arXiv:2302.03308v3 [math.AP] 7 Mar 2024

三维圆柱中的超音速 Euler-Poisson 方程组流动

MYOUNGJEAN BAE 和 HYANGDONG PAR K

Abstract. 我们证明，在圆柱形喷管入口处给定速度、熵和电场强度时，稳态欧拉-泊松系统存在唯一的三维超音速解。首先，我们借助加权 Sobolev 范数推广 [5] 的结果，从而证明任意横截面的圆柱形喷管中存在唯一的无旋解。随后，我们证明圆柱中存在唯一的带非零涡量的轴对称解。特别地，我们构造了一个具有非零角动量密度的解。因此，从无法通过流函数表述将系统化简为二维系统这一意义上说，这确实是三维流动。核心思路是采用 Helmholtz 分解法重新表述系统，并运用迭代方法。我们还仔细处理了若干技术问题，包括 Lipschitz 区域中的角点奇异性问题。

Contents

1. 引言 2 2. 主要定理 3 2.1. 势流 5 2.2. 非零涡量流 8 3. 势流（定理 2.6 的证明） 10 3.1. 证明概要 10 3.2. 光滑解的先验估计 16 3.3. 命题 3.5 的证明 28 3.4. 定理 2.6 的证明 33 4. 非零涡量流（定理 2.11 的证明） 36 4.1. 问题 2.9 的重新表述 36 4.2. 命题 4.3 的证明 38 4.3. 定理 2.11 的证明 54 附录 A. 引理 3.18 的证明 55 附录 B. 关于引理 3.3 证明的说明 60 附录C. 关于引理 3.7 的说明 61 参考文献 67

2020 *Mathematics Subject Classification.* 35G60, 35J66, 35L72, 35M32, 76J20, 76N10.
*Key words and phrases.*角动量密度，轴对称，欧拉-泊松系统，双曲-椭圆耦合系统，超音速流，涡量，加权 Sobolev 空间。

1. Introduction

给定一个正函数 b： $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$，稳态欧拉-泊松系统

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \rho \nabla \Phi, \\ \operatorname{div}(\rho \mathcal{E} \mathbf{u} + p \mathbf{u}) = \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \Phi, \\ \Delta \Phi = \rho - b, \end{cases} \tag{1.1}$$

描述半导体器件或等离子体的流体动力学模型。函数b 表示固定的带正电背景离子的密度。此外，函数 ρ、u、 p 和 $\mathcal{E}$ 分别表示宏观粒子电子密度、速度、压力和总能量。函数 Φ 表示粒子库仑力产生的电势。

在本文中，我们假设 p 和 $\mathcal{E}$ 由下式给出

$$p(\rho, S) = S\rho^{\gamma} \quad \text{and} \quad \mathcal{E}(\rho, |\mathbf{u}|, S) = \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \frac{S\rho^{\gamma-1}}{\gamma - 1} \tag{1.2}$$

对于称为熵的正函数 S，以及称为绝热指数的常数 $\gamma > 1$。于是，系统（1.1）可改写如下:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \rho \nabla \Phi, \\ \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} B) = \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \Phi, \\ \Delta \Phi = \rho - b \end{cases} \tag{1.3}$$

对于由下式定义的伯努利函数 B

$$B(\rho, |\mathrm{u}|, S) := \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} S\rho^{\gamma-1}.$$

如果 $(\rho, \mathrm{u}\ p) \in C^1$ 和 $\Phi \in C^2$ 是方程 (1.3) 的解，则

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla S = \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{K} = 0$$

for

$$\mathcal{K} := B - \Phi. \tag{1.4}$$

我们称函数 $\mathcal{K}$ 为伪伯努利不变量。为简单起见，我们假设

$$\mathcal{K} = 0.$$

对于无旋流 $(\nabla \times \mathrm{u} = 0)$，系统 (1.3) 可简化为

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(\rho(\Phi, \nabla\varphi)\nabla\varphi\right) = 0, \\ \Delta\Phi = \rho(\Phi, \nabla\varphi) - b \end{cases} \tag{1.5}$$

其中 $\rho(\Phi, \nabla\varphi) := \left[\frac{\gamma-1}{\gamma S_0}\left(\Phi - \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2\right)\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$，常数为 $S_0 > 0$。在 [3]和 [5],中，研究了三维区域内的这一势流系统。特别是，关于矩形喷管中该系统存在三维超音速 $(|\nabla\varphi| > \sqrt{\gamma S_0 \rho^{\gamma-1}}(\Phi, \nabla\varphi))$ 解的首个结果，已在 [5]中得到证明。

本文的主要目的是推广 [5] 的结果。更确切地说，本文第一部分旨在证明超音速解的存在性

对于具有任意截面的三维圆柱中的势流系统。为此，我们将重新定义加权索об列夫空间。

本文的第二部分旨在将上述结果推广到完整欧拉-泊松系统 (1.3)。具体而言，我们构造了满足 $\nabla \times \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ 的 (1.3) 的三维轴对称超音速 ($|\mathbf{u}| > \sqrt{\gamma S \rho^{\gamma-1}}$) 解。特别地，我们将考虑具有非零角动量密度（或等价地，非零旋流）的流。显然，这一特征表明该流是真正的三维流，因为系统 (1.3) 无法通过流函数表述简化为二维系统。秉承亥姆霍兹分解的思路，我们将速度矢量场表示为 $\mathbf{u} = \nabla\varphi + \nabla \times \mathbf{V}$，其中 φ 是一个标量函数，$\mathbf{V}$ 是一个向量场。我们尝试将系统 (1.3) 的三维超音速解构造为 $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ 情形的小扰动；本文第一部分研究的正是这一情形。其主要思路是运用亥姆霍兹分解方法，将系统改写为一个二阶双曲-椭圆耦合系统和两个输运方程，并利用研究势流时得到的结果。

在 [1, 2, 6], 中，采用亥姆霍兹分解的方法构造系统（1.3）的各种类型的多维解。特别地，在 [6] 中首次引入了具有非零角动量密度的轴对称流的速度场 $\mathbf{u}$ 的显式表示，以证明（1.3）存在三维亚音速（$|\mathbf{u}| < \sqrt{\gamma S \rho^{\gamma-1}}$）解。该表示如下：

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi + \nabla \times (h\mathbf{e}_r + \phi\mathbf{e}_\theta) \tag{1.6}$$

对于轴对称函数 φ、h 和 ϕ。

我们的工作与 [6] 的主要区别在于，我们寻求满足不等式 $|\mathbf{u}| > \sqrt{\gamma S \rho^{\gamma-1}}$ 的解。在这种情况下，主要挑战是求解一个拟线性系统，该系统由一个二阶双曲型微分方程和一个在三维区域中弱耦合的二阶椭圆微分方程组成。据我们所知，这是关于具有非零涡量的稳态欧拉-泊松系统的三维超音速流的首个结果。

本文其余部分安排如下。第 2 节阐述主要问题和主要定理。第 3 节证明，在横截面任意光滑的三维柱形区域中，系统 (1.5) 存在超音速解。第 4 节利用亥姆霍兹分解，并应用第 3 节所得结果，证明在具有圆形横截面的三维柱形区域中，系统 (1.3) 存在超音速解。

2. Main Theorems

¯固定一个常数 $\gamma > 1$。假设 $(\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{p}, \Phi)(x_1)$ 是欧拉-泊松系统 (1.3) 的解，其中函数 b 由下式给出：

$$b = b_0$$

其中某个常数为 $b_0 > 0$。并令 $E(x_1) := \Phi'(x_1)$。若不等式 $\bar{\rho} > 0$, $\bar{u} > 0$ 和 $\bar{p} > 0$ 成立，则可将关于 $(\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{p}, E)$ 的系统 (1.3) 改写为

$$\bar{\rho}' = \frac{\bar{E}\bar{\rho}}{\gamma S_0 \bar{\rho}^{\gamma-1} - \frac{J_0^2}{\bar{\rho}^2}}, \quad \bar{E}' = \bar{\rho} - b_0, \quad \bar{u} = \frac{J_0}{\bar{\rho}}, \quad \bar{p} = \bar{\rho}^\gamma S_0 \tag{2.1}$$

对于某些常数 $J_0 > 0$ 和 $S_0 > 0$。令

$$\rho_s := \left(\frac{J_0^2}{\gamma S_0}\right)^{\frac{1}{\gamma+1}}.$$

那么可以直接验证，当且仅当 $\bar{\rho} < \rho_s$ 时，由解 $(\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{p}, \Phi)$ 所支配的流为超音速($\bar{u} > \sqrt{\gamma S_0 \bar{\rho}^{\gamma-1}}$)；当且仅当 $\bar{\rho} > \rho_s$ 时，为亚音速($\bar{u} < \sqrt{\gamma S_0 \bar{\rho}^{\gamma-1}}$)。本文假设

$$0 < b_0 < \rho_s. \tag{2.2}$$

在附录C中，图1展示了满足假设 (2.2) 时的解曲线相平面。

在本文余下部分，我们固定常数 $\gamma > 1$, $J_0 > 0$ 和 $S_0 > 0$。在满足条件 (2.2) 的情况下，考虑初值问题

$$\begin{cases} \bar{\rho}' = \dfrac{\bar{E}\bar{\rho}}{\gamma S_0 \bar{\rho}^{\gamma-1} - \frac{J_0^2}{\bar{\rho}^2}} \quad \text{with} \quad (\bar{\rho}, \bar{E})(0) = (\rho_0, E_0). \\ \bar{E}' = \bar{\rho} - b_0 \end{cases} \tag{2.3}$$

由于我们关注的是超音速流，因此将初始数据 (ρ_0, E_0) 固定在集合 $(0, \rho_s) \times \mathbb{R}$ 中。初值问题 (2.3) 的唯一可解性早已众所周知，因此我们不加证明地陈述以下引理。

引理2.1（一维超音速解 ([1, 引理 1.1], [9, 节3.1])）。对于任意给定的充分小常数 $\delta > 0$，存在一个常数 $L > 0$，它依赖于 $(\gamma, J_0, S_0, b_0, \rho_0, E_0, \delta)$，使得初值问题 (2.3) 存在唯一的光滑解 $(\bar{\rho}, E)(x_1)$，定义在 $[0, L]$ 上，并满足

$$\bar{\delta} \le \bar{\rho}(x_1) \le \rho_s - \bar{\delta} \quad for\ 0 \le x_1 \le \bar{L}.$$

注意，上述不等式等价于

$$1 + \hat{\delta} \le \frac{\bar{u}(x_1)}{\sqrt{\gamma S_0 \bar{\rho}^{\gamma-1}(x_1)}} < \infty \quad for\ 0 \le x_1 \le \bar{L}$$

$\hat{}$ 对某个常数 $\delta > 0$ 成立。

此后，我们固定常数 $\gamma > 1$, $J_0 > 0$, $S_0 > 0$, $\rho_0 \in (0, \rho_s)$ 和 $E_0 \in \mathbb{R}$. 设 $(\bar{\rho}, E)$ 为初值问题 (2.3) 的解，并设 $\bar{u}$ 为

$$\bar{u} = \frac{J_0}{\bar{\rho}}.$$

并定义函数 Φ为

$$\bar{\Phi}(\mathrm{x}) = \int_0^{x_1} \bar{E}(t)\, dt + B_0 \quad \text{with } B_0 = \frac{J_0^2}{2\rho_0^2} + \frac{\gamma S_0 \rho_0^{\gamma-1}}{\gamma - 1} \tag{2.4}$$

对于 $\mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$。

定义 2.2（背景解）。给定常数 $\gamma > 1, J_0 > 0$ 和 $S_0 > 0$，我们称 $(\bar{\rho}, \bar{u}, S_0, \Phi)$ 为与 $(\rho_0, E_0) \in (0, \rho_s) \times \mathbb{R}$ 相关联的稳态欧拉-泊松系统 (1.3) 的背景解。

这里，压力 p 由 $p = S_0\bar{\rho}^\gamma$给出。由于我们稍后会对系统 (1.3) 进行改写，使新系统包含一个关于熵函数$S = \frac{p}{\rho^\gamma}$的输运方程，因此我们在定义 2.2 中将 S_0 作为背景解的一部分。

本文的主要目的是研究以下情形下三维喷管中背景解的结构稳定性:

(i) 首先，我们将研究势流模型中任意横截面的三维圆柱形喷管内背景解的结构稳定性。(ii) 其次，我们将研究完整欧拉-泊松系统中三维圆柱内轴对称扰动下的结构稳定性。

2.1. 势流。在 $\mathbb{R}^2$ 中，取一个开、连通且有界的区域 $\mathcal{D}$，其边界 $\partial\mathcal{D}$光滑。对于常数 $L \in (0, L]$，定义三维圆柱 Ω_L 为

$$\Omega_L := \left\{ \mathrm{x} = (x_1, \mathrm{x}') \in \mathbb{R}^3 : \ 0 < x_1 < L, \, \mathrm{x}' = (x_2, x_3) \in \mathcal{D} \right\}. \tag{2.5}$$

我们将 Ω_L 的入口、壁面和出口分别记为

$$\Gamma_0 := \partial\Omega_L \cap \{x_1 = 0\}, \quad \Gamma_{\mathrm{w}} := (0, L) \times \partial\mathcal{D}, \quad \Gamma_L := \partial\Omega_L \cap \{x_1 = L\}.$$

最后，令 n_w 表示 Γ_{w}上的内单位法向量场。

若速度场 u 给定为

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi \quad \text{in} \quad \Omega_L$$

对于某个标量函数 $\varphi = \varphi(\mathrm{x})$，若 $(\rho, \mathrm{u}\ p, \Phi)$ 是系统 (1.3) 在 Ω_L中的经典解，则众所周知，熵 $S = \frac{p}{\rho^\gamma}$ 处处为常数，因此可设为

$$S \equiv S_0 \quad \text{in } \Omega_L$$

其中 $S_0 > 0$为某个常数。此外，该解可通过求解以下系统得到，该系统称为欧拉-泊松系统的势流模型:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\rho(\Phi, \nabla\varphi)\nabla\varphi) = 0, \\ \Delta\Phi = \rho(\Phi, \nabla\varphi) - b \end{cases} \tag{2.6}$$

对于由下式定义的 ρ

$$\rho(z, \mathbf{q}) := \left[\frac{\gamma - 1}{\gamma S_0} \left(z - \frac{1}{2}|\mathbf{q}|^2 \right) \right]^{\frac{1}{\gamma - 1}} \quad \text{for} \quad z \in \mathbb{R}, \, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3. \tag{2.7}$$

给定常数 $\gamma > 1, J_0 > 0, S_0 > 0$ 以及 $(\rho_0, E_0) \in (0, \rho_s) \times \mathbb{R}$，令 $(\bar{\rho}, \bar{u}, S_0, \Phi)$ 为按照定义 2.2 与 (ρ_0, E_0) 相关联的背景解。并定义

$$\bar{\varphi}(\mathrm{x}) := \int_0^{x_1} \bar{u}(t)dt \tag{2.8}$$

对于 $\mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_L$.，则 $(\varphi, \Phi) = (\bar{\varphi}, \Phi)$ 是系统（2.6）的解，并满足以下边界条件：

$$\begin{aligned} \varphi = 0, \quad \partial_{x_1}\varphi = \frac{J_0}{\rho_0}(=: u_0), \quad \partial_{x_1}\Phi = E_0 \quad \text{on} \quad \Gamma_0, \\ \partial_{\mathbf{n}_w}\varphi = 0, \quad \partial_{\mathbf{n}_w}\Phi = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_{\mathrm{w}}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

此外，它满足不等式

$$|\nabla\bar{\varphi}|^2 > \gamma S_0 \rho^{\gamma-1}(\bar{\Phi}, \nabla\bar{\varphi}) \quad \text{in } \overline{\Omega_L}. \tag{2.10}$$

首先，我们建立一个问题，以求出系统（2.6）的解 (φ, Φ)，使其在 Ω_L 中是 $(\bar{\varphi}, \Phi)$ 的小扰动。

问题 2.3。固定函数 $b \in C^2(\Omega_L)$、$u_{\mathrm{en}} \in C^3(\overline{\Gamma_0})$、$E_{\mathrm{en}} \in C^4(\overline{\Gamma_0})$，以及函数 $E_{\mathrm{ex}} \in C^4(\overline{\Gamma_L})$。此外，给定一个小常数 $\bar{\epsilon} \in (0, \frac{1}{4}]$, ，令

$$\Gamma_0^{\bar{\epsilon}} := \{(0, \mathrm{x}') \in \overline{\Gamma_0} : dist(\mathrm{x}', \partial\mathcal{D}) \le \bar{\epsilon}\}. \tag{2.11}$$

假设函数 $(b, E_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{ex}})$ 满足相容条件：

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} b = 0, \quad E_{\mathrm{en}} - E_0 = 0 \quad on \quad \Gamma_0^{\bar{\epsilon}}, \\ \partial_{\mathbf{n}_w}(b, u_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{ex}}) = \mathbf{0} \quad on \quad \Gamma_{\mathrm{w}}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

在此假设下，求欧拉-泊松系统在 Ω_L 中的解 (φ, Φ)，使其满足以下性质：

(i)（边界条件）

$$\begin{aligned} \varphi = 0, \quad \partial_{x_1}\varphi = u_{\mathrm{en}}, \quad \partial_{x_1}\Phi = E_{\mathrm{en}} \quad on \quad \Gamma_0, \\ \partial_{\mathbf{n}_w}\varphi = 0, \quad \partial_{\mathbf{n}_w}\Phi = 0 \quad on \quad \Gamma_{\mathrm{w}}, \\ \partial_{x_1}\Phi = E_{\mathrm{ex}} \quad on \quad \Gamma_L. \end{aligned} \tag{2.13}$$

(ii)（密度正性及沿 x_1 方向的速度）

$$\rho(\Phi, \nabla\varphi) > 0 \quad and \quad \partial_{x_1}\varphi > 0 \quad in \quad \overline{\Omega_L}. \tag{2.14}$$

(iii)（超音速）对于由下式定义的声速 $c(z,\mathrm{q})$，在 $\overline{\Omega_L}$ 中有 $|\nabla\varphi| > c(\Phi, \nabla\varphi)$

$$c(z, \mathbf{q}) := \sqrt{(\gamma - 1)\left(z - \frac{1}{2}|\mathbf{q}|^2\right)} \tag{2.15}$$

对于 $(z, \mathrm{q}), \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ 满足 $z - \frac{1}{2}|\mathrm{q}|^2 > 0$。

在陈述主要定理之前，我们先引入两个加权 Sobolev 范数。

定义 2.4（一个加权 Sobolev 范数）。对于每个 $t \in (0, L)$，定义 Ω_t 如下：

$$\Omega_t := \left\{\mathrm{x} = (x_1, \mathrm{x}') \in \mathbb{R}^3 : \ 0 < x_1 < t, \, \mathrm{x}' \in \mathcal{D}\right\} (= \Omega_L \cap \{x_1 < t\}).$$

对于每个 $k \in \mathbb{N}$，我们定义一个加权 H^k-范数：

$$\|\phi\|_{H^k_*(\Omega_L)} := \|\phi\|_{H^{k-1}(\Omega_L)} + \sup_{0<d<L} d^{\frac{1}{2}} \|D^k\phi\|_{L^2(\Omega_{L-d})}.$$

并且，我们将 $H^k_*(\Omega_L)$ 定义为

$$H^k_*(\Omega_L) := \{\phi \in H^{k-1}(\Omega_L) \cap H^k_{\mathrm{loc}}(\Omega_L) : \|\phi\|_{H^k_*(\Omega_L)} < \infty\}.$$

定义 2.5（包含类时变量的加权 Sobolev 范数）。

（1）对于函数 $\phi:\overline{\Omega_L}\longrightarrow\mathbb{R}$，我们定义两个涉及类时变量的加权范数：

（i）将函数 ϕ 视为映射 $x_1\in(0,L)\mapsto\phi(x_1,\cdot)\in L^2(\mathcal{D})$，我们定义

$$\|\phi\|_{L^\infty_*((0,L);L^2(\mathcal{D}))}:=\sup_{0<d<L}d^{\frac{1}{2}}\operatorname*{ess\,sup}_{0<s<L-d}\|\phi(s,\cdot)\|_{L^2(\mathcal{D})}.$$

（ii）对于每个 $k\in\mathbb{N}$，我们定义

$$\|\phi\|_{L^\infty_*((0,L);H^k(\mathcal{D}))}:=\sum_{j=0}^{k-1}\operatorname*{ess\,sup}_{0<s<L}\|D^j_{\mathrm{x}'}\phi(s,\cdot)\|_{L^2(\mathcal{D})}+\|D^k_{\mathrm{x}'}\phi\|_{L^\infty_*((0,L);L^2(\mathcal{D}))}.$$

（2）对于固定常数 $m\in\mathbb{N}$，我们定义

$$\|\phi\|_{\mathcal{W}^{m,\infty}_{\mathcal{D}}(0,L)}:=\sum_{j=0}^{m}\|\partial_1^j\phi\|_{L^\infty((0,L);H^{m-j}(\mathcal{D}))};$$

$$\|\phi\|_{\mathcal{W}^{m,\infty}_{*,\mathcal{D}}(0,L)}:=\sum_{j=0}^{m}\|\partial_1^j\phi\|_{L^\infty_*((0,L);H^{m-j}(\mathcal{D}))}.$$

最后，我们通过以下方式定义两个向量空间 $\mathcal{W}^{m,\infty}_{\mathcal{D}}(0,L)$ 和 $\mathcal{W}^{m,\infty}_{*,\mathcal{D}}(0,L)$

$$\mathcal{W}^{m,\infty}_{\mathcal{D}}(0,L):=\left\{\phi:\Omega_L\to\mathbb{R}\;\middle|\;\begin{array}{l}D^j\phi\in L^\infty((0,L);L^2(\mathcal{D}))\ for\ j=0,1,\cdots,m,\\ \|\phi\|_{\mathcal{W}^{m,\infty}_{\mathcal{D}}(0,L)}<\infty\end{array}\right\},$$

$$\mathcal{W}^{m,\infty}_{*,\mathcal{D}}(0,L):=\left\{\phi:\Omega_L\to\mathbb{R}\;\middle|\;\begin{array}{l}D^j\phi\in L^\infty((0,L);L^2(\mathcal{D}))\ for\ j=0,1,\cdots,m-1,\\ D^m\phi\in L^\infty_{\mathrm{loc}}((0,L);L^2(\mathcal{D})),\\ \|\phi\|_{\mathcal{W}^{m,\infty}_{*,\mathcal{D}}(0,L)}<\infty\end{array}\right\}.$$

显然，$\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{m,\infty}_{\mathcal{D}}(0,L)}$ 和 $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{m,\infty}_{*,\mathcal{D}}(0,L)}$ 都是范数，因此 $\mathcal{W}^{m,\infty}_{\mathcal{D}}(0,L)$ 和 $\mathcal{W}^{m,\infty}_{*,\mathcal{D}}(0,L)$ 是赋范向量空间。

定理 2.6（势流）。固定常数 $\gamma>1$、$J_0>0$、$S_0>0$。并令 E_0 为

$$E_0=0. \tag{2.16}$$

对于满足条件 (2.2) 和不等式 $0<\rho_0<\rho_s$ 的固定常数 b_0 和 ρ_0，分别设 $(\bar\rho,E,\bar u,\bar p)$ 为满足初始条件 $(\bar\rho,E)(0)=(\rho_0,E_0)$ 的 (2.1) 的解。并令 $(\bar\varphi,\Phi)$ 分别由 (2.8) 和 (2.4) 给出。

对于一个固定的小常数 $\bar\epsilon\in(0,\frac{1}{4}]$，设给定函数 $(b,u_{\mathrm{en}},E_{\mathrm{en}},E_{\mathrm{ex}})$ 满足问题 2.3 中所述的相容条件 (2.12)。并设

$$\begin{aligned}\sigma(b,u_{\mathrm{en}},E_{\mathrm{en}},E_{\mathrm{ex}}):=&\|b-b_0\|_{C^2(\overline{\Omega_L})}+\|u_{\mathrm{en}}-u_0\|_{C^3(\overline{\Gamma_0})}\\&+\|E_{\mathrm{en}}\|_{C^4(\overline{\Gamma_0})}+\|E_{\mathrm{ex}}-\bar E(L)\|_{C^4(\overline{\Gamma_L})}.\end{aligned} \tag{2.17}$$

对于固定的常数 $\delta>0$，令 L 取自引理2.1。则存在常数 $\hat L\in(0,L]$，它依赖于 $(\gamma,J_0,S_0,b_0,\rho_0,\delta)$，使得以下性质成立：

对于任意给定的 $L \in (0, \hat{L}]$，可以固定一个常数 $\sigma_p > 0$，使其充分小且依赖于 $(\gamma, J_0, S_0, b_0, \rho_0, \delta, L, \bar{\epsilon})$，从而如果不等式

$$\sigma(b, u_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{ex}}) \leq \sigma_p$$

若成立，则问题 2.3 有唯一解 $U = (\varphi, \Phi) \in [H^4_*(\Omega_L) \cap \mathcal{W}^{4,\infty}_{*,\mathcal{D}}(0, L)] \times H^4_*(\Omega_L)$，且满足估计

$$\begin{aligned} &\|\Phi - \bar{\Phi}\|_{H^4_*(\Omega_L)} + \|\varphi - \bar{\varphi}\|_{H^4_*(\Omega_L)} + \|\varphi - \bar{\varphi}\|_{\mathcal{W}^{4,\infty}_{*,\mathcal{D}}(0,L)} \\ &\leq C\sigma(b, u_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{ex}}) \end{aligned} \tag{2.18}$$

其中常数 $C > 0$ 固定，仅依赖于 $(\gamma, J_0, S_0, b_0, \rho_0, \delta, L, \bar{\epsilon})$。

注 2.7. 本文与 [5] 的主要区别在于，我们考虑的区域是具有任意横截面的三维喷管，而 [5] 考虑的是矩形喷管。不过，我们添加了条件 (2.16)，原因如下。正如稍后将会看到的，可以通过 [1, 5] 中给出的论证得到 (φ, Φ) 的先验估计。但在本文中，我们需要采用更谨慎的方法来建立 (φ, Φ) 的全局估计。

在 [5], 中，我们通过对椭圆型方程 $\Delta\Phi = \rho(\Phi, \nabla\varphi) - b$应用反射法，建立了 Φ 的先验 H^4估计。简单来说，可以利用 Φ 关于壁面边界 Γ_{w}的局部偶反射，得到 Φ 的整体 H^4估计；该边界在欧氏坐标下是一个矩形壳层。接着，通过 bootstrap 论证和标准双曲型估计方法，得到 $D^4\varphi$ 的整体 L^2 估计。这是对 [1] 中结果的直接推广。然而，本文考虑的是壁面边界 Γ_w 非平坦的情形，因此 *[5]* 中使用的反射法不再适用。为克服这一困难，我们添加条件 (2.16)，并对 Γ_0 上的 E_{en} 施加 (2.12) 中所述的相容条件，从而能够对 Γ_0 关于 Φ 进行局部偶反射，进而建立 Φ 直到 Γ_0处的先验 H^4估计。此外，利用定义 2.4 给出的加权 Sobolev 范数$\|\cdot\|_{H^4_*(\Omega_L)}$，可得到 Φ 直到出口边界 Γ_L 处的整体 H^4估计。使用加权 Sobolev 范数是本文的一个新特点。接下来的挑战是证明，$\|\Phi\|_{H^4_*(\Omega_L)}$ 的先验估计能够推出$\|\varphi\|_{H^4_*(\Omega_L)} + \|\varphi\|_{\mathcal{W}^{4,\infty}_{*,\mathcal{D}}(0,L)}$ 的估计。

2.2. 非零涡量流。

定义 2.8. 设 (x_1, r, θ) 表示 $\mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ 的柱坐标，即

$$(x_1, x_2, x_3) = (x_1, r\cos\theta, r\sin\theta), \quad r \geq 0, \quad \theta \in \mathbb{T}$$

对于周期为 2π 的一维环面 $\mathbb{T}$。

(i) 如果函数 $f(\mathrm{x})$ 的取值与 θ 无关，即对于某个函数 $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，有 $f(\mathrm{x}) = g(x_1, r)$，则称其为轴对称函数。(ii) 如果向量值函数 $\mathbf{F}(\mathrm{x})$ 可以表示为以下形式，则称其为轴对称函数：

$$\mathbf{F}(\mathrm{x}) = F_{x_1}\mathbf{e}_{x_1} + F_r\mathbf{e}_r + F_\theta\mathbf{e}_\theta$$

其中 F_{x_1}、F_r 和 F_θ 为轴对称函数。上式中，向量 $\mathbf{e}_{x_1}$、$\mathbf{e}_r$ 和 $\mathbf{e}_\theta$ 定义为

$$\mathbf{e}_{x_1} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{e}_r = (0, \cos\theta, \sin\theta), \quad \mathbf{e}_\theta = (0, -\sin\theta, \cos\theta)$$

在欧几里得坐标系中。

问题 2.9. 设 Ω_L 由定义 2.5 给出，

$$\mathcal{D} := \{\mathrm{x}' = (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 : |\mathrm{x}'| < 1\}.$$

固定一个轴对称函数 $b \in C^2(\Omega_L)$。并固定函数 $u_{\mathrm{en}} \in C^3(\overline{\Gamma_0})$、$v_{\mathrm{en}}$、$w_{\mathrm{en}}$、$S_{\mathrm{en}}$、$E_{\mathrm{en}} \in C^4(\overline{\Gamma_0})$以及函数 $E_{\mathrm{ex}} \in C^4(\overline{\Gamma_L})$，使它们均与 $\theta \in \mathbb{T}$ 无关。换言之，它们都是径向函数。

对于一个固定常数 $\bar{\epsilon} \in (0, \frac{1}{4}]$, ，令 $\Gamma_0^{\bar{\epsilon}}$ 由（2.11）给出。在这种情况下，我们可以简单地写成

$$\Gamma_0^{\bar{\epsilon}} = \{(0, \mathrm{x}') : 1 - \bar{\epsilon} \le |\mathrm{x}'| \le 1\}.$$

