arXiv:2302.03293v1 [math.AG] 7 Feb 2023

良构性与弱良构性

Victor Przyjalkowski

Abstract. 文献中关于加权射影空间中的良构簇有两种定义。第一种定义认为，良构簇与环境加权射影空间的奇异轨迹的交的余维至少为二；第二种定义则认为，良构簇不会在余维一处包含环境加权射影空间的奇异分层。我们将证明，这两种定义确实不同；对于维数至少为 3 的拟光滑加权完全交，它们则是一致的。

1. 动机

射影代数簇中最直观的例子之一是射影空间中的完全交。通常完全交的推广是加权完全交，它们是构成正则序列的加权齐次多项式的零点。然而，由于决定完全交的权重和次数具有数值上的限制，可供变化的参数可能并不多，因此它们可能会出现一些病态现象。尤其是，无论如何选择参数，它们都可能是奇异的。加权射影空间中的簇出现奇异有两个原因：环境加权射影空间的奇点，以及簇“自身”的奇点。若该簇没有“自身”的奇点，就称其为拟光滑；在某些假设下，从许多方面来看，它的表现都与光滑簇相似（或者说，可以将其视为光滑轨形）。对于环境加权射影空间奇点而言，这种“预期行为”称为良构性。通俗地说，这意味着加权射影空间中的子簇恰好在加权射影空间的奇点处是奇异的——这正如人们自然预期的那样。

关于加权完全交的经典参考文献主要是 Dol-gachev [Do82], Iano-Fletcher [IF00], 和 Dimca [Di86]的论文。 [Do82]中遗漏了良构性条件。该条件由 [Di86] 和 [IF00], 引入，并广泛用于加权射影空间的子簇。问题在于，这两个定义相近却不相同，因此使用时容易造成混乱。为澄清这一点，我们说明这两个定义确实不同，但在一个重要的“良好”情形下二者一致。我们将 [Di86] 中的条件称为良构性（见定义 2.6），而将 [IF00] 中的条件称为弱良构性（见定义 2.8）。良构簇都是弱良构的。我们给出了反例（例 2.9 和例 2.10），说明反过来并不成立。不过，我们证明（定理 2.14），对于维数至少为 3 的拟光滑加权完全交，这一结论成立。因此，在这种情形下可以使用 [IF00] 及其他论文中的结果。

本研究得到俄罗斯科学基金会资助，资助编号 No19-11-00164。1

致谢。本文是作者与 C.Shramov 合著《加权完全交》一书相关工作的副产品。感谢他与我进行讨论；若没有这些讨论，本文便无法完成。

2. Results

令 $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_N]$ 为一个分次多项式环，其权重赋值为 $\mathrm{wt}(x_i) = a_i$，并令 $\mathbb{P} = \mathbb{P}(a_0, \dots, a_N) = \mathrm{Proj}\ S$ 为一个加权射影空间。加权射影空间的权重并非不变量。例如，对分次进行缩放可得到同构

$$\mathbb{P}(aa_0, \dots, aa_N) \simeq \mathbb{P}(a_0, \dots, a_N).$$

权重集合还可以进一步简化。

定义 2.1. 若对所有$i = 1, \dots, N$，都有 $\gcd(a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_N) = 1$，则称 $\mathbb{P}$ 是良好的。

注意，良构性假设并不构成限制。事实上，对任意正整数 a，考虑由包含映射给出的 Veronese 嵌入

$$\bigoplus_{i=0}^{\infty} S_{ai} \hookrightarrow \bigoplus_{i=0}^{\infty} S_i,$$

其中 S_j 是 S的第 j 个分次分量。它给出同构

$$\mathbb{P}(a_0, a \cdot a_1, \dots, a \cdot a_N) \cong \mathbb{P}(a_0, a_1, \dots, a_N),$$

其中 a_0 与 a互素（详见 [Do82, 1.3.1] 以及 [IF00, 引理 5.7]）。因此，每个加权射影空间都同构于一个良构加权射影空间。这表明，$\mathbb{P}$ 的良构性条件并非几何性质，而是对 $\mathbb{P}$数值表达的一种约定（我们将加权射影空间视为簇，而非轨形）。

