


图 11：图 H_4。

由于 $v_1v_2v_3$ 是一个三角形，为了避免在 G中出现 $C_3^{\square}$副本，我们得到 $G[V(G)\backslash V(P_6^2)]$ 是无三角形的。因此，由 Mantel 定理 (1)，有 $e(G) \leq 12+3(n-6)+\lfloor \frac{(n-6)^2}{4} \rfloor = 3n-6+\lfloor \frac{(n-6)^2}{4} \rfloor < f(n)$，如所要求。总之，我们完成了(15)的证明。 □

事实上，我们对定理 1.2 的证明蕴含了以下更强的结果。

定理 5.1。 设 $n \geq 9$ 为一个整数。若 G 是一个图，且其边数在所有具有 $C_3^{\square}$ 的 n 个顶点的图中最多，那么 G 是 P_6^2 的一个极值图。

证明。 回顾（15）的证明，即得结论。 □

结合定理 4.2，我们给出了 $C_3^{\square}$ 的极值图。

定理 1.3 的证明。设 G 是一个 n 阶的 $C_3^{\square}$-自由图，且边数最多。换言之， $e(G) = \mathrm{ex}(n, C_3^{\square}) = f(n)$。对于 $n = 6$，若 G 含有 P_6^2 作为子图，则由引理 4.3 可得 $e(G) = 12$ 和 $G = G_1$；若 G 是 P_6^2-自由的，则由定理 4.2 可得 $G = H_6^3$。对于 $n = 7$，若 G 含有 P_6^2 作为子图，则 (18) 的证明表明 $G = G_2$；若 G 是P_6^2-自由的，则应用定理 4.2 可得 $G \in \{F^4$,1 7 , F^4,4 7 , $H_7^3\}$。对于 $n = 8$，若 G 有一个 P_6^2 的副本，则 (16) 的证明表明 $G = G_3$；若 G 是 P_6^2-自由的，则由定理 4.2 可得$G \in \{F^4$,1 8 , F^4,4 8 , F^5,2 8 , F^5,5 8 $\}$。

当 $n \geq 9$ 时，定理 5.1 断言 G 是 P_6^2 的极值图。事实上，若 $P_6^2 \subseteq G$，则由 (15) 可知 $e(G) \leq f(n) - 1$，这就产生了矛盾。因此，再次利用定理 4.2，我们可以立即得到 $C_3^{\square}$ 的所有极值图。 □

6 总结

在定理 1.1 中，我们确定了图兰数 $\mathrm{ex}(n, C_{2k+1}^{\square})$，并刻画了固定 $k \geq 1$ 且 n 充分大时相应的极值图。注意， $C_{2k}^{\square}$ 是一个二部图，且是度为 3 的正则图。对于这样一个稀疏二部图，我们可以得到：对每个 $k \geq 2$,

$$\mathrm{ex}(n, C_{2k}^{\square}) = O(n^{5/3}). \tag{20}$$

事实上，根据 Füredi 的一项结果 [22] 可知，若 H 是一个二部图，且二部划分一侧的最大度不超过 d ，则 $\mathrm{ex}(n, H) = O(n^{2-1/d})$。2003 年，Alon、Krivelevich 和 Sudakov [1] 将著名的依赖随机选择方法作为应用之一，给出了这一结果的另一种证明；这一强大概率技术的介绍可参见例如 [21]。确定 $C_{2k}^{\square}$的图兰数的数量级似乎极其困难。例如，在 $k = 2$的情形下，它归结为立方体 Q_8；Simonovits [19] 于 1970 年证明，$\mathrm{ex}(n, Q_8) = O(n^{8/5})$。迄今为止，$\mathrm{ex}(n, Q_8) = \Theta(n^{8/5})$是否成立仍未可知。最近，Conlon 和 Lee [9] 猜想，若 H 是一个二部图，且最大度不超过

一侧上的 d，并且 H 是$K_{d,\ d}$-自由的，则对某个 $\varepsilon=\varepsilon(H)>0$，有 $\mathrm{ex}(n,\ H)=O(n^{2-1/d-\varepsilon})$；情形 $d=2$的证明见 [9,34]，更多相关结果见 [10,47]。注意，$C_{2k}^{\square}$是$K_{3,\ 3}$-自由的。受上述研究启发，我们提出以下猜想，它将（20）中的界指数级地推广了。