并假设以下相容条件成立：

- $\partial_r b = 0 \quad on\ \overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_{\mathrm{w}}}, \quad \partial_{x_1} b = 0 \quad on\ \Gamma_0^{\bar{\epsilon}}$;
- $\partial_r u_{\mathrm{en}} = 0 \quad on\ \overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_{\mathrm{w}}}$;
- $v_{\mathrm{en}} = 0 \quad on\ \Gamma_0^{\bar{\epsilon}} \cup \{\mathbf{0}\}$;
- $\partial_r E_{\mathrm{en}} = 0 \quad on\ \overline{\Gamma_0} \cup \overline{\Gamma_{\mathrm{w}}}, \quad E_{\mathrm{en}} = E_0 \quad on\ \Gamma_0^{\bar{\epsilon}}$;
- $\partial_r E_{\mathrm{ex}} = 0 \quad on\ \overline{\Gamma_0} \cup \overline{\Gamma_{\mathrm{w}}}$;
- $w_{\mathrm{en}} = 0 \quad on\ \Gamma_0^{\bar{\epsilon}}, \quad \partial_r^k w_{\mathrm{en}}(\mathbf{0}) = 0 \quad for\ k = 0, 1, 2, 3$;
- $S_{\mathrm{en}} = S_0 \quad on\ \Gamma_0^{\bar{\epsilon}}, \quad \partial_r^k S_{\mathrm{en}}(\mathbf{0}) = 0 \quad for\ k = 1, 2, 3.$

在上述条件下，求完整欧拉-泊松系统（1.3）在 Ω_L 中的一个解 $U = (\mathrm{u}\ \rho, p, \Phi)$，使其满足以下性质：

（i）（ U的边界条件）

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = u_{\mathrm{en}}\mathbf{e}_{x_1} + v_{\mathrm{en}}\mathbf{e}_r + w_{\mathrm{en}}\mathbf{e}_\theta, \quad \frac{p}{\rho^\gamma} = S_{\mathrm{en}}, \quad \partial_{x_1}\Phi = E_{\mathrm{en}} \quad on \quad \Gamma_0, \\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_r = 0, \quad \partial_r\Phi = 0 \quad on \quad \Gamma_{\mathrm{w}}, \\ \partial_{x_1}\Phi = E_{\mathrm{ex}} \quad on \quad \Gamma_L. \end{aligned} \tag{2.19}$$

(ii) 不等式 $\rho > 0$ 和 $\mathrm{u}\cdot\mathrm{e}_{x_1} > 0$ 在 Ω_L 中成立。

(iii) 对于由 (2.15) 定义的声速 $c(z, \mathrm{q})$，有

$$|\mathbf{u}| > c(\Phi, \mathbf{u}) \quad in \quad \overline{\Omega_L}.$$

注 2.10. 若 u 在 Ω_L 中 C^1 且为轴对称，则必有

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_r = \mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_\theta \equiv 0 \quad on \quad \overline{\Omega_L} \cap \{r = 0\}.$$

因此，我们要求边界数据 $(v_{\mathrm{en}}, w_{\mathrm{en}})$ 满足问题 2.9 中所述的相容条件 $v_{\mathrm{en}}(0) = 0$ 和 $w_{\mathrm{en}}(0) = 0$。

定理 2.11（非零涡量流）。固定常数 $\gamma > 1$、$J_0 > 0$、$S_0 > 0$，并固定 E_0 为

$$E_0 = 0.$$

对于满足条件 (2.2) 和不等式 $0 < \rho_0 < \rho_s$的固定常数 b_0 和 ρ_0，分别令 $(\bar{\rho}, E, \bar{u}, \bar{p})$ 为满足初始条件 $(\bar{\rho}, E)(0) = (\rho_0, E_0)$ 的方程 (2.1) 的解。并令 $(\bar{\rho}, \bar{u}, S_0, \Phi)$ 为根据定义 2.2，与 (ρ_0, E_0) 相关联的背景解。给定函数

给定满足问题 2.9 中所述全部相容条件的函数 $(b, u_{\mathrm{en}}, v_{\mathrm{en}}, w_{\mathrm{en}}, S_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{ex}})$，令

$$\begin{aligned}&\sigma(b, u_{\mathrm{en}}, v_{\mathrm{en}}, w_{\mathrm{en}}, S_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{ex}})\\ &:= \|b - b_0\|_{C^2(\overline{\Omega_L})} + \|u_{\mathrm{en}} - u_0\|_{C^3(\overline{\Gamma_0})}\\ &\quad + \|(v_{\mathrm{en}}, w_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{en}}, S_{\mathrm{en}} - S_0)\|_{C^4(\overline{\Gamma_0})} + \|E_{\mathrm{ex}} - \bar{E}(L)\|_{C^4(\overline{\Gamma_L})}.\end{aligned}$$

固定一个常数 $\delta > 0$，并令 L 由引理2.1给出。于是，存在一个常数 $L^* \in (0, L]$，它依赖于（γ， J_0， S_0， b_0， ρ_0， δ），使得对于任意 $L \in (0, L^*]$，只要 $\sigma(b, u_{\mathrm{en}}, v_{\mathrm{en}}, w_{\mathrm{en}}, S_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{ex}})$充分小，问题 2.9 就是适定的。更确切地说，对于任意固定的 $L \in (0, L^*]$，都可以固定一个常数 $\sigma_1 > 0$，使其充分小且依赖于（γ， J_0， S_0， b_0， ρ_0， δ， L， $\bar{\epsilon}$），从而若不等式

$$\sigma(b, u_{\mathrm{en}}, v_{\mathrm{en}}, w_{\mathrm{en}}, S_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{ex}}) \le \sigma_1$$

成立，则问题 2.9 有唯一的轴对称解 (U, Φ)，其中 $\mathrm{U} = (u, \rho, p)$，且该解满足估计

(2.20)
$$\begin{aligned}&\|\mathbf{U} - (\bar{u}\mathbf{e}_1, \bar{\rho}, S_0\bar{\rho}^\gamma)\|_{H^3_*(\Omega_L)} + \|\mathbf{U} - (\bar{u}\mathbf{e}_1, \bar{\rho}, S_0\bar{\rho}^\gamma)\|_{\mathcal{W}^{3,\infty}_{*,\mathcal{D}}(0,L)} + \|\Phi - \bar{\Phi}\|_{H^4_*(\Omega_L)}\\ &\le C\sigma(b, u_{\mathrm{en}}, v_{\mathrm{en}}, w_{\mathrm{en}}, S_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{ex}})\end{aligned}$$

其中 $C > 0$ 是仅依赖于（$\gamma, J_0, S_0, b_0, \rho_0, \delta, L, \bar{\epsilon}$）的常数。

注 2.12. 应用广义 Sobolev 不等式，可以直接验证

$H^{3+k}_*(\Omega_L) \subset C^k(\overline{\Omega_L}) \cap C^{k+1}(\overline{\Omega_L \cap \{x_1 < L - d\}})$ 对任意满足 $k = 0, 1$ 的 $d \in (0, L)$ 均成立。因此，由估计 (2.20) 可知，定理 2.11 中给出的解 (U, Φ) 是问题 2.9 的经典解。

证明定理 2.6 后，我们便可通过亥姆霍兹分解的方法证明定理 2.11。因此，我们先在下一节证明定理 2.6；这是本文的主要部分。随后在第 4 节证明定理 2.11。

3. Potential flows (Proof of Theorem 2.6)

在整个第 3 节中，我们假设 Ω_L 由式（2.5）给出，其横截面 $\mathcal{D}$ 为任意横截面，且其边界 $\partial\mathcal{D}$ 光滑。

3.1. 证明概要。设 (φ, Φ) 是系统（2.6）的解，并令

$$(\psi, \Psi) := (\varphi, \Phi) - (\bar{\varphi}, \bar{\Phi}) \quad \text{in } \overline{\Omega_L}.$$

首先，我们用 (ψ, Ψ) 表示问题 2.3。

定义 3.1. 设 $z \in \mathbb{R}$、$\mathrm{p} = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ 和 $\mathrm{q} = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$。

(i) *Principal coefficients a_{ij} for $i, j = 1, 2, 3$:*

- *Define the sound speed $c(z, \mathbf{q})$ by*

$$c(z, \mathbf{q}) := \sqrt{(\gamma - 1)\left(\bar{\Phi} + z - \frac{1}{2}|\nabla\bar{\varphi} + \mathbf{q}|^2\right)}.$$

- *Let δ_{ij} denote the Kronecker delta, that is, $\delta_{ij} = 0$ if $i \neq j$, and $\delta_{ij} = 1$ if $i = j$.*

对于每个 $i,j=1,2,3$，我们将 $a_{ij}(z,\mathbf{q})$ 定义为

$$a_{ij}(z,\mathbf{q})=\frac{c^2(z,\mathbf{q})\delta_{ij}-(\partial_i\bar{\varphi}+q_i)(\partial_j\bar{\varphi}+q_j)}{c^2(z,\mathbf{q})-(\partial_1\bar{\varphi}+q_1)^2} \tag{3.1}$$

其中 $\bar{\varphi}$由 (2.8) 给出。

注意，每个 $a_{ij}(z,\mathbf{q})$ 的值不仅取决于 $\mathbf{x}\in\Omega_L$，也取决于 $(z,\mathbf{q})$。之后，我们将把 $(z,\mathbf{q})$ 固定为 $\mathbf{x}\in\Omega_L$ 的函数，并将 a_{ij} 视为在 $\mathbf{x}\in\Omega_L$ 处取值。尽管如此，为简洁起见，我们仍将其写作 $a_{ij}(z,\mathbf{q})$，不注明它对 $\mathbf{x}\in\Omega_L$ 的依赖关系。

注意，$a_{11}\equiv 1$。此外，由于 (2.10)，存在一个常数 $\lambda_0>0$，使得

$$-a_{ii}(0,\mathbf{0})>\lambda_0 \quad in\ \overline{\Omega_L}\ for\ i=2,3. \tag{3.2}$$

（ii）低阶导数项的光滑系数：

定义 $B(z,\mathbf{p},\mathbf{q})$ 如下

$$B(z,\mathbf{p},\mathbf{q})=\frac{(\nabla\bar{\Phi}+\mathbf{p})\cdot(\nabla\bar{\varphi}+\mathbf{q})}{c^2(z,\mathbf{q})-(\partial_1\bar{\varphi}+q_1)^2}.$$

我们定义 $\bar{a}_1$、$\bar{b}_1$ 和 $\bar{b}_2$ 为

$$\bar{a}_1:=\partial_{q_1}B(0,\mathbf{0},\mathbf{0})=\frac{(\partial_1\bar{\Phi})\left[\gamma(\partial_1\bar{\varphi})^2+c^2(0,\mathbf{0})\right]}{[c^2(0,\mathbf{0})-(\partial_1\bar{\varphi})^2]^2}, \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}\bar{b}_1&:=\partial_{p_1}B(0,\mathbf{0},\mathbf{0})=\frac{\partial_1\bar{\varphi}}{(\partial_1\bar{\varphi})^2-c^2(0,\mathbf{0})},\\ \bar{b}_2&:=\partial_z B(0,\mathbf{0},\mathbf{0})=\frac{-(\gamma-1)(\partial_1\bar{\Phi})(\partial_1\bar{\varphi})}{[c^2(0,\mathbf{0})-(\partial_1\bar{\varphi})^2]^2}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

对于由（2.7）给出的 ρ，我们定义 h_1 和 h_2 为

$$\begin{aligned}\bar{h}_1&:=\partial_z\rho(\bar{\Phi},\nabla\bar{\varphi})=\frac{1}{\gamma S_0}\bar{\rho}^{2-\gamma},\\ \bar{h}_2&:=\partial_{q_1}\rho(\bar{\Phi},\nabla\bar{\varphi})=-\frac{\bar{u}}{\gamma S_0}\bar{\rho}^{2-\gamma}.\end{aligned} \tag{3.5}$$

注意，由引理2.1可知，$\bar{a}_1$、$\bar{b}_1$、$\bar{b}_2$、$\bar{h}_1$ 和 $\bar{h}_2$ 在 Ω_L 中均为光滑函数。(iii) 非齐次项（f_1、f_2）：

对于 $i=1$ 和 2，我们将 $f_1(z,\mathbf{p},\mathbf{q})$ 和 $f_2(z,\mathbf{q})$定义为

$$\begin{aligned}f_1(z,\mathbf{p},\mathbf{q})&=-\left[B(tz,t\mathbf{p},t\mathbf{q})\right]_{t=0}^1+\bar{a}_1q_1+\bar{b}_1p_1+\bar{b}_2z,\\ f_2(z,\mathbf{q})&=\left[\rho(\bar{\Phi}+tz,\nabla\bar{\varphi}+t\mathbf{q})\right]_{t=0}^1-(b-b_0)-\bar{h}_1z-\bar{h}_2q_1\end{aligned} \tag{3.6}$$

$with\ [g(t)]_{t=0}^1:=g(1)-g(0).$

经过直接计算可知，如果条件

$$(\gamma-1)(\Phi-\frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2)-|\nabla\varphi|^2\neq 0$$

在 Ω_L 中成立，那么我们可以将问题 2.3 改写为关于 (ψ, Ψ) 的非线性边值问题，如下：

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(\Psi, \nabla\psi)\partial_{ij}\psi + \bar{a}_1\partial_1\psi + \bar{b}_1\partial_1\Psi + \bar{b}_2\Psi = f_1(\Psi, \nabla\Psi, \nabla\psi) \\ \Delta\Psi - \bar{h}_1\Psi - \bar{h}_2\partial_1\psi = f_2(\Psi, \nabla\psi) \end{cases} \quad \text{in } \Omega_L, \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} \psi = 0, \quad \partial_{x_1}\psi = u_{\mathrm{en}} - u_0, \quad \partial_{x_1}\Psi = E_{\mathrm{en}} \quad &\text{on} \quad \Gamma_0, \\ \partial_{\mathbf{n}_w}\psi = 0, \quad \partial_{\mathbf{n}_w}\Psi = 0 \quad &\text{on} \quad \Gamma_{\mathrm{w}}, \\ \partial_{x_1}\Psi = E_{\mathrm{ex}} - \bar{E}(L) \quad &\text{on} \quad \Gamma_L. \end{aligned} \tag{3.8}$$

因此，要证明定理 2.6，只需解出（3.7）和（3.8）的边值问题。为通过迭代求解此边值问题，我们使用定义 2.4 和 2.5 中引入的加权范数来定义一个迭代集。

取一个稍后确定的常数 $\delta > 0$，我们定义两个集合 $\mathcal{H}_\delta^P$ 和 $\mathcal{I}_\delta^E$：

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^P &:= \left\{ \psi \in H^4_*(\Omega_L) \cap \mathcal{W}^{4,\infty}_{*,\mathcal{D}}(0,L) \;\middle|\; \begin{array}{l} \|\psi\|_{H^4_*(\Omega_L)} + \|\psi\|_{\mathcal{W}^{4,\infty}_{*,\mathcal{D}}(0,L)} \le \delta, \\ \partial_{\mathbf{n}_w}\psi = 0 \text{ on } \Gamma_{\mathrm{w}}, \\ \partial_{x_1}^{k-1}\psi = 0 \text{ on } \Gamma_0^{\bar{\epsilon}} \\ \text{in the trace sense for } k = 1, 3 \end{array} \right\}, \\ \mathcal{I}_\delta^E &:= \left\{ \Psi \in H^4_*(\Omega_L) \;\middle|\; \begin{array}{l} \|\Psi\|_{H^4_*(\Omega_L)} \le \delta, \\ \partial_{\mathbf{n}_w}\Psi = 0 \text{ on } \Gamma_{\mathrm{w}}, \\ \partial_{x_1}^{k}\Psi = 0 \text{ on } \Gamma_0^{\bar{\epsilon}} \text{ in the trace sense for } k = 1, 3 \end{array} \right\}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

并且，我们定义迭代集 $\mathcal{J}_\delta$：

$$\mathcal{J}_\delta := \mathcal{H}_\delta^P \times \mathcal{I}_\delta^E. \tag{3.10}$$

对于每个 $P = (\psi, \Psi) \in \mathcal{J}_\delta$，令

$$\begin{aligned} \|P\|_{H^4_*(\Omega_L)} &:= \|\psi\|_{H^4_*(\Omega_L)} + \|\Psi\|_{H^4_*(\Omega_L)}, \\ \|P\|_* &:= \|\psi\|_{H^4_*(\Omega_L)} + \|\psi\|_{\mathcal{W}^{4,\infty}_{*,\mathcal{D}}(0,L)} + \|\Psi\|_{H^4_*(\Omega_L)}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

应用索伯列夫不等式、Morrey 不等式、Arzel`a-Ascoli 定理、Rellich 定理以及希尔伯特空间的弱紧性，可以证明以下引理，该引理将在第 3.4 节中使用。

引理 3.2. 对于任意固定常数 $\delta > 0$，迭代集 $\mathcal{J}_\delta$ 满足以下性质：

(a) 集合 $\mathcal{J}_\delta$ 是凸集。(b) 集合 $\mathcal{J}_\delta$ 在 $[(H^2(\Omega_L) \cap C^{1,\frac{1}{4}}(\Omega_L))]^2$中是紧的。(c) 集合 $\mathcal{J}_\delta$ 在 $[H^4_*(\Omega_L)]^2$ 中是弱紧的，具体而言：对于任意给定的序列 $\{(\psi_j, \Psi_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$，可以取其一个子序列 $\{(\psi_{j_k}, \Psi_{j_k})\}$ 以及一个元素 $(\psi_\infty, \Psi_\infty) \in [H^4_*(\Omega_L)]^2$，使得

- *For each $m = 0, 1, 2, 3$, the sequence $\{D^m(\psi_{j_k}, \Psi_{j_k})\}$ weakly converges to $D^m(\psi_\infty, \Psi_\infty)$ in $L^2(\Omega_L)$;*
- *For any $d \in (0, L)$, the sequence $\{D^4(\psi_{j_k}, \Psi_{j_k})\}$ weakly converges to $D^4(\psi_\infty, \Psi_\infty)$ in $L^2(\Omega_L \cap \{x_1 < L - d\})$;*
- $\|(\psi_\infty, \Psi_\infty)\|_{H^4_*(\Omega_L)} \le \sup_{j\in\mathbb{N}} \|(\psi_j, \Psi_j)\|_{H^4_*(\Omega_L)}$.

由于迭代集 $\mathcal{J}_\delta$ 的定义涉及范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{4,\,*}\mathcal{D}^{\infty},\,(0,\,L)}$，我们需要建立空间 $\mathcal{W}^{4,\,*}\mathcal{D}^{\infty},\,(0,L)$ 的紧性。为此，我们需要以下引理。

引理 3.3. 若函数序列 $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $H^4_*(\Omega_L)\cap\mathcal{W}^{4,\,*}\mathcal{D}^{\infty},\,(0,L)$ 中有界，则存在一个子序列收敛到函数 $\psi_\infty \in H^4_*(\Omega_L)\cap\mathcal{W}^{4,\,*}\mathcal{D}^{\infty},\,(0,L)$，且收敛于 $C^1(\Omega_L)\cap C^2(\Omega_L\setminus\Gamma_L)$ 中。此外，极限函数 ψ_∞ 满足以下估计

$$\|\psi_\infty\|_{H^4_*(\Omega_L)} \le \liminf_{n\to\infty}\|\psi_n\|_{H^4_*(\Omega_L)}, \tag{3.12}$$

$$\|\psi_\infty\|_{\mathcal{W}^{4,\infty}_{*,\mathcal{D}}(\Omega_L)} \le \liminf_{n\to\infty}\|\psi_n\|_{\mathcal{W}^{4,\infty}_{*,\mathcal{D}}(\Omega_L)}. \tag{3.13}$$

证明. 本引理基于空间 $\mathcal{W}^{4,\,*}\mathcal{D}^{\infty},\,(0,L)$ 的弱-$*$紧性得以成立。

设函数序列 $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $H^4_*(\Omega_L)\cap\mathcal{W}^{4,\,*}\mathcal{D}^{\infty},\,(0,L)$ 中有界。由于该序列在 $H^3(\Omega_L)$ 中有界，根据广义 Sobolev 不等式和 Arzel`a-Ascoli 定理，存在 $\{\psi_n\}$ 的一个子序列在 $C^1(\Omega_L)$ 中收敛。对于任意小常数 $d>0$，序列 $\{\psi_n\}$ 在 $H^4(\Omega_L\cap\{x_1<L-d\})$ 中有界。因此，我们可以再次应用广义 Sobolev 不等式和 Arzel`a-Ascoli 定理，提取 $\{\psi_n\}$ 的一个子序列，使其在 $C^2(\Omega_L\cap\{x_1<L-d\})$ 中收敛。通过对角线论证，最终可以提取 $\{\psi_n\}$ 的一个子序列，使其在远离 Γ_L 的地方于 C^2 中收敛。

令 ψ_∞ 为 $\{\psi_n\}$ 的收敛子序列的极限函数。由于空间 $H^4_*(\Omega_L)$ 的弱紧性，可得估计 (3.12)。

给定希尔伯特空间 H，注意到 $L^\infty(0,L;\,H)$ 是巴拿赫空间。此外，$L^\infty(0,L;\,H)$ 是 $L^1(0,L;\,H)$ 的对偶空间，它也是巴拿赫空间（参见 [10] 或附录 B）。因此，根据巴拿赫-阿劳格鲁定理，$L^\infty(0,L;\,H)$ 是弱-$*$紧的。然后，利用弱-$*$ 极限的下半连续性以及对角线论证，可直接得到估计 (3.13)。

□

对于固定的 $P=(\psi,\Psi)\in\mathcal{J}_\delta$，令

$$a^P_{ij} := a_{ij}(\tilde\Psi,\nabla\tilde\psi),\quad \tilde f^P_1 := f_1(\tilde\Psi,\nabla\tilde\Psi,\nabla\tilde\psi),\quad \tilde f^P_2 := f_2(\tilde\Psi,\nabla\tilde\psi) \tag{3.14}$$

对于由定义 3.1 给出的 $a_{ij}(z,\mathsf{q})$、$f_1(z,\mathsf{p},\mathsf{q})$ 和 $f_2(z,\mathsf{q})$。并且，我们定义双线性微分算子 $\mathcal{L}^P$ 为

$$\mathcal{L}^P(v,w) := \sum_{i,j=1}^{3} a^P_{ij}\partial_{ij}v + \bar a_1\partial_1 v + \bar b_1\partial_1 w + \bar b_2 w. \tag{3.15}$$

接下来，我们为 P 建立如下线性边值问题：

$$\begin{cases} \mathcal{L}^P(v,w)=\tilde f^P_1, \quad \Delta w-\bar h_1 w-\bar h_2\partial_1 v=\tilde f^P_2 & \text{in } \Omega_L,\\ v=0,\quad \partial_{x_1}v=u_{\mathrm{en}}-u_0,\quad \partial_{x_1}w=E_{\mathrm{en}} & \text{on } \Gamma_0,\\ \partial_{\mathbf{n}_w}v=0,\quad \partial_{\mathbf{n}_w}w=0 & \text{on } \Gamma_{\mathrm{w}},\\ \partial_{x_1}w=E_{\mathrm{ex}}-\bar E(L) & \text{on } \Gamma_L. \end{cases} \tag{3.16}$$

对于 $\mathrm{x} = (x, \mathrm{x}') \in (0, L) \times \mathcal{D}(= \Omega_L)$，令

$$
\begin{aligned}
&w_{\mathrm{bd}}(\mathrm{x}) := \int_0^{x_1} (1 - \frac{y}{L}) E_{\mathrm{en}}(\mathrm{x}') + \frac{y}{L}(E_{\mathrm{ex}}(\mathrm{x}') - \bar{E}(L))\, dy, \\
&g_1 := u_{\mathrm{en}} - u_0, \\
&f_1^P := \tilde{f}_1^P - \mathcal{L}^P(0, w_{\mathrm{bd}}), \\
&f_2^P := \tilde{f}_2^P - \Delta w_{\mathrm{bd}} + \bar{h}_1 w_{\mathrm{bd}}.
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

显然，当且仅当（V, W）：=（v, w） –$(0, w_{\mathrm{bd}})$ 满足以下问题时，(v, w) 才是问题（3.16）的解:

$$
\begin{cases}
\mathcal{L}^P(V, W) = f_1^P, \quad \Delta W - \bar{h}_1 W - \bar{h}_2 \partial_1 V = f_2^P & \text{in} \quad \Omega_L, \\
V = 0, \quad \partial_{x_1} V = g_1, \quad \partial_{x_1} W = 0 & \text{on} \quad \Gamma_0, \\
\partial_{\mathbf{n}_w} V = 0, \quad \partial_{\mathbf{n}_w} W = 0 & \text{on} \quad \Gamma_{\mathrm{w}}, \\
\partial_{x_1} W = 0 & \text{on} \quad \Gamma_L.
\end{cases} \tag{3.18}
$$

声明。在本文余下部分，除非另有说明，如果某个常数取决于（$\gamma, J_0, S_0, \rho_0, b_0, \delta$）而固定，我们将称该常数是固定的¯，取决于数据。此外，除非另有说明，以下出现的任何估计常数 C 均假定仅取决于数据而固定。

利用（2.9）-（2.12）、（3.1）、（3.6）以及 $\mathcal{J}_\delta$的定义（3.10）中规定的相容条件，可以直接证明以下引理（详细证明见 [5,第2.3节2] ）：

引理 3.4。存在一个小常数 $\varepsilon_0 > 0$，以及一个¯ ¯仅取决于数据的常数 $C > 0$，使得如果 L 满足 $L \le L$，其中 L 来自引理2.1，则对所有 $P \in \mathcal{J}_{2\varepsilon_0}$，以下性质成立:

(a) 对于 $P_0 := (0,0)$，我们有

$$
a_{ii}^{P_0}(\mathrm{x}) = \begin{cases} 1 & for\ i = 1 \\ -\frac{1}{\frac{\bar{u}^2(x)}{\gamma S_0 \bar{\rho}^{\gamma-1}}(x) - 1} & for\ i \neq 1 \end{cases}, \quad a_{ij}^{P_0} = 0 \quad for\ i \neq j;
$$

(b) 令 $P_0 := (0, 0)$。对于每个 $i, j = 1, 2, 3$，我们有

$$
\|a_{ij}^P - a_{ij}^{P_0}\|_{H_*^3(\Omega_L)} + \|a_{ij}^P - a_{ij}^{P_0}\|_{\mathcal{W}_{*,\mathcal{D}}^{3,\infty}(0,L)} \le C\|P\|_*;
$$

(c) 微分算子 $\mathcal{L}^P$ 关于 V 是双曲的。此外，矩阵 $[a_{ij}^P]_{i,j=1}^3$ 满足以下性质:

- 矩阵 $[a_{ij}^P]_{i,j=1}^3$ 是对称的；- $a_{11}^P \equiv 1$ 属于 Ω_L；-
子矩阵 $[a_{ij}^P]_{i,j=2}^3$ 是负定的，其中

$$
\frac{1}{2(\frac{\bar{u}^2(x)}{\gamma S_0 \bar{\rho}^{\gamma-1}}(x) - 1)} \le -[a_{ij}^P]_{i,j=2}^3 \le \frac{2}{\frac{\bar{u}^2(x)}{\gamma S_0 \bar{\rho}^{\gamma-1}}(x) - 1} \quad in\ \Omega_L;
$$

(d) 函数 f_1^P和 f_2^P满足以下估计

$$
\left\| \begin{matrix} f_1^P \\ f_2^P \end{matrix} \right\|_{\begin{matrix} H_*^3(\Omega_L) \\ H^2(\Omega_L) \end{matrix}} \le C\left(\|P\|_*^2 + \|E_{\mathrm{en}}\|_{C^3(\overline{\Gamma_0})} + \|b - b_0\|_{C^2(\Omega_L)} + \|E_{\mathrm{ex}} - \bar{E}(L)\|_{C^4(\overline{\Gamma_L})} \|E_{\mathrm{en}}\|_{C^4(\overline{\Gamma_0})} \|E_{\mathrm{ex}} - \bar{E}(L)\|_{C^4(\overline{\Gamma_L})} \right);
$$

(e) 在壁面边界 Γ_{w} 上，满足以下相容条件

$$\mathbf{n}_w \cdot \sum_{j=1}^{3} a_{ij}^P \mathbf{e}_j = 0 \quad for\ i = 1,2,3, \quad \partial_{\mathbf{n}_w} f_k^P = 0 \quad for\ k = 1,2;$$

(f) 在入口边界 Γ_0 上的部分 $\Gamma_0^{\bar{\epsilon}}$，函数 f_1^P 和 f_2^P 满足相容条件:

$$f_1^P = 0 \quad and \quad \partial_{x_1} f_2^P = 0;$$

(g) 对于任意给定的 P_1、$P_2 \in \mathcal{J}_\delta$，有

$$\|a_{ij}^{P_1} - a_{ij}^{P_2}\|_{L^2(\Omega_L)} \le C\|P_1 - P_2\|_{H^1(\Omega_L)},$$

$$\|(\tilde{f}_1^{P_1}, \tilde{f}_2^{P_1}) - (\tilde{f}_1^{P_2}, \tilde{f}_2^{P_2})\|_{L^2(\Omega_L)} \le C\|P_1 - P_2\|_{H^1(\Omega_L)} \sum_{j=1}^{2} \|P_j\|_{H^4_*(\Omega_L)};$$

(h) 对于 $j = 1$ 和 2，记作 $P_j = (\psi_j, \Psi_j)$。于是有

$$\|a_{ij}^{P_1} - a_{ij}^{P_2}\|_{L^\infty((0,L);L^2(\mathcal{D}))} \le C\left(\|\tilde{\psi}_1 - \tilde{\psi}_2\|_{\mathcal{W}_{\mathcal{D}}^{1,\infty}(0,L)} + \|\tilde{\Psi}_1 - \tilde{\Psi}_2\|_{H^1(\Omega_L)}\right).$$

根据引理 3.4 中的陈述 (a)，(3.18) 中给出的两个方程构成一个混合型系统，由一个双曲型方程和一个椭圆方程组成。本文的主要特点是建立任意横截面的三维柱形区域内边值问题 (3.18) 的适定性。[5] 通过反射法证明了三维矩形喷管中同一问题的适定性。在矩形喷管中，可以沿壁面边界上的平直部分进行偶反射，从而在局部延拓边值问题，使壁面边界上的任意角点都可视为内部点。通过这种方法，可以证明存在唯一解，且该解在整个区域内直到边界均属于 H^4。但是，如果横截面不是矩形，这种方法就不再适用。为了解决这一问题，我们在定义 2.4 中引入的加权 Sobolev 空间 $H^4_*(\Omega_L) \times H^4_*(\Omega_L)$ 中建立问题 (3.18) 的适定性。下面的命题推广了 [5, 命题 2.1]。