与通常的射影空间不同，加权射影空间除非所有权重都等于 1，否则都是奇异的。

引理 2.2（例如，参见 [IF00, 5.15]）。设 $\mathbb{P}$ 是一个良构加权射影空间。对于每个子集

$$J \subset \{0, \dots, N\}$$

使得权重 a_j 中 $j \in J$ 的最大公约数 a_J 大于 1，记

$$\Lambda_J = \{(x_0 : \dots : x_N) \mid x_j = 0 \ \textit{for all}\ j \notin J\}.$$

$\mathbb{P}$ 的奇异轨迹是分层 Λ_J的并。

加权射影空间带有自然投影

$$p \colon \mathbb{A}^{N+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}$$

由 $\mathbb{C}^*$ 作用给出。子簇 $X \subset \mathbb{P}$ 的原像 $C_X^* = p^{-1}(X)$ 称为 X 的去心仿射锥。其在 $\mathbb{A}^{N+1}$ 中的闭包 C_X 称为 X 的仿射锥。由于 $\mathbb{C}^*$ 作用，C_X^* 不可能具有孤立奇点。

加权射影空间中的一类重要子簇由拟光滑子簇构成。

定义 2.3. 子簇 X 若其去心仿射锥 C_X^* 光滑，则称其为加权射影空间 $\mathbb{P}$ 中的拟光滑子簇。

定义 2.4. 余维为 $k \leqslant N$ 的子簇 $X \subset \mathbb{P}$，若由理想 $I = (f_1, \dots, f_k)$ 给出，且该理想由一列次数分别为 $d_1, \dots, d_k$的齐次多项式 $f_1, \dots, f_k \in S$ 构成的正则序列生成，则称其为多重次数为 $(d_1, \dots, d_k)$ 的加权完全交。换言之， $X = \operatorname{Proj} S/I \subset \mathbb{P}$。

下面的例子表明，在奇异的加权射影空间中的加权完全交，即使经过环境空间的奇异轨迹，也可以是光滑的。

例 2.5. 设 $\mathbb{P} = \mathbb{P}(1, 1, 2)$，则 $\mathbb{P}$ 是 $\mathbb{P}^3$中的一个二次锥。设 X 是 $\mathbb{P}$中的一个加权次数为 1 的超曲面，即该锥上的一条直线。那么 X 经过 $\mathbb{P}$的奇点，也就是锥的顶点，但显然， X 是光滑的。

为了说明完全交应当在环境加权射影空间的奇异轨迹上是奇异的这一预期，我们引入了良构性的概念。

定义 2.6（[Di86，定义 1]）。加权射影空间 $\mathbb{P}$的子簇 X 称为良构的，如果 $\mathbb{P}$是良构的，并且

$$\dim X - \dim (X \cap \operatorname{Sing} \mathbb{P}) \geqslant 2,$$

其中，空集的维数定义为 -1。

例 2.5 中二次锥上的直线不是良构簇。这里，非良构性正是这种意外光滑性的原因。类似的现象会出现在任意维数中。

例 2.7. 将例 2.5 推广，设 $\mathbb{P} = \mathbb{P}(1, 1, 2^{N-1})$ 是一个带有加权齐次坐标 $x_0, \dots, x_N$ 的加权射影空间，其中 $N \geqslant 2$。设 X 是由方程 $x_0 = 0$ 定义的加权次数为 1 的超曲面。根据引理 2.2， X 经过由方程 $x_0 = x_1 = 0$ 定义的 $\mathbb{P}$ 的奇异轨迹；此外，$\operatorname{Sing} \mathbb{P}$ 在 X 中的余维为 1，因此 X 不具备良构性。注意， $X \simeq \mathbb{P}(1, 2^{N-1}) \simeq \mathbb{P}^{N-1}$，尤其是光滑的。

在 [IF00, 6.9] 中引入了另一种良构性概念（并始终如一地使用，参见例如 [IF00, Theorem 6.17] 的证明）。我们称之为弱良构性。

定义 2.8. 若簇 $X \subset \mathbb{P}$的 $\mathbb{P}$ 良构，且 X不含有在 X 中余维为 1 的 $\mathbb{P}$的奇异线性层，则称簇 $X \subset \mathbb{P}$为弱良构。