猜想 6.1. 对于每个 $k\geq 2$，都存在 $\varepsilon=\varepsilon(k)>0$ 使得

$$\mathrm{ex}(n,C_{2k}^{\square})=O(n^{\frac{5}{3}-\varepsilon}).$$

我们的论文在 arXiv 上发布后，Gao、Janzer、Liu 和 Xu [29] 以更强的形式证明了该猜想：对于每个 $k\geq 4$，均有 $\mathrm{ex}(n,C_{2k}^{\square})=\Theta(n^{3/2})$。关于“扭曲”棱柱图的极值结果，可见 Bradač、Methuku 和 Sudakov [5]。最后，我们以 Bradač、Janzer、Sudakov 和 Tomon [4]提出的一个有趣猜想作为本文的结尾。

猜想 6.2 (见 [4])。设 T、S 为任意两棵至少含有一条边的树。存在正实数 c和 C，使得 $cn^{3/2}\leq \mathrm{ex}(n,T\square S)\leq Cn^{3/2}$。

利益冲突声明

作者声明，他们与本文不存在任何利益冲突。

数据可用性

本文所述研究未使用任何数据。

致谢

感谢徐子翔博士指出参考文献 [33]。本研究得到国家自然科学基金（项目编号：12271527、12071484 和 11931002）、湖南省自然科学基金（项目编号：2020JJ4675 和 2021JJ40707）、中南大学中央高校基本科研业务费专项资金（项目编号：2021zzts0034）以及中国博士后科学基金会博士后资助计划（项目编号：GZC20233196）的资助。

参考文献

[1] N. Alon, M. Krivelevich, B. Sudakov，二部图的图兰数及相关的 Ramsey 型问题，《组合学、概率与计算》12 (2003) 477–494。[2] H. Bielak, Kieliszek，图 $2P_5$ 的图兰数，《讨论数学：图论》36 (3) (2016) 683–694。[3] B. Bollobás，《极值图论》，Academic Press，纽约，1978。[4] D. Bradač, O. Janzer, B. Sudakov, I. Tomon，网格图的图兰数，《伦敦数学学会会报》55 (2023年) 194–204。[5] D. Bradač, A.Methuku, B.Sudakov，所有对角线均存在的圈的极值数，（2023），arXiv:2308.16163。参见 https://arxiv.org/abs/2308.16163。[6] N. Busha w, N. Kettle，多条路径与等二部森林的图兰数，《组合学、概率与计算》20 (2011) 837–853。

[7] V. Campos, R. Lopes，Gorgol猜想的一个证明，《离散应用数学》245 (2018) 202–207。[8] G. Chen, R.J. Gould, F. Pfender, B. Wei，相交团的极值图，《组合理论杂志 B辑》89 (2003) 159–171。[9] D. Conlon, J. Lee，关于细分的极值数，《国际数学研究通报》IMRN 12 (2021年) 9122–9145。[10] D. Conlon, O. Janzer, J. Lee，关于细分极值数的更多结果，《组合数学》41 (4) (2021) 465–494。[11] G. Dirac，图的 Turán定理的推广，《匈牙利科学院数学学报》14 (1963) 417–422。[12] T. Dzido，关于偶轮图图兰数的一则注记，《图与组合学》29 (2013) 1305–1309。[13] T. Dzido, A. Jastrzebski，奇轮的图兰数，《离散数学》341 (4) (2018) 1150–1154。[14] P. Erdős，关于图的极值性质与稳定性问题的一些新不等式，《图论》（蒂豪尼讨论会论文集，1966年）（1968）77–81。[15] P. Erdős, Z. Füredi, R.J. Gould, D.S. Gunderson，相交三角形的极值图，《组合理论杂志 B辑》64 (1) (1995) 89–100。[16] P. Erdős, T. Gallai，关于图的极大路径与回路，《匈牙利科学院数学学报》10 (1959) 337–356。[17] P. Erdős, A.H. Stone，关于线性图的结构，《美国数学会通报》52 (1946) 1087–1091。[18] P. Erdős, M. Simonovits，图论中的一个极限定理，《匈牙利数学科学研究》1 (1966) 51–57。[19] P. Erdős, M. Simonovits，图论中的一些极值问题。《组合理论及其应用》I（论文集，巴拉顿菲赖德讨论会，1969年），North-Holland，阿姆斯特丹，1970，第377–390页。[20] P. Erdős, M. Simonovits，一个极值图问题，《匈牙利科学院数学学报》22 (1971/72) 275–282。[21] J. Fox, B. Sudakov，依赖随机选择，《随机结构与算法》38 (2011) 68–99。[22] Z. Füredi，关于 Erdős 的一个 Turán 型问题，《组合数学》11 (1991) 75–79。[23] Z. Füredi, D.S. Gunderson，奇圈的极值数，《组合学、概率与计算》24 (4) (2015) 641–645。[24] Z. Füredi, A. Kostochka, J. Verstraëte，Erdős–Gallai 圈与路径定理的稳定性，《组合理论杂志 B辑》121 (2016) 197–228。[25] Z. Füredi, A. Kostochka, R. Luo, J. Verstraëte，Erdős–Gallai 圈与路径定理的稳定性 II，《离散数学》341 (2018) 1253–1263。[26] Z.Füredi，关于 Erdős 和 Simonovits 的一个不含立方体图的定理，载于《数论、分析与组合学》，Paul Turán纪念会议论文集，布达佩斯，2013，第113–125页。参见 https://arxiv.org/abs/1307.1062。[27] Z. Füredi, M. Simonovits，退化（二部）极值图问题的历史，载于《Erdős百年纪念》，Bolyai Soc. Math. Stud.，25，János Bolyai数学学会，布达佩斯，2013，第169–264页。参见 https://arxiv.org/abs/1306.5167v2。[28] R.J. Faudree, R.H. Schelp，多重着色中的路径 Ramsey数，《组合理论杂志 B辑》。