命题 3.5（（3.18）的适定性）。固定一个常数 $\delta \in (0, \rho_s)$，并根据引理2.1 固定 L。此外，根据引理 3.4 固定常数 $\varepsilon_0 > 0$。在与定理 2.6 相同的假设下，存在一个常数 $L^* \in (0, L]$ 以及一个充分小的常数 $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0]$，使得

- 如果 L 满足 $L \le L^*$,
- 并且如果根据 $\mathcal{J}_\delta$ 的定义（3.10）得到的 δ 满足不等式 $0 < \delta \le \varepsilon_1$，那么与 $P \in \mathcal{J}_\delta$ 相关联的线性边值问题（3.18）具有唯一解 $(V, W) \in [C^1(\Omega_L) \cap C^2(\Omega_L)]^2$，且满足以下估计:

$$\|(V, W)\|_* \le \kappa_0 \left(\|P\|_*^2 + \sigma(b, u_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{ex}})\right) \tag{3.19}$$

对于分别由 (3.11) 和 (2.17) 定义的项 $\|P\|_*$ 和 $\sigma(b, u_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{ex}})$。此外，该解满足相容条件

$$\partial_{x_1}^{k-1} V = 0 \quad and \quad \partial_{x_1}^k W = 0 \quad on\ \Gamma_0^{\bar{\epsilon}}\ for\ k = 1,3. \tag{3.20}$$

最后，常数 L^* 和 ε_1 仅取决于数据，而估计 (3.19) 中的常数 κ_0 仅取决于数据和 $\bar{\epsilon}$。

在第 3.2 节中，我们首先为边值问题 (3.18) 的光滑解建立先验估计 (3.19)，然后在第 3.3 节中通过 Galerkin 近似方法和极限论证证明命题 3.5。

˜ ˜3.2. 光滑解的先验估计。对于固定的 $P = (\psi, \Psi) \in \mathcal{J}_\delta$，假设 (V, W) 是与 P 相关的线性边值问题 (3.18) 的光滑解。我们首先建立解 (V, W) 在 $[H^4_*(\Omega_L) \cap \mathcal{W}^4, {}_* \overset{\infty}{\mathcal{D}}, (0, L)] \times H^4_*(\Omega_L)$ 中的先验估计。

¯命题 3.6. 设两个常数 L 和 ε_0 分别来自引理2.1 和引理 3.4，¯。存在一个常数 $L^* \in (0, L]$，以及一个充分小的常数$\bar{\varepsilon} \in (0, \varepsilon_0]$，它们仅依赖于数据，使得

- 若 L 满足 $L \le L^*$，- 且若 δ 根据 $\mathcal{J}_\delta$ 的定义 (3.10) 满足不等式 $0 < \delta \le \bar{\varepsilon}$，则我们有如下估计

$$\|(V, W)\|_* \le C \left(\|f_1^P\|_{H^3_*(\Omega_L)} + \|f_2^P\|_{H^2(\Omega_L)} + \|g_1\|_{C^3(\overline{\Gamma_0})} \right). \tag{3.21}$$

3.2.1. 一阶导数的先验估计。与 [1, 5], 中的研究不同，我们将分两步建立 (V, W) 的先验 H^1-估计。

1. 对于待定的光滑函数 $\mathfrak{W}(x_1)$，考虑以下积分表达式：

(3.22)
$$\int_{\Omega_L} \mathfrak{W} \partial_1 V \mathcal{L}^P(V, W) - W(\Delta W - \bar{h}_1 W - \bar{h}_2 \partial_1 V) \, d\mathrm{x} = \int_{\Omega_L} f_1^P \mathfrak{W} \partial_1 V - f_2^P W \, d\mathrm{x}.$$

此后，我们分别用 a_{ij} 和 $\bar{a}_{ij}$ 表示 a_{ij}^P 和 $a_{ij}^{P_0}$（对于 $P_0 = (0, 0)$）。

通过重复 [5, 第 2.3 节2] 中的论证，并利用引理 3.4(e)中所述的系数矩阵 $[a_{ij}]_{i,j=1}^3$ 的相容条件，可得

$$\text{LHS of } (3.22) = \mathcal{I}_{\text{main}} + \mathcal{I}_{\text{wgt}}$$

其中 $\mathcal{I}_{\text{main}}$ 和 $\mathcal{I}_{\text{wgt}}$ 如下给出：

(3.23)
$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\text{main}} := & \int_{\Gamma_L} ((\partial_1 V)^2 - \sum_{i,j=2}^3 a_{ij} \partial_i V \partial_j V) \frac{\mathfrak{M}}{2} \, d\mathrm{x}' - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} g_1^2 \mathfrak{M} \, d\mathrm{x}' \\
& + \int_{\Omega_L} (\bar{a}_1 \mathfrak{M} - \frac{1}{2} \mathfrak{M}')(\partial_1 V)^2 + \frac{1}{2} \partial_1 (\bar{a}_{ij} \mathfrak{M}) \partial_i V \partial_j V + (\bar{b}_1 \partial_1 W + \bar{b}_2 W) \mathfrak{M} \partial_1 V \, d\mathrm{x} \\
& + \int_{\Omega_L} |\nabla W|^2 + \bar{h}_1 W^2 + \bar{h}_2 W \partial_1 V \, d\mathrm{x}, \\
\mathcal{I}_{\text{wgt}} := & \int_{\Omega_L} \frac{1}{2} \sum_{i,j=2}^3 \partial_1 \left((a_{ij} - \bar{a}_{ij}) \mathfrak{M} \right) \partial_i V \partial_j V - \sum_{i=2}^3 \sum_{j=1}^3 \mathfrak{M} \partial_i (a_{ij} - \bar{a}_{ij}) \partial_1 V \partial_j V \, d\mathrm{x}.
\end{aligned}$$

沿用 [1, 命题 2.4], 证明中步骤 3 的论证，或参照 [5, 第 2.3 节.2], 中的论证，我们得到以下引理：

¯引理 3.7. 存在常数 $L^* \in (0, L]$, $\mu_0 > 0$, $\mu_1 > 0$ 以及一个小常数 $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0]$（对于引理 3.4 中的常数 $\varepsilon_0 > 0$），它们仅依赖于数据，使得

- *if* L *satisfies* $L \le L^*$,
- *and if* δ *from the definition* (3.10) *of* $\mathcal{J}_\delta$ *satisfies* $\delta \le \varepsilon_1$,

那么我们有不等式

$$\mathcal{I}_{\text{main}} \ge \mu_0 \left(\int_{\Omega_L} |\nabla V|^2 + |\nabla W|^2 + W^2 \, d\mathrm{x} + \int_{\Gamma_L} |\nabla V|^2 \, d\mathrm{x}' \right) - \mu_1 \int_{\Gamma_0} g_1^2 \, d\mathrm{x}'. \tag{3.24}$$

2. 应用 Morrey 不等式、引理 3.4(b) 和定义 2.4，可得以下估计

$$\|D(a_{ij} - \bar{a}_{ij})\|_{C^0([0,s]\times\overline{\mathcal{D}})} \le \begin{cases} C\delta & \text{if } s \le \frac{3}{4}L \\ C\delta(L-s)^{-1/2} & \text{if } s > \frac{3}{4}L \end{cases}. \tag{3.25}$$

定义函数 $\kappa : (0, L) \to \mathbb{R}$ 为

$$\kappa(s) := \left(\min\left\{ \frac{L}{4}, L - s \right\} \right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.26}$$

由 (3.25) 可直接得知，可以取一个仅依赖于数据和 L 的常数 $\mu_L > 0$，使得以下估计成立：

$$\|Da_{ij}\|_{C^0([0,s]\times\overline{\mathcal{D}})} \le \mu_L \kappa(s) \quad \text{for } 0 < s < L. \tag{3.27}$$

对于固定常数 $t \in [0, L]$，令

$$\Omega_t := (0, t) \times \mathcal{D}, \quad \Gamma_t := \{t\} \times \mathcal{D}.$$

与文献 [1, 5], 中的做法不同，我们将 $|\mathcal{I}_{\text{wgt}}|$ 这一项估计为

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_{\text{wgt}}| &\le \int_0^L \|D(a_{ij} - D\bar{a}_{ij})\|_{C^0(\overline{\Gamma_t})} \int_{\mathcal{D}} |DV(x_1)|^2 \, d\mathrm{x}' dx_1 \\ &\le \mu_L \int_0^L \kappa(x_1) \int_{\mathcal{D}} |DV(x_1)|^2 \, d\mathrm{x}' dx_1 \\ &\le \mu_L \|V\|^2_{\mathcal{W}^{1,\infty}_{\mathcal{D}}(0,L)} \int_0^L \kappa(x_1) \, dx_1. \end{aligned} \tag{3.28}$$

结合估计 (3.24) 和 (3.28)，由 (3.22) 可轻易得到以下引理：

引理 3.8（中间 H^1 估计）。存在一个仅依赖于数据的小常数 $\hat{\varepsilon}_1 \in (0, \varepsilon_1]$，使得

- 如果 L 满足 $L \le L^*$，- 并且来自 $\mathcal{J}_\delta$ 的定义 (3.10) 的 δ 满足 $\delta \le \hat{\varepsilon}_1$,

则 (V, W) 满足估计

$$\begin{aligned} &\|V\|_{H^1(\Omega_L)} + \|W\|_{H^1(\Omega_L)} \\ &\le \kappa_0 \left(\|f_1^P\|_{L^2(\Omega_L)} + \|f_2^P\|_{L^2(\Omega_L)} + \|g_1\|_{C^0(\overline{\Gamma_0})} + \delta \|DV\|_{L^\infty((0,L);L^2(\mathcal{D}))} \right) \end{aligned} \tag{3.29}$$

其中常数 $\kappa_0 > 0$ 为固定常数，仅依赖于数据。

我们注意到，喷管长度 L 的上界 L^* 仅用于上述引理中给出的 H^1-估计。

3. 我们定义线性微分算子 $\mathfrak{L}_{\mathrm{h}}^P$ 如下:

$$\mathfrak{L}_{\mathrm{h}}^P(V) := \mathcal{L}^P(V,0)(= \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}^P \partial_{ij} V + \bar{a}_1 \partial_1 V).$$

由引理 3.4 的陈述 (c) 可知，算子 $\mathfrak{L}_{\mathrm{h}}^P$ 在 Ω_L 中是双曲的。接下来，我们定义函数 F_1 :

$$F_1 := f_1^P - \mathcal{L}^P(0,W). \tag{3.30}$$

于是，我们将 V 视为以下线性边值问题的一个解:

$$\mathfrak{L}_{\mathrm{h}}^P(V) = F_1 \text{ in } \Omega_L, \quad \begin{cases} V = 0 \\ \partial_{x_1} V = g_1 \end{cases} \text{ on } \Gamma_0, \quad \partial_{\mathbf{n}_w} V = 0 \text{ on } \Gamma_{\mathrm{w}}.$$

为完成引理 3.8 中给出的估计，我们将采用线性双曲方程的能量估计方法，并运用 Gr¨onwall 不等式。

固定 $t \in (0, L)$。对表达式进行分部积分

$$\int_{\Omega_t} \mathfrak{L}_{\mathrm{h}}^P(V) \partial_1 V \, d\mathrm{x} = \int_{\Omega_t} F_1 \partial_1 V \, d\mathrm{x}, \tag{3.31}$$

可得

$$\text{LHS of (3.31)} = \frac{1}{2}\Big(\int_{\Gamma_t} - \int_{\Gamma_0}\Big)(\partial_1 V)^2 - \sum_{i,j=2}^{3} a_{ij} \partial_i V \partial_j V \, d\mathrm{x}' + \mathcal{H}(t)$$

for

$$\mathcal{H}(t) = \int_{\Omega_t} \bar{a}_1 (\partial_1 V)^2 + \sum_{i,j=2}^{3} \frac{1}{2} \partial_1(a_{ij}) \partial_i q \partial_j V - \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=2}^{3} \partial_j a_{ij} \partial_1 V \partial_i V \, d\mathrm{x}.$$

接下来，我们定义函数 $\mathcal{X}$: $[0, L] \to \mathbb{R}$ 为

$$\mathcal{X}(t) := \int_{\mathcal{D}} |DV(t, \mathrm{x}')|^2 \, d\mathrm{x}'.$$

利用 (3.27)，我们可以估计 $\mathcal{H}(t)$:

$$|\mathcal{H}(t)| \le C \int_0^t \kappa(s) \mathcal{X}(s) \, ds \quad \text{for any } t \in (0, L).$$

利用上面的估计，我们得到关于 $\mathcal{X}(t)$ 的微分不等式如下:

$$\mathcal{X}(t) \le \mathcal{X}(0) + C\left(\int_0^t \kappa(s) \mathcal{X}(s) \, dx + \left(\|f_1^P\|_{L^2(\Omega_L)} + \|W\|_{H_1(\Omega_L)} \right)^2 \right).$$

由于我们有

$$\int_0^L \kappa(s) \, ds = \frac{5}{2}\sqrt{L} < \infty, \tag{3.32}$$

我们可以应用 Gr¨onwall 不等式得到该估计

$$\|DV\|_{L^\infty((0,L);L^2(\mathcal{D}))} \le C(\|g_1\|_{L^2(\mathcal{D})} + \|f_1^P\|_{L^2(\Omega_L)} + \|W\|_{H_1(\Omega_L)}).$$

将该估计代入 (3.29)，得到

$$\begin{aligned}&\|V\|_{H^1(\Omega_L)}+\|W\|_{H^1(\Omega_L)}\\&\leq \kappa_0\left(\|f_1^P\|_{L^2(\Omega_L)}+\|f_2^P\|_{L^2(\Omega_L)}+\|g_1\|_{C^0(\overline{\Gamma_0})}+\delta\|W\|_{H^1(\Omega_L)}\right).\end{aligned}$$

由此得到以下关键命题：

命题 3.9（一阶导数的先验估计）。可以根据数据，将常数 $\hat{\varepsilon}_1$ 进一步减小，使其小于引理 3.8 中给出的常数；因此，若式 (3.10) 中的常数 $\delta>0$ 满足不等式

$$0<\delta\leq\hat{\varepsilon}_1,$$

则可得估计

$$\begin{aligned}&\|(V,W)\|_{H^1(\Omega_L)}+\|V\|_{\mathcal{W}^{1,\infty}_{\mathcal{D}}(0,L)}\\&\leq C\left(\|f_1^P\|_{L^2(\Omega_L)}+\|f_2^P\|_{L^2(\Omega_L)}+\|g_1\|_{C^0(\overline{\Gamma_0})}\right).\end{aligned}\tag{3.33}$$

3.2.2. 二阶导数估计。对于 (V,W) 的高阶导数估计，我们将使用 bootstrap论证。

D^2W的先验估计：首先，我们将式 (3.18) 改写为关于 W 和 V 的两个独立边值问题。首先，定义函数 F_2 如下：

$$F_2:=\bar{h}_1W+\bar{h}_2\partial_1V+f_2^P.\tag{3.34}$$

然后，我们将 W 视为以下线性边值问题的解：

$$\Delta W=F_2\ \text{in}\quad\Omega_L,\quad \partial_{x_1}W=0\ \text{on}\ \Gamma_0\cup\Gamma_L,\quad \partial_{\mathbf{n}_w}W=0\ \text{on}\ \Gamma_{\mathrm{w}}.\tag{3.35}$$

我们分别对上述关于 Γ_0 和 Γ_L 的问题作局部偶延拓，然后应用 [8, 定理 8.12] 和命题 3.9，得到如下估计

$$\|W\|_{H^2(\Omega_L)}\leq C\left(\|f_1^P\|_{L^2(\Omega_L)}+\|f_2^P\|_{L^2(\Omega_L)}+\|g_1\|_{C^0(\overline{\Gamma_0})}\right).\tag{3.36}$$

D^2V的先验估计：1. 总体而言，我们将按照 [1, 附录 A：引理 2.8]证明中的步骤 2 所给出的思路，估计V的 H^2范数。换言之，我们采用线性双曲型方程的能量估计方法，并运用 Gr¨onwall 不等式。不过，与 [1, 5], 中讨论的情形不同，我们需要更加仔细地处理系数$\{a_{ij}\}_{i,\ j=1}^{3}$的导数。

我们对方程 $\mathfrak{L}_{\mathrm{h}}^P(V)=F_1$ 关于 x_1求导，并将结果改写为关于 $q:=\partial_1V$ 的形式，如下：

对于 $\partial_1\mathfrak{L}_{\mathrm{h}}^P:=\sum_{(i,j)\neq(1,1)}\partial_1a_{ij}\partial_{ij}+\bar{a}_1'\partial_1$。然后我们得到以下积分：

$$\begin{aligned}&\mathfrak{L}_{\mathrm{h}}^P(q)=\partial_1F_1-(\partial_1\mathfrak{L}_{\mathrm{h}}^P)(V)\quad\text{in}\ \Omega_L\\&\int_{\Omega_t}\mathfrak{L}_{\mathrm{h}}^P(q)\partial_1q\,d\mathrm{x}=\int_{\Omega_t}(\partial_1F_1-(\partial_1\mathfrak{L}_{\mathrm{h}}^P)(V))\partial_1q\,d\mathrm{x}.\end{aligned}\tag{3.37}$$

2. 通过分部积分并利用引理 3.4 中陈述 (e) 给出的系数矩阵 $[a_{ij}]_{i,\ j=1}^{3}$ 的相容条件，我们得到

$$\text{LHS of (3.37)} = \frac{1}{2}\Big(\int_{\Gamma_t} - \int_{\Gamma_0}\Big)(\partial_1 q)^2 - \sum_{i,j=2}^{3} a_{ij}\partial_i q \partial_j q \, d\mathrm{x}' + \widetilde{\mathcal{H}}(t)$$

for

$$\widetilde{\mathcal{H}}(t) = \int_{\Omega_t} \bar{a}_1(\partial_1 q)^2 + \sum_{i,j=2}^{3} \frac{1}{2}\partial_1(a_{ij})\partial_i q \partial_j q \, d\mathrm{x} - \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=2}^{3} \partial_j a_{ij}\partial_1 q \partial_i q \, d\mathrm{x}.$$

接下来，定义函数 $X:\ [0,L]\to\mathbb{R}$ 如下

$$X(t) := \int_{\mathcal{D}} |\nabla q(t,\mathrm{x}')|^2 \, d\mathrm{x}'.$$

$\widetilde{\ }$应用 (3.27)，我们可以估计项 $\widetilde{\mathcal{H}}(t)$，得到

$$|\widetilde{\mathcal{H}}(t)| \le C\int_0^t \kappa(s)X(s)\,ds \quad \text{for any } t\in[0,L].$$

接下来，我们将项 $(\partial_1 \mathfrak{L}_{\mathrm{h}}^P)(V)$ 改写为

$$(\partial_1 \mathfrak{L}_{\mathrm{h}}^P)(V) = 2\sum_{j=2}^{3}\partial_1 a_{1j}\partial_j q + \sum_{i,j=2}^{3}\partial_1 a_{ij}\partial_{ij}V =: I_1 + I_2 \quad \text{in } \Omega_L.$$

应用估计 (3.27)，我们得到

$$\int_{\Omega_t} |I_1\partial_1 q| \, d\mathrm{x} \le C\int_0^t \kappa(s)X(s)\,ds.$$

为了估计项 $\int_{\Omega_t}|I_2\partial_1 q|\,d\mathrm{x}$，我们将方程 $\mathfrak{L}_{\mathrm{h}}^P(V) = F_1$改写为

(3.38)

$$\sum_{i,j=2}^{3}\bar{a}_{ij}\partial_{ij}V + \bar{a}_1\partial_1 V = F_1 - a_{11}\partial_{11}V - 2\sum_{j=2}^{3}a_{1j}\partial_j q + \sum_{i,j=2}^{3}(\bar{a}_{ij}-a_{ij})\partial_{ij}V \quad \text{in } \Omega_L.$$

给定常数 $s\in(0,L)$，我们将 $V(s,\cdot)$视为定义在 $\mathcal{D}$ 上、满足诺伊曼边界条件 $\partial_{\mathbf{n}}V = 0$ on$\partial\mathcal{D}$的二维椭圆方程 (3.38) 的解。于是，由 [8, 定理 8.12] 和引理 3.4(b)可得

$$\begin{aligned}&\|D_{\mathrm{x}'}^2 V(s,\cdot)\|_{L^2(\mathcal{D})}\\ &\le C\left(\|V(s,\cdot)\|_{H^1(\mathcal{D})} + \|F_1(s,\cdot)\|_{L^2(\mathcal{D})} + \|\nabla q(s,\cdot)\|_{L^2(\mathcal{D})} + \delta\|D_{\mathrm{x}'}^2 V(s,\cdot)\|_{L^2(\mathcal{D})}\right).\end{aligned}$$

由此直接得到以下引理:

引理3.10. 假设常数 L 和 δ 满足引理 3.7 中所述的所有假设。那么，可以选取一个仅依赖于数据的小常数 $\varepsilon_2\in(0,\varepsilon_1]$，使得若 δ 满足不等式 $\delta\le\varepsilon_2$，则 V 满足以下估计

$$\|D_{\mathrm{x}'}^2 V(s,\cdot)\|_{L^2(\mathcal{D})} \le C\left(\|V(s,\cdot)\|_{H^1(\mathcal{D})} + \|F_1(s,\cdot)\|_{L^2(\mathcal{D})} + \|\nabla q(s,\cdot)\|_{L^2(\mathcal{D})}\right)$$

对所有 $0<s<L$。

应用此引理和估计 (3.27)，可得

$$\int_{\Omega_t} |I_2 \partial_1 q| \, d\mathrm{x} \le \int_0^t \kappa(s)(\|V(s,\cdot)\|_{H^1(\mathcal{D})} + \|F_1(s,\cdot)\|_{L^2(\mathcal{D})} + \|\nabla q(s,\cdot)\|_{L^2(\mathcal{D})})^2 \, ds.$$

由（3.37）可得

$$X(t) \le X(0) + C\left(\int_0^t \kappa(s)\left(X(s) + \|V(s,\cdot)\|^2_{H^1(\mathcal{D})}\right) ds + \|F_1\|^2_{H^1(\Omega_L)}\right) \tag{3.39}$$

只要常数 δ 满足条件 $\delta \le \varepsilon_2$，其中常数 ε_2 来自引理3.10。

为了估计项 $\|V(s,\cdot)\|^2_{H^1(\mathcal{D})}$，令 $Y(t) := \int_{\Gamma_t} |DV|^2 \, d\mathrm{x}'$。通过调整上述论证，我们可以直接由积分表达式 $\int_{\Omega_t} \mathfrak{L}^P_{\mathrm{h}}(V)\partial_1 V \, d\mathrm{x} = \int_{\Omega_t} F_1 \partial_1 V \, d\mathrm{x}$得到

$$\begin{aligned} Y(t) &\le Y(0) + C\left(\int_0^t \kappa(s) Y(s)\, ds + \|F_1\|^2_{L^2(\Omega_L)}\right) \\ &= \int_{\mathcal{D}} |g_1|^2 \, d\mathrm{x}' + C\left(\int_0^t \kappa(s) Y(s)\, ds + \|F_1\|^2_{L^2(\Omega_L)}\right). \end{aligned}$$

应用格朗沃尔不等式并使用（3.32），我们得到估计

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<x_1<L} \|DV(x_1,\cdot)\|_{L^2(\mathcal{D})} \le C(\|g_1\|_{L^2(\mathcal{D})} + \|F_1\|_{L^2(\Omega_L)}).$$

接下来，应用迹不等式可得

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<x_1<L} \|V(x_1,\cdot)\|_{L^2(\mathcal{D})} \le C\|V\|_{H^1(\Omega_L)}.$$

结合前两个估计与 (3.39)，可得

$$X(t) \le X(0) + C\left(\int_0^t \kappa(s) X(s)\, ds + (\|V\|_{H^1(\Omega_L)} + \|g_1\|_{L^2(\mathcal{D})} + \|F_1\|_{H^1(\Omega_L)})^2\right).$$

将方程 $\mathfrak{L}^P_{\mathrm{h}}(V) = F_1$ 改写为 $\partial_{11} V = F_1 - \sum_{(i,\ j)\neq(1,\ 1)} a_{ij}\partial_{ij} V - \bar{a}_1 \partial_1 V$ 在 Γ_0 上的形式，可直接估计项 $X(0)$，得到

$$|X(0)| \le C\left(\|F_1\|_{L^2(\Gamma_0)} + \sum_{k=0}^{1} \|D^k_{\mathrm{x}'} g_1\|_{L^2(\Gamma_0)} + \|W\|_{H^1(\Omega_L)}\right)^2$$

因此最终得到

$$X(t) \le C\left(\int_0^t \kappa(s) X(s)\, ds + \left(\|V\|_{H^1(\Omega_L)} + \sum_{k=0}^{1} \|D^k_{\mathrm{x}'} g_1\|_{L^2(\Gamma_0)} + \|F_1\|_{H^1(\Omega_L)}\right)^2\right)$$

对所有 $0 < t < L$ 均成立。然后由 Gr¨onwall 不等式可得

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<L} X(t) \le C\left(\|V\|_{H^1(\Omega_L)} + \sum_{k=0}^{1} \|D^k_{\mathrm{x}'} g_1\|_{L^2(\Gamma_0)} + \|F_1\|_{H^1(\Omega_L)}\right)^2.$$

结合这一估计与 (3.30)、(3.36)、命题 3.9 和引理3.10，我们得到如下估计：

(3.40)
$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<x_1<L} \|D^2V(x_1,\cdot)\|_{L^2(\mathcal{D})} + \|V\|_{H^2(\Omega_L)} \le C\left(\|f_1^P\|_{H^1(\Omega_L)} + \|f_2^P\|_{L^2(\Omega_L)} + \|g_1\|_{C^1(\overline{\Gamma_0})}\right).$$

因此，得到以下引理：

引理 3.11。可以选取一个常数 $\varepsilon_3 \in (0, \varepsilon_2]$，该常数仅依赖于数据且充分小，使得如果 (3.10) 中的常数 $\delta > 0$ 满足不等式

$$0 < \delta \le \varepsilon_3,$$

那么我们有如下估计

$$\|V\|_{\mathcal{W}^{2,\infty}_{\mathcal{D}}(0,L)} + \|(V,W)\|_{H^2(\Omega_L)} \le C\left(\|f_1^P\|_{H^1(\Omega_L)} + \|f_2^P\|_{L^2(\Omega_L)} + \|g_1\|_{C^1(\overline{\Gamma_0})}\right).$$

3.2.3. $D^3(V,W)$ 的先验估计。回到边值问题 (3.35)，我们可以轻易地建立如下估计

$$\|W\|_{H^3(\Omega_L)} \le C\left(\|f_1^P\|_{H^1(\Omega_L)} + \|f_2^P\|_{H^1(\Omega_L)} + \|g_1\|_{C^1(\overline{\Gamma_0})}\right) \tag{3.41}$$

通过结合局部延拓论证、引理 3.8 和 (3.40)。

接下来，我们通过调整论证来估计 $\operatorname*{ess\,sup}_{0<x_1<L} \|D^3V(x_1,\cdot)\|_{L^2(\mathcal{D})}$ §3.2.2 中给出的论证。由于其中包含许多繁琐的计算，而这些计算只需对 §3.2.2 中给出的论证稍作调整即可轻松推出，因此我们将非常简要地说明整个过程，仅对需要谨慎处理的部分提供细节。

1. 令

$$\zeta := \partial_{11} V \quad \text{in } \Omega_L,$$

并定义函数 $X:[0,L]\to\mathbb{R}$ 为

$$X(t) := \int_{\mathcal{D}} |\nabla \zeta(t,\mathrm{x}')|^2 \, d\mathrm{x}'.$$

对方程 $\mathfrak{L}_{\mathrm{h}}^P(V) = F_1$ 关于 x_1 求两次导数，可得关于 ζ 的如下方程：

$$\mathfrak{L}_{\mathrm{h}}^P(\zeta) = \partial_{11}F_1 - (\partial_{11}\mathfrak{L}_{\mathrm{h}}^P)(V) \quad \text{in } \Omega_L$$

对于 $\partial_{11}\mathfrak{L}_{\mathrm{h}}^P := \sum_{(i,j)\neq(1,1)} \partial_{11}(a_{ij}\partial_{ij} + \bar{a}_1\partial_1)$。然后，我们可以证明

$$\begin{aligned} X(t) \le X(0) + C\left(\int_0^t \kappa(s)X(s)\,ds + \int_{\Omega_L\cap\{x_1<t\}} |\partial_{11}F_1|^2\,d\mathrm{x}\right) \\ + \int_0^t \int_{\mathcal{D}} |\partial_{11}\mathfrak{L}_{\mathrm{h}}^P(V)\partial_1\zeta|\,d\mathrm{x}'ds. \end{aligned} \tag{3.42}$$

2. 令 $\mathcal{S} := \sum_{(i,j)\neq(1,1)\text{写为}} \partial_1 a_{ij}\partial_{1ij}V\partial_1\zeta$。我们将 $\mathcal{S}$ 改

$$\mathcal{S} = \sum_{\substack{i \text{ or } j=1 \\ (i,j)\neq(1,1)}} \partial_1 a_{ij}\partial_{ij1}V\partial_1\zeta + \sum_{i,j=2}^{3} \partial_1 a_{ij}\partial_1(\partial_{ij1}V)\partial_1\zeta =: \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2.$$

由式 (3.25) 可得

$$\int_0^t \int_{\mathcal{D}} |\mathcal{S}_1| \, dx' ds \leq C \int_0^t \kappa(s) X(s) \, ds.$$

接下来，我们对方程 (3.38) 关于 x_1 求导，并应用 [8, 定理 8.12], 、引理 3.4(b)、(3.40)、(3.41) 和迹不等式，得到以下结果：

引理 3.12。对于引理 3.11 中的常数 $\varepsilon_3 > 0$ ，可以取一个小常数 $\varepsilon_4 \in (0, \varepsilon_3]$ ，它仅依赖于数据，使得若 (3.10) 中的常数 $\delta > 0$ 满足不等式

$$0 < \delta \leq \varepsilon_4,$$

则有估计

$$\begin{aligned} &\|D^2_{x'} \partial_1 V(s, \cdot)\|_{L^2(\mathcal{D})} \\ &\leq C \left(\|f_1^P\|_{H^2(\Omega_L)} + \|f_2^P\|_{H^1(\Omega_L)} + \|g_1\|_{C^1(\overline{\Gamma_0})} + \delta \|D^3_{x'} V(s, \cdot)\|_{L^2(\mathcal{D})} \right) \end{aligned}$$