显然，每个良构簇都是弱良构的。下面的例子表明，反过来并不成立。

例 2.9. 令 $S = \mathbb{C}[x_1, x_2, y_1, y_2, y_3]$ 满足

$$\operatorname{wt}(x_1) = \operatorname{wt}(x_2) = 1, \quad \operatorname{wt}(y_1) = \operatorname{wt}(y_2) = \operatorname{wt}(y_3) = 2.$$

令 $\mathbb{P} = \operatorname{Proj} S = \mathbb{P}(1, 1, 2, 2, 2)$。令 f_1和 f_2分别为次数为 3 和 4 的两个一般多项式。令 X 为 $\mathbb{P}$ 中由方程 $f_1 = f_2 = 0$定义的曲面。容易验证， X 是拟光滑的。它不是良构的，但却是弱良构的，因为交 $X \cap \operatorname{Sing} \mathbb{P}$ 在 $\mathbb{P}$ 中由以下方程切出

$$x_0 = x_1 = f_4(0, 0, y_1, y_2) = 0; \tag{2.1}$$

因此， X∩奇异点集 $\mathbb{P}$ 是曲面 X上的一条曲线。考虑 X 的二次 Veronese 嵌入，可以验证它是光滑的。

这个弱良构但不良构的带权完全交例子可以推广到高维。

例 2.10。令 $\mathbb{P} = \mathbb{P}(1_2, 2^{N-1})$。令 $x_1, x_2, y_1, \ldots, y_{N-1}$ 为 $\mathbb{P}$ 上的坐标，其中

$$\mathrm{wt}(x_1) = \mathrm{wt}(x_2) = 1, \quad \mathrm{wt}(y_i) = 2,\ i = 1, \ldots, N-1.$$

令 f_1 和 f_2 分别为次数为 3 和 4 的一般多项式。令 $X \subset \mathbb{P}$ 为由方程 $f_1 = f_2 = 0$ 定义的加权完全交。显然， X 是弱良构的，但不是良好的。事实上， $X \cap \mathrm{Sing}\,\mathbb{P}$ 在 $\mathbb{P}$ 中由以下方程定义

$$x_0 = x_1 = f_2(0, 0, y_1, \ldots, y_{N-1}) = 0.$$

Th因此，它的维数为 $N - 3 = \dim(X) - 1$，并且不是 $\mathbb{P}$ 的线性分层 .

例 2.9 和例 2.10 的区别在于，前者是光滑的，但维数为 2；后者则可以有任意维数，但并不光滑，甚至不是拟光滑的。

注 2.11。在 [IF00] 中，惯例是考虑一般的加权完全交，即由给定次数的一般多项式定义的加权完全交。然而，例 2.9 和例 2.10 表明，即使对满足一般性假设的完全交，良构性和弱良构性也可能有所不同。

良构性的概念似乎比弱良构性更合理。例如，加权完全交最基本的定理之一就是下面的伴随公式。

定理 2.12（参见 [Do82, 定理 3.3.4], [IF00, 6.14]）。设 $X \subset \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_N)$ 是由次数为$d_1, \ldots, d_k$的超曲面构成的拟光滑良好形式加权完全交。那么

$$\omega_X \cong \mathcal{O}_X\left(\sum d_i - \sum a_j\right).$$

在 [IF00] 中，这一定理是针对弱良构簇证明的。然而，证明中存在一个漏洞，因为事实上它用到了簇良构这一假设。例如，如果定理 2.12 对例 2.9 中的簇 X成立，那么就会有 $-K_X \sim \mathcal{O}_X(1)$，从而得到 $K_X^2 = \frac{3\cdot 4}{1^2\cdot 2^3} = \frac{3}{2}$，这不可能，因为 X是光滑的。

此外，根据 [PSh16, 命题 2.11]，加权射影空间 $\mathbb{P}$ 中的光滑良好形式加权完全交 $\mathbb{P}$ 与其奇异轨迹不相交；如例 2.9 所示，对于弱良构加权完全交，这一结果也不成立。

为了陈述本文的主要结果，我们需要以下技术性定义。

定义 2.13（参见 [IF00，定义 6.5]）。若对于某些 i 和 j，有 $d_j = a_i$，则称多重次数为（$d_1, \ldots, d_k$）的加权完全交 $X \subset \mathbb{P}$（$a_0, \ldots, a_N$）为带有线性锥的交。

请注意，一个一般的加权完全交（参见注 2.11）同构于一个不带有线性锥的加权完全交，因为我们可以将其同构地投影到一个加权射影子空间中。

事实证明，加权完全交的良构性与弱良构性这两个概念无法一致的障碍，恰好就是例 2.9 和例 2.10 中出现的那些。更准确地说，我们有如下定理。

定理 2.14. 设 X 是维数至少为 3 且不是与线性锥相交的拟光滑加权完全交。那么， X 良好，当且仅当 X 弱良构。

该定理的证明如下。由 [IF00, 定理 6.17], 可知，在定理 2.14 的条件下，完全交是弱良构的。通过修改上述文献中的证明，我们证明（定理 2.17）在这些条件下，完全交是良好的，这便推出了该定理的断言。

下面给出一些辅助结果。

引理 2.15（[ACGH85，第 83] 页）。设 s、 m 和 r 为正整数，且 u 为非负整数。设 $g_{i,\ j}$、 $1 \leqslant i \leqslant r$、 $1 \leqslant j \leqslant m$ 是 s 个变量的多项式，即仿射空间 $\mathbb{A}^s$ 上的正则函数。设 Z 为 $\mathbb{A}^s$ 中所有满足以下条件的点 P 构成的簇：矩阵

$$\begin{pmatrix} g_{1,1}(P) & \dots & g_{1,m}(P) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{r,1}(P) & \dots & g_{r,m}(P) \end{pmatrix}$$

has 的秩至多为 u。那么，或者 Z 为空，或者 codim $Z \leqslant (r-u)(m-u)$ 。

引理 2.16. 设 X 是一个正维拟光滑加权完全交。则 X 不可约。

证明. 假设 X 可约。设 X_1 是它的一个不可约分支。由 Hartshorne 连通性定理（见 [Eis95, 定理 18.12]）可推出 X是连通的。设 X_2 是 X 的另一个分支，并且它与 X_1 在某点 P相交。令C_{X_1}和 $C_{X_2} \subset C_X$ 分别为这些分支上的仿射锥。则 C_{X_1}与C_{X_2} 的交包含 P 上的仿射锥，因此 C_X 沿着此锥奇异。然而，这与拟光滑性假设矛盾。□

现在我们来证明本文的关键结果。

定理 2.17. 设 $\mathbb{P}$ 是一个良构加权射影空间，并设 $X \subset \mathbb{P}$ 是一个维数至少为 3 的拟光滑加权完全交，且它不是与线性锥的交。那么 X 是良构的。

证明。设 $\mathbb{P} = \mathbb{P}(a_0, \dots, a_N)$，并设 x_i 是 $\mathbb{P}$ 上的坐标，其 wt(x_i) 为 $= a_i$。设 X 由 $\mathbb{P}$ 中的加权齐次方程 $f_1 = \dots = f_k = 0$ 定义。假设 X 不是良好的。设 Λ 是 $\mathbb{P}$ 的奇点层，且 $\operatorname{codim}_X(X \cap \Lambda) \leqslant 1$。不失一般性，我们可以假设 Λ 在 $\mathbb{P}$ 中由方程 $x_l = \dots = x_N = 0$ 定义。设 δ 是 $a_0, \dots, a_{l-1}$ 的最大公约数。如有必要，将 Λ 替换为一个更大的奇点层后，我们可以假设权重 $a_l, \dots, a_N$ 均不能被 δ 整除。

假设 $\operatorname{codim}_X(X \cap \Lambda) = 0$。那么，由于根据引理 2.16， X 是不可约的，我们有 $X \subset \Lambda$。这意味着加权齐次坐标 $x_l, \dots, x_N$ 在 X 上均为零。然而，这是不可能的，因为 X 与线性锥的交为空。

现在假设 $\operatorname{codim}_X(X \cap \Lambda) = 1$。根据 [Di86，第 3(i) 条引理]，有一个 s

$$1 = \operatorname{codim}_X (X \cap \Lambda) = k(\delta) - N(\delta) + N - k + 1,$$

其中， $k(\delta)$ 是可被 δ 整除的 d_j 的数量，而 $N(\delta) = l$ 是可被 δ整除的 a_i 的数量。这给出

$$N - N(\delta) = k - k(\delta).$$

将这个非负整数记为 r。不失一般性，我们可以假设 δ不能整除 $d_1, \ldots, d_r$。这意味着 $f_1, \ldots, f_r$ 在 Λ 上消失。考虑由方程 $x_l = \ldots = x_N = 0$ 定义的线性子空间 $C_\Lambda \subset \mathbb{A}^{N+1}$；因此， C_Λ 是 Λ的仿射锥。