B 19 (1975) 150–160。[29] J. Gao、O. Janzer、H. Liu、Z. Xu，几何形状所对应图的极值数，2023，arXiv：2303.13380。《以色列数学杂志》，待刊。[30] X. Hou、Y. Qiu、B. Liu，相交奇圈的极值图，《电子组合学杂志》23 (2) (2016) P2.29。[31] X. Hou、Y. Qiu、B. Liu，相交奇圈的图兰数与分解数，《离散数学》341 (2018) 126–137。[32] T. Jiang、A. Newman，图的小型稠密子图，《SIAM离散数学杂志》31 (2017) 124–142。[33] T. Jiang、J. Ma、L. Yepremyan，关于二部图的图兰指数，《组合学、概率与计算》31 (2022) 333–344。[34] O. Janzer，细分的极值数的改进的界，《电子组合学杂志》26 (2019) 论文编号3.3。[35] G.N. Kopylov，图中的极大路径与圈，《苏联科学院通报》234 (1) (1977) 19–21。英文译文：《苏联数学通报》18(3) (1977) 593–596。[36] Y. Lan、Z. Qin、Y. Shi，$2P_7$的图兰数，《讨论数学：图论》39 (2019) 805–814。[37] H. Liu，圈、树的膨胀图的极值图，《电子组合学杂志》20 (1) (2013)，P65。[38] J. Ma、B. Ning，关于图的周长的稳定性结果，《组合数学》40 (1) (2020) 105–147。[39] W. Mantel：问题28，由H. Gouventak、W. Mantel、J. Teixeira de Mattes、F. Schuh、W.A. Wythoff解答。《数学问题》10 (1907) 60–61。[40] Z. Ni、L. Kang、E. Shan、H. Zhu，钥匙圈图的膨胀图的极值图，《图与组合学》36 (2020) 1827–1853。[41] R. Pinchasi、M. Sharir，不含立方体的图及相关问题，《组合数学》25 (2005) 615–623。[42] M. Simonovits，求解图论极值问题的一种方法：稳定性问题，《图论》（会议论文集，蒂豪尼，1966）（1968）279–319。[43] M. Simonovits，具有对称极值图及附加色数条件的极值图问题，《离散数学》7 (1974) 349–376。[44] M. Simonovits，二十面体的极值图问题，《组合理论杂志 B辑》17 (1974)，69–79。[45] M. Simonovits，极值问题与图乘积，《纯数学研究》，第669–680页，Akadémiai Kiadó，Birkhäuser Verlag，1982年。[46] M. Simonovits，保罗·埃尔德什对极值图论的影响，载于《保罗·埃尔德什的数学（第二卷）》，R.L. Graham，Springer，纽约，2013年，第245–311页。[47] B. Sudakov、I. Tomon，不含K_t的二部图的图兰数，t《美国数学会会刊》148 (7) (2020) 2811–2818。[48] P. Turán，图论中的一个极值问题，《数学与物理学报》48 (1941)，第436–452页。（匈牙利语）。[49] C. Xiao、G.O.H. Katona、J. Xiao、O. Zamora，路径平方图的图兰数，《离散应用数学》307 (2022) 1–14。[50] L.-T. Yuan、X.-D. Zhang，互不相交的路径副本的图兰数，《离散数学》340

(2) (2017) 132–139。[51] L.-T. Yuan、X.-D. Zhang，不相交路径的图兰数，《图论杂志》98 (3) (2021) 499–524。[52] L.-T. Yuan，k-花的极值图，《图论杂志》89 (2018) 26–39。[53] L.-T. Yuan，奇轮图的极值图，《图论杂志》98 (2021) 691–707。[54] L.-T. Yuan，图的边膨胀图的极值图，《组合理论杂志 B辑》152 (2022) 379–398。[55] L.-T. Yuan，路径 p次幂的极值图，《欧洲组合学杂志》104 (2022) 103548。