对所有 $0 < s < L$ 均成立。

接着，利用 (3.25)、(3.40) 和引理 3.12 进行一番冗长的计算，可以证明

(3.43)

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int_{\mathcal{D}} |\mathcal{S}_2| \, dx' ds \\ &\leq C \int_0^t \kappa(s) \left(\|DF_1(s, \cdot)\|_{L^2(\mathcal{D})} + \|g_1\|_{C^1(\overline{\Gamma_0})} + \delta \|D^3_{x'} V(s, \cdot)\|_{L^2(\mathcal{D})} \right) \|\partial_1 \zeta(s, \cdot)\|_{L^2(\mathcal{D})} \, ds. \end{aligned}$$

接下来，我们将 [8, 定理 8.13] 应用于方程 (3.38)，以估计项 $\|D^3_{x'} V(s, \cdot)\|_{L^2(\mathcal{D})}$ ，得到

$$\|D^3_{x'} V(s, \cdot)\|_{L^2(\mathcal{D})} \leq C \left(\|V(s, \cdot)\|_{H^2(\mathcal{D})} + \|\text{RHS of (3.38) at } x_1 = s\|_{H^1(\mathcal{D})} \right).$$

然后，我们应用引理 3.4(b)、(3.40)、(3.41)以及迹不等式，得到

$$\begin{aligned} &\|D^3_{x'} V\|_{L^2(\mathcal{D}_s)} \\ &\leq C \left(\|f_1^P\|_{H^2(\Omega_L)} + \|f_2^P\|_{H^1(\Omega_L)} + \|g_1\|_{C^1(\overline{\Gamma_0})} + \delta \|D^3_{x'} V(s, \cdot)\|_{L^2(\mathcal{D})} \right), \end{aligned}$$

从而得到以下引理：

引理 3.13。可以将 ε_4 进一步减小到一个比引理 3.12 中给出的常数更小的常数，该常数仅依赖于数据，使得如果 (3.10) 中的常数 $\delta > 0$ 满足不等式

$$0 < \delta \leq \varepsilon_4,$$

那么我们有估计

$$\|D D^2_{x'} V(s, \cdot)\|_{L^2(\mathcal{D})} \leq C \left(\|f_1^P\|_{H^2(\Omega_L)} + \|f_2^P\|_{H^1(\Omega_L)} + \|g_1\|_{C^1(\overline{\Gamma_0})} \right) \tag{3.44}$$

对所有的 $0 < s < L$。

然后，我们终于可以将项 $\int_0^t \int_{\mathcal{D}} |\mathcal{S}|\, d\mathrm{x}' ds$ 估计为

$$\begin{aligned}(3.45)\quad &\int_0^t \int_{\mathcal{D}} |\mathcal{S}|\, d\mathrm{x}' ds \\ &\leq C \left(\int_0^t \kappa(s) X(s)\, ds + \left(\|f_1^P\|_{H^2(\Omega_L)} + \|f_2^P\|_{H^1(\Omega_L)} + \|g_1\|_{C^1(\overline{\Gamma_0})} \right)^2 \right).\end{aligned}$$

3. 令

$$\mathcal{R} := \partial_{11} \mathfrak{L}_{\mathrm{h}}^P(V) \partial_1 q - \sum_{(i,j)\neq(1,1)} \partial_1 a_{ij} \partial_{1ij} V \partial_1 q.$$

通过直接计算并应用广义 Hölder 不等式和索伯列夫不等式，可得估计

$$\begin{aligned}&\int_0^t \int_{\mathcal{D}} |\mathcal{R}|\, dx' ds \\ \leq & C \Big(\int_0^t \int_{\mathcal{D}} (\sum_{k=0}^{2} |D^k V|^2 + |\partial_1 q|^2)\, dx' ds \\ &+ \int_0^t \sum_{(i,j)\neq(1,1)} \|\partial_{11} a_{ij}(s,\cdot)\|_{L^4(\mathcal{D})} \left(\|D^2 V(s,\cdot)\|_{L^2(\mathcal{D})} + \|D_{\mathrm{x}'} \partial_{ij} V(s,\cdot)\|_{L^2(\mathcal{D})} \right) \|\partial_1 q(s,\cdot)\|_{L^2(\mathcal{D})}\, ds \Big).\end{aligned}$$

根据引理 3.4(b)、索伯列夫不等式以及由 (3.26) 给出的函数 $\kappa(s)$ 的定义，我们可以估计项 $\|\partial_{11} a_{ij}(s,\cdot)\|_{L^4(\mathcal{D})}$ 如下

$$\|\partial_{11} a_{ij}(s,\cdot)\|_{L^4(\mathcal{D})} \leq C \kappa(s).$$

结合此估计与 (3.40) 和 (3.44)，可直接验证

$$\begin{aligned}(3.46)\quad &\int_0^t \int_{\mathcal{D}} |\mathcal{R}|\, d\mathrm{x}' ds \\ &\leq C \left(\int_0^t \kappa(s) X(s)\, ds + \left(\|f_1^P\|_{H^2(\Omega_L)} + \|f_2^P\|_{H^1(\Omega_L)} + \|g_1\|_{C^1(\overline{\Gamma_0})} \right)^2 \right).\end{aligned}$$

4. 现在，我们汇总 (3.42)、(3.45) 和 (3.46) 中的所有估计，以证明

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<x_1<L} \|D\partial_{11} V(x_1,\cdot)\|_{L^2(\mathcal{D})} \leq C \left(\|f_1^P\|_{H^2(\Omega_L)} + \|f_2^P\|_{H^1(\Omega_L)} + \|g_1\|_{C^2(\overline{\Gamma_0})} \right).$$

接下来，我们将上述估计与 (3.44) 结合，得到估计

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<x_1<L} \|D^3 V(x_1,\cdot)\|_{L^2(\mathcal{D})} \leq C \left(\|f_1^P\|_{H^2(\Omega_L)} + \|f_2^P\|_{H^1(\Omega_L)} + \|g_1\|_{C^2(\overline{\Gamma_0})} \right).$$

最后，利用 (3.40) 和上述估计，我们可以轻松证明以下引理：

引理 3.14. 可以选取一个充分小的常数 $\varepsilon_4 > 0$，它仅取决于数据，使得如果 (3.10) 中的常数 $\delta > 0$ 满足不等式

$$0 < \delta \leq \varepsilon_4,$$

那么我们有如下估计

$$\begin{aligned}&\|V\|_{\mathcal{W}^{3,\infty}_{\mathcal{D}}(0,L)}+\|(V,W)\|_{H^3(\Omega_L)}\\&\le C\left(\|f_1^P\|_{H^2(\Omega_L)}+\|f_2^P\|_{H^1(\Omega_L)}+\|g_1\|_{C^2(\overline{\Gamma_0})}\right).\end{aligned}$$

3.2.4. 四阶导数的先验估计。将 §3.2.3 中给出的论证推广到 (V,W) 的四阶导数，我们将证明以下引理：

引理 3.15. 对于引理 3.14 中给出的常数 $\varepsilon_4>0$，可以确定一个常数 $\varepsilon_5\in(0,\varepsilon_4]$，其充分小仅取决于数据），使得若 (3.10) 中的常数 $\delta>0$ 满足不等式

$$0<\delta\le\varepsilon_5,$$

则有估计

$$\|(V,W)\|_*\le C\left(\|f_1^P\|_{H^3_*(\Omega_L)}+\|f_2^P\|_{H^2(\Omega_L)}+\|g_1\|_{C^3(\overline{\Gamma_0})}\right).$$

证明. 1. 证明的第一部分旨在估计范数 $\|W\|_{H^4_*(\Omega_L)}$。

(1-1) 回到关于 W 的边值问题 (3.35)，由相容条件 (3.20) 和引理 3.4(f) 可知，由 (3.34) 定义的函数 F_2 满足相容条件

$$\partial_1F_2=\bar h_1'W+\bar h_2'\partial_1V\quad\text{on }\Gamma_0^{\bar\epsilon}.$$

注意到（2.3）和（3.5）可推出

$$(\bar h_1',\bar h_2')=\frac{\bar\rho^{3-\gamma}\bar E}{\gamma S_0\left(\gamma S_0\bar\rho^{\gamma-1}-\frac{J_0^2}{\bar\rho^2}\right)}\left(2-\gamma,\ \frac{J_0}{\bar\rho^2}-(2-\gamma)\frac{1}{\bar\rho}\right)\quad\text{in }\overline{\Omega_L}.$$

于是，条件（2.16）给出

$$\partial_1F_2=0\quad\text{on }\Gamma_0^{\bar\epsilon}. \tag{3.47}$$

然后，我们可以应用反射论证（对 Γ_0 关于 W 使用局部偶延拓）和命题3.14，得到估计

$$\|W\|_{H^4(\Omega_L\cap\{x<\frac45L\})}\le C(\|f_1^P\|_{H^2(\Omega_L)}+\|f_2^P\|_{H^2(\Omega_L)}+\|g_1\|_{C^2(\overline{\Gamma_0})}). \tag{3.48}$$

（1-2）固定一个满足以下性质的函数 $\chi\in C^\infty(\mathbb{R})$：

$$\chi(x_1)=\begin{cases}1&\text{for }x_1\le0\\0&\text{for }x_1\ge\frac12\end{cases},\quad\chi'(x_1)\le0\quad\text{for all }x_1\in\mathbb{R}.$$

接下来，我们固定另一个满足以下性质的函数 $\eta\in C^\infty(\mathbb{R})$：

$$\eta(x_1)=\begin{cases}0&\text{for }x_1<\frac{L}{8}\\1&\text{for }x_1\ge\frac{L}{4}\end{cases},\quad\eta'(x_1)\ge0\quad\text{for all }x_1\in\mathbb{R}.$$

对于每个常数 $d\in(0,\frac{L}{2})$，我们定义缩放截断函数 $\chi_d:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$，其定义为

$$\chi_d(x_1):=\eta(x_1)\chi\left(\frac{x_1-L+d}{d}\right).$$

对于每个 $d>0$，缩放后的函数 χ_d 满足以下性质：

- $\operatorname{spt}\chi_d \subset \left[\frac{L}{8}, L-\frac{d}{2}\right]$;
- $\chi_d(x_1) = 1$ for $\frac{L}{4} \le x_1 \le L-d$;
- for each $k \in \mathbb{N}$, there exists a constant $C_k > 0$ depending only on k so that the estimate $\left\| \frac{d^k \chi_d}{dx_1^k} \right\|_{C^0(\mathbb{R})} \le \frac{C_k}{d^k}$ holds.

对于每个 $d \in (0, \frac{L}{2})$，令 $\xi_d(\mathrm{x}) := \partial_1^3 W(\mathrm{x})\chi_d(x_1)$。然后，通过直接计算并使用估计 (3.48) 和积分表达式

$$\int_{\Omega_L} \nabla(\partial_1^3 W) \cdot \nabla \xi_d \, d\mathrm{x} = \int_{\Omega_L} \partial_{11} F_2 \partial_1 \xi_d \, d\mathrm{x}, \tag{3.49}$$

我们可以证明

$$\|D\partial_1^3 W\|_{L^2(\Omega_L \cap \{\frac{L}{4} < x_1 < L-d\})} \le \frac{C}{\sqrt{d}} \left(\|f_1^P\|_{H^2(\Omega_L)} + \|f_2^P\|_{H^2(\Omega_L)} + \|g_1\|_{C^2(\overline{\Gamma_0})} \right).$$

更一般地，通过对壁面边界 Γ_{w} 进行局部展平并使用单位分解，可以类似地证明

$$\|D_{\mathrm{x}}^4 W\|_{L^2(\Omega_L \cap \{\frac{L}{4} < x_1 < L-d\})} \le \frac{C}{\sqrt{d}} \left(\|f_1^P\|_{H^2(\Omega_L)} + \|f_2^P\|_{H^2(\Omega_L)} + \|g_1\|_{C^2(\overline{\Gamma_0})} \right).$$

将此估计与 (3.48) 和命题 3.14 结合，我们得到估计

$$\|W\|_{H^4_*(\Omega_L)} \le C \left(\|f_1^P\|_{H^2(\Omega_L)} + \|f_2^P\|_{H^2(\Omega_L)} + \|g_1\|_{C^2(\overline{\Gamma_0})} \right). \tag{3.50}$$

2. 为完成证明，还需要估计这一项

$$\sup_{d \in (0,L)} d^{1/2} \operatorname*{ess\,sup}_{0 < x_1 < L-d} \|D^4 V(x_1, \cdot)\|_{L^2(\mathcal{D})}.$$

总的来说，该估计可通过调整 §3.2.3 中给出的论证得到，因此我们将概述这一估计，并仅对需要仔细计算的部分补充更多细节。

(2-1) 令

$$\xi := \partial_1^3 V \quad \text{in } \Omega_L,$$

并定义函数 $Z : [0, L] \to \mathbb{R}$，如下

$$Z(t) := \int_{\mathcal{D}} |\nabla \xi(t, \mathrm{x}')|^2 \, d\mathrm{x}.$$

类比（3.42），我们可以直接由积分表达式推导出

$$\int_0^t \int_{\mathcal{D}} \mathfrak{L}_{\mathrm{h}}^P(\partial_1^3 V) \partial_1 \xi \, d\mathrm{x}' ds = \int_0^t \int_{\mathcal{D}} (\partial_1^3 F_1 - (\partial_1^3 \mathfrak{L}_{\mathrm{h}}^P)(V)) \partial_1 \xi \, d\mathrm{x}' ds \tag{3.51}$$

对于任意 $0 < t < L$,

$$\begin{aligned} Z(t) \le Z(0) + C \left(\int_0^t \kappa(s) Z(s) \, ds + \int_{\Omega_L \cap \{x_1 < t\}} |\partial_1^3 F_1|^2 \, d\mathrm{x} \right) \\ + \left| \int_0^t \int_{\mathcal{D}} (\partial_1^3 \mathfrak{L}_{\mathrm{h}}^P)(V) \partial_1 \xi \, d\mathrm{x}' ds \right| \end{aligned} \tag{3.52}$$

对于 $\partial_1^3 \mathfrak{L}_{\mathrm{h}}^P := \sum_{(i,j) \neq (1,1)} \partial_1^3 (a_{ij} \partial_{ij} + \bar{a}_1 \partial_1)$。

(2-2) 对于每个 $k=1$、2、3，令

$$T_k := \int_0^t \int_{\mathcal{D}} \left(\sum_{(i,j)\neq(1,1)} \partial_1^k a_{ij} \partial_1^{3-k} \partial_{ij} V + \partial_1^k \bar{a}_1 \partial_1^{3-k} \partial_1 V \right) \partial_1 \xi \, dx' ds$$

从而我们有

$$\int_0^t \int_{\mathcal{D}} (\partial_1^3 \mathfrak{L}_{\mathrm{h}}^P)(V) \partial_1 \xi \, dx' ds = T_1 + T_2 + T_3.$$

通过调整第 3.2.3 节步骤 2–4 中的论证，并应用广义赫尔德不等式、索伯列夫不等式、引理 3.4(b) 以及估计 (3.50)，可以证明

(3.53)

$$\sum_{k=1}^3 |T_k| \leq C \int_0^t \kappa(s) \|D\xi(s,\cdot)\|_{L^2(\mathcal{D})} \Big(\sum_{n=0}^2 \|D_{\mathrm{x}'}^{4-n} \partial_1^n V(s,\cdot)\|_{L^2(\mathcal{D})} + \|D^{n+1} V(s,\cdot)\|_{L^2(\mathcal{D})} + \|D\xi(s,\cdot)\|_{L^2(\mathcal{D})} \Big) ds.$$

此外，通过调整第 3.2.3 节中的论证，我们可以证明以下引理：

引理 3.16. 对于引理 3.14 中给出的常数 $\varepsilon_4 > 0$，可以固定一个常数 $\varepsilon_5 \in (0, \varepsilon_4]$，其充分小且仅依赖于数据，使得当 (3.10) 中的常数 $\delta > 0$ 满足不等式

$$0 < \delta \leq \varepsilon_5,$$

于是，对每个 $s \in (0, L)$，我们都有如下估计

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^2 \|D_{\mathrm{x}'}^{4-n} \partial_1^n V(s,\cdot)\|_{L^2(\mathcal{D})} \\ &\leq C \left(\|F_1(s,\cdot)\|_{H^2(\mathcal{D})} + \sum_{m=0}^3 \|D^m V(s,\cdot)\|_{L^2(\mathcal{D})} + \|D\xi(s,\cdot)\|_{L^2(\mathcal{D})} \right) \end{aligned}$$

对所有 $0 < s < L$ 均成立。

将此引理与 (3.53) 和 (3.30) 结合，可得到如下估计

(3.54)

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^3 |T_k| \\ &\leq C \int_0^t \kappa(s) \left(Z(s) + \sum_{m=0}^3 \|D^m V(s,\cdot)\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 + \|f_1^P(s,\cdot)\|_{H^2(\mathcal{D})}^2 + \|\partial_1 W(s,\cdot)\|_{H^2(\mathcal{D})}^2 \right) ds. \end{aligned}$$

(2-3) 我们将 (3.52)–(3.54) 合并起来，并应用命题 3.14 和 (3.50)，从而得到

(3.55)

$$\begin{aligned} Z(t) \leq Z(0) + C \Big(&\int_0^t \kappa(s) (Z(s) + \|f_1^P(s,\cdot)\|_{H^2(\mathcal{D})}^2 + \|\partial_1 W(s,\cdot)\|_{H^2(\mathcal{D})}^2) \, ds \\ &+ \left(\|f_1^P\|_{H^2(\Omega_L)} + \|f_2^P\|_{H^2(\Omega_L)} + \|g_1\|_{C^2(\overline{\Gamma_0})} \right)^2 + \int_{\Omega_L \cap \{x_1 < t\}} |\partial_1^3 F_1|^2 \, dx \Big). \end{aligned}$$

在进一步讨论之前，先作如下观察是有益的：

(i) 由迹不等式，可取一个仅依赖于L 的常数 $C_L > 0$，使得估计成立

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<s<L-d} \|f_1^P(s,\cdot)\|_{H^2(\mathcal{D})} \le \tilde{C}_L d^{-1/2} \|f_1^P\|_{H^3_*(\Omega_L)}$$

对任意常数 $d \in (0, L)$；

(ii) 对于固定常数 $d \in (0, L)$，假设 $0 < t < L - d$。那么，存在一个仅依赖于数据的常数 $C > 0$，使得估计成立

$$\int_{\Omega_L \cap \{x_1 < t\}} |\partial_1^3 F_1|^2 \, dx \le \frac{C}{d} \left(\|f_1^P\|_{H^3_*(\Omega_L)} + \|W\|_{H^4_*(\Omega_L)} \right)^2 ;$$

(iii) 由迹不等式，可取一个仅依赖于L 的常数 $C_L > 0$，使得估计成立

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<x_1<L-d} \|\partial_1 W(x_1,\cdot)\|_{H^2(\mathcal{D})} \le C_L d^{-1/2} \|W\|_{H^4_*(\Omega_L)}$$

对任意常数 $d \in (0, L)$。

利用格朗沃尔不等式，并结合上文刚刚陈述的性质 (i)-(iii)，我们得到以下引理：

引理 3.17. 对于引理 3.16 中固定的常数 $\varepsilon_5 > 0$，若 (3.10) 中的常数 $\delta > 0$ 满足不等式

$$0 < \delta \le \varepsilon_5,$$

那么存在一个仅依赖于数据的常数 $C > 0$，使得 t

$$\begin{aligned} &\sup_{d>0} d^{1/2} \operatorname*{ess\,sup}_{0<x_1<L-d} \|D\partial_1^3 V(x_1,\cdot)\|_{L^2(\mathcal{D})} \\ &\le C \left(\|f_1^P\|_{H^3_*(\Omega_L)} + \|f_2^P\|_{H^2(\Omega_L)} + \|g_1\|_{C^3(\overline{\Gamma_0})} \right). \end{aligned}$$

最后，将引理 3.17 与估计 (3.50) 及引理 3.16 结合，即可完成引理 3.15 的证明。

□

3.2.5. 命题 3.6 的证明。将常数 L^* 固定为引理 3.7 中给出的常数，并将常数 $\bar{\varepsilon}$ 取为引理 3.15 中常数 ε_5 对应的 $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_5$，则命题 3.6 由引理 3.15 直接得出。□

3.3. 命题 3.5 的证明。现在，我们利用命题 3.6，证明与任意 $P \in \mathcal{J}_\delta$ 相关的边值问题 (3.18) 的适定性。主要思路是采用 Galerkin 近似方法，并借助以下技术引理进行极限论证：

引理 3.18（ $P = (\psi, \Psi) \in \mathcal{J}_\delta$的部分光滑逼近）。对于任意给定的 $P = (\psi, \Psi) \in \mathcal{J}_\delta$，可以取一个序列 $\{P_m = (\psi_m, \Psi_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$，使其满足以下性质：

(a) 存在一个仅依赖于 $(\mathcal{D}, L)$ 的常数 $\mu_0 > 0$，使得每个 P_m 都满足以下两个估计：

$$\|P_m\|_{H^4_*(\Omega_L)} \le \mu_0 \|P\|_{H^4_*(\Omega_L)}, \tag{3.56}$$

$$\|\tilde{\psi}_m\|_{\mathcal{W}^{4,\infty}_{*,\mathcal{D}}(0,L)} \le \mu_0 \|\tilde{\psi}\|_{\mathcal{W}^{4,\infty}_{*,\mathcal{D}}(0,L)}; \tag{3.57}$$

(b) $\lim_{m\to\infty}\|P_m - P\|_{H^3(\Omega_L)} = 0$; (c) $\partial_{\mathbf{n}_w}\psi_m = \partial_{\mathbf{n}_w}\Psi_m = 0$ 在 Γ_{w} 上；(d) $\partial_{x_1}^{k-1}\tilde{\psi}_m = \partial_{x_1}^{k}\tilde{\Psi}_m = 0$ 在 $\Gamma_0^{\bar{\epsilon}/2}$ 上，对于 $k = 1,\ 3$；(e) 对每个固定的 $\mathrm{x}' \in \mathcal{D}$，$P_m(x_1,\mathrm{x}')$ 和 $D_{\mathrm{x}}P_m(x_1,\mathrm{x}')$ 关于 $x_1 \in [0, L]$ 都是 C^∞。

读者或许会好奇引理 3.18 在本文中的用途。引理 3.18 的动机和实用性可从命题 3.5 的证明中清楚地看出。我们在附录 A 中给出引理 3.18 的证明。

对于引理 3.4(d) 中给出的小常数 $\varepsilon_0 > 0$ 以及引理 3.18(d) 中的常数 $\mu_0 > 0$，令

$$\delta_0 := \frac{\varepsilon_0}{\mu_0}.$$

引理 3.19（极限论证）。假设不等式

$$\delta \le \delta_0$$

成立。对于固定的 $P \in \mathcal{J}_\delta$，设 $\{P_m\}$ 是满足引理 3.18 中所述全部性质的一个序列。假设对于每个 m，与 P_m 相关的线性边值问题 (3.18) 都有一个解 $Q_m = (V_m, W_m)$，且该解满足估计 (3.21)，其中估计右端的 P 被替换为 P_m，某个常数 $C > 0$ 使上述结论成立。那么，与 P 相关的线性边值问题 (3.18) 有一个解 $Q = (V, W)$，且该解满足估计 (3.19)。

证明。1. 由引理 3.4(d) 和引理 3.18 可直接推出，若不等式

$$\delta \le \delta_0$$

成立，则可固定一个仅依赖于数据和 $\mathcal{D}$ 的常数 $C > 0$，使得对每个 P_m，以下估计均成立：

$$\|f_1^{P_m}\|_{H^3(\Omega_L)} \le C\left(\|P\|_*^2 + \|E_{\mathrm{en}}\|_{C^3(\overline{\Gamma_0})} + \|E_{\mathrm{ex}} - \bar{E}(L)\|_{C^3(\overline{\Gamma_L})}\right);$$

$$\|f_2^{P_m}\|_{H^2(\Omega_L)} \le C\left(\|P\|_*^2 + \|b - b_0\|_{C^2(\overline{\Omega_L})} + \|E_{\mathrm{en}}\|_{C^4(\overline{\Gamma_0})} + \|E_{\mathrm{ex}} - \bar{E}(L)\|_{C^4(\overline{\Gamma_L})}\right).$$

由于假设每个解 $Q_m = (V_m, W_m)$ 都满足估计 (3.21)，且估计右端的 P 被 P_m 替换，因此上述 $(f_1^{P_m}, f_2^{P_m})$ 的估计可直接推出以下结果：

$$\|Q_m\|_* \le C^*\left(\|P\|_*^2 + \sigma(b, u_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{ex}}) + \|g_1\|_{C^3(\overline{\Gamma_0})}\right)$$

对于由 (2.17) 定义的常数 $\sigma(b, u_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{ex}})$，其中常数 $C^* > 0$ 固定，仅取决于数据和 $\mathcal{D}$。因此，序列 $\{V_m\}$ 在 $H^4_*(\Omega_L) \cap \mathcal{W}^4_{,*}{}^{\infty}_{\mathcal{D}}(0, L)$ 中有界，且序列 $\{W_m\}$ 在 $H^4_*(\Omega_L)$ 中有界。由引理 3.3 可知，存在 $\{Q_m\}$ 的一个子序列 $\{Q_{m_k} = (V_{m_k}, W_{m_k})\}$，以及一个元素 $Q_\infty = (V_\infty, W_\infty) \in [H^4_*(\Omega_L) \cap \mathcal{W}^4_{,*}{}^{\infty}_{\mathcal{D}}(0, L)] \times H^4_*(\Omega_L)$，使得以下性质成立：

- the sequence $\{Q_{m_k}\}$ converges to Q_∞ in $C^1(\overline{\Omega_L}) \cap C^2(\overline{\Omega_L} \setminus \Gamma_L)$;
- the limit Q_∞ satisfies the estimate

$$\|Q_\infty\|_* \le C^*\left(\|P\|_*^2 + \sigma(b, u_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{ex}}) + \|g_1\|_{C^3(\overline{\Gamma_0})}\right).$$

2. 断言：极限 $Q_\infty = (V_\infty, W_\infty)$ 求解与最初固定的 $P \in \mathcal{J}_\delta$ 相关联的线性边值问题 (3.18)。

对于每个 P_m，令

$$\mathbb{A}^{P_m} := [a_{ij}^{P_m}]_{i,j=1}^3$$

由式 (3.14) 给出的 $a_{ij}^{P_m}$。由引理 3.18 以及引理 3.4(b) 和 (g)，可知序列 $\{\mathbb{A}^{P_m}\}$和 $\{(f_1^{P_m}, \underline{f_2^{P_m}})\}$分别收敛到 $\mathbb{A}^P$和 (f_1^P, f_2^P)，其收敛空间为$C^0(\Omega_L)$，这就验证了该断言。□

最后，我们将证明与任意 $P \in \mathcal{J}_\delta$ 相关的问题 (3.18) 的适定性，前提是适当固定 δ。

命题 3.5 的证明。1.（解的存在性）(1-1) 对于引理 3.19 中的常数 $\delta_0 > 0$，假设不等式

$$0 < \delta \le \delta_0$$

$\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$成立，并固定 $P = (\psi, \Psi) \in \mathcal{J}_{\delta_0}$。再取序列 $\{P_m = (\psi_m, \Psi_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$，使其为 P 的部分光滑逼近，并满足引理 3.18 中所述的全部性质 (a)–(e)。

接下来，固定 $m \in \mathbb{N}$，并考虑以下线性边值问题：

$$\begin{cases} \mathcal{L}^{P_m}(V, W) = f_1^{P_m}, \quad \Delta W - \bar{h}_1 W - \bar{h}_2 \partial_1 V = f_2^{P_m} & \text{in} \quad \Omega_L, \\ V = 0, \quad \partial_{x_1} V = g_1, \quad \partial_{x_1} W = 0 & \text{on} \quad \Gamma_0, \\ \partial_{\mathbf{n}_w} V = 0, \quad \partial_{\mathbf{n}_w} W = 0 & \text{on} \quad \Gamma_{\mathrm{w}}, \\ \partial_{x_1} W = 0 & \text{on} \quad \Gamma_L. \end{cases} \tag{3.58}$$

断言：对于引理 3.7 中的常数 L^*，假设不等式

$$0 < L \le L^*$$

成立。那么，可以取一个足够小的常数 $\delta_1 \in (0, \delta_0]$，它仅依赖于数据和 L，使得如果不等式

$$0 < \delta \le \delta_1$$

成立，那么线性边值问题 (3.58) 有一个满足以下估计的解 (V, W)：

$$\|(V, W)\|_* \le C \left(\|f_1^{P_m}\|_{H^3_*(\Omega_L)} + \|f_2^{P_m}\|_{H^2(\Omega_L)} + \|g_1\|_{C^3(\overline{\Gamma_0})} \right) \tag{3.59}$$

其中常数 $C > 0$ 固定，且仅依赖于数据。

一旦验证了这一断言，与 $P \in \mathcal{J}_\delta$ 相关的线性边值问题 (3.18) 的解的存在性便可直接由引理 3.19 得出。

(1-2) 我们将通过应用 Galerkin 近似的方法来验证上述断言。由于这是一种广泛使用的方法，并且已有许多参考文献（例如参见 [1] 和 [5]），可以从中获取所有详细内容，因此我们仅列出将 [1, 5]中给出的论证调整到我们这一情形所需的关键要素。

(G_1) 考虑 $\mathcal{D}$中的一个二维特征值问题：

$$-\Delta_{\mathrm{x}'} \eta = \omega \eta \quad \text{in } \mathcal{D}, \quad \partial_{\mathbf{n}_w} \eta = 0 \quad \text{on } \partial\mathcal{D}.$$

令 $\{\omega_k : \ k = 0, 1, 2, \cdots\}$ 为满足不等式 $\omega_k \le \omega_{k+1}$（其中 $k = 0, 1, 2, \cdots$）的所有特征值的集合。那么，对于任意 $k > 0$，有 $\omega_0 = 0$ 和 $\omega_k > 0$；