多项式 $f_1, \ldots, f_k$ 在点 $P \in C_\Lambda$ 处的雅可比矩阵具有如下形式

$$J(P) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & g_{1,l}(P) & \ldots & g_{1,N}(P) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & g_{r,l}(P) & \ldots & g_{r,N}(P) \\ \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_0}(P) & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_N}(P) \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_0}(P) & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \frac{\partial f_k}{\partial x_N}(P) \end{pmatrix}$$

对于准齐次多项式

$$g_{ji} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}|_{x_l = \ldots = x_N = 0}$$

关于变量 $x_0, \ldots, x_{l-1}$。 记

$$G(P) = \begin{pmatrix} g_{1,l}(P) & \ldots & g_{1,N}(P) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{r,l}(P) & \ldots & g_{r,N}(P) \end{pmatrix}.$$

令 Z为所有满足 $\mathrm{rk}\ G(P) < r$的点 $P \in C_\Lambda \subset \mathbb{A}^{N+1}$构成的集合。显然，对于 $P \in Z$，有 $\mathrm{rk}\ J(P) < k$。簇 Z非空。事实上，它包含原点 $0 \in \mathbb{A}^{N+1}$，因为否则某些多项式 g_{ji} 会是常数，而 X 是与一个线性锥的交。因此，由引理 2.15 可得

$$\mathrm{codim}_{C_\Lambda} Z \leqslant (r - (r-1))(N - l + 1 - (r-1)) = N - N(p) - r + 2 = 2.$$

仿射锥 C_X 在 $Z \cap C_X$中的点处奇异，也就是说，在满足条件 $f_{r+1} = \ldots = f_k = 0$ 的 Z中的点处奇异。记 Z 在加权射影空间 $\mathbb{P}$中的像为 $Z_\mathbb{P}$，于是 $Z = C_{Z_\mathbb{P}}$。设 $S \subset X$ 为 $Z_\mathbb{P}$、 Λ的交，以及 $\mathbb{P}$中多项式 $f_{r+1}, \ldots, f_k$ 的公共零点集。于是

$$\mathrm{codim}_{\,\mathbb{P}}(S) \leqslant \mathrm{codim}_{\,\mathbb{P}} Z + \mathrm{codim}_{\,\mathbb{P}} \Lambda + (k - r) \leqslant 2 + (N - l + 1) + (k - r) = k + 3.$$

因此

$$\dim S \geqslant N - (k+3) = \dim X - 3 \geqslant 0.$$

特别地，这意味着 S 非空，因此其仿射锥 C_S 至少是一维的。然而，我们知道仿射锥 C_X 沿着 C_S奇异。因此， X不是拟光滑的。由此得到的矛盾完成了该定理的证明。 □

References

[ACGH85] E. Arbarello、M. Cornalba、Ph. Griffiths、J. Harris，《代数曲线几何》，第 I 卷，《数学科学基础丛书》第 267 卷，施普林格出版社，纽约，1985 年。[Di86] A. Dimca，《加权完全交的奇点与覆盖》，《纯粹与应用数学杂志》366 (1986)，184–193。[Do82] I. Dolgachev，《加权射影簇》，载于《数学讲义》第 956 卷，施普林格出版社，柏林（1982），34–71。[Eis95] D. Eisenbud，《交换代数与代数几何导论》，《数学研究生教材》第 150 卷，柏林、纽约：施普林格出版社，ISBN 978-0-387-94268-1。[IF00] A. R. Iano-Fletcher，《加权完全交的研究》，《三维簇的显式双有理几何》，101–173，伦敦数学会讲义丛书第 281 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2000。[PSh16] V. Przyjalkowski、C. Shramov，《光滑法诺加权完全交的界》，《纯粹与应用数学通讯》14 (2020)，第 3 期，511–553。

Victor Przyjalkowski，俄罗斯科学院斯捷克洛夫数学研究所，俄罗斯莫斯科市 Gubkina 街 8 号，邮编 119991。victorprz@mi-ras.ru，victorprz@gmail.com