arXiv:2302.03280v1 [math.NT] 7 Feb 2023

戴德金η函数变换公式的一个初等证明

ZE-YONG KONG 和 LEE-PENG TEO

摘要。戴德金η函数 $\eta(\tau)$ 定义为

$$\eta(\tau) = e^{\pi i\tau/12}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{2\pi in\tau}\right), \quad \text{when } \operatorname{Im}\tau > 0.$$

它在数论中发挥着重要作用，尤其是在模形式理论中。它的 24^{th}次幂 $\eta(\tau)^{24}$, 是模群 $\mathrm{PSL}\,(2,\mathbb{Z})$ 上权为 12 的模形式。除一个常数因子外， $\eta(\tau)^{24}$ 等于模判别式 $\Delta(\tau)$。

本文给出戴德金η函数在模群 $\mathrm{PSL}\,(2,\mathbb{Z})$ 作用下的变换公式的一个初等证明。我们首先证明变换公式

$$\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = (-i\tau)^{1/2}\eta(\tau)$$

利用雅可比三重乘积恒等式和泊松求和公式。这两个公式都有初等证明。

在建立一些关于 Dedekind 和的恒等式之后，利用归纳法推导出在变换

$$\tau \mapsto \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$$

下， $\mathbb{Z}()$ 的变换公式；该变换由模群 $\mathrm{PSL}\,(2,\mathbb{Z})$ 的一般元素诱导。

1. 引言

戴德金η函数由戴德金于1877年引入，并在上半平面 $\mathbb{H} = \{\tau \mid \operatorname{Im}\tau > 0\}$ 中定义如下:

$$\eta(\tau) = e^{\pi i\tau/12}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{2\pi in\tau}\right). \tag{1.1}$$

它与模形式理论密切相关[阿波90]。本文将推导下述公式，该公式描述了 η（τ）在由模群 $\Gamma = \mathrm{PSL}\,(2,\ \mathbb{Z})$的一个元素定义的线性分式变换下的变换。

$$\eta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \exp\left\{\pi i\left(\frac{a+d}{12c}+s(-d,c)\right)\right\}\{-i(c\tau+d)\}^{1/2}\eta(\tau). \tag{1.2}$$

这里 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 是 Γ 其中 $c>0,\ \ s(-d,\ \ c)$ 是一个 Dedekind 和。式（1.2）称为戴德金η函数的戴德金函数方程。可以证明，数

$$\omega(a,b,c,d) = \frac{a+d}{c} + 12s(-d,c)$$

是一个整 数。因此，函数 $f(\tau) = \eta(\tau)^{24}$,是 $\eta(\tau)$ 的 24th 次幂，满足

$$f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)\frac{1}{(c\tau+d)^{12}} = f(\tau) \quad \text{for all } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma.$$

换言之， $\eta(\tau)^{24}$ 是模群 Γ 上权为 12 的模形式。

戴德金函数方程 (1.2) 是利用 Iseki 在书中提出的更一般的变换公式证明的 [Ise57] 在书中 [Apo90]。在 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,$s(0,1) = 0$的特殊情形下，公式 (1.2) 化简为

$$\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = (-i\tau)^{-1/2}\eta(\tau). \tag{1.3}$$

这个公式已通过多种方法得到证明，例如 Siegel 使用的围道积分法 [Sie54] (另见书籍 [Apo90])。Siegel 方法的一个小缺点是其中涉及一个需要借助高等理论加以论证的极限过程。

本文将用初等方法证明 (1.3)。我们首先给出雅可比三重乘积公式的证明

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-w^{2n}\right)\left(1+w^{2n-1}z^{2}\right)\left(1+w^{2n-1}z^{-2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w^{n^2}z^{2n}, \quad |w|<1, z\neq 0,$$

沿用 [Apo76]中的方法。接着，我们推导出欧拉五边形数公式

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-w^{n}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n}w^{\frac{3n^2-n}{2}}, \quad |w|<1,$$

由雅可比三重乘积公式得到。随后运用泊松求和公式证明变换公式（1.3）。

众所周知，模群 Γ 由两个元素 $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 和$S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$生成。在 T作用下， η的变换为

$$\eta(\tau+1) = e^{\frac{\pi i}{12}}\eta(\tau),$$

由其定义可知这一点显而易见。事实 Γ 由 T和 S 生成，可通过对 c 使用归纳法证明（例如参见[Apo90]）。运用这一思路，我们通过归纳法证明一般变换下的戴德金函数方程（1.2）。这个证明完全是初等的。

本文旨在为戴德金函数方程给出一个自足的初等证明。因此，我们详细阐述所需全部结果的证明。

2. 分式线性变换与模群

设 $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 为扩充复平面。众所周知，映射 $w\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ 是解析且双射的，当且仅当 w 是线性分式变换，即

$$w(z) = \frac{az+b}{cz+d} \tag{2.1}$$

对于某个满足 $ad - bc \neq 0$ 的四元组 (a, b, c, d)。

对于任意非零复数 k，四元组 (a, b, c, d) 和 (ka, kb, kc, kd) 定义相同的分式线性变换。因此，我们可以将 a, b, c, d 规范化为

$$ad - bc = 1,$$

并将此线性分式变换与二阶矩阵

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

形如（2.2）且满足 $ad - bc = 1$ 的二阶矩阵集合记为 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$。该集合在矩阵乘法下构成一个群。

由于 (a, b, c, d) 和 $(-a, -b, -c, -d)$ 定义了相同的分式线性变换，我们可以在 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ 上如下定义一个等价关系：若 A 和 B 属于 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$，则 $A \sim B$ 当且仅当

$$A = \pm B.$$

$\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ 关于此等价关系的商群记作 $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$。令 I 为二阶单位矩阵，则 $H = \{I, -I\}$ 是 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ 的正规子群。不难看出

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/H.$$

因此，$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ 也是一个群，我们称之为分式线性变换群。群运算恰好就是变换复合。

模群 $\Gamma = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ 是 $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ 的子群，由满足以下条件的元素 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 构成：a、b、c、d 均为整数，且 $ad - bc = 1$。众所周知，它由以下两个元素生成

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{and} \qquad S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.3}$$

分别描述线性变换

$$z \mapsto z + 1 \qquad \text{and} \qquad z \mapsto -\frac{1}{z}.$$

3. 雅可比三重乘积恒等式

在本节中 ction，我们沿用 [Apo76 中的方法推导雅可比三重乘积恒等式].

定理 3.1（雅可比三重乘积恒等式）。当 w 和 z 是满足 $|w|$ <1 和 $z \neq 0$的复数时，

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-w^{2n}\right)\left(1+w^{2n-1}z^{2}\right)\left(1+w^{2n-1}z^{-2}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}w^{n^{2}}z^{2n}. \tag{3.1}$$

证明。当 $|w|<1$ 和 $z\neq 0$时，(3.1)左侧的三重乘积绝对收敛。(3.1)右侧的级数也绝对收敛。

对于 $|w|<1$ 和 $z\neq 0$，定义函数 $F(w,z)$如下：

$$F(w,z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-w^{2n}\right)\left(1+w^{2n-1}z^{2}\right)\left(1+w^{2n-1}z^{-2}\right).$$

对于固定的 w，当 $|w|<1$时，$F(w,z)$ 可以展开为关于 z 的幂级数。由于 $F(w,z)$ 关于 z 为偶函数，且 $F(w,z)=F(w,z^{-1})$，因此 $F(w,z)$ 关于 z 的幂级数具有如下形式

$$F(w,z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_{n}(w)z^{2n},$$

with

$$a_{-n}(w)=a_{n}(w).$$

由于 $F(0,z)=1$，我们得出 $a_{0}(0)=1$，并且当 $n\neq 0$时，$a_{n}(0)=0$。

现在，注意到

$$\begin{aligned}F(w,wz)&=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-w^{2n}\right)\left(1+w^{2n+1}z^{2}\right)\left(1+w^{2n-3}z^{-2}\right)\\&=\frac{1+w^{-1}z^{-2}}{1+wz^{2}}F(w,z)\\&=w^{-1}z^{-2}F(w,z).\end{aligned}$$

因此，

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_{n}(w)w^{2n}z^{2n}=w^{-1}z^{-2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_{n}(w)z^{2n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_{n+1}(w)w^{-1}z^{2n}.$$

这意味着对于任意整数 n，

$$a_{n+1}(w)=w^{2n+1}a_{n}(w).$$

由归纳法可得，当 $n\geq 1$时，

$$a_{-n}(w)=a_{n}(w)=w^{n^{2}}a_{0}(w).$$

因此，

$$F(w,z)=a_{0}(w)\sum_{n=-\infty}^{\infty}w^{n^{2}}z^{2n}. \tag{3.2}$$

为了证明该定理，我们需要证明 $a_0(w)=1$ 对所有 $|w|<1$。令 $z=e^{\frac{\pi i}{4}}$ 代入（3.2），可得

$$\frac{F\left(w,e^{\frac{\pi i}{4}}\right)}{a_0(w)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}w^{n^2}i^n. \tag{3.3}$$

由于 $i^{2n}=i^{-2n}=(-1)^n$ 且 $i^{-(2n+1)}=-i^{2n+1}$，因此我们发现，等式右边（3.3）中的奇数项相互抵消，只剩下偶数项。由此得到

$$\frac{F\left(w,e^{\frac{\pi i}{4}}\right)}{a_0(w)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n w^{4n^2}. \tag{3.4}$$

令 $z=i$ 并将 w 替换为 w^4，代入（3.2），可得

$$\frac{F\left(w^4,i\right)}{a_0(w^4)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n w^{4n^2}. \tag{3.5}$$

比较（3.4）和（3.5）可得

$$\frac{a_0(w^4)}{a_0(w)}=\frac{F(w^4,i)}{F\left(w,e^{\frac{\pi i}{4}}\right)}.$$

这意味着

$$\begin{aligned}\frac{a_0(w^4)}{a_0(w)}&=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-w^{8n})(1-w^{8n-4})^2}{(1-w^{2n})(1+iw^{2n-1})(1-iw^{2n-1})}\\&=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-w^{8n})(1-w^{8n-4})^2}{(1-w^{2n})(1+w^{4n-2})}.\end{aligned}$$

由于每个形如 $4n$ 的正整数，不是形如 $8n$，就是形如 $8n-4$，因此我们发现

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-w^{8n})(1-w^{8n-4})=\prod_{n=1}^{\infty}(1-w^{4n}).$$

另一方面，

$$(1-w^{8n-4})=(1-w^{4n-2})(1+w^{4n-2}).$$

因此，

$$\frac{a_0(w^4)}{a_0(w)}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-w^{4n})(1-w^{4n-2})}{1-w^{2n}}.$$

由于每个形如 $2n$ 的正整数要么形如 $4n$，要么形如 $4n-2$，因此我们得到

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-w^{4n})(1-w^{4n-2})=\prod_{n=1}^{\infty}(1-w^{2n}).$$

这意味着

$$a_0(w^4)=a_0(w).$$

对于任意满足 $|w|<1$的 w，

$$a_0(w)=a_0(w^4)=\cdots=a_0(w^{4k})$$

对于任意正整数 k。由于当 $k \to \infty$时 $w^{4k} \to 0$，我们得到

$$a_0(w) = a_0(0) = 1.$$

这就证明了

$$F(w,z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w^{n^2} z^{2n},$$

从而完成证明。 □

注意，映射 $w = e^{\pi i \tau}$ 将上半平面 $\mathbb{H} = \{\mathrm{Im}\,\tau > 0\}$ 映射到单位圆盘$\mathbb{D} = \{|w| < 1\}$。将 w 替换为 $e^{\pi i \tau}$，并将 z 替换为 $e^{\pi i z}$，雅可比三重乘积恒等式可写成如下形式。

推论 3.2（雅可比三重乘积恒等式）。对于任意复数 τ和 z，当 $\mathrm{Im}\,\tau > 0$ 时，

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - e^{2\pi i n \tau}\right)\left(1 + e^{\pi i (2n-1)\tau} e^{2\pi i z}\right)\left(1 + e^{\pi i (2n-1)\tau} e^{-2\pi i z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n z}. \tag{3.6}$$

4. 泊松求和公式

泊松求和公式在数论研究中非常有用。它是傅里叶级数理论的一个推论。本节将介绍泊松求和公式，并将其应用于高斯函数。

定理 4.1（泊松求和定理）。设 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个连续可微函数，使得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) \quad \text{and} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} f'(x+n)$$

在闭区间 $[0,1]$ 上一致收敛。那么对于任意 $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x}, \tag{4.1}$$

其中

$$\widehat{f}(n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i n x} dx.$$

证明。定义

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) \quad \text{and} \quad G(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f'(x+n). \tag{4.2}$$

由于假设 $[0,1]$, 一致收敛，且 f 和 f' 连续，因此 F 和 G 是 $[0,1]$ 上的连续函数。容易验证， $F(x)$ 和 $G(x)$ 的级数在任意闭有界区间上一致收敛,

$$F(x+1) = F(x), \qquad G(x+1) = G(x),$$

and

$$F'(x) = G(x).$$

特别地， F 也是连续可微的。现在，由于 F 是周期为 1 的周期函数，傅里叶级数的狄利克雷定理表明， $F(x)$ 的傅里叶级数收敛到 $F(x)$。也就是说，

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) = F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n x}, \tag{4.3}$$

其中

$$c_n = \int_0^1 F(x) e^{-2\pi i n x} dx.$$

将 c_n 用 f 表示。

$$c_n = \int_0^1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k) e^{-2\pi i n x} dx.$$

由于（4.2）中的第一个级数一致收敛，我们可以交换求和与积分的次序，得到

$$c_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(x+k) e^{-2\pi i n x} dx.$$

作变量代换 $x \mapsto x-k$，得到

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_k^{k+1} f(x) e^{-2\pi i n (x-k)} dx \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_k^{k+1} f(x) e^{-2\pi i n x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i n x} dx. \end{aligned}$$

定理得证。 □

我们将泊松求和公式应用于高斯函数。首先验证相应级数的一致收敛。

引理4.2. 设 u 为正数， b 为任意实数。定义函数f： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$如下：

$$f(x) = e^{-2\pi i b x} e^{-\pi u x^2}.$$

那么这两个级数

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) \quad \text{and} \quad G(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f'(x+n)$$

在 $[0,1]$ 上一致收敛。

证明。只需考虑 $b = 0$ 的情形。我们应用魏尔斯特拉斯 M 判别法，证明级数 $G(x)$ 一致收敛。级数 $F(x)$ 的证明类似。

注意，当 $b = 0$ 时，

$$f'(x) = -2\pi u x e^{-\pi u x^2}.$$

对于 $x \in [0, 1]$，当 $n \geq 1$ 时，

$$|f'(x+n)| \leq 2\pi u(n+1)e^{-\pi u n^2} \leq 2\pi u(n+1)e^{-\pi u n}.$$

当 $n \geq 2$时，

$$|f'(x-n)| \leq 2\pi u n e^{-\pi u(n-1)^2} \leq 2\pi u n e^{-\pi u(n-1)}.$$

这两个级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2\pi u(n+1)e^{-\pi u n} \qquad \text{and} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} 2\pi u n e^{-\pi u(n-1)}$$

均收敛。根据魏尔斯特拉斯 M 判别法，我们得出级数$G(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上一致收敛。
□

定理4.3. 设 u 为正数。对于任意实数 a 和 b,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i(n+a)b} e^{-\pi u(n+a)^2} = \frac{1}{\sqrt{u}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n a} e^{-\pi(n+b)^2/u}. \tag{4.4}$$

证明。 设 $f(x)$ 为引理 4.2中定义的函数。由泊松求和公式（4.1），我们有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i(n+a)b} e^{-\pi u(n+a)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n a}.$$

^现在我们只需求出 $f(n)$。

$$\begin{aligned}\widehat{f}(n) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i b x} e^{-\pi u x^2} e^{-2\pi i n x} dx \\ &= e^{-\pi(n+b)^2/u} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi u(x+i(n+b)/u)^2} dx.\end{aligned}$$

该积分是对闭合围道 $\operatorname{Im} z = (n+b)/u$ 上的函数 $e^{-\pi u z^2}$ 进行积分。由于函数 $e^{-\pi u z^2}$ 是解析的，我们可以将积分围道移至直线 $\operatorname{Im} z = 0$。由此得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi u(x+i(n+b)/u)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi u x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{u}}.$$

因此，

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-\pi(n+b)^2/u},$$

证明至此完成。 □

Let

$$D = \left\{(\tau, z, w) \in \mathbb{C}^3 \,|\, \operatorname{Im}\tau > 0\right\}.$$

注意，这两个级数

$$H_1(\tau, z, w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i(n+z)w} e^{\pi i\tau(n+z)^2}$$

and

$$H_2(\tau, z) = (-i\tau)^{-1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi inz} e^{-\pi i(n+w)^2/\tau}$$

在任何紧子集上一致绝对收敛 D。因此，它们都在 D上定义了解析函数。当 $\tau = iu$ 且 $u > 0$ 以及 $z = a$ 且 a 为实数时， $w = b$ 且 b 为实数时， （4.4）表明

$$H_1(iu, a, b) = H_2(iu, a, b).$$

通过解析延拓，我们得到

$$H_1(\tau, z, w) = H_2(\tau, z, w) \qquad \text{for all } (\tau, z, w) \in D.$$

推论4.4. 对于任意复数 τ、 z和 w， 若Im $\tau > 0$,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i(n+z)w} e^{\pi i\tau(n+z)^2} = (-i\tau)^{-1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi inz} e^{-\pi i(n+w)^2/\tau}. \tag{4.5}$$

5. 由模群的生成元定义的变换

本节中，我们考察戴德金η函数 $\eta(\tau)$ 在模群 PSL 的两个生成元 T和 S(2.3)的作用下的变换$(2, \mathbb{Z})$。

对于生成元 T，其幂 T^m 定义了变换 $\tau \mapsto \tau + m$。在 T^m 的作用下， $\eta(\tau)$ 的变换很容易得出。

命题 5.1. 若 $\tau \in \mathbb{H}$，且 m 是一个整数，则有

$$\eta(\tau + m) = \exp\left(\frac{\pi im}{12}\right)\eta(\tau).$$

对于生成元 S 下 $\eta(\tau)$ 的变换，有如下定理。

定理 5.2。当 Im $\tau > 0$,

$$\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = (-i\tau)^{1/2}\eta(\tau). \tag{5.1}$$

证明这个变换公式有多种方法。在 [Apo90],中，使用了西格尔方法，该方法运用了留数演算。 [SS03], 中，则使用了雅可比三重乘积公式以及泊松求和公式进行证明。然而，最初证明的是

$$\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right)^3 = (-i\tau)^{3/2}\eta(\tau)^3.$$

这里我们将先推导欧拉五边形数定理，再给出证明（5.1）的另一种方法。

定理 5.3（欧拉五边形数定理）。当 $\operatorname{Im}\tau > 0$ 时，

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{2\pi in\tau}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n e^{\pi i(3n^2-n)\tau} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n e^{\pi i(3n^2+n)\tau}. \tag{5.2}$$

证明。 将 τ 替换为 3τ，并将 z 替换为 $(\tau+1)/2$ 代入雅可比三重乘积恒等式（3.6），得到

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{2\pi i(3n)\tau}\right)\left(1-e^{2\pi i(3n-1)\tau}\right)\left(1-e^{2\pi i(3n-2)\tau}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n e^{\pi i(3n^2+n)\tau}.$$

当 n 遍历正整数时， $3n$、 $3n-1$ 和 $3n-2$ 也遍历正整数。因此，

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{2\pi i(3n)\tau}\right)\left(1-e^{2\pi i(3n-1)\tau}\right)\left(1-e^{2\pi i(3n-2)\tau}\right) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{2\pi in\tau}\right).$$

这就完成了（5.2）的证明。 □

利用欧拉五边形数定理，我们可以将戴德金η函数表示为一个和。

推论 5.4。当 $\operatorname{Im}\tau > 0$,

$$\eta(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi in} e^{3\pi i\left(n+\frac{1}{6}\right)^2\tau}. \tag{5.3}$$

证明。这直接由 $\eta(\tau)$ (1.1) 的定义和欧拉五边形数定理（5.2）得出。□

利用恒等式（4.5），现在可以证明变换公式（5.1）。

定理证明 5.2。以 τ 替换为 $\tau/3$，并令 $z=1/2$， $w=1/6$ 在（4.5）中，可得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi in} e^{-3\pi i(n+1/6)^2/\tau} = \frac{(-i\tau)^{1/2}}{\sqrt{3}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi in/3} e^{-\pi i/6} e^{\pi i\tau(n+1/2)^2/3}. \tag{5.4}$$

由（5.3），（5.4）的左边为 $\eta(-1/\tau)$。对于右边，注意到当 n 遍历所有整数时，$3n$，$3n-1$ 和 $3n+1$ 也一同遍历所有整数。因此，

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi i n/3} e^{-\pi i/6} e^{\pi i \tau (n+1/2)^2/3} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi i n} e^{-\pi i/6} e^{\pi i \tau (3n+1/2)^2/3} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi i n} e^{\pi i/6} e^{\pi i \tau (3n-1/2)^2/3} \\
&\quad + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi i n} e^{-\pi i/2} e^{\pi i \tau (3n+3/2)^2/3}.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

注意，右端的前两项（5.5）给出

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi i n} e^{-\pi i/6} e^{\pi i \tau (3n+1/2)^2/3} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi i n} e^{\pi i/6} e^{\pi i \tau (3n-1/2)^2/3} \\
&= 2\cos\frac{\pi}{6} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{3\pi i \tau (n+1/6)^2} \\
&= \sqrt{3}\eta(\tau).
\end{aligned} \tag{5.6}$$

右端的最后一项（5.5）为

$$I = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{3\pi i \tau (n+1/2)^2}.$$

当 n 遍历所有整数时，$-1-n$ 也遍历所有整数。于是我们得到

$$I = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{3\pi i \tau (-n-1/2)^2} = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{3\pi i \tau (n+1/2)^2} = -I.$$

因此 $I=0$，由（5.4）、（5.5）和（5.6）可得

$$\eta(1/\tau) = (-i\tau)^{1/2}\eta(\tau).$$

□

注 5.5. 定义函数 χ： $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$如下

$$\chi(1) = \chi(11) = 1,$$

$$\chi(5) = \chi(7) = -1,$$

$$\chi(2) = \chi(3) = \chi(4) = \chi(6) = \chi(8) = \chi(9) = \chi(10) = \chi(12) = 0,$$

and

$$\chi(n+12) = \chi(n) \qquad \text{for all } n \in \mathbb{Z}.$$

T当 $\chi(n)$ 是模 12 的狄利克雷特征时，它满足乘法性 :

$$\chi(mn) = \chi(m)\chi(n) \qquad \text{for all } m, n \in \mathbb{Z}.$$

当 n 遍历所有整数时， $2n$ 和 $2n+1$ 也一起遍历所有整数。关于 $\eta(\tau)$ (5.3) 的公式表明

$$\begin{aligned}\eta(\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i\tau(12n+1)^2/12} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i\tau(12n+7)^2/12} \\ &= \frac{1}{2}\Bigg\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi(12n+1)e^{\pi i\tau(12n+1)^2/12} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi(12n-1)e^{\pi i\tau(12n-1)^2/12} \\ &\quad + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi(12n+7)e^{\pi i\tau(12n+7)^2/12} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi(12n-7)e^{\pi i\tau(12n-7)^2/12}\Bigg\} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{12}\chi(m)\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i\tau(12n+m)^2/12} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\chi(n)e^{\pi i\tau n^2/12}.\end{aligned}$$

利用这一点，我们可以给出定理 5.2 的另一种证明。

定理 *5.2* 的第二种证明。 容易验证，对于所有的整数 n,

$$\chi(n) = \frac{1}{\sqrt{12}}\sum_{m=1}^{12}\chi(m)e^{\frac{2\pi imn}{12}}.$$

因此,

$$\eta(-1/\tau) = \frac{1}{2\sqrt{12}}\sum_{m=1}^{12}\chi(m)\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi imn}{12}}e^{-\pi in^2/(12\tau)}.$$

对于每个 $1 \le m \le 12$，利用（4.5）并将 τ 替换为 12τ， $z = m/12$ 并将 $w = 0$替换为，我们得到 t

$$\begin{aligned}\eta(-1/\tau) &= \frac{(-i\tau)^{1/2}}{2}\sum_{m=1}^{12}\chi(m)\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{12\pi i\tau(n+m/12)^2} \\ &= \frac{(-i\tau)^{1/2}}{2}\sum_{m=1}^{12}\chi(m)\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i\tau(12n+m)^2/12} \\ &= (-i\tau)^{1/2}\eta(\tau).\end{aligned}$$

这只是与狄利克雷特征相关的 θ 函数的一般变换公式的一个特例 [MV07]。 □

6. 戴德金和

为了得到模群一般元素作用下 η 的变换公式，我们首先定义 Dedekind 和。

如果 h 是 一个整数， k 是大于 1 的正整数，Dedekind 和 $s(h,k)$ 定义为 as

$$s(h,k)=\sum_{r=1}^{k-1}\frac{r}{k}\left(\frac{hr}{k}-\left\lfloor\frac{hr}{k}\right\rfloor-\frac{1}{2}\right). \tag{6.1}$$

当 $k=1$ 时，我们对任意整数 h 定义 $s(h,1)=0$ 。

戴德金和具有以下性质。

引理 6.1. 设 k 为正整数， h 和 h' 为与 k 互素的整数。若$h\equiv h'$ mod k，则

$$s(h,k)=s(h',k).$$

证明。若 $k=1$，结论显然。若 $k>1$，则存在整数 m 使得

$$h'=km+h.$$

那么对于任意整数 r,

$$\begin{aligned}\frac{h'r}{k}-\left\lfloor\frac{h'r}{k}\right\rfloor&=\frac{(km+h)r}{k}-\left\lfloor\frac{(km+h)r}{k}\right\rfloor\\&=mr+\frac{hr}{k}-\left\lfloor mr+\frac{hr}{k}\right\rfloor\\&=mr+\frac{hr}{k}-mr-\left\lfloor\frac{hr}{k}\right\rfloor\\&=\frac{hr}{k}-\left\lfloor\frac{hr}{k}\right\rfloor.\end{aligned}$$

由定义（6.1）可得

$$s(h',k)=s(h,k).$$

□

$s(h,k)$与 $s(-h,k)$之间有一个简单的关系。

引理 6.2. 若 k 是正整数，且 h 是与 k互素的整数，则

$$s(-h,k)=-s(h,k).$$

证明。对于每个 $1\le r\le k-1$，存在一个 r' 使得 $1\le r'\le k-1$ 并且

$$hr\equiv r' \mod k.$$

这意味着

$$\frac{hr}{k}-\left\lfloor\frac{hr}{k}\right\rfloor=\frac{r'}{k},$$

由于

$$-hr\equiv k-r' \mod k,$$

且 $1 \leq k - r' \leq k - 1$，我们有

$$\frac{-hr}{k} - \left\lfloor \frac{-hr}{r} \right\rfloor = \frac{k - r'}{k} = 1 - \frac{r'}{k}.$$

因此，

$$\begin{aligned} s(-h,k) &= \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{k} \left(\frac{-hr}{k} - \left\lfloor \frac{-hr}{k} \right\rfloor - \frac{1}{2} \right) \\ &= \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{k} \left(\frac{1}{2} - \frac{r'}{k} \right) \\ &= -\sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{k} \left(\frac{hr}{k} - \left\lfloor \frac{hr}{k} \right\rfloor - \frac{1}{2} \right) \\ &= -s(h,k). \end{aligned}$$

□

接下来我们给出一些引理，以帮助我们在 h 和 k 为正整数时，建立 $s(h,k)$ 与 $s(k,h)$ 之间的互反关系。

引理 6.3. 若 k 是正整数，h 是与 k 互素的整数，则

$$\sum_{r=1}^{k-1} \left\lfloor \frac{hr}{k} \right\rfloor = \frac{(h-1)(k-1)}{2}.$$

证明。与引理 6.2 的证明一样，对于每个 $1 \leq r \leq k-1$，存在一个 r' 使得 $1 \leq r' \leq k-1$ 并且

$$hr \equiv r' \mod k.$$

这意味着

$$\frac{hr}{k} - \left\lfloor \frac{hr}{k} \right\rfloor = \frac{r'}{k},$$

当 r 从 1 取到 $k-1$ 之间的整数时，r' 也会从 1 取到 $k-1$ 之间的整数。因此，

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{k-1} \left\lfloor \frac{hr}{k} \right\rfloor &= \sum_{r=1}^{k-1} \frac{hr}{k} - \sum_{r'=1}^{k-1} \frac{r'}{k} \\ &= \frac{(h-1)(k-1)}{2}. \end{aligned}$$

□

引理 6.4. 若 h 和 k 是满足 $(h,k) = 1$ 的正整数，则

$$\sum_{r=1}^{k-1} \left(\left\lfloor \frac{hr}{k} \right\rfloor \right)^2 = 2hs(k,h) + \frac{(2hk - 3h - k + 3)(h-1)}{6}.$$

证明。 利用引理 6.3，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{k-1}\left(\left\lfloor\frac{hr}{k}\right\rfloor\right)^2 &= \sum_{r=1}^{k-1}\left\lfloor\frac{hr}{k}\right\rfloor\left(\left\lfloor\frac{hr}{k}\right\rfloor+1\right)-\sum_{r=1}^{k-1}\left\lfloor\frac{hr}{k}\right\rfloor\\ &= 2\sum_{r=1}^{k-1}\sum_{s=1}^{\left\lfloor\frac{hr}{k}\right\rfloor}s-\frac{(h-1)(k-1)}{2}.\end{aligned}$$

现在我们考虑满足 $1\le r\le k-1$ 和 $1\le s\le h-1$ 的格点（r， s）。由于 h 和 k 互素，这些点中没有一个位于直线 $hx=ky$ 上。因此，

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{k-1}\sum_{s=1}^{\left\lfloor\frac{hr}{k}\right\rfloor}s &= \sum_{\substack{1\le r\le k-1,\ 1\le s\le h-1\\ ks\le hr}}s\\ &= \sum_{1\le r\le k-1,\ 1\le s\le h-1}s-\sum_{\substack{1\le r\le k-1,\ 1\le s\le h-1\\ hr\le ks}}s.\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{k-1}\left(\left\lfloor\frac{hr}{k}\right\rfloor\right)^2 &= (k-1)(h-1)h-2\sum_{s=1}^{h-1}\sum_{r=1}^{\left\lfloor\frac{ks}{h}\right\rfloor}s-\frac{(h-1)(k-1)}{2}\\ &= \frac{(k-1)(h-1)(2h-1)}{2}-2\sum_{s=1}^{h-1}s\left\lfloor\frac{ks}{h}\right\rfloor\\ &= 2h\sum_{s=1}^{h-1}\frac{s}{h}\left(\frac{ks}{h}-\left\lfloor\frac{ks}{h}\right\rfloor-\frac{1}{2}\right)-2h\sum_{s=1}^{h-1}\frac{s}{h}\left(\frac{ks}{h}-\frac{1}{2}\right)\\ &\quad+\frac{(k-1)(h-1)(2h-1)}{2}\\ &= 2hs(k,h)+\frac{(2hk-3h-k+3)(h-1)}{6}.\end{aligned}$$

□

现在，我们可以建立 Dedekind 和的互反律。

定理 6.5（Dedekind和互反律）。若 h 和 k 是正整数，且 $(h,k)=1$，则

$$s(h,k)+s(k,h)=\frac{h^2+k^2-3hk+1}{12hk}.$$

证明。由于 h 和 k具有对称性，我们可以假设 $h \geq k$。容易验证，当 $h = k = 1$时，该公式成立。当 $k = 1$ 和 $h > 1$时，

$$\begin{aligned} s(h,k) + s(k,h) &= s(1,h) \\ &= \sum_{r=1}^{h-1} \frac{r}{h}\left(\frac{r}{h} - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{h^2 - 3h + 2}{12h} \\ &= \frac{h^2 + k^2 - 3hk + 1}{12hk}. \end{aligned}$$

现在考虑一般情形，其中 $h \geq k > 1$。注意，由于 $(h,k) = 1$，我们必有$h > k$。

与引理 6.2的证明一样，对于每个整数 $1 \leq r \leq k-1$，存在唯一的 r' 使得 $1 \leq r' \leq k-1$ 且

$$hr \equiv r' \mod k,$$

这意味着

$$\frac{hr}{k} - \left\lfloor \frac{hr}{k} \right\rfloor = \frac{r'}{k}.$$

因此，

$$\begin{aligned} \sum_{r'=1}^{k-1} \left(\frac{r'}{k}\right)^2 &= \sum_{r=1}^{k-1} \left(\frac{hr}{k} - \left\lfloor \frac{hr}{k} \right\rfloor\right)^2 \\ &= 2\sum_{r=1}^{k-1} \frac{hr}{k}\left(\frac{hr}{k} - \left\lfloor \frac{hr}{k} \right\rfloor - \frac{1}{2}\right) - \sum_{r=1}^{k-1} \frac{h^2 r^2}{k^2} + \sum_{r=1}^{k-1} \left(\left\lfloor \frac{hr}{k} \right\rfloor\right)^2 + \sum_{r=1}^{k-1} \frac{hr}{k}. \end{aligned}$$

利用引理6.4，我们得到

$$2hs(h,k) = \sum_{r'=1}^{k-1} \left(\frac{r'}{k}\right)^2 + \sum_{r=1}^{k-1} \frac{h^2 r^2}{k^2} - \sum_{r=1}^{k-1} \frac{hr}{k} - 2hs(k,h) - \frac{(2hk - 3h - k + 3)(h-1)}{6}$$

因此，

$$\begin{aligned} s(h,k) + s(k,h) &= \frac{1}{2h}\left\{\sum_{r'=1}^{k-1} \left(\frac{r'}{k}\right)^2 + \sum_{r=1}^{k-1} \frac{h^2 r^2}{k^2} - \sum_{r=1}^{k-1} \frac{hr}{k} - \frac{(2hk - 3h - k + 3)(h-1)}{6}\right\} \\ &= \frac{h^2 + k^2 - 3hk + 1}{12hk}. \end{aligned}$$

□

7. 戴德金函数方程

定理7.1. (Dedekind 函数方程）。若 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma$ 且 $c > 0$，则

$$\eta\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \exp\left(\frac{\pi i \omega(a,b,c,d)}{12}\right)\{-i(c\tau + d)\}^{1/2}\eta(\tau), \tag{7.1}$$

其中

$$\omega(a,b,c,d)=\frac{a+d}{c}+12s(-d,c) \tag{7.2}$$

是一个整数。

注意，定理5.3 是定理7.1的特殊情形。

证明。我们对 c 使用归纳法证明这一点。当 $c=1$、 $b=ad-1$。因此，

$$\frac{a\tau+b}{c\tau+d}=\frac{a(\tau+d)-1}{\tau+d}=a-\frac{1}{\tau+d}.$$

由命题5.1 和定理5.3 可得

$$\begin{aligned}\eta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)&=\eta\left(a-\frac{1}{\tau+d}\right)\\&=\exp\left(\frac{\pi ia}{12}\right)\eta\left(-\frac{1}{\tau+d}\right)\\&=\exp\left(\frac{\pi ia}{12}\right)\{-i(\tau+d)\}^{1/2}\eta\left(\tau+d\right)\\&=\exp\left(\frac{\pi i(a+d)}{12}\right)\{-i(\tau+d)\}^{1/2}\eta\left(\tau\right)\\&=\exp\left(\frac{\pi i\omega(a,b,c,d)}{12}\right)\{-i(c\tau+d)\}^{1/2}\eta(\tau),\end{aligned}$$

其中

$$\omega(a,b,c,d)=a+d$$

是一个整数。由于 $s(-d,c)=s(-d,1)=0$，这就证明了当 $c=1$ 时，7.1

现在我们使用强归纳法原理来证明一般情形。设 c 是一个大于或等于 2 的整数。假设对于所有满足 $\begin{bmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{bmatrix}\in\Gamma$ 的 $1\le c'\le c-1$，我们已证明公式（7.1）以及 $\omega(a',b',c',d')$ 是一个整数这一断言。现在考虑满足 $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ 的 $ad-bc=1$。由于 c 和 d 互素，存在唯一一个小于 r 的正整数 c，使得 $-d\equiv r$ 模 k。换句话说，存在一个整数 q 使得

$$d=cq-r.$$

Let

$$u=aq-b.$$

Then

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u & a\\ r & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & q\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

令 γ_1、 γ_2、 γ_3 分别为线性分式变换

$$\gamma_1(\tau)=\frac{u\tau+a}{r\tau+c},\quad \gamma_2(\tau)=S(\tau)=-\frac{1}{\tau},\quad \gamma_3(\tau)=T^q(\tau)=\tau+q.$$

Then

$$\frac{a\tau+b}{c\tau+d}=\gamma_1(\tau')=\frac{u\tau'+a}{r\tau'+c},\quad \tau'=\gamma_2(\gamma_3(\tau))=-\frac{1}{\tau+q}.$$

由于 $0<r<c$，我们可以应用归纳假设，得到

$$\begin{aligned}\eta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)&=\eta\left(\frac{u\tau'+a}{r\tau'+c}\right)\\&=\exp\left(\frac{\pi i\omega(u,a,r,c)}{12}\right)\{-i(r\tau'+c)\}^{1/2}\eta(\tau'),\end{aligned}$$

其中

$$\omega(u,a,r,c)=\frac{u+c}{r}+12s(-c,r)$$

是一个整数。由情形 $c'=1$，我们有

$$\eta(\tau')=\eta\left(-\frac{1}{\tau+q}\right)=\exp\left(\frac{\pi iq}{12}\right)\{-i(\tau+q)\}^{1/2}\eta(\tau).$$

由于

$$(r\tau'+c)(\tau+q)=c(\tau+q)-r=c\tau+d,$$

and

$$(-i)^{1/2}=\exp\left(-\frac{\pi i}{4}\right),$$

我们得到

$$\eta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)=\exp\left(\frac{\pi i\omega(a,b,c,d)}{12}\right)\{-i(c\tau+d)\}^{1/2}\eta(\tau),$$

其中

$$\omega(a,b,c,d)=\omega(u,a,r,c)+q-3=\frac{u+c+qr}{r}+12s(-c,r)-3.$$

根据第一个等式，由归纳假设可得 $\omega(a,b,c,d)$ 是一个整数。现在我们需要证明 $\omega(a,b,c,d)$ 由（7.2）给出。根据引理6.2，

$$s(-c,r)=-s(c,r).$$

由定理6.5，可得

$$s(-c,r)=s(r,c)-\frac{r^2+c^2-3rc+1}{12rc}.$$

由于 $-d$ 与 r 模 c同余，引理6.1 表明

$$s(-c,r)=s(-d,c)-\frac{r^2+c^2-3rc+1}{12rc}.$$

因此，

$$\omega(a,b,c,d)=\Lambda(a,b,c,d)+12s(-d,c),$$

其中

$$\begin{aligned}\Lambda(a,b,c,d) &= \frac{u+c+qr}{r} - 3 - \frac{r^2+c^2-3rc+1}{rc} \\ &= \frac{uc+cqr-r^2-1}{rc} \\ &= \frac{c(aq-b)-1+dr}{rc} \\ &= \frac{a(cq-d)+dr}{rc} \\ &= \frac{a+d}{c}.\end{aligned}$$

这就证明了（7.2）。因此，定理得证。

□

参考文献

[Apo76]汤姆·M·阿波斯托尔，《解析数论导论》，《数学本科生教材》，施普林格出版社，纽约—海德堡，1976年。MR 0434929[Apo90] ———，《数论中的模函数与狄利克雷级数》，第二版，《数学研究生教材》第41卷，施普林格出版社，纽约，1990年。MR 1027834[Ise57] Shˆo Iseki，《戴德金模函数的变换公式及相关函数方程》，《Duke 数学杂志》24（1957），653–662。MR 91301[MV07] 休·L·蒙哥马利和罗伯特·C·沃恩，《乘法数论：经典理论》，《剑桥高等数学研究丛书》第97卷，剑桥大学出版社，剑桥，2007年。MR 2378655[Sie54] 卡尔·路德维希·西格尔，《（η）$-1/\tau$（τ）$\sqrt{\tau/i}$的一个简单证明》，《Mathematika》1（1954），4。MR 62774[SS03] 埃利亚斯·M·斯坦和拉米·沙卡尔奇，《复分析》，《普林斯顿分析学讲义》第2卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2003年。MR 1976398

马来西亚厦门大学数学系，马来西亚雪兰莪州雪邦 43900 桑苏里亚路，班达尔桑苏里亚。

电子邮箱：MAT2004438@xmu.edu.my，lpteo@xmu.edu.my