(G_2) 对于每个 $k \in \mathbb{Z}_+$，令 $\eta_k\colon\ \overline{\mathcal{D}} \to \mathbb{R}$ 为对应于 ω_k 的一个特征函数。我们可以选取一列特征函数 $\{\eta_k\colon\ k = 0, 1, 2, \cdots\}$，使其构成 $L^2(\mathcal{D})$ 关于标准内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的标准正交基，其中内积定义为

$$\langle \xi, \eta \rangle := \int_{\mathcal{D}} \xi(\mathrm{x}')\eta(\mathrm{x}')\, d\mathrm{x}'.$$

于是，序列 $\{\frac{D_{\mathrm{x}'}\eta_k}{\sqrt{\omega_k}}\colon\ k = 0, 1, 2, \cdots\}$ 构成关于内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^2}$ 的正交归一基，该内积定义在$L^2(\mathcal{D};\mathbb{R}^2)$上，其定义为

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{R}^2} := \int \mathbf{u}(\mathrm{x}') \cdot \mathbf{v}(\mathrm{x}')\, d\mathrm{x}'.$$

(G_3) 由于函数 u_{en} 在 (2.12) 中满足相容条件，由 (3.17) 给出的函数 g_1 满足 $\partial\mathcal{D}$ 上的相容条件 $\partial_{\mathbf{n}_w} g_1 = 0$。

边值问题 (3.58) 的有限维近似：固定一个 $n \in \mathbb{N}$，设 (V_n, W_n) 具有如下形式

$$(V_n, W_n)(x_1, \mathrm{x}') = (\sum_{l=0}^{n} \theta_l(x_1)\eta_l(\mathrm{x}'), \sum_{l=0}^{n} \Theta_l(x_1)\eta_l(\mathrm{x}'))$$

求解关于 $\{(\theta_l, \Theta_l)(x_1)$ 的以下边值问题：$l = 0, \cdots, n\}$: (3.60)

$$\begin{cases} \langle \mathcal{L}^{P_m}(V_n, W_n)(x_1, \cdot), \eta_k \rangle = \langle f_1^{P_m}(x_1, \cdot), \eta_k \rangle \\ \langle (\Delta W_n - \bar{h}_1 W_n - \bar{h}_2 \partial_1 V_n)(x_1, \cdot), \eta_k \rangle = \langle f_2^{P_m}(x_1, \cdot), \eta_k \rangle \end{cases} \quad \text{for } 0 < x_1 < L,$$

$$\begin{cases} \langle V_n, \eta_k \rangle = 0, \quad \langle \partial_{x_1} V_n, \eta_k \rangle = \langle g_1, \eta_k \rangle \\ \langle \partial_{x_1} W_n, \eta_k \rangle = 0 \end{cases} \quad \text{at } x_1 = 0,$$

$$\langle \partial_{x_1} W_n, \eta_k \rangle = 0 \quad \text{at } x_1 = L$$

对所有 $k = 0, 1, \cdots, n$。

下面是一个简单但重要的观察。通过使用（3.15）进行直接计算，我们可以验证

$$\begin{aligned} &\langle \mathcal{L}^{P_m}(V_n, W_n)(x_1, \cdot), \eta_k \rangle \\ &= \theta_k''(x_1) + \bar{a}_1(x_1)\theta_k' + \bar{b}_1(x_1)\Theta_k'(x_1) + \bar{b}_2\Theta_k(x_1) + \sum_{l=0}^{n} \alpha_l(x_1)\theta_l'(x_1) + \beta_l(x_1)\theta_l'(x_1) \end{aligned}$$

for

$$\alpha_l(x_1) := 2\sum_{j=2}^{3} \langle a_{1j}^{P_m}(x_1, \cdot)\partial_j\eta_l, \eta_k \rangle, \quad \beta_l(x_1) := \sum_{i,j=2}^{3} \langle a_{ij}^{P_m}(x_1, \cdot)\partial_{ij}\eta_l, \eta_k \rangle.$$

根据式 (3.14) 给出的 a_{ij}^P 的定义，由引理 3.18 的陈述 (e) 可知，α_l 和 β_l 关于 $x_1 \in [0, L]$ 是光滑的。（这就是我们只寻求关于 x_1 光滑的 P 的部分光滑逼近的原因。这个简单却非常有用的想法使我们能够证明在任意横截面的圆柱中，势流模型的三维超音速解的存在性。）因此，(3.60) 成为一个具有光滑系数的二阶线性常微分方程组边值问题。通过应用引理

3.11，并对 Galerkin 近似的框架作一些调整，我们可以证明，如果不等式

$$\delta \le \frac{\varepsilon_3}{\mu_0}$$

若引理 3.18 和引理 3.11 中的常数 μ_0 和 ε_3 分别满足上述条件，则由 Fredholm择一定理可知，问题 (3.60) 存在唯一解 $\{(\theta_j, \Theta_j)(x_1) : j = 0, \cdots, n\}$，且当 $0 \le x_1 \le L$ 时光滑。此外，利用上述所述的性质 (G_1)–(G_3) 进行冗长但直接的计算，可知命题 3.6 适用于问题 (3.60) 的解 (V_n, W_n)。更确切地说，我们得出，若不等式

$$\delta \le \frac{\bar{\varepsilon}}{\mu_0}$$

若命题 3.6 中的常数 $\bar{\varepsilon}$ 满足上述条件，则存在一个仅依赖于数据和 L 的常数 $C > 0$，使得每个 (V_n, W_n) 都满足以下估计：

$$\|(V_n, W_n)\|_* \le C\left(\|f_1^{P_m}\|_{H^3_*(\Omega_L)} + \|f_2^{P_m}\|_{H^2(\Omega_L)} + \|g_1\|_{C^3(\overline{\Gamma_0})}\right).$$

关于如何利用命题 3.6 得到上述估计的更多细节，请参见 [1, 附录 A]。

因此，通过取 $\{(V_n, W_n)\}$ 的一个子序列，使其在 $C^1(\Omega_L) \cap C^2(\Omega_L \setminus \Gamma_L)$ 中收敛，并将常数 δ_1 取为

$$\delta_1 = \min\left\{\delta_0, \frac{\bar{\varepsilon}}{\mu_0}\right\}.$$

2.（唯一性）设 $Q^{(1)} = (V_{(1)}\, W^{(1)})$ 和 $Q^{(2)} = (V_{(2)}\, W^{(2)})$ 是与一个固定的 $P \in \mathcal{J}_\delta$ 相关联的线性边值问题 (3.18) 的两个解，并假设它们满足估计 (3.19)。接下来，令 $(v, w) := (V_{(1)} - V_{(2)}\, W_{(1)} - W^{(2)})$。则 (v, w) 满足问题：

$$\begin{cases} \mathcal{L}^P(v, w) = 0, \quad \Delta w - \bar{h}_1 w - \bar{h}_2 \partial_1 v = 0 & \text{in} \quad \Omega_L, \\ v = 0, \quad \partial_{x_1} v = 0, \quad \partial_{x_1} w = 0 & \text{on} \quad \Gamma_0, \\ \partial_{\mathbf{n}_w} v = 0, \quad \partial_{\mathbf{n}_w} w = 0 & \text{on} \quad \Gamma_{\mathrm{w}}, \\ \partial_{x_1} w = 0 & \text{on} \quad \Gamma_L. \end{cases}$$

重复命题 3.9 的证明，我们可以证明 $\|(v, w)\|_{H^1(\Omega_L)} = 0$，因此 $v = w \equiv 0$ 在 Ω_L 中。

3.（相容条件 (3.20)）由于 (3.18) 中陈述的边界条件，V 和 W 显然在 $\Gamma_0^{\bar{\epsilon}}$ 上满足相容条件 $V = 0$ 和 $\partial_{x_1} W = 0$。

通过求解关于 V 的方程 $\mathcal{L}^P(V, W) = f_1^P$，我们得到

$$\partial_{x_1}^2 V = -\sum_{k=2}^{3} 2a_{1k}^P \partial_{1k} V - \sum_{i,j=2}^{3} a_{ij}^P \partial_{ij} V - \bar{a}_1 \partial_1 V - \bar{b}_1 \partial_1 W - \bar{b}_2 W + f_1^P \quad \text{in } \Omega_L.$$

由于在远离 Γ_L 处建立的 (V, W) 的 H^4-估计 (3.19)，上方给出的表示式逐点成立，直至入口边界 Γ_0。

然后，将边界条件 $V=\partial_{x_1}W=0$ 和 $\partial_{x_1}V=g_1$ 代入 Γ_0 上的上述表达式，可得

$$\partial_{x_1}^2 V=-\sum_{k=2}^{3}2a_{1k}^P\partial_k g_1-\bar{a}_1\partial_1 g_1-\bar{b}_2 W+f_1^P\quad\text{on }\Gamma_0.$$

¯假设 (2.16) 与定义 3.1(ii) 结合可推出 $\bar{a}_1=b_2=0$ 在 Γ_0上成立。又由引理 3.4(f)，可得 $f_1^P=0$ 在 $\Gamma_0^{\bar{\epsilon}}$上成立。最后，定义 3.1(i) 与为 $P=(\tilde{\psi},\tilde{\Psi})\in\mathcal{J}_\delta$ 预设的相容条件 $\tilde{\psi}=0$ 在 $\Gamma_0^{\bar{\epsilon}}$ 上结合，可推出 $a_{1k}^P=0$ 在 $\Gamma_0^{\bar{\epsilon}}$ 上对 $k=2$ 和 3 成立。因此，我们得出 V满足相容条件 $\partial_{x_1}^2V=0$ 在 $\Gamma_0^{\bar{\epsilon}}$上成立。

我们将 (3.18) 中给出的 W 的二阶方程改写为

$$\partial_{x_1}^2W=-\Delta_{\mathrm{x}'}W+\bar{h}_1W+\bar{h}_2\partial_1V+f_2^P\quad\text{in }\Omega_L. \tag{3.61}$$

注意，函数 $F_2^*:=\bar{h}_1W+\bar{h}_2\partial_1V+f_2^P$ 属于 $H^3(\Omega^{4L/5})$。由于 F_2 在 $\Gamma_0^{\bar{\epsilon}}$上的相容条件 (3.47)， F_2 关于 Γ_0 的局部偶延拓属于 H^3，因此应用标准椭圆理论可容易验证 W 属于 $H^5(\Omega^{2L/3})$。因此，表示式 (3.61) 在 $\Omega^{L/2}$ 中逐点成立。接下来，~~我们~~对 x_1 求导，得到

$$\partial_{x_1}^3W=-\Delta_{\mathrm{x}'}\partial_{x_1}W+\partial_{x_1}F_2^*\quad\text{on }\Gamma_0.$$

于是，由边界条件 $\partial_{x_1}W=0$ 在 Γ_0、引理 3.4(f) 以及相容条件 (3.47)，可直接得出 W 满足相容条件 $\partial_{x_1}^3W=0$ 在 $\Gamma_0^{\bar{\epsilon}}$。

□

3.4. 定理 2.6 的证明。现在，我们准备证明定理 2.6。

1. 对于命题 3.5 中的 ε_1 ，假设定义 (3.10) 中的常数 δ 满足条件

$$\delta\le\varepsilon_1.$$

对于命题 3.5 中的常数 L^* ，令我们固定 $L\in(0,L^*]$。根据命题 3.5，对于每个 $P=(\psi,\Psi)\in\underline{\mathcal{J}_\delta}$， ˜ ˜，边值问题 (3.18) 存在唯一解 $(V,W)\in[C^1(\Omega_L)\cap C^2(\Omega_L)]^2$，且满足估计 (3.19)。对于由 (3.17) 给出的函数w_{bd} ，令我们设

$$(v,w):=(V,W)+(0,w_{\mathrm{bd}})\quad\text{in }\Omega_L.$$

显然，(v,w)满足边值问题 (3.16)，并且满足估计

$$\|(v,w)\|_*\le C_\star\left(\|P\|_*^2+\sigma(b,u_{\mathrm{en}},E_{\mathrm{en}},E_{\mathrm{ex}})\right) \tag{3.62}$$

其中常数 $C_\star>0$ 仅取决于数据、 L 和 $\bar{\epsilon}$。此外，由 (3.20) 和问题 2.3 中陈述的相容条件 (2.12) 可直接推出

$$\partial_{x_1}^{k-1}v=0\quad\text{and}\quad\partial_{x_1}^k w=0\quad\text{on }\Gamma_0^{\bar{\epsilon}}\quad\text{for }k=1,3.$$

定义映射 $\mathcal{I}$ 如下

$$\mathcal{I}(P):=(v,w). \tag{3.63}$$

由 (3.62) 可知，若不等式

$$C_\star\left(\delta^2+\sigma(b,u_{\mathrm{en}},E_{\mathrm{en}},E_{\mathrm{ex}})\right)\le\delta \tag{3.64}$$

成立。

2.（解的存在性）断言 1：可以固定一个常数 $\sigma_1 > 0$，它足够小且仅取决于数据，并且 L，使得若不等式

$$\sigma(b, u_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{ex}}) \le \sigma_1$$

成立，则问题 2.3 至少有一个解 (φ, Φ)。

我们将通过应用 Schauder 不动点定理来验证断言 1。

我们定义线性空间 $\mathcal{B}$ 如下

$$\mathcal{B} := (H^2(\Omega_L) \cap C^{1,1/4}(\overline{\Omega_L})) \times (H^2(\Omega_L) \cap C^{1,1/4}(\overline{\Omega_L})). \tag{3.65}$$

显然，$\mathcal{B}$ 是一个巴拿赫空间，并且集合 $\mathcal{J}_\delta$ 在 $\mathcal{B}$ 中是紧的（引理 3.2(b)）。设序列 $\{P_k = (\psi_k, \Psi_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 在巴拿赫空间 $\mathcal{B}$ 中收敛于 $P_\infty = (\psi_\infty, \Psi_\infty)$。对每个 $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，令 $(v_k, w_k) := \mathcal{I}(P_k)$。假设条件 (3.64) 成立，则对所有 $k \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$，有 $(v_k, w_k) \in \mathcal{J}_\delta$。由引理 3.2 和 3.3 可知，序列 $\{(v_k, w_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 存在一个子序列 $\{(v_{k_j}, w_{k_j})\}_{j\in\mathbb{N}}$，其在巴拿赫空间 $\mathcal{B}$ 中收敛于某个 $(v_\infty, w_\infty) \in \mathcal{J}_\delta$。此外，显然 (v_∞, w_∞) 是与 P_∞ 相关的边值问题 (3.16) 的解，即有 $\mathcal{I}(P_\infty) = (v_\infty, w_\infty)$。这表明，迭代映射 $\mathcal{I}\colon \mathcal{J}_\delta \to \mathcal{J}_\delta$ 由于线性边值问题 (3.16) 的解的唯一性，在 $\mathcal{B}$ 中是连续的。因此，只要固定 δ 和 $\sigma(b, u_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{ex}})$ 以满足条件 (3.64)，我们即可应用 Schauder 不动点定理，在 $\mathcal{J}_\delta$ 中得到一个不动点 $P_* = (\psi_*, \Psi_*)$。这证明了非线性边值问题 (3.7)–(3.8) 解的存在性，进而证明了问题 2.3 解的存在性。

3.（估计（2.18）的验证）对于迭代映射 $\mathcal{I}$ 的不动点 $P_* = (\psi_*, \Psi_*) \in \mathcal{J}_\delta$，利用估计（3.62）可得

$$\|P_*\|_* \le C_\star(\delta\|P_*\|_* + \sigma(b, u_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{ex}})). \tag{3.66}$$

因此，若 δ 满足条件

$$C_\star\delta \le \frac{1}{2}, \tag{3.67}$$

则可得到估计

$$\|P_*\|_* \le 2C_\star\sigma(b, u_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{ex}}).$$

这验证了估计（2.18）。

4.（唯一性）假设 $(\varphi^{(1)}, \Phi^{(1)})$ 和 $(\varphi^{(2)}, \Phi^{(2)})$ 是问题 2.3 的两个解，并且它们满足估计（2.18）。定义

$$(\psi^{(k)}, \Psi^{(k)}) := (\varphi^{(k)} - \varphi_0, \Phi^{(k)} - \Phi_0) \quad \text{for } k = 1, 2.$$

最后，对每个 $k = 1$，令 $P_k := (\psi^{(k)}, \Psi^{(k)})$，并令 2，且

$$(\xi, \eta) := P_1 - P_2 \quad \text{in } \Omega_L.$$

对于每个 P_k，令 $(a_{ij}^{P_k}, \tilde{f}_1^{P_k}, \tilde{f}_2^{P_k})$ 由 (3.14) 给出。根据引理 3.4，只要满足条件

$$\|P_k\|_* \le \varepsilon_0 \tag{3.68}$$

对 $k = 1$ 和 2 成立，其中 ε_0 是引理 3.4 给出的小常数。因此，若常数 $\sigma(b, u_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{ex}})$ 满足条件

$$C\sigma(b, u_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{ex}}) \le \varepsilon_0 \tag{3.69}$$

由估计 (2.18) 得到常数 $C > 0$，于是我们可以轻易推出

$$\begin{cases} \mathcal{L}^{P_1}(\xi, \eta) = F_1, \quad \Delta\eta - \bar{h}_1\eta - \bar{h}_2\partial_1\xi = F_2 & \text{in} \quad \Omega_L, \\ \xi = 0, \quad \partial_{x_1}\xi = 0, \quad \partial_{x_1}\eta = 0 & \text{on} \quad \Gamma_0, \\ \partial_{\mathbf{n}_w}\xi = 0, \quad \partial_{\mathbf{n}_w}\eta = 0 & \text{on} \quad \Gamma_{\mathrm{w}}, \\ \partial_{x_1}\eta = 0 & \text{on} \quad \Gamma_L \end{cases}$$

对于由下式给出的 F_1 和 F_2

$$\begin{aligned} F_1 &:= \tilde{f}_1^{P_1} - \tilde{f}_1^{P_2} + \sum_{i,j=1}^{3} (a_{ij}^{P_1} - a_{ij}^{P_2})\partial_{ij}\psi^{(2)}, \\ F_2 &:= \tilde{f}_2^{P_1} - \tilde{f}_2^{P_2}. \end{aligned}$$

对于命题 3.9 中的常数 $\hat{\varepsilon}_1$，若满足

$$\|P_1\|_* \le \hat{\varepsilon}_1, \tag{3.70}$$

那么我们可以重复命题 3.9 的证明，并应用引理 3.4(h) 得到估计

$$\begin{aligned} &\|(\xi, \eta)\|_{H^1(\Omega_L)} + \|\xi\|_{\mathcal{W}^{1,\infty}_{\mathcal{D}}(0,L)} \\ &\le C\left(\sigma(b, u_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{ex}})\|(\xi, \eta)\|_{H^1(\Omega_L)} + \|\sum_{i,j=1}^{3} (a_{ij}^{P_1} - a_{ij}^{P_2})\partial_{ij}\psi^{(2)}\|_{L^2(\Omega_L)}\right). \end{aligned} \tag{3.71}$$

与估计 (3.25) 类似，我们可以直接验证，对于任意 $s \in (0, L)$，范数 $\|D^2\psi^{(2)}\|_{C^0([0,s]\times\overline{\mathcal{D}})}$ 满足估计

$$\|D^2\psi^{(2)}\|_{C^0([0,s]\times\overline{\mathcal{D}})} \le C\kappa(s)\|\psi^{(2)}\|_{H^4_*(\Omega_L)}$$

对于由 (3.26) 给出的函数 $\kappa : (0, L) \to \mathbb{R}$。将此估计与引理 3.4(g)结合，可得

$$\|\sum_{i,j=1}^{3} (a_{ij}^{P_1} - a_{ij}^{P_2})\partial_{ij}\psi^{(2)}\|_{L^2(\Omega_L)} \le C\sigma(b, u_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{ex}})\left(\|\xi\|_{\mathcal{W}^{1,\infty}_{\mathcal{D}}(0,L)} + \|\eta\|_{H^1(\Omega_L)}\right).$$

将上述估计代入 (3.71)，可得以下不等式：

$$\begin{aligned} &\|(\xi, \eta)\|_{H^1(\Omega_L)} + \|\xi\|_{\mathcal{W}^{1,\infty}_{\mathcal{D}}(0,L)} \\ &\le C^\natural\sigma(b, u_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{ex}})\left(\|(\xi, \eta)\|_{H^1(\Omega_L)} + \|\xi\|_{\mathcal{W}^{1,\infty}_{\mathcal{D}}(0,L)}\right) \end{aligned}$$

其中某个常数 $C^\natural > 0$ 仅取决于数据、L 和 $\bar{\epsilon}$。因此，如果不等式

$$C^\natural\sigma(b, u_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{ex}}) < 1 \tag{3.72}$$

成立，则我们得到 $(\xi, \eta) \equiv (0, 0)$ 属于 Ω_L。最后，取一个仅依赖于数据的充分小常数 $\sigma_p > 0$，并且 L 和 $\bar{\epsilon}$，使得当不等式 $\sigma(b, u_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{ex}}) \le \sigma_p$ 成立时，条件 (3.68)–(3.70) 和 (3.72) 均成立，从而完成证明。□

4. Nonzero vorticity flows (Proof of Theorem 2.11)

在第 4 节中，我们假设 Ω_L 由 (2.5) 给出，其中

$$\mathcal{D} := \{\mathrm{x}' = (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 : |\mathrm{x}'| < 1\}.$$

4.1. 问题 2.9 的重新表述。对于每个点 $\mathrm{x} \in \Omega_L (= (0, L) \times \mathcal{D})$，我们将其写作 $\mathrm{x} = (x_1, \mathrm{x}')$，其中 $x_1 \in (0, L)$ 且 $\mathrm{x}' \in \mathcal{D}$。注意，$|\mathrm{x}'| = r$，$\frac{\mathrm{x}'}{|\mathrm{x}'|} = \mathbf{e}_r$，并且 $(\mathrm{x}')^\perp = r\,\mathbf{e}_\theta$。我们指出，以下各种计算中都会用到这些显而易见的等式。

假设 $(\mathrm{u}\ \rho, p, \Phi)$ 是问题 2.9 的一个轴对称解。依照亥姆霍兹分解的思路，我们将 u 表示为

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi + \nabla \times \mathbf{V} \quad \text{in} \quad \Omega_L$$

其中 φ 是一个轴对称函数，V 是一个向量场。进一步，我们将 V 表示为

$$\mathbf{V} := h\mathbf{e}_r + \phi\mathbf{e}_\theta \tag{4.1}$$

其中 (h, ϕ) 是两个轴对称函数。最后，我们定义一个轴对称函数Λ ，使其满足

$$\Lambda := r\partial_{x_1} h.$$

于是，速度场 u 可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\varphi, \phi\mathbf{e}_\theta, \Lambda) &= \nabla\varphi + \nabla \times (\phi\mathbf{e}_\theta) + \frac{\Lambda}{r}\mathbf{e}_\theta \\ &= \nabla\varphi + \nabla \times (\phi\mathbf{e}_\theta) + \frac{\Lambda}{r^2}(\mathrm{x}')^\perp, \end{aligned} \tag{4.2}$$

其中，$(\mathrm{x}')^\perp$ 表示向量 x' 在平面 $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$上逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 角度。

现在，我们用 $(\varphi, \Phi, \phi, S, \Lambda)$ 来改写问题 2.9。

问题 4.1. 固定一个轴对称函数 $b \in C^2(\Omega_L)$。并固定轴对称函数 $u_{\mathrm{en}} \in C^3(\overline{\Gamma_0})$、$v_{\mathrm{en}}$、$w_{\mathrm{en}}$、$S_{\mathrm{en}}$、$E_{\mathrm{en}} \in C^4(\overline{\Gamma_0})$，以及函数 $E_{\mathrm{ex}} \in C^4(\overline{\Gamma_L})$。假设这些函数满足问题 2.9 中所述的所有相容条件。求解以下关于 $(\varphi, \Phi, \phi, S, \Lambda)$ 的非线性边值问题:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \rho\mathbf{u} = 0 \\ \Delta\Phi = \rho - b \\ -\Delta(\phi\mathbf{e}_\theta) = \frac{1}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_{x_1}} \left(\frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1}\partial_r S + \frac{\Lambda}{r^2}\partial_r \Lambda \right) \mathbf{e}_\theta \end{cases} \quad \text{in } \Omega_L, \tag{4.3}$$

$$\begin{cases} \mathbf{m}\cdot\nabla S = 0 \\ \mathbf{m}\cdot\nabla\Lambda = 0 \end{cases} \quad \text{in } \Omega_L, \tag{4.4}$$

$$\begin{cases} \varphi(0, r) = -\displaystyle\int_r^1 v_{\mathrm{en}}(t)dt,\ \partial_{x_1}\varphi = u_{\mathrm{en}} - [\nabla \times (\phi\mathbf{e}_\theta)] \cdot \mathbf{e}_{x_1} \ \text{on } \Gamma_0, \\ \partial_{x_1}\Phi = E_{\mathrm{en}},\ \partial_{x_1}(\phi\mathbf{e}_\theta) = \mathbf{0} \ \text{on } \Gamma_0, \\ \partial_r\varphi = 0,\ \partial_r\Phi = 0,\ \phi\mathbf{e}_\theta = \mathbf{0} \ \text{on } \Gamma_{\mathrm{w}}, \\ \partial_{x_1}\Phi = E_{\mathrm{ex}},\ \partial_{x_1}(\phi\mathbf{e}_\theta) = \mathbf{0} \ \text{on } \Gamma_L, \\ (S, \Lambda) = (S_{\mathrm{en}}, |\mathrm{x}'|w_{\mathrm{en}}) \ \text{on } \Gamma_0 \end{cases} \tag{4.5}$$

其中，密度函数 ρ 和伪动量密度场 $\mathbf{m}$ 定义如下：

$$
\begin{aligned}
\varrho(\varphi,\Phi,\phi\mathbf{e}_\theta,\Lambda) &:= \left(\Phi-\frac{1}{2}|\nabla\varphi+\nabla\times(\phi\mathbf{e}_\theta)+\frac{\Lambda}{r^2}(\mathrm{x}')^\perp|^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}},\\
\rho(\varphi,\Phi,\phi\mathbf{e}_\theta,S,\Lambda) &:= \left(\frac{\gamma-1}{\gamma S}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\varrho(\varphi,\Phi,\phi\mathbf{e},\Lambda),\\
\mathbf{m}(\varphi,\Phi,\phi\mathbf{e}_\theta,\Lambda) &:= \varrho(\varphi,\Phi,\phi\mathbf{e}_\theta,\Lambda)\mathbf{u}(\varphi,\phi\mathbf{e}_\theta,\Lambda).
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

关于问题 4.1 的详细推导，可参见 [6] 。在陈述用于证明定理 2.11 的关键命题之前，我们先定义下文将用到的范数。

定义 4.2. 对每个 $k\in\mathbb{N}$，定义范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{M}^k_*((0,L)\times\mathcal{D})}$ 为

$$
\|\cdot\|_{\mathcal{M}^k_*((0,L)\times\mathcal{D})} := \|\cdot\|_{H^k_*(\Omega_L)}+\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}_{*,\mathcal{D}}(0,L)}.
$$

更确切地说，对于函数 $f:\Omega_L\to\mathbb{R}$，我们定义

$$
\|f\|_{\mathcal{M}^k_*((0,L)\times\mathcal{D})} := \|f\|_{H^k_*(\Omega_L)}+\|f\|_{\mathcal{W}^{k,\infty}_{*,\mathcal{D}}(0,L)}.
$$

对于向量场 $\mathbf{v}=(v_1,\cdots,v_n):\Omega_L\to\mathbb{R}^n$，我们定义

$$
\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{M}^k_*((0,L)\times\mathcal{D})} := \sum_{j=1}^n\|v_j\|_{\mathcal{M}^k_*((0,L)\times\mathcal{D})}.
$$

最后，我们定义

$$
\mathcal{M}^k_*((0,L)\times\mathcal{D}) := H^k_*(\Omega_L)\cap\mathcal{W}^{k,\infty}_{*,\mathcal{D}}(0,L),
$$

$$
H^k_*(\Omega_L;\mathbb{R}^n) := \left\{\mathbf{v}=(v_1,\cdots,v_n):\Omega_L\to\mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{j=1}^n\|v_j\|_{H^k_*(\Omega_L)}<\infty\right\},
$$

$$
\mathcal{M}^k_*((0,L)\times\mathcal{D};\mathbb{R}^n) := \left\{\mathbf{v}=(v_1,\cdots,v_n):\Omega_L\to\mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{j=1}^n\|v_j\|_{\mathcal{M}^k_*((0,L)\times\mathcal{D}}<\infty\right\}.
$$

显然， $\mathcal{M}^k_*((0,L)\times\mathcal{D})$ 是一个赋范向量空间，因此 $\mathcal{M}^k_*((0,L)\times\mathcal{D};\mathbb{R}^n)$ 也是。

命题 4.3. 假设定理 2.11 中所述的所有假设均成立。那么，存在一个常数 $L^*\in(0,L]$ ，它仅依赖于数据，并使下列性质成立：对于任意给定的 $L<L^*$，可以选取一个小常数 $\sigma_2>0$ ，它依赖于数据以及 $(L,\bar{\epsilon})$，使得若不等式

$$
\sigma(b,u_{\mathrm{en}},v_{\mathrm{en}},w_{\mathrm{en}},S_{\mathrm{en}},E_{\mathrm{en}},E_{\mathrm{ex}})\le\sigma_2 \tag{4.7}
$$

成立，则问题 4.1 存在唯一的轴对称解 $(\varphi,\Phi,\phi,S,\Lambda)$，并满足以下性质：

(a) 存在一个常数 $C>0$ fixed，仅依赖于数据和 $(L,\bar{\epsilon})$，并满足以下估计

$$
\begin{aligned}
&\|(\varphi-\bar{\varphi},S-S_0,\Lambda)\|_{\mathcal{M}^4_*((0,L)\times\mathcal{D})}+\|\Phi-\bar{\Phi}\|_{H^4_*(\Omega_L)}+\|\phi\mathbf{e}_\theta\|_{H^5_*(\Omega_L)}\\
&\le C\sigma(b,u_{\mathrm{en}},v_{\mathrm{en}},w_{\mathrm{en}},S_{\mathrm{en}},E_{\mathrm{en}},E_{\mathrm{ex}});
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

(b) 此外，可以调整估计中的常数 $C > 0$，使其仅依赖于数据和 $(L, \bar{\epsilon})$，从而使由 (4.2) 给出的速度场 u 满足以下估计

$$\|\mathbf{u} - \bar{u}\mathbf{e}_1\|_{\mathcal{M}^3_*((0,L)\times\mathcal{D})} \le C\sigma(b, u_{\rm en}, v_{\rm en}, w_{\rm en}, S_{\rm en}, E_{\rm en}, E_{\rm ex}), \tag{4.9}$$

其中，$\bar{u}$ 是背景解 $(\bar{\rho}, \bar{u}, S_0, \Phi)$ 的速度分量，该背景解与满足定义 2.2 中 $E_0 = 0$ 的 (ρ_0, E_0) 相关；

(c) 存在一个正的常数 $\omega_0 > 0$，其仅依赖于数据和 $(L, \bar{\epsilon})$，使得以下不等式成立：

$$\min\left\{\rho(\varphi, \Phi, \phi\mathbf{e}_\theta, S, \Lambda),\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_{x_1},\ \frac{|\mathbf{u}|}{\sqrt{\gamma S\rho^{\gamma-1}(\varphi, \Phi, \phi\mathbf{e}_\theta, S, \Lambda)}} - 1\right\} \ge \omega_0 \quad in\ \overline{\Omega_L}. \tag{4.10}$$

利用定理 2.6 的迭代方法，我们将在 §4.2 中证明命题 4.3。由于相同的方法已在文献 [1, 2, 6] 中引入并得到广泛研究，因此我们仅详细讨论本文中新引入的加权 Sobolev 范数所引发的问题。在 §4.3 中，我们将证明定理 2.11 可由命题 4.3 推出。

4.2. 命题 4.3 的证明。对于一个稍后确定的常数 $\varepsilon > 0$，定义两个集合 $\mathcal{T}_\varepsilon$ 和 $\mathcal{U}_\varepsilon$ 如下：

$$\mathcal{T}_\varepsilon := \left\{ S \in \mathcal{M}^4_*((0,L)\times\mathcal{D}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{A function } S \text{ is axisymmetric in } \Omega_L, \\ \|S - S_0\|_{\mathcal{M}^4_*((0,L)\times\mathcal{D})} \le \varepsilon, \\ \left\| \dfrac{\partial_r S}{|\mathrm{x}'|} \right\|_{\mathcal{M}^3_*((0,L)\times\mathcal{D})} \le \varepsilon, \\ S = S_{\rm en} \quad \text{on } \Gamma_0, \\ (S, \partial_{x_1} S) = (S_0, 0) \text{ on } \Gamma_0^{\bar{\epsilon}}, \\ S = S_0 \text{ on } \left\{(x_1, \mathrm{x}') \in \overline{\Omega_L} : |\mathrm{x}'| \ge 1 - \dfrac{\bar{\epsilon}}{2}\right\} \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{U}_\varepsilon := \left\{ \Lambda \in \mathcal{M}^4_*((0,L)\times\mathcal{D}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{A function } \Lambda \text{ is axisymmetric in } \Omega_L, \\ \|\Lambda\|_{\mathcal{M}^4_*((0,L)\times\mathcal{D})} \le \varepsilon, \\ \displaystyle\sum_{k=0,1} \left\| \frac{\partial_r^k \Lambda}{|\mathrm{x}'|^{2-k}} \right\|_{\mathcal{M}^3_*((0,L)\times\mathcal{D})} \le \varepsilon, \\ \Lambda(0, \mathrm{x}') = |\mathrm{x}'| w_{\rm en}(\mathrm{x}') \text{ on } \Gamma_0, \\ (\Lambda, \partial_{x_1}\Lambda) = (0,0) \text{ on } \Gamma_0^{\bar{\epsilon}}, \\ \Lambda = 0 \text{ on } \left\{(x_1, \mathrm{x}') \in \overline{\Omega_L} : |\mathrm{x}'| \ge 1 - \dfrac{\bar{\epsilon}}{2}\right\} \end{array} \right\}. \tag{4.11}$$

并且，我们定义迭代集 $\mathcal{J}_\varepsilon$ 如下：

$$\mathcal{J}_\varepsilon := \mathcal{T}_\varepsilon \times \mathcal{U}_\varepsilon. \tag{4.12}$$

注意，对于任意 $(S, \Lambda) \in \mathcal{J}_\varepsilon$，均有

$$\partial_r S = 0 \quad \text{and} \quad \partial_r \Lambda = 0 \quad \text{on } \Gamma_{\rm w}.$$

4.2.1. 步骤 1：与 $(S,\Lambda)\in\mathcal{J}_\varepsilon$ 相关的 $(\varphi,\Phi,\mathbf{W})$ 的二阶非线性偏微分方程组。

定义4.4. 设 φ 和 Φ 是定义在Ω_L中的两个函数。另设$\mathbf{W}$：$\Omega_L\to\mathbb{R}^3$是一个向量场。

(i) 对于分别由(4.6)和(4.2)给出的密度函数 ρ 和速度场$\mathbf{u}$，定义与$(S,\Lambda,\mathbf{W})$相关联的两个非线性微分算子 $\mathcal{N}_1$ 和 $\mathcal{N}_2$如下：

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_1^{(S,\Lambda,\mathbf{W})}(\varphi,\Phi)&:=\operatorname{div}\left(\rho(\varphi,\Phi,\mathbf{W},S,\Lambda)\mathbf{u}(\varphi,\mathbf{W},\Lambda)\right),\\ \mathcal{N}_2^{(S,\Lambda,\mathbf{W})}(\varphi,\Phi)&:=\Delta\Phi-\rho(\varphi,\Phi,\mathbf{W},S,\Lambda)+b.\end{aligned}$$

(ii) 另定义非线性向量场$\mathbf{F}^{(S,\Lambda,\mathbf{W})}(\varphi,\Phi)$如下：

$$\mathbf{F}^{(S,\Lambda,\mathbf{W})}(\varphi,\Phi):=\frac{\frac{\rho^{\gamma-1}(\varphi,\Phi,\mathbf{W},S,\Lambda)}{\gamma-1}(\partial_r S\mathbf{e}_\theta)+\frac{\Lambda}{r^2}(\partial_r\Lambda\mathbf{e}_\theta)}{\mathbf{u}(\varphi,\mathbf{W},\Lambda)\cdot\mathbf{e}_{x_1}}.\tag{4.13}$$

问题4.5. 对固定的$(S_*,\Lambda_*)\in\mathcal{J}_\varepsilon$，求解关于$(\varphi,\Phi,\mathbf{W})$的以下非线性边值问题：

$$\begin{cases}\mathcal{N}_1^{(S_*,\Lambda_*,\mathbf{W})}(\varphi,\Phi)=0\\ \mathcal{N}_2^{(S_*,\Lambda_*,\mathbf{W})}(\varphi,\Phi)=0 & in\ \Omega_L,\\ -\Delta\mathbf{W}=\mathbf{F}^{(S_*,\Lambda_*,\mathbf{W})}(\varphi,\Phi)\end{cases}\tag{4.14}$$

$$\begin{cases}\varphi(0,r)=-\displaystyle\int_r^1 v_{\mathrm{en}}(t)dt,\ \partial_{x_1}\varphi+(\nabla\times\mathbf{W})\cdot\mathbf{e}_{x_1}=u_{\mathrm{en}}\ on\ \Gamma_0,\\ \partial_{x_1}\Phi=E_{\mathrm{en}},\ \partial_{x_1}\mathbf{W}=\mathbf{0}\ on\ \Gamma_0,\\ \partial_r\varphi=0,\ \partial_r\Phi=0,\ \mathbf{W}=\mathbf{0}\ on\ \Gamma_{\mathrm{w}},\\ \partial_{x_1}\Phi=E_{\mathrm{ex}},\ \partial_{x_1}\mathbf{W}=\mathbf{0}\ on\ \Gamma_L.\end{cases}\tag{4.15}$$

引理 4.6. 固定一个常数 $\delta>0$，并设 L 由引理 2.1给出。在定理4.3的相同假设下，可固定一个常数 $L^*\in(0,L]$，该常数仅依赖于数据，使得以下结论成立：若区域Ω_L 的喷管长度 L 满足不等式 $L\le L^*$，则可固定一个仅依赖于数据和$(L,\bar\epsilon)$的小常数 $\bar\varepsilon>0$，使得只要满足

$$\varepsilon+\sigma(b,u_{\mathrm{en}},v_{\mathrm{en}},0,S_0,E_{\mathrm{en}},E_{\mathrm{ex}})\le\bar\varepsilon,\tag{4.16}$$

那么，对于任意 $(S_*,\Lambda_*)\in\mathcal{J}_\varepsilon$，与 (S_*,Λ_*) 相关的问题4.5存在唯一的轴对称解 $(\varphi,\Phi,\mathbf{W})$，且满足估计

$$\begin{aligned}&\|\varphi-\bar\varphi\|_{\mathcal{M}^4_*((0,L)\times\mathcal{D})}+\|\Phi-\bar\Phi\|_{H^4_*(\Omega_L)}+\|\mathbf{W}\|_{H^5_*(\Omega_L;\mathbb{R}^3)}\\ &\le C\left(\varepsilon+\sigma(b,u_{\mathrm{en}},v_{\mathrm{en}},0,S_0,E_{\mathrm{en}},E_{\mathrm{ex}})\right)\end{aligned}\tag{4.17}$$

其中，常数 $C>0$ fixed 仅取决于数据和 $(L,\bar\epsilon)$。此外，以下性质成立：

(a) 速度势函数 φ 满足相容条件

$$\partial_{11}\varphi=0\quad on\ \Gamma_0^{\bar\epsilon};$$

(b) 向量场 W 可表示为

$$\mathbf{W}=\phi\mathbf{e}_\theta$$

对于轴对称函数 $\phi:\Omega_L\to\mathbb{R}$。

为了用迭代方法证明引理 4.6，我们将引入一个迭代集。对于来自 (4.11) 的 $\varepsilon > 0$，定义另一个迭代集

(4.18)
$$\mathfrak{W}_{M\varepsilon} := \left\{ \mathbf{W} \in H^5_*(\Omega_L;\mathbb{R}^3) \,\middle|\, \begin{array}{l} \mathbf{W} \text{ is axisymmetric in } \Omega_L, \\ \|\mathbf{W}\|_{H^5_*(\Omega_L;\mathbb{R}^3)} \le M\varepsilon, \\ \mathbf{W} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_{\mathrm{w}},\ \partial_{x_1}\mathbf{W} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_0, \\ \partial_r(\nabla\times\mathbf{W})\cdot\mathbf{e}_{x_1} = \partial_r(\nabla\times\mathbf{W})\cdot\mathbf{e}_\theta = 0 \text{ on } \Gamma_{\mathrm{w}} \end{array} \right\}$$

其中常数 $M > 0$ 将在后文确定。对于固定的 $\mathsf{W}_* \in \mathfrak{W}_{M\varepsilon}$，考虑关于 (φ, Φ) 的非线性边值问题

$$\begin{cases} \mathcal{N}_1^{(S_*,\Lambda_*,\mathbf{W}_*)}(\varphi,\Phi) = 0 \\ \mathcal{N}_2^{(S_*,\Lambda_*,\mathbf{W}_*)}(\varphi,\Phi) = 0 \end{cases} \quad \text{in } \Omega_L, \tag{4.19}$$

$$\begin{cases} \varphi(0,r) = -\displaystyle\int_r^1 v_{\mathrm{en}}(t)dt,\ \partial_{x_1}\varphi = u_{\mathrm{en}} - (\nabla\times\mathbf{W}_*)\cdot\mathbf{e}_{x_1} \text{ on } \Gamma_0, \\ \partial_{x_1}\Phi = E_{\mathrm{en}} \text{ on } \Gamma_0, \\ \partial_r\varphi = 0,\ \partial_r\Phi = 0 \text{ on } \Gamma_{\mathrm{w}}, \\ \partial_{x_1}\Phi = E_{\mathrm{ex}} \text{ on } \Gamma_L. \end{cases} \tag{4.20}$$

¯引理 4.7。可以选取 $L_*^{\mathrm{v}} \in (0, L]$，其取值取决于数据；并选取充分小的 $\varepsilon_1^{\mathrm{v}} > 0$，使其仅取决于数据和 $(L, \bar{\epsilon})$，从而若 $L \le L_*^{\mathrm{v}}$，且若

$$(1+M)\varepsilon + \sigma(b, u_{\mathrm{en}}, v_{\mathrm{en}}, 0, S_0, E_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{ex}}) \le \varepsilon_1^{\mathrm{v}}, \tag{4.21}$$

那么，对于每个 $(S_*, \Lambda_*, \mathsf{W}_*) \in \mathcal{T}_\varepsilon \times \mathcal{U}_\varepsilon \times \mathfrak{W}_{M\varepsilon}$，边值问题 (4.19)– (4.20) 存在唯一解 (φ, Φ)，且该解满足

$$\begin{aligned} &\|\varphi - \bar{\varphi}\|_{\mathcal{M}^4_*((0,L)\times\mathcal{D})} + \|\Phi - \bar{\Phi}\|_{H^4_*(\Omega_L)} \\ &\le C\left((1+M)\varepsilon + \sigma(b, u_{\mathrm{en}}, v_{\mathrm{en}}, 0, S_0, E_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{ex}})\right) \end{aligned} \tag{4.22}$$

其中 $C > 0$ 固定，且仅取决于数据和 $(L, \bar{\epsilon})$。

此外，该解具有以下性质：

(a) (φ, Φ) 在 Ω_L 中轴对称；(b) $\partial_{11}(\varphi - \bar{\varphi}) = 0$ 且 $\partial_{111}(\Phi - \bar{\Phi}) = 0$ 在 $\Gamma_0^{\bar{\epsilon}}$ 上。

证明。1. 首先，我们将把 (4.19) 改写为与欧拉-泊松系统的势流模型（见 (2.6)）类似的形式。

- 对于 $z \in \mathbb{R}$、$\mathrm{u} \in \mathbb{R}^3$ 和 $S \in \mathbb{R}$，令

$$\tilde{\rho}(S, z, \mathbf{u}) := \left(\frac{\gamma-1}{\gamma S}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left(z - \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \tag{4.23}$$

- 定义与 $(\Lambda_*, \mathsf{W}_*)$ 相关联的向量场 q_*

$$\mathbf{q}_* := \nabla\times\mathbf{W}_* + \frac{\Lambda_*}{|\mathrm{x}'|^2}(\mathrm{x}')^\perp.$$

- 定义作用于 (φ, Φ) 的两个微分算子

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{N}}_1^{(S_*,\Lambda_*,\mathbf{W}_*)}(\varphi,\Phi) :=& \tilde{\rho}(S_*,\Phi,\nabla\varphi+\mathbf{q}_*)\Delta\varphi\\ &+[\tilde{\rho}_{\mathbf{u}}(S_*,\Phi,\nabla\varphi+\mathbf{q}_*)]^T D^2\varphi\cdot(\nabla\varphi+\mathbf{q}_*)\\ &+\tilde{\rho}_z(S_*,\Phi,\nabla\varphi,\mathbf{q}_*)\nabla\Phi\cdot\nabla\varphi,\end{aligned}$$

$$\widetilde{\mathcal{N}}_2^{(S_*,\Lambda_*,\mathbf{W}_*)}(\varphi,\Phi) := \Delta\Phi-\tilde{\rho}(S_*,\Phi,\nabla\varphi)+b.$$

- 定义与 $(S_*, \Lambda_*, \mathbf{W}_*)$ 和 (φ, Φ) 相关的两个函数为

$$\begin{aligned}F_1^{(S_*,\Lambda_*,\mathbf{W}_*)}(\varphi,\Phi) :=& -[\tilde{\rho}_{\mathbf{u}}(S_*,\Phi,\nabla\varphi+\mathbf{q}_*)]^T(D\mathbf{q}_*)(\nabla\varphi+\mathbf{q}_*)\\ &-\tilde{\rho}_z(S_*,\Phi,\nabla\varphi+\mathbf{q}_*)\nabla\Phi\cdot\mathbf{q}_*\\ &-\tilde{\rho}_S(S_*,\Phi,\nabla\varphi+\mathbf{q}_*)\nabla S_*\cdot(\nabla\varphi+\mathbf{q}_*),\end{aligned}$$

$$F_2^{(S_*,\Lambda_*,\mathbf{W}_*)}(\varphi,\Phi) :=\tilde{\rho}(S_*,\Phi,\nabla\varphi+\mathbf{q}_*)-\tilde{\rho}(S_*,\Phi,\nabla\varphi). \tag{4.24}$$

最后，我们将 (4.19) 重写为

$$\begin{cases}\widetilde{\mathcal{N}}_1^{(S_*,\Lambda_*,\mathbf{W}_*)}(\varphi,\Phi)=F_1^{(S_*,\Lambda_*,\mathbf{W}_*)}(\varphi,\Phi)\\ \widetilde{\mathcal{N}}_2^{(S_*,\Lambda_*,\mathbf{W}_*)}(\varphi,\Phi)=F_2^{(S_*,\Lambda_*,\mathbf{W}_*)}(\varphi,\Phi)\end{cases}\quad\text{in }\Omega_L. \tag{4.25}$$

2. 对于一个稍后确定的小常数 $\delta>0$，令 $\mathcal{H}_\delta^P$ 和 $\mathcal{I}_\delta^E$ 如 (3.9) 中所定义。并且，我们定义迭代集 $\mathcal{K}_\delta^A$ 为

$$\mathcal{K}_\delta^A := \left\{(\varphi,\Phi)\in\mathcal{M}_*^4((0,L)\times\mathcal{D})\times H_*^4(\Omega_L)\;\middle|\;\begin{array}{l}(\varphi-\bar{\varphi},\Phi-\bar{\Phi})\in\mathcal{H}_\delta^P\times\mathcal{I}_\delta^E\\ (\varphi,\Phi)\text{ are axisymmetric in }\Omega_L\end{array}\right\} \tag{4.26}$$

集合 $\mathcal{K}_\delta^A$ 非空，因为 $(\bar{\varphi},\bar{\Phi})\in\mathcal{K}_\delta^A$。

注意，$(S_*, \Lambda_*, \mathbf{W}_*, v_{\text{en}}, w_{\text{en}})$ 满足以下相容条件：

(i) On Γ_{w}:
- $(S_*,\partial_r S_*)=(S_0,0)$;
- $\mathbf{W}_*=\mathbf{0}$, $\partial_r\left((\nabla\times\mathbf{W}_*)\cdot\mathbf{e}_{x_1}\right)=0$.

(ii) On $\Gamma_0^{\bar{\epsilon}}$:
- $(S_*,\partial_{x_1}S_*)=(S_0,0)$;
- $(\Lambda_*,\partial_{x_1}\Lambda_*)=(0,0)$;
- $\partial_{x_1}\mathbf{W}_*=0$;
- $v_{\text{en}}=w_{\text{en}}=0$.

然后可以直接验证，若 $\delta>0$ 固定且充分小，并且 $(\tilde{\varphi},\Phi)\in\mathcal{K}_\delta^A$，那么对于 $(F_1,F_2):=(F^{(S_*,\Lambda_*,\mathbf{W}_*)1},F^{(S_*,\Lambda_*,\mathbf{W}_*)2})(\tilde{\varphi},\tilde{\Phi})$，以下相容条件成立：

$$\partial_r F_1=\partial_r F_2=0\quad\text{on }\Gamma_{\text{w}}, \tag{4.27}$$

$$F_1=\partial_{x_1}F_2=0\quad\text{on }\Gamma_0^{\bar{\epsilon}}, \tag{4.28}$$

这对应于引理 3.4 的 (e) 和 (f) 两条陈述。

在 (4.27) 中，$\partial_r F_2=0$ 在 Γ_{w} 上的条件可通过直接计算并使用 (4.23)、$(S_*,\Lambda_*,\mathbf{W}_*)$ 在 Γ_{w} 上的相容条件（见 (4.11)）来验证

˜和 (4.18))，以及 $(\tilde{\varphi}, \Phi)$ 的相容条件（见 (3.9)）。特别是，用于验证 $\partial_r F_2 = 0$ 在 Γ_{w} 上的一个关键要素是

$$\begin{aligned}&(\nabla\tilde{\varphi} + \mathbf{q}_*) \cdot \partial_r(\nabla\tilde{\varphi} + \mathbf{q}_*)\\ &= (\partial_{x_1}\tilde{\varphi} + \mathbf{q}_* \cdot \mathbf{e}_1)\underbrace{\partial_r(\nabla \times \mathbf{W}_* \cdot \mathbf{e}_1)}_{(=0 \text{ on } \Gamma_{\mathrm{w}})} + (\mathbf{q}_* \cdot \mathbf{e}_\theta)\underbrace{\partial_r(\nabla \times \mathbf{W}_* \cdot \mathbf{e}_\theta)}_{(=0 \text{ on } \Gamma_{\mathrm{w}})} = 0 \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{w}}.\end{aligned}$$

如果证明 $\partial_r F_1 = 0$ 在 Γ_{w} 上成立，则可以直接验证相容条件

$$\partial_r G = 0 \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{w}} \tag{4.29}$$

for

$$G := [\tilde{\rho}_{\mathbf{u}}(S_*, \tilde{\Phi}, \nabla\tilde{\varphi} + \mathbf{q}_*)]^T (D\mathbf{q}_*)(\nabla\tilde{\varphi} + \mathbf{q}_*).$$

˜集合 V: $= (S_*, \Phi, \nabla\tilde{\varphi} + \mathbf{q}_*)$。为了计算 $\partial_r G$ 在 Γ_{w}上的值，我们利用以下事实：对于一个 y x $\in \left\{(x_1, \mathrm{x}') \in \overline{\Omega_L} : \mathrm{x}' \in \mathcal{D}, |\mathrm{x}'| \geq 1 - \frac{\bar{\epsilon}}{2}\right\}$

$$\begin{aligned}G = &\left(\tilde{\rho}_{\mathbf{u}}(\mathbf{V}) \cdot \partial_1(\nabla \times \mathbf{W}_*)\right)(\nabla\tilde{\varphi} + \nabla \times \mathbf{W}_*) \cdot \mathbf{e}_1\\ &+ \left(\tilde{\rho}_{\mathbf{u}}(\mathbf{V}) \cdot \partial_r(\nabla \times \mathbf{W}_*)\right)(\nabla\tilde{\varphi} + \nabla \times \mathbf{W}_*) \cdot \mathbf{e}_r\\ &+ \left(\tilde{\rho}_{\mathbf{u}}(\mathbf{V}) \cdot \partial_\theta(\nabla \times \mathbf{W}_*)\right)(\nabla\tilde{\varphi} + \nabla \times \mathbf{W}_*) \cdot \mathbf{e}_\theta =: g_1 + g_r + g_\theta.\end{aligned} \tag{4.30}$$

首先，我们将说明如何证明 $\partial_r g_1 = 0$ 在 Γ_{w}上成立。由（4.23）可直接得到

$$g_1 = -\frac{1}{\gamma S_* \tilde{\rho}^{\gamma-2}(\mathbf{V})}\underbrace{((\nabla\tilde{\varphi} + \nabla \times \mathbf{W}_*) \cdot \partial_1(\nabla \times \mathbf{W}_*))}_{(=:g_{1,1})}\underbrace{(\nabla\tilde{\varphi} + \nabla \times \mathbf{W}_*) \cdot \mathbf{e}_1}_{(=:g_{1,2})}.$$

由于 $\tilde{\varphi}$的轴对称性、 $\partial_r\tilde{\varphi} = 0$ 在 Γ_{w} 上的滑移边界条件以及 W_* 在 Γ_{w}上的相容条件（见（4.18））,

$$\partial_r(\nabla\tilde{\varphi} + \nabla \times \mathbf{W}_*) = (\partial_{rr}\tilde{\varphi} + \partial_r\left((\nabla \times \mathbf{W}_*) \cdot \mathbf{e}_r\right))\mathbf{e}_r \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{w}}.$$

利用 W_* 的轴对称性以及 Γ_{w} 上的边界条件 $\mathrm{W}_* = 0$ ，我们得到

$$\nabla \times \mathbf{W}_* = \partial_r(\mathbf{W}_* \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_\theta \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{w}},$$

由此可得

$$\partial_r(\nabla\tilde{\varphi} + \nabla \times \mathbf{W}_*) \cdot \partial_1(\nabla \times \mathbf{W}_*) = 0 \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{w}}.$$

由于相容条件 $\partial_r(\nabla \times \mathrm{W}_*) \cdot \mathbf{e}_{x_1} = \partial_r(\nabla \times \mathrm{W}_*) \cdot \mathbf{e}_\theta = 0$ onΓ_{w},

$$\partial_{r1}(\nabla \times \mathbf{W}_*) = \partial_{1r}((\nabla \times \mathbf{W}_*) \cdot \mathbf{e}_r)\mathbf{e}_r \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{w}},$$

由此可直接推出 $(\nabla\tilde{\varphi} + \nabla \times \mathrm{W}_*) \cdot \partial_{r1}(\nabla \times \mathrm{W}_*) = 0$ 在 Γ_{w} 上成立，因此我们得到

$$\partial_r g_{1,1} = 0 \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{w}}.$$

利用 Γ_{w} 上的滑移边界条件 $\partial_r\tilde{\varphi} = 0$ ，以及相容条件 $\partial_r(\nabla \times \mathrm{W}_*) \cdot \mathbf{e}_{x_1} = 0$ 在 Γ_{w} 上成立，我们容易得到 $\partial_r g_{1,2} = 0$ 在 Γ_{w} 上成立。因此我们得出

$$\partial_r g_1 = 0 \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{w}}.$$

经过更仔细但繁琐的计算，可以类似地验证 $\partial_r g_r = \partial_r g_\theta = 0$ 在 Γ_{w}上成立，从而得到 (4.29)。这就完全验证了 (4.27)。

利用 $(\tilde{\varphi},\Phi)$ 的相容条件（见 (3.9)），以及 (4.11) 和 (4.18) 中给出的 $(S_*,\Lambda_*,\mathsf{W}_*)$ 在 $\Gamma_0^{\bar{\epsilon}}$ 上的相容条件（Γ_0 适用于 W_*），验证 (4.28) 中所述的相容条件甚至更容易。

3. 在证明的其余部分，$(S_*,\Lambda_*,\mathsf{W}_*)$ 仍需确定。

(3-1) 现在，我们针对每个 $(\tilde{\varphi},\tilde{\Phi})\in\mathcal{K}_\delta^A$ 引入一个线性边值问题，以便通过迭代证明引理 4.7。给定 $\boldsymbol{\xi}=(\tilde{\varphi},\tilde{\Phi})\in\mathcal{K}_\delta^A$，定义如下两个线性微分算子：对于

$$\mathbf{Q}:=(S_*,\tilde{\Phi},\nabla\tilde{\varphi}+\mathbf{q}_*)\quad\text{and}\quad\mathbf{R}_t:=t(\tilde{\Phi},\nabla\tilde{\varphi})+(1-t)(\bar{\Phi},\nabla\bar{\varphi}),$$

定义 $\mathcal{L}_1^{\boldsymbol{\xi}}$ 和 $\mathcal{L}_2^{\boldsymbol{\xi}}$ 如下：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1^{\boldsymbol{\xi}}(\psi,\Psi):=&\tilde{\rho}(\mathbf{Q})\Delta\psi+[\tilde{\rho}_{\mathbf{u}}(\mathbf{Q})]^T[D^2\psi](\nabla\tilde{\varphi}+\mathbf{q}_*)+\left(\mathbf{e}_{x_1}\cdot\tilde{\rho}_{\mathbf{u}}(S_0,\bar{\Phi},\nabla\bar{\varphi})\right)\bar{u}'\partial_1\psi\\&+\bar{u}'(\nabla\tilde{\varphi}+\mathbf{q}_*)\cdot\mathbf{e}_{x_1}\Big\{\nabla\psi\cdot\int_0^1\partial_{\mathbf{u}}\left(\mathbf{e}_{x_1}\cdot\tilde{\rho}_{\mathbf{u}}\right)(S_0,\mathbf{R}_t)\,dt\\&\qquad+\Psi\int_0^1\partial_z\left(\mathbf{e}_{x_1}\cdot\tilde{\rho}_{\mathbf{u}}\right)(S_0,\mathbf{R}_t)\,dt\Big\},\\\mathcal{L}_2^{\boldsymbol{\xi}}(\psi,\Psi):=&\Delta\Psi-(\Psi,\nabla\psi)\cdot\int_0^1(\partial_z,\partial_{\mathbf{u}})\tilde{\rho}(S_0,\mathbf{R}_t)\,dt.\end{aligned}$$

接下来，定义两个函数 $f_1^{\boldsymbol{\xi}}$ 和 $f_2^{\boldsymbol{\xi}}$ 如下：

$$\begin{aligned}f_1^{\boldsymbol{\xi}}:=&F_1^{(S_*,\Lambda_*,\mathbf{W}_*)}(\tilde{\varphi},\tilde{\Phi})-\left[\mathbf{e}_{x_1}\cdot\tilde{\rho}_{\mathbf{u}}(S_0,\bar{\Phi},\nabla\bar{\varphi})\right](\bar{u}'\mathbf{q}_*\cdot\mathbf{e}_{x_1})\\&-\left[\mathbf{e}_{x_1}\cdot\left(\tilde{\rho}_{\mathbf{u}}(S_*,\tilde{\Phi},\nabla\tilde{\varphi}+\mathbf{q}_*)-\tilde{\rho}_{\mathbf{u}}(S_0,\tilde{\Phi},\nabla\tilde{\varphi})\right)\right][\bar{u}'(\nabla\bar{\varphi}+\mathbf{q}_*)\cdot\mathbf{e}_{x_1}],\\f_2^{\boldsymbol{\xi}}:=&F_2^{(S_*,\Lambda_*,\mathbf{W}_*)}(\tilde{\varphi},\tilde{\Phi})-(b-b_0)+\left(\tilde{\rho}(S_*,\tilde{\Phi},\nabla\tilde{\varphi})-\tilde{\rho}(S_0,\tilde{\Phi},\nabla\tilde{\varphi})\right).\end{aligned}$$

最后，我们引入一个与 $\boldsymbol{\xi}\in\mathcal{K}_\delta^A$ 相关联的、针对 (ψ,Ψ) 的线性边值问题：

$$\begin{cases}\mathcal{L}_1^{\boldsymbol{\xi}}(\psi,\Psi)=f_1^{\boldsymbol{\xi}}\\\mathcal{L}_2^{\boldsymbol{\xi}}(\psi,\Psi)=f_2^{\boldsymbol{\xi}}\end{cases}\quad\text{in }\Omega_L,$$

$$\begin{cases}\psi(0,r)=-\int_r^1 v_{\mathrm{en}}(t)dt,\ \partial_{x_1}\psi=u_{\mathrm{en}}-u_0-(\nabla\times\mathbf{W}_*)\cdot\mathbf{e}_{x_1}&\text{on }\Gamma_0,\\\partial_{x_1}\Psi=E_{\mathrm{en}}&\text{on }\Gamma_0,\\\partial_r\psi=0,\ \partial_r\Psi=0&\text{on }\Gamma_{\mathrm{w}},\\\partial_{x_1}\Psi=E_{\mathrm{ex}}-\bar{E}(L)&\text{on }\Gamma_L.\end{cases}\tag{4.31}$$

(3-2) 通过对命题 3.5 的证明稍作调整，我们可以确定一个常数 $L_*^{\mathrm{v}}\in(0,L]$，它取决于数据；以及两个常数 $\varepsilon_0^{\mathrm{v}}>0$ 和 $C_{\mathrm{v}}>0$，它们取决于数据和 $(L,\bar{\epsilon})$，使得若 $L\le L_*^{\mathrm{v}}$，且若

$$\max\{\delta,(1+M)\varepsilon\}\le\varepsilon_0^{\mathrm{v}},$$

则对于每个 $\boldsymbol{\xi}\in\mathcal{K}_\delta^A$，线性边值问题 (4.31) 都有唯一解 (ψ,Ψ)，并满足估计

(4.32)
$$\|\psi\|_{\mathcal{M}_*^4((0,L)\times\mathcal{D})}+\|\Psi\|_{H_*^4(\Omega_L)}\le C_{\mathrm{v}}\left((1+M)\varepsilon+\sigma(b,u_{\mathrm{en}},v_{\mathrm{en}},0,S_0,E_{\mathrm{en}},E_{\mathrm{ex}})\right),$$

以及相容条件

$$\partial_{x_1}^{k-1}\psi=0\text{ and }\partial_{x_1}^k\Psi=0\quad\text{on }\Gamma_0^{\bar{\epsilon}}\text{ in the trace sense for }k=1,3.$$

（3-3）断言：解（ψ, Ψ）是轴对称的。

固定 $\beta \in (0, 2\pi)$。给定点 $\mathrm{x} = (x_1, \mathrm{x}') \in \Omega_L (= (0, L) \times \mathcal{D})$，令 $\mathrm{x}'_\beta \in \mathbb{R}^2$表示将 x' 绕 $\mathbb{R}^2$ 逆时针旋转 β 后得到的向量。并将 (x_1, x'_β) 记为 x_β。对于函数 $g : \Omega_L \to \mathbb{R}$ 或向量场 $\mathrm{V} : \Omega_L \to \mathbb{R}^3$，令

$$g^\beta(\mathrm{x}) := g(\mathrm{x}_\beta), \quad \mathbf{V}^\beta(\mathrm{x}) := \mathbf{V}(\mathrm{x}_\beta).$$

根据 (4.11)、(4.18) 和 (4.26) 中给出的迭代集定义，可得

$$(f_1^{\boldsymbol{\xi}}, f_2^{\boldsymbol{\xi}})^\beta = (f_1^{\boldsymbol{\xi}}, f_2^{\boldsymbol{\xi}}) \quad \text{in } \Omega_L.$$

此外，可以直接验证

$$\left(\mathcal{L}_2^{\boldsymbol{\xi}}(\psi, \Psi)\right)^\beta = \mathcal{L}_2^{\boldsymbol{\xi}}(\psi^\beta, \Psi^\beta) \quad \text{in } \Omega_L.$$

此外，显然

$$\begin{aligned}&\left(\mathcal{L}_1^{\boldsymbol{\xi}}(\psi, \Psi) - [\tilde{\rho}_{\mathbf{u}}(\mathbf{Q})]^T [D^2\psi](\nabla\tilde{\varphi} + \mathbf{q}_*)\right)^\beta \\ &= \mathcal{L}_1^{\boldsymbol{\xi}}(\psi^\beta, \Psi^\beta) - [\tilde{\rho}_{\mathbf{u}}(\mathbf{Q})]^T [D^2\psi^\beta](\nabla\tilde{\varphi} + \mathbf{q}_*) \qquad \text{in } \Omega_L.\end{aligned}$$

与 (4.30) 类似，注意到

$$\left([\tilde{\rho}_{\mathbf{u}}(\mathbf{Q})]^T [D^2\psi](\nabla\tilde{\varphi} + \mathbf{q}_*)\right)^\beta = \sum_{j=1}^{3} \tilde{\rho}_{\mathbf{u}}(\mathbf{Q}^\beta) \cdot \partial_j(\nabla\psi^\beta)[(\nabla\tilde{\varphi}^\beta + (\mathbf{q}_*)^\beta) \cdot \boldsymbol{\zeta}_j]$$

对于 $(\partial_1, \partial_2, \partial_3) := (\partial_{x_1}, \partial_r, \partial_\theta)$ 和 $(\boldsymbol{\zeta}_1, \boldsymbol{\zeta}_2, \boldsymbol{\zeta}_3) := (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$。由于向量场 $\mathbf{Q}$ 和 $\nabla\tilde{\varphi} + \mathbf{q}_*$ 是轴对称的，上述右侧给出的表示直接得出

$$\left([\tilde{\rho}_{\mathbf{u}}(\mathbf{Q})]^T [D^2\psi](\nabla\tilde{\varphi} + \mathbf{q}_*)\right)^\beta = [\tilde{\rho}_{\mathbf{u}}(\mathbf{Q})]^T [D^2\psi^\beta](\nabla\tilde{\varphi} + \mathbf{q}_*) \quad \text{in } \Omega_L.$$

因此，我们得到

$$\left(\mathcal{L}_1^{\boldsymbol{\xi}}(\psi, \Psi)\right)^\beta = \mathcal{L}_1^{\boldsymbol{\xi}}(\psi^\beta, \Psi^\beta) \quad \text{in } \Omega_L.$$

注意，所有边界数据都是轴对称的，因此 (ψ^β, Ψ^β) 满足 (4.31) 中所述的所有边界条件。基于目前为止的观察，我们得出 (ψ^β, Ψ^β) 是线性边值问题 (4.31) 的解，这意味着

$$(\psi, \Psi) = (\psi^\beta, \Psi^\beta) \quad \text{in } \overline{\Omega_L}$$

对所有 $\beta \in (0, 2\pi)$ 均成立，这是由解的唯一性所致。这验证了该断言。

4. 现在我们将 (4.26) 中的常数 δ 固定为

$$\delta := 2C_{\mathrm{v}} \left((1 + M)\varepsilon + \sigma(b, u_{\mathrm{en}}, v_{\mathrm{en}}, 0, S_0, E_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{ex}})\right).$$

若常数 M、ε 和 $\sigma(b, u_{\mathrm{en}}, v_{\mathrm{en}}, 0, S_0, E_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{ex}})$ 满足条件

$$\max\{2C_{\mathrm{v}} \left((1 + M)\varepsilon + \sigma(b, u_{\mathrm{en}}, v_{\mathrm{en}}, 0, S_0, E_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{ex}})\right), (1 + M)\varepsilon\} \le \varepsilon_0^{\mathrm{v}},$$

于是，对于每个 $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{K}_\delta^A$，相应的线性边值问题 (4.31) 都有唯一解 $(\psi, \Psi)^{(\boldsymbol{\xi})}$，该解具有轴对称性，并满足估计 (4.32)。于是我们可以定义迭代映射 $\mathfrak{I}_{\mathrm{v}} : \mathcal{K}_\delta^A \to \mathcal{K}_\delta^A$如下：

$$\mathfrak{I}_{\mathrm{v}} : \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{K}_\delta^A \mapsto (\psi, \Psi)^{(\boldsymbol{\xi})} + (\bar{\varphi}, \bar{\Phi}).$$

通过对定理 2.6 的证明中步骤 1–4 的论证进行重复并作细微调整（见 §3.4），我们可以选取一个常数 $\varepsilon_1^{\mathrm{v}} \in (0, \varepsilon_0^{\mathrm{v}}]$，该常数仅依赖于数据和 $(L, \bar{\epsilon})$，使得当条件 (4.21) 成立时，对于每个 $(S_*, \Lambda_*, \mathrm{W}_*) \in \mathcal{T}_\varepsilon \times \mathcal{U}_\varepsilon \times \mathfrak{W}_{M\varepsilon}$，相应的非线性边值问题 (4.19)–(4.20) 都有唯一解，该解满足估计 (4.22)，并且在 Ω_L 中具有轴对称性。□

引理 4.6 的证明。在此证明中，我们继续假设常数 M、ε 和 σ（b、u_{en}、v_{en}、0、S_0、E_{en}、E_{ex}）满足条件 (4.21)。在整个证明过程中，(S_*, Λ_*) 在 $\mathcal{T}_\varepsilon \times \mathcal{U}_\varepsilon$ 中仍待确定。

$\widehat{\ }$ $\hat{}$ 1. 对于固定的 $\mathrm{W} \in \mathfrak{W}_{M\varepsilon}$，令 $(\hat{\varphi}, \Phi)$ 为与 $(S_*, \Lambda_*, \mathrm{W})$ 相关的非线性边$\widehat{\ }$值问题 (4.19)–(4.20) 的解。解 $(\hat{\varphi}, \Phi)$ 的唯一存在性可直接由引理 4.7 得出。此外，该解在 Ω_L 中是轴对称的。

对于由 (4.13) 给出的向量场 $\mathrm{F}_{(S_*,\Lambda_*,\widehat{\ }\mathbf{w})}(\hat{\varphi}, \hat{\Phi})$，现在我们考虑关于 W 的线性边值问题：

$$
\begin{cases}
-\Delta \mathbf{W} = \mathbf{F}^{(S_*,\Lambda_*,\widehat{\mathbf{W}})}(\hat{\varphi}, \hat{\Phi}) & \text{in } \Omega_L, \\
\partial_{x_1} \mathbf{W} = \mathbf{0} & \text{on } \Gamma_0, \\
\mathbf{W} = \mathbf{0} & \text{on } \Gamma_{\mathrm{w}}, \\
\partial_{x_1} \mathbf{W} = \mathbf{0} & \text{on } \Gamma_L.
\end{cases} \tag{4.33}
$$

利用 (4.11)、(4.13)、(4.18) 和 (4.22)，可以直接验证 $\mathrm{F}_{(S_*,\Lambda_*,\widehat{\ }\mathbf{w})}(\hat{\varphi}, \hat{\Phi})$ 满足以下性质：

(i) 存在一个常数 $k_0 > 0$，它仅取决于数据和 $(L, \bar{\epsilon})$，使得

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{F}^{(S_*,\Lambda_*,\widehat{\mathbf{W}})}(\hat{\varphi}, \hat{\Phi})\|_{H^3_*(\Omega_L)} &\le k_0 \left(\left\| \frac{\partial_r S}{|\mathrm{x}'|} \right\|_{\mathcal{M}^3_*(0,L)\times\mathcal{D}} + \left\| \frac{\partial_r \Lambda}{|\mathrm{x}'|} \right\|_{\mathcal{M}^3_*(0,L)\times\mathcal{D}} \right) \\
&\le 2k_0\varepsilon;
\end{aligned}
$$

(ii) 在 $(\Gamma_0 \cup \Gamma_L) \cap \{|\mathrm{x}'| > 1 - \frac{\bar{\epsilon}}{2}\}$ 上，相容条件

$$
\partial_{x_1} \mathbf{F}^{(S_*,\Lambda_*,\widehat{\mathbf{W}})}(\hat{\varphi}, \hat{\Phi}) = 0
$$

成立。

接着，我们应用反射法和线性椭圆边值问题的标准正则性定理（例如参见 [8, 定理 8.10 和 8.13]），并利用弱解的唯一性，然后调整引理 3.15 证明中步骤 1 的论证，可证明线性椭圆边值问题 (4.33) 存在唯一解 $\mathrm{W} \in H^4(\Omega_L) \cap H^5_{\mathrm{loc}}(\Omega_L)$，且存在一个固定常数 C_{v}，它仅取决于数据和 $(L, \bar{\epsilon})$，使得以下估计成立：

$$
\|\mathbf{W}\|_{H^5_*(\Omega_L)} \le C_{\mathrm{v}} k_0 \varepsilon. \tag{4.34}
$$

2. 断言：方程 (4.33) 的解 W 是轴对称的，并满足相容条件：

$$
\partial_r(\nabla \times \mathbf{W}) \cdot \mathbf{e}_{x_1} = 0 \quad \text{and} \quad \partial_r(\nabla \times \mathbf{W}) \cdot \mathbf{e}_\theta = 0 \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{w}}.
$$

注意，$\mathsf{F}_{(S_*,\Lambda_*,\widehat{\mathbf{w}})}(\hat{\varphi},\hat{\Phi}) = \mathfrak{g}\mathbf{e}_\theta$ for

$$\mathfrak{g} := \frac{\frac{\rho^{\gamma-1}(\hat{\varphi},\hat{\Phi},\widehat{\mathbf{W}},S_*,\Lambda_*)}{\gamma-1}\partial_r S_* + \frac{\Lambda_*}{|\mathrm{x}'|^2}\partial_r\Lambda_*}{\mathbf{u}(\hat{\varphi},\widehat{\mathbf{W}},\Lambda_*)\cdot\mathbf{e}_{x_1}}.$$

根据 [6, 命题 3.3]，若 $\mathsf{F}_{(S_*,\Lambda_*,\widehat{\mathbf{w}})}(\hat{\varphi},\hat{\Phi}) = \mathfrak{g}\mathbf{e}_\theta \in C^\alpha(\Omega_L;\mathbb{R}^3)$ 对某个 $\alpha\in(0,1)$ 成立，则方程 (4.33) 的解 W 可表示为

$$\mathbf{W} = \phi\mathbf{e}_\theta \quad \text{in } \overline{\Omega_L} \tag{4.35}$$

对于满足以下性质的函数 $\phi\colon \Omega_L\to\mathbb{R}$：

(i) 函数 ϕ 在 Ω_L 中是轴对称的；

(ii) 作为 $(x_1,r)\in[0,L]\times[0,1]$ 的函数，$\phi\in C^{2,\alpha}([0,L]\times[0,1])$ 满足

$$\begin{cases} -\left(\partial_{x_1x_1}+\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r)-\frac{1}{r^2}\right)\phi = \mathfrak{g} & \text{in } R_L := (0,L)\times(0,1),\\ \phi = 0 & \text{on } \partial R_L\cap\{r=0,1\},\\ \partial_{x_1}\phi = 0 & \text{on } \partial R_L\cap\{x_1=0,L\}. \end{cases} \tag{4.36}$$

显然，由 $\mathsf{F}_{(S_*,\Lambda_*,\widehat{\mathbf{w}})}(\hat{\varphi},\hat{\Phi}) \in H^3_*(\Omega_L)(\subset H^2(\Omega_L)\subset W^{1,6}(\Omega_L))$ 可得 $\mathsf{F}_{(S_*,\Lambda_*,\widehat{\mathbf{w}})}(\hat{\varphi},\hat{\Phi}) \in C^{1/2}(\Omega_L)$，因此 W 可表示为 (4.35)。这直接意味着 W 在 Ω_L 中是轴对称的。

直接计算可得

$$\nabla\times\mathbf{W} = \nabla\times(\phi\mathbf{e}_\theta) = \left(\partial_r\phi+\frac{\phi}{r}\right)\mathbf{e}_{x_1} - \partial_1\phi\,\mathbf{e}_r \quad \text{in } \overline{\Omega_L}. \tag{4.37}$$

于是我们立即得到

$$\partial_r(\nabla\times\mathbf{W})\cdot\mathbf{e}_\theta = 0 \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{w}}.$$

现在我们计算 $\partial_r(\nabla\times\mathbf{W})\cdot\mathbf{e}_{x_1} = \partial_{rr}\phi+\partial_r\left(\frac{\phi}{r}\right)$ 在 Γ_{w} 上。由于 ϕ 作为 (x_1,r) 的函数，除 ∂R_L 外为 C^2，由方程 $\left(\partial_{x_1x_1}+\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r)-\frac{1}{r^2}\right)\phi = -\mathfrak{g}$ 在 Ω_L 中可得

$$\partial_r(\nabla\times\mathbf{W})\cdot\mathbf{e}_{x_1} = -\mathfrak{g}-\partial_{x_1x_1}\phi \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{w}}.$$

由边界条件 $\phi=0$ 在 $r=1(\Gamma_w)$ 上成立，显然有 $\partial_{x_1x_1}\phi=0$ 在 Γ_{w} 上。此外，在 (4.11) 中规定的相容条件 $\partial_r S_* = \partial_r\Lambda_* = 0$ 在 Γ_{w} 上直接推出 $\mathfrak{g}=0$ 在 Γ_{w} 上，因此我们得出相容条件 $\partial_r(\nabla\times\mathbf{W})\cdot\mathbf{e}_{x_1}=0$ 在 Γ_{w} 上成立。断言得证。

3. 现在我们定义迭代映射 $\mathcal{V}^{(S_*,\Lambda_*)}$： $\mathfrak{W}_{M\varepsilon}\to H^5_*(\Omega_L;\mathbb{R}^3)$ 如下

$$\mathcal{V}^{(S_*,\Lambda_*)}(\widehat{\mathbf{W}}) := \mathbf{W}$$

对于方程 (4.33) 的解 W。如果将 (4.18) 中给出的常数 M 固定为如下值，那么 $\mathcal{V}^{(S_*,\Lambda_*)}$ 会将迭代集 $\mathfrak{W}_{M\varepsilon}$ 映射到其自身

$$M = 2C_{\mathrm{v}}k_0. \tag{4.38}$$

现在，假设 ε 和 $\sigma(b,u_{\mathrm{en}},v_{\mathrm{en}},0,S_0,E_{\mathrm{en}},E_{\mathrm{ex}})$ 已固定为足够小的值，使其满足不等式

$$(1+2C_{\mathrm{v}}k_0)\varepsilon+\sigma(b,u_{\mathrm{en}},v_{\mathrm{en}},0,S_0,E_{\mathrm{en}},E_{\mathrm{ex}}) \le \varepsilon_1^{\mathrm{V}}$$

从而条件 (4.21) 成立。根据索博列夫嵌入定理和 Arzel`a-Ascoli 定理，迭代集 $\mathfrak{W}_{M\varepsilon}$ 在 $C^{2,1/4}(\Omega_L)$ 中是紧的。而且，我们

可以轻松调整定理 2.6 证明中的步骤 2（见 §3.4），从而证明映射 $\mathcal{V}^{(S_*,\Lambda_*)}$ 在 $C^{2,1/4}(\Omega_L)$ 中连续。然后，结合引理 4.7 使用 Schauder 不动点定理，可得问题4.5 存在一个与 $(S_*,\Lambda_*)\in\mathcal{J}_\varepsilon$ 相关联的解 $(\varphi,\Phi,\mathrm{W})$。

4. 设 $(\varphi^{(1)},\Phi^{(1)},\mathrm{W}^{(1)})$ 和 $(\varphi^{(2)},\Phi^{(2)},\mathrm{W}^{(2)})$ 是问题4.5中与 $(S_*,\Lambda_*)\in\mathcal{J}_\varepsilon$ 相关的两个解。并且，假设它们满足估计式 (4.22)。接下来，令

$$\eta := \|(\varphi^{(1)},\Phi^{(1)})-(\varphi^{(2)},\Phi^{(2)})\|_{H^1(\Omega_L)}+\|\mathbf{W}^{(1)}-\mathbf{W}^{(2)}\|_{H^2(\Omega_L)}.$$

接着，通过调整命题 3.9 的证明，我们可以证明

$$\|(\varphi^{(1)},\Phi^{(1)})-(\varphi^{(2)},\Phi^{(2)})\|_{H^1(\Omega_L)}\le C_\flat\left(\varepsilon+\sigma(b,u_{\mathrm{en}},v_{\mathrm{en}},0,S_0,E_{\mathrm{en}},E_{\mathrm{ex}})\right)\eta \tag{4.39}$$

其中某个常数 $C_\flat>0$ fixed 仅依赖于数据。并且，利用 (4.13)，容易验证

$$\|\mathbf{W}^{(1)}-\mathbf{W}^{(2)}\|_{H^2(\Omega_L)}\le C_\sharp\left(\varepsilon+\sigma(b,u_{\mathrm{en}},v_{\mathrm{en}},0,S_0,E_{\mathrm{en}},E_{\mathrm{ex}})\right)\eta$$

其中某个常数 $C_\sharp>0$ fixed 仅依赖于数据。最后，将前面两个估计相加，得到

$$\eta\le(C_\flat+C_\sharp)\left(\varepsilon+\sigma(b,u_{\mathrm{en}},v_{\mathrm{en}},0,S_0,E_{\mathrm{en}},E_{\mathrm{ex}})\right)\eta.$$

因此，我们可以选取一个足够小的常数 $\bar\varepsilon>0$ sufficiently small，使得如果不等式

$$\varepsilon+\sigma(b,u_{\mathrm{en}},v_{\mathrm{en}},0,S_0,E_{\mathrm{en}},E_{\mathrm{ex}})\le\bar\varepsilon,$$

那么，直到步骤 3 的所有论证均成立，且 $\eta=0$ 成立。此外，可以选取这样的常数 $\bar\varepsilon$，使其仅依赖于数据和（$L,\bar\epsilon$）。证明至此完成。

□

4.2.2. 步骤 2：(S,Λ) 的初值问题。假设条件 (4.16) 成立。于是，对每个 $(S_*,\Lambda_*)\in\mathcal{J}_\varepsilon$，引理 4.6 给出与 (S_*,Λ_*) 相关的问题4.5的唯一解 $(\varphi,\Phi,\mathrm{W})$（其中 $\mathrm{W}=\phi\,\mathrm{e}_\theta$），使得该解满足估计 (4.17)。我们定义向量场 $\mathrm{m}_*:\ \Omega_L\longrightarrow\mathbb{R}^3$ 如下

$$\mathbf{m}_*=\rho(\varphi,\Phi,\phi\mathbf{e}_\theta,S_*,\Lambda_*)\left(\nabla\varphi+\nabla\times(\phi\mathbf{e}_\theta)+\frac{\Lambda_*}{|\mathrm{x}'|^2}(\mathrm{x}')^\perp\right) \tag{4.40}$$

对于由 (4.6) 给出的 $\rho(\varphi,\Phi,\phi\mathrm{e}_\theta,S_*,\Lambda_*)$。注意，$\mathrm{m}_*$ 按照定义 2.8 的意义是轴对称的。根据定义4.4，方程 $\mathcal{N}^{(S_*,\Lambda_*,\mathbf{w}_*)1}(\varphi,\Phi)=0$ 在 Ω_L 中立即推出

$$\nabla\cdot\mathbf{m}_*=0\quad\text{in }\Omega_L. \tag{4.41}$$

问题 4.8. 给定满足相容条件的径向函数 $w_{\mathrm{en}},S_{\mathrm{en}}\in C^4(\Gamma_0)$：

- $w_{\mathrm{en}}=0\quad on\ \Gamma_0^{\bar\epsilon},\quad \partial_r^k w_{\mathrm{en}}(\mathbf{0})=0\quad for\ k=0,1,2,3,$
- $S_{\mathrm{en}}=S_0\quad on\ \Gamma_0^{\bar\epsilon},\quad \partial_r^k S_{\mathrm{en}}(\mathbf{0})=0\quad for\ k=1,2,3,$

求线性初值问题的一个轴对称解 (S,Λ)：

$$\begin{cases}\mathbf{m}_*\cdot\nabla S=0\\ \mathbf{m}_*\cdot\nabla\Lambda=0\end{cases}\quad in\ \Omega_L,\quad \begin{cases}S(0,\mathrm{x}')=S_{\mathrm{en}}(\mathrm{x}')\\ \Lambda(0,\mathrm{x}')=|\mathrm{x}'|w_{\mathrm{en}}(\mathrm{x}')\end{cases}\quad on\ \Gamma_0. \tag{4.42}$$

命题 4.9。对于引理 4.6 中的常数 $\bar{\varepsilon}>0$，可以选取一个常数$\varepsilon^*\in(0,\bar{\varepsilon}]$，它仅依赖于数据和 $(L,\bar{\epsilon})$，使得如果

$$\varepsilon+\sigma(b,u_{\mathrm{en}},v_{\mathrm{en}},0,S_0,E_{\mathrm{en}},E_{\mathrm{ex}})\le\varepsilon^*, \tag{4.43}$$

于是，问题 4.8 存在唯一解 (S,Λ)，满足以下性质：

(a) 存在一个仅依赖于数据的常数 $C_\natural>0$，使得 L 满足

$$\begin{aligned}&\|S-S_0\|_{\mathcal{M}^4_*((0,L)\times\mathcal{D})}+\left\|\frac{\partial_r S}{|\mathrm{x}'|}\right\|_{\mathcal{M}^3_*((0,L)\times\mathcal{D})}\le C_\natural\|S_{\mathrm{en}}-S_0\|_{C^4(\overline{\Gamma_0})},\\&\|\Lambda\|_{\mathcal{M}^4_*((0,L)\times\mathcal{D})}+\sum_{k=0,1}\left\|\frac{\partial_r^k\Lambda}{|\mathrm{x}'|^{2-k}}\right\|_{\mathcal{M}^3_*((0,L)\times\mathcal{D})}\le C_\natural\|w_{\mathrm{en}}\|_{C^4(\overline{\Gamma_0})};\end{aligned} \tag{4.44}$$

(b) $S=S_0$ *and* $\Lambda=0$ *hold on* $\left\{(x_1,\mathrm{x}')\in\overline{\Omega_L}:|\mathrm{x}'|\ge1-\frac{\bar{\epsilon}}{2}\right\}$;

(c) $\partial_r S=0$ *and* $\partial_r\Lambda=0$ *hold on* Γ_{w};

(d) S *and* Λ *are axisymmetric in* Ω_L.

证明. 1. 在本证明中，我们将详细讨论仅关于 S 的初值问题，因为对 Λ 稍作调整后，可以重复相同的论证。

由于我们寻求一个轴对称解，使其满足

$$\begin{cases}\mathbf{m}_*\cdot\nabla S=0 & \text{in }\Omega_L\\ S(0,\mathrm{x}')=S_{\mathrm{en}}(\mathrm{x}') & \text{on }\Gamma_0\end{cases}, \tag{4.45}$$

我们令 $\mathcal{S}(x_1,r):=S(x_1,\mathrm{x}')$ 且 $\mathcal{S}_{\mathrm{en}}(r):=S_{\mathrm{en}}(\mathrm{x}')$，其中 $r=|\mathrm{x}'|$，于是只需解关于 $\mathcal{S}$ 的以下初值问题：

$$\begin{cases}(r\mathbf{m}_*\cdot\mathbf{e}_{x_1})\partial_{x_1}\mathcal{S}+(r\mathbf{m}_*\cdot\mathbf{e}_r)\partial_r\mathcal{S}=0 & \text{in } R_L:=\left\{(x_1,r)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,\begin{matrix}0<x_1<L,\\0<r<1\end{matrix}\right\},\\ \mathcal{S}(0,r)=\mathcal{S}_{\mathrm{en}}(r) & \text{on }\Sigma_0:=\partial R_L\cap\{x_1=0\}.\end{cases} \tag{4.46}$$

利用（4.41）并结合 $\mathbf{m}_*$ 的轴对称性进行直接计算可得

$$\partial_1(r\mathbf{m}_*\cdot\mathbf{e}_{x_1})+\partial_r(r\mathbf{m}_*\cdot\mathbf{e}_r)=0\quad\text{for all }(x_1,r)\in R_L. \tag{4.47}$$

定义函数 $w\colon\ [0,L]\times[0,1]\to\mathbb{R}$，使其满足

$$w(x_1,r):=\int_0^r\tau\mathbf{m}_*\cdot\mathbf{e}_{x_1}(x_1,\tau)d\tau.$$

由（4.47）可立即得到

$$(\partial_{x_1}w,\partial_r w)(x_1,r)=r(-\mathbf{m}_*(x_1,\mathrm{x}')\cdot\mathbf{e}_r,\mathbf{m}_*(x_1,\mathrm{x}')\cdot\mathbf{e}_{x_1})\quad\text{for}\quad(x_1,r)\in R_L. \tag{4.48}$$

利用（4.35）、（4.36）、（4.37）、（4.40）中给出的 $\phi=0$ 在 $\partial R_L\cap\{r=0,1\}$ 上的边界条件，以及（4.20）中给出的 $\partial_r\varphi=0$ 在 Γ_{w} 上的边界条件，可以直接验证得到

$$\partial_{x_1}w=0\quad\text{on }\partial R_L\cap\{r=0,1\}. \tag{4.49}$$

令

$$\overline{\mathbf{m}}:=\bar{\rho}\bar{u}\mathbf{e}_{x_1}=J_0\mathbf{e}_{x_1}.$$

利用估计式 (4.17)、式 (4.40) 和 (4.38) 中给出的 $\mathbf{m}_*$ 定义，我们可以直接证明

$$\|\mathbf{m}_* - \overline{\mathbf{m}}\|_{\mathcal{M}^3_*((0,L)\times\mathcal{D};\mathbb{R}^3)} \le C\left(\varepsilon + \sigma(b, u_{\mathrm{en}}, v_{\mathrm{en}}, 0, S_0, E_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{ex}})\right) \tag{4.50}$$

对于某个常数 $C>0$，它仅依赖于数据和 $(L,\bar{\varepsilon})$。因此，可以选取一个小常数 $\varepsilon^* \in (0,\bar{\varepsilon}]$，它仅依赖于数据和 $(L,\bar{\varepsilon})$，使得若

$$\varepsilon + \sigma(b, u_{\mathrm{en}}, v_{\mathrm{en}}, 0, S_0, E_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{ex}}) \le \varepsilon^*,$$

then

$$\frac{2}{5}J_0 \le \min_{\overline{\Omega_L}} \mathbf{m}_* \cdot \mathbf{e}_{x_1} \le \max_{\overline{\Omega_L}} \mathbf{m}_* \cdot \mathbf{e}_{x_1} \le \frac{8}{5}J_0. \tag{4.51}$$

在证明的其余部分，出现在各种估计中的常数 C 可以取不同的固定值，但除非另有说明，均认为它仅依赖于数据和 $(L,\bar{\varepsilon})$。

定义函数 $\mathcal{G}:[0,1]\to\mathbb{R}$ 如下：

$$\mathcal{G}(r) := w(0,r).$$

性质 (4.49) 和 (4.51) 表明

- $w(x_1,0) = w(0,0),\ w(x_1,1) = w(0,1)$ for $0 \le x_1 \le L$;
- $\partial_r w(x_1,r) > 0$ for $(x_1,r) \in [0,L]\times(0,1]$.

因此，$\mathcal{G}:[0,1]\to[w(0,0)\ w(0,1)]$ 可逆，且 $\mathcal{G}^{-1}$ 可微。定义函数 $\mathcal{T}:\overline{R}_L \to [0,1](=\partial R_L \cap \{x_1=0\})$如下：

$$\mathcal{T} := \mathcal{G}^{-1}\circ w. \tag{4.52}$$

令 $\mathcal{S}:\ \overline{R_L}\to\mathbb{R}$ 为

$$\mathcal{S}(x_1,r) := \mathcal{S}_{\mathrm{en}} \circ \mathcal{T}(x_1,r). \tag{4.53}$$

然后利用 (4.48) 可直接验证，函数 $\mathcal{S}$ 是 (4.46) 的解。这证明初值问题 (4.45) 至少有一个解

$$S(x_1,\mathrm{x}') = \mathcal{S}(x_1,|\mathrm{x}'|). \tag{4.54}$$

2.(2-1) 我们对 $\mathcal{G}\circ\mathcal{T}(x_1,r) = w(x_1,r)$ 求导，并利用 (4.48) 得到

$$D_{(x_1,r)}\mathcal{T}(x_1,r) = \frac{r}{\mathcal{T}(x_1,r)} \cdot \frac{(-\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{m}_*, \mathbf{e}_{x_1}\cdot\mathbf{m}_*)(x_1,r)}{\mathbf{e}_{x_1}\cdot\mathbf{m}_*(0,\mathcal{T}(x_1,r))} \quad \text{in } R_L. \tag{4.55}$$

根据 $\mathcal{T}$的定义以及当 $x_1\in[0,L]$时的性质 $w(x_1,0) = w(0,0)$，可直接推出

$$w(x_1,r) - w(x_1,0) = w(0,\mathcal{T}(x_1,r)) - w(0,0) \quad \text{for all } (x_1,r)\in\overline{R}_L.$$

我们对上面的方程关于 r 求导，并利用 (4.48) 得到

$$\frac{r}{\mathcal{T}(x_1,r)} = \sqrt{\frac{\int_0^1 (t\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{m}_*)(0,t\mathcal{T}(x_1,r))\,dt}{\int_0^1 (t\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{m}_*)(x_1,tr)\,dt}},$$

结合（4.51）可得

$$\frac{1}{2} \le \frac{r}{\mathcal{T}(x_1,r)} \le 2 \quad \text{in } R_L. \tag{4.56}$$

利用（4.50）、（4.51）和（4.56），由（4.55）可直接得到

$$\|D_{\mathrm{x}}\mathcal{T}\|_{C^0(\overline{\Omega_L})} \le C. \tag{4.57}$$

(2-2) 由于在 Γ_0 上由 (4.11) 所述的条件 $(S_*, \Lambda_*)(0,\mathrm{x}') = (S_{\mathrm{en}}(\mathrm{x}'), |\mathrm{x}'|w_{\mathrm{en}}(\mathrm{x}'))$，以及在 Γ_0 上为 φ 规定的边界条件（见 (4.15)），我们有

$$\mathbf{e}_{x_1}\cdot\mathbf{m}_* = \left[\frac{\gamma-1}{\gamma S_{\mathrm{en}}}\left(\Phi - \frac{1}{2}(u_{\mathrm{en}}^2 + v_{\mathrm{en}}^2 + w_{\mathrm{en}}^2)\right)\right]^{1/(\gamma-1)} u_{\mathrm{en}} \quad \text{on } \Gamma_0. \tag{4.58}$$

将问题4.5中给出的方程 $\mathcal{N}^{(S_*,\Lambda_*,\mathbf{w})}(\varphi,\Phi) = 0$ 改写为

$$\Delta\Phi = \rho(\varphi,\Phi,\mathbf{W},S_*,\Lambda_*) - b =: f_2 \quad \text{in } \Omega_L.$$

通过使用引理 4 6 $f_2 \in H^3$ $_L\cap\{x_1 < \frac{L}{2}\}$ $\partial_{x_1} f_2 = 0$ Γ_0^{ϵ} 进行直接计算可得，在 (Ω) 上以及在 上均成立。因此，我们可以在 $\overline{\Gamma_0}\cap\overline{\Gamma_{\mathrm{w}}}$ 的一个小邻域内，关于 x_1 变量应用相对于 的（偶）反射方法，并使用线性椭圆边值问题的标准正则性定理（例如，见[8, 定理8.10和8.13] ），从而得出存在一个常数 $C>0$ 使得

$$\|\Phi\|_{C^3(\overline{\Omega_L\cap\{x\le\frac{L}{4}\}})} \le C, \tag{4.59}$$

最终得到

$$\|\mathbf{e}_{x_1}\cdot\mathbf{m}_*\|_{C^3(\overline{\Gamma_0})} \le C. \tag{4.60}$$

通过运用 (4.55)、(4.56) 和 (4.60) 进行冗长但直接的计算，可以直接验证，对于 $k = 1$, 2,3,4,

$$|D_{\mathrm{x}}^k\mathcal{T}(x_1,|\mathrm{x}'|)| \le \frac{C}{|\mathrm{x}'|^{k-1}}\sum_{j=0}^{k}|D_{\mathrm{x}}^j(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{m}_*)(x_1,\mathrm{x}')| \quad \text{for } (x_1,\mathrm{x}')\in\overline{\Omega_L}. \tag{4.61}$$

3. 现在，我们简要讨论如何建立 (4.44) 中的第一个估计。首先，很容易根据 (4.54) 和 (4.57) 验证

$$\|S - S_0\|_{C^1(\overline{\Omega_L})} \le C\|S_{\mathrm{en}} - S_0\|_{C^1(\overline{\Gamma_0})}.$$

接下来，我们观察到

$$\begin{aligned}
|D_{\mathrm{x}}^2 S(x_1,\mathrm{x}')| &= |D_{\mathrm{x}}^2(\mathcal{S}_{\mathrm{en}}\circ\mathcal{T})(x_1,|\mathrm{x}'|)| \\
&\le |D_{\mathrm{x}}\mathcal{T}(x_1,|\mathrm{x}'|)|^2|\mathcal{S}_{\mathrm{en}}^{''}\circ\mathcal{T}(x_1,|\mathrm{x}'|)| + |D_{\mathrm{x}}^2\mathcal{T}(x_1,|\mathrm{x}'|)||\mathcal{S}_{\mathrm{en}}^{'}\circ\mathcal{T}(x_1,|\mathrm{x}'|)| \\
&\le \|S_{\mathrm{en}} - S_0\|_{C^2(\overline{\Gamma_0})}\left(|D_{\mathrm{x}}\mathcal{T}(x_1,|\mathrm{x}'|)|^2 + \mathcal{T}(x_1,\mathrm{x}')|D_{\mathrm{x}}^2\mathcal{T}(x_1,|\mathrm{x}'|)|\right) \\
&\le C\|S_{\mathrm{en}} - S_0\|_{C^2(\overline{\Gamma_0})}\left(1 + \underbrace{\frac{\mathcal{T}(x_1,|\mathrm{x}'|)}{|\mathrm{x}'|}}_{(\le 2 \text{ by } (4.56))}\sum_{j=0,1}|D_{\mathrm{x}}^j(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{m}_*)(x_1,\mathrm{x}')|\right),
\end{aligned}$$

其中，我们利用问题 2.9 中陈述的相容条件 $\mathcal{S}_{\mathrm{en}}'(0) = \partial_r S_{\mathrm{en}}(0) = 0$ 得到最后一个不等式。这个估计自然推出

$$\|S - S_0\|_{H^2(\Omega_L)} + \|S - S_0\|_{\mathcal{W}_{\mathcal{D}}^{2,\infty}(0,L)} \le C\|S_{\mathrm{en}} - S_0\|_{C^2(\overline{\Gamma_0})}.$$

对于式 (4.44) 中给出的估计 $S - S_0$，其余部分也可通过类似但更繁琐的计算来验证。

4. 设 $S^{(1)}$ 和 $S^{(2)}$ 是两个（不一定是轴对称的）解，满足

$$\begin{cases} \mathbf{m}_* \cdot \nabla S = 0 & \text{in } \Omega_L \\ S = S_{\text{en}} & \text{on } \Gamma_0 \end{cases}. \tag{4.62}$$

并且，假设两个解都满足（4.44）中陈述的第一个估计。令

$$Z(\mathrm{x}) := (S^{(1)} - S^{(2)})(\mathrm{x}) \quad \text{in } \Omega_L.$$

由（4.51），由 $\tilde{\mathrm{m}}_*$ 给出的向量场

$$\tilde{\mathbf{m}}_* := \frac{-\mathbf{m}_*}{\mathbf{m}_* \cdot \mathbf{e}_{x_1}} \quad \text{in } \overline{\Omega_L}$$

是定义良好的。此外，由注 2.12 可知，对于任意 $d \in (0, L)$，$Z \in C^1(\overline{\Omega_L})$ 且 $\tilde{\mathrm{m}}_* \in C^0(\overline{\Omega_L}) \cap C^1(\overline{\Omega_L \cap \{x_1 < L - d\}})$。另外，$Z$ 显然满足问题

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{m}}_* \cdot \nabla Z = 0 & \text{in } \Omega_L \\ Z = 0 & \text{on } \Gamma_0 \end{cases}.$$

对于某个 $d \in (0, L)$，取定点 $\mathrm{x}_0 = (a, \mathrm{x}'_a) \in \Omega_L \cap \{x_1 \le L - d\}$，考虑关于 $\mathrm{X} : [0, a] \to \Omega_L$ 的初值问题：

$$\begin{cases} \mathbf{X}'(t) = \tilde{\mathbf{m}}_*(\mathbf{X}(t)) & \text{for } 0 < t \le a \\ \mathbf{X}(0) = \mathrm{x}_0. \end{cases}$$

由于 $\tilde{\mathrm{m}}_* \in C^1(\overline{\Omega_L \cap \{x_1 < L - d\}})$，由常微分方程唯一存在定理容易得到，存在唯一的 C^1-解 X。此外，由于对所有 $t \in [0, a]$ 都有 $\tilde{\mathrm{m}} \cdot \mathrm{e}_{x_1} \equiv -1$，因此 $\mathrm{X}(a) \in \Gamma_0$。于是 Z 满足

$$\frac{d}{dt} Z(\mathbf{X})(t) = \mathbf{X}' \cdot \nabla Z = \tilde{\mathbf{m}}_* \cdot \nabla Z = 0 \quad \text{for all } t \in [0, a],$$

因此，由于边界条件 $Z = 0$ 在 Γ_0 上，我们得到 $Z(\mathrm{x}_0) = Z(\mathrm{X}(a)) = 0$。结合 Z 在 Γ_L 上的连续性，可推出 $Z \equiv 0$ 在 Ω_L 中成立。这证明了方程 (4.62) 的解具有唯一性。

5. 最后，我们简要提及，初值问题的解 Λ

$$\begin{cases} \mathbf{m}_* \cdot \nabla \Lambda = 0 & \text{in } \Omega_L, \\ \Lambda(0, \mathrm{x}') = |\mathrm{x}'| w_{\text{en}}(\mathrm{x}') & \text{on } \Gamma_0 \end{cases}$$

由下式给出

$$\Lambda(x_1, \mathrm{x}') = \mathcal{T}(x_1, \mathrm{x}')[w_{\text{en}} \circ \mathcal{T}](x_1, \mathrm{x}') \quad \text{in } \Omega_L. \tag{4.63}$$

命题 4.9 的证明至此完成。 □

4.2.3. 步骤 3：证明的完成。1. 在条件 (4.43) 下，定义迭代映射 $\mathcal{I}_T$：$\mathcal{J}_\varepsilon \to [H^4_*(\Omega_L) \cap \mathcal{W}^{4,\infty}_{*,\mathcal{D}}(0, L)]^2$，其定义为

$$\mathcal{I}_T(S_*, \Lambda_*) := (S, \Lambda)$$

对于与（S_*，Λ_*）相关的初值问题（4.42）的解（S，Λ）$\in \mathcal{J}_\varepsilon$。根据命题 4.9，映射 $\mathcal{I}_T$ 是良定义的。若将常数 ε 固定为

$$\varepsilon = 2C_\natural(\|S_{\text{en}} - S_0\|_{C^4(\overline{\Gamma_0})} + \|w_{\text{en}}\|_{C^4(\overline{\Gamma_0})}) \tag{4.64}$$

对于（4.44）中的常数 $C_\natural > 0$，则有

$$\begin{aligned} &\|S - S_0\|_{\mathcal{M}^4_*((0,L)\times\mathcal{D})} + \left\| \frac{\partial_r S}{|\mathrm{x}'|} \right\|_{\mathcal{M}^3_*((0,L)\times\mathcal{D})} \le \frac{\varepsilon}{2}, \\ &\|\Lambda\|_{\mathcal{M}^4_*((0,L)\times\mathcal{D})} + \sum_{k=0,1} \left\| \frac{\partial_r^k \Lambda}{|\mathrm{x}'|^{2-k}} \right\|_{\mathcal{M}^3_*((0,L)\times\mathcal{D})} \le \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{4.65}$$

给定点 $\mathrm{x} = x_1 \ ' \in \ _L \ | \ - \ 4\,56 \ \mathcal{T}\ x_1 \ | \ '| \ \le (\,, \mathrm{x}\,)\,\Omega$，若 x $\bar{\epsilon}_0$ $S_{\mathrm{en}} = S_0$ $w_{\mathrm{en}} = 0$ $\Gamma_0^{\bar{\epsilon}}$ $'| \le \frac{\bar{\epsilon}_0}{2}$，则由 $(\,.\,)$ 可得 $(\,, \mathrm{x}\,)$。注意，根据问题 2.9 中所述的相容条件，和在上。因此，由 (4.53) 和 (4.63) 可得

- $\partial_{x_1} S = 0$, and $\partial_{x_1} \Lambda = 0$ on $\Gamma_0^{\bar{\epsilon}_0}$;
- $S(\mathrm{x}) = S_0$ and $\Lambda(\mathrm{x}) = 0$ in $\{\mathrm{x} = (x_1, \mathrm{x}') \in \overline{\Omega_L} : |\mathrm{x}'| \ge 1 - \frac{\bar{\epsilon}_0}{2}\}$.

因此我们得出结论：若 $\sigma(b, u_{\mathrm{en}}, v_{\mathrm{en}}, w_{\mathrm{en}}, S_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{ex}})$（$\sigma$ 的定义见定理 2.11）满足

$$(2C_\natural + 1)\sigma(b, u_{\mathrm{en}}, v_{\mathrm{en}}, w_{\mathrm{en}}, S_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{ex}}) \le \varepsilon^* \tag{4.66}$$

（从而条件 (4.43) 成立），则迭代映射 $\mathcal{I}_T$ 将 $\mathcal{J}_\varepsilon$ 映入其自身。

2. 显然，只要证明迭代映射 $\mathcal{I}_T$ 在 $\mathcal{J}_\varepsilon$ 中有不动点，就能证明问题 4.1 的解存在。为证明 $\mathcal{I}_T$ 的不动点存在，我们应用 Schauder 不动点定理。与 §3.4 中定理 2.6 的证明一样，迭代集 $\mathcal{J}_\varepsilon$ 是由 (3.65) 给出的巴拿赫空间 $\mathcal{B}$ 的紧子集。给定一个序列 $\{(S_k, \Lambda_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{J}_\varepsilon$，它在 $[H^2(\Omega_L) \cap C^{1,1/4}(\Omega_L)]^2$, 中收敛到 $(S_\infty, \Lambda_\infty)$ $\in \mathcal{J}_\varepsilon$。令 $\mathrm{m}_*^{(k)}$ 和 $\mathrm{m}_*^{(\infty)}$ 分别为由 (4.40) 给出的、与 (S_k, Λ_k) 和 $(S_\infty, \Lambda_\infty)$ 相关联的量。对每个 $j \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，令 $(S^{(j)}, \Lambda^{(j)})$ 为 $\mathrm{m}_* = \mathrm{m}_*^{(j)}$ 对应的问题 4.8 的解。以下性质易于验证：

(i) 序列 $\{\mathrm{m}_*^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 在范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{M}^3_*((0,L)\times\mathcal{D})}$ 下有界，因此存在一个子序列 $\{\mathrm{m}^{(k_l)}_*\}_{l\in\mathbb{N}}$，其在 $C^0(\Omega_L)$ 中收敛到 $\mathrm{m}^{(\infty)}$；(ii) 利用 (4.65) 以及集合 $\overline{\mathcal{J}_\varepsilon}$ 在巴拿赫空间 $\mathcal{B}$ 中的紧性，根据陈述 (i) 可得，序列 $\{(S^{(k_l)}\ _{\Lambda^{(k_l)}})\}(= \{\mathcal{I}_T(S_{k_l}, \Lambda_{k_l})\})$ 存在一个子序列，该子序列在 $\mathcal{B}$ 中收敛到 $(S^{(\infty)}, \Lambda^{(\infty)})(= \mathcal{I}_T(S_\infty, \Lambda_\infty))$；(iii) 由于 $\mathcal{J}_\varepsilon$ 在 $\mathcal{B}$ 中紧，$\{(S^{(k)}, \Lambda^{(k)})\}_{k\in\mathbb{N}}$ 的任意子序列都存在一个子序列在 $\mathcal{B}$ 中收敛。此外，问题 4.8 的解的唯一性意味着该收敛子序列的极限为 $(S^{(\infty)}, \Lambda^{(\infty)})$。

因此，我们得出：$\mathcal{J}_\varepsilon \to \mathcal{J}_\varepsilon$ 在 $\mathcal{B}$中连续。最后，由 Schauder 不动点定理可知，映射 $\mathcal{I}_T$ 在 $\mathcal{J}_\varepsilon$中有一个不动点；结合 (4.17)、(4.35)、(4.44) 和 (4.64)，可知问题 4.1 至少有一个解（$\varphi, \Phi, \phi, S, \Lambda$），满足估计 (4.8) 和 (4.9)。此外，可以选取一个充分小的常数 $\sigma_2 > 0$，使其仅依赖于数据和（$L, \bar{\epsilon}$），从而若不等式 (4.7) 成立，则由引理2.1结合 (4.17) 和 Morrey 不等式，可得由下式给出的常数 ω_0满足估计 (4.10)：

$$\omega_0 := \frac{1}{2} \min\left\{ \bar{\delta}, \hat{\delta}, \frac{J_0}{\rho_s - \bar{\delta}} \right\}$$

– ˆ，其中常数 δ 和 δ 来自引理2.1。由此最终证明，只要将 $\sigma(b, u_{\mathrm{en}}, v_{\mathrm{en}}, w_{\mathrm{en}}, S_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{ex}})$固定得充分小，问题 4.1 至少有一个解满足命题 4.3 的陈述 (a)–(c) 中所述的全部性质。

3. 为完成命题 4.3 的证明，还需证明解的唯一性。总体步骤类似于 [1, 定理1.7 的证明，第 3] 步，但存在细微差异。假设问题 4.1 有两个解 $(S^{(1)}, \Lambda^{(1)}, \varphi^{(1)}, \Phi^{(1)}, \phi^{(1)})$ 和 $(S^{(2)}, \Lambda^{(2)}, \varphi^{(2)}, \Phi^{(2)}, \phi^{(2)})$，且它们满足估计 (4.17)。并令

$$
\begin{aligned}
&(\breve{S}, \breve{\Lambda}) := (S^{(1)} - S^{(2)}, \Lambda^{(1)} - \Lambda^{(2)}),\\
&(\breve{\varphi}, \breve{\Phi}, \breve{\mathbf{W}}) := (\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}, \Phi^{(1)} - \Phi^{(2)}, \phi^{(1)}\mathbf{e}_\theta - \phi^{(2)}\mathbf{e}_\theta),\\
&E_1 := \|\breve{S}\|_{H^1(\Omega_L)} + \left\| \frac{\breve{\Lambda}}{|\mathrm{x}'|^2} \right\|_{H^1(\Omega_L)} + \left\| \frac{\partial_r \breve{\Lambda}}{|\mathrm{x}'|} \right\|_{L^2(\Omega_L)},\\
&E_2 := \|\breve{\phi}\|_{H^1(\Omega_L)} + \|\breve{\Phi}\|_{H^1(\Omega_L)} + \|\breve{\mathbf{W}}\|_{H^2(\Omega_L)}.
\end{aligned}
$$

(3-1) 对每个 $k = 1, 2$，令映射 $\mathcal{T}_{(k)}$ 由 (4.52) 给出，该映射与 $(S^{(k)}, \Lambda^{(k)}, \varphi^{(k)}, \Phi^{(k)}, \phi^{(k)})$ 相关。于是利用 (4.53) 和 (4.63) 得到

$$
\begin{aligned}
&(S^{(1)} - S^{(2)})(x_1, \mathrm{x}') = (S_{\mathrm{en}} \circ \mathcal{T}^{(1)} - S_{\mathrm{en}} \circ \mathcal{T}^{(2)})(x_1, |\mathrm{x}'|),\\
&(\Lambda^{(1)} - \Lambda^{(2)})(x_1, \mathrm{x}') = (\mathcal{T}^{(1)}[w_{\mathrm{en}} \circ \mathcal{T}^{(1)}] - \mathcal{T}^{(2)}[w_{\mathrm{en}} \circ \mathcal{T}^{(2)}])(x_1, |\mathrm{x}'|).
\end{aligned}
$$

通过使用 (4.48)、(4.55)、(4.56) 进行冗长但直接的计算，并结合相容条件（见问题 2.9）：

$$
\partial_r^k w_{\mathrm{en}}(\mathbf{0}) = 0 \quad \text{for } k = 0, 1, 2, 3, \quad \partial_r^{\tilde{k}} S_{\mathrm{en}}(\mathbf{0}) = 0 \quad \text{for } \tilde{k} = 1, 2, 3,
$$

可以证明，存在一个小常数 $\bar{\sigma}_T > 0$ 和一个常数 $C_T > 0$，使得如果 $\sigma := \sigma(b, u_{\mathrm{en}}, v_{\mathrm{en}}, w_{\mathrm{en}}, S_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{ex}})$ 满足不等式

$$
\sigma \le \bar{\sigma}_T, \tag{4.67}
$$

则有

$$
E_1 \le C_T \sigma E_2. \tag{4.68}
$$

(3-2) 对每个 $k = 1, 2$，$(\varphi^{(k)}, \Phi^{(k)})$ 都是下列方程的解

$$
\begin{cases}
\mathcal{N}_1^{(S^{(k)}, \Lambda^{(k)}, \phi^{(k)}\mathbf{e}_\theta)}(\varphi^{(k)}, \Phi^{(k)}) = 0\\
\mathcal{N}_2^{(S^{(k)}, \Lambda^{(k)}, \phi^{(k)}\mathbf{e}_\theta)}(\varphi^{(k)}, \Phi^{(k)}) = 0
\end{cases} \quad \text{in } \Omega_L,
$$

$$
\begin{cases}
\varphi^{(k)}(0, r) = -\displaystyle\int_r^1 v_{\mathrm{en}}(t)dt,\ \partial_{x_1}\varphi^{(k)} = u_{\mathrm{en}} - (\nabla \times (\phi^{(k)}\mathbf{e}_\theta)) \cdot \mathbf{e}_{x_1} \text{ on } \Gamma_0,\\
\qquad\qquad \partial_{x_1}\Phi^{(k)} = E_{\mathrm{en}} \text{ on } \Gamma_0,\\
\partial_r\varphi^{(k)} = 0,\ \partial_r\Phi^{(k)} = 0 \text{ on } \Gamma_{\mathrm{w}},\\
\qquad\qquad \partial_{x_1}\Phi^{(k)} = E_{\mathrm{ex}} \text{ on } \Gamma_L
\end{cases}
$$

对于定义4.4给出的非线性微分算子 $\mathcal{N}_1$ 和 $\mathcal{N}_2$ 。将 $(\varphi^{(2)}, \Phi^{(2)})$ 对应的问题减去 $(\varphi^{(1)}, \Phi^{(1)})$ 对应的问题，我们可以推导出关于 $(\breve{\varphi}, \breve{\Phi})$ 的线性边值问题，它与 (3.16) 类似，且具有齐次

边界条件。因此，我们重复命题 3.9 证明中给出的论证，以证明

$$\|(\breve{\varphi},\breve{\Phi})\|_{H^1(\Omega_L)} \le C_P\left(\|\breve{\mathbf{W}}\|_{H^2(\Omega_L)} + E_1\right) \tag{4.69}$$

对于某个常数 $C_P>0$。

(3-3) 对每个 $k=1,2$，$\mathsf{W}^{(k)} := \phi^{(k)}\mathsf{e}_\theta$ 满足

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{W}^{(k)} = \mathbf{F}^{(S^{(k)},\Lambda^{(k)},\mathbf{W}^{(k)})}(\varphi^{(k)},\Phi^{(k)})(=:\mathbf{G}^{(k)}) & \text{in } \Omega_L,\\ \partial_{x_1}\mathbf{W}^{(k)} = \mathbf{0} & \text{on } \Gamma_0,\\ \mathbf{W}^{(k)} = \mathbf{0} & \text{on } \Gamma_{\mathrm{w}},\\ \partial_{x_1}\mathbf{W}^{(k)} = \mathbf{0} & \text{on } \Gamma_L \end{cases}$$

对于由 (4.13) 给出的向量场 $\mathsf{F}^{(S^{(k)},\Lambda^{(k)},\mathbf{W}^{(k)})}(\varphi^{(k)},\Phi^{(k)})$。因此 $\breve{\mathsf{W}}$ 满足以下估计

$$\|\breve{\mathbf{W}}\|_{H^2(\Omega_L)} \le C\|\mathbf{G}^{(1)}-\mathbf{G}^{(2)}\|_{L^2(\Omega_L)}$$

对于某个常数 $C>0$。利用 (4.2)、(4.6)、(4.17)、(4.68) 和 (4.69)，我们可以直接由上述估计得出，存在一个常数 $C_V>0$ 使得

$$\|\breve{\mathbf{W}}\|_{H^2(\Omega_L)} \le C_V\sigma E_2.$$

将此不等式与 (4.68) 和 (4.69) 结合起来，我们最终得到

$$E_2 \le C_P(C_V+C_T)\sigma E_2. \tag{4.70}$$

因此，若不等式

$$\sigma \le \min\left\{\frac{3}{4C_P(C_V+C_T)},\ \bar{\sigma}_T,\ \frac{\varepsilon^*}{(2C_\natural+1)}\right\}$$

成立，则由 (4.70) 可立即得到 $E_2=0$。此外，将其与 (4.68) 结合，还可得到 $E_1=0$。因此我们得出

$$(S^{(1)},\Lambda^{(1)},\varphi^{(1)},\Phi^{(1)},\phi^{(1)}) = (S^{(2)},\Lambda^{(2)},\varphi^{(2)},\Phi^{(2)},\phi^{(2)}) \quad \text{in } \overline{\Omega_L}.$$

取 L^* 和 σ_2 为下列值，即完成命题 4.3 的证明

$$L^* := L_*^{\mathrm{v}}, \quad \sigma_2 := \min\left\{\frac{3}{4C_P(C_V+C_T)},\ \bar{\sigma}_T,\ \frac{\varepsilon^*}{(2C_\natural+1)}\right\},$$

分别对应于常数 $L_*^{\mathrm{v}}\in(0,L]$，该常数来自引理 4.7。

□

4.3. 定理 2.11 的证明。

证明。固定 L^*，使其与命题 4.3 中的取值相同。

1.（存在性）给定边界数据 $(b,u_{\mathrm{en}},v_{\mathrm{en}},w_{\mathrm{en}},S_{\mathrm{en}},E_{\mathrm{en}},E_{\mathrm{ex}})$，假设不等式

$$\sigma(b,u_{\mathrm{en}},v_{\mathrm{en}},w_{\mathrm{en}},S_{\mathrm{en}},E_{\mathrm{en}},E_{\mathrm{ex}}) \le \sigma_2$$

成立。于是，由命题 4.3 可得问题 4.1 的一个轴对称解 $(\varphi,\Phi,\phi,S,\Lambda)$。对于这样的解，令 ρ 和 u 分别由 (4.6) 和 (4.2) 给出。并令压力 p 为

$$p := S\rho^\gamma.$$

于是，U $=$(u ρ, p, Φ) 是一个轴对称解，满足完整欧拉-泊松系统 (1.3)。此外，它满足问题 2.9 中陈述的所有边界条件（见 (2.19)）。进一步地，根据命题 4.3 中陈述的性质 (a)–(c)，可以直接验证解 U 满足估计 (2.20) 以及问题 2.9 中陈述的条件 (ii) 和 (iii)。

2.（唯一性）假设问题 2.9 有两个解 $(\mathrm{u}^{(1)}, \rho^{(1)}, p^{(1)}, \Phi^{(1)})$ 和 $(\mathrm{u}^{(2)}, \rho^{(2)}, p^{(2)}, \Phi^{(2)})$，且满足估计 (2.20)。

对于每个 $k = 1,\ 2$, 定义函数 $(S^{(k)}, \Lambda^{(k)}, \varphi^{(k)}, \Phi^{(k)}, \phi^{(k)}\mathrm{e}_\theta)$ 如下:

(i) $S^{(k)} := p^{(k)}(\rho^{(k)})^\gamma$; (ii) $\Lambda^{(k)}(x_1, \mathrm{x}') := \int_{|\mathrm{x}'|}^{\infty} [\mathrm{e}_\theta \cdot \mathrm{u}^{(k)}](x_1, |\mathrm{x}'|)$;

(iii) 线性边值问题

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{W} = (\partial_{x_1}(\mathbf{u}^{(k)} \cdot \mathbf{e}_r) - \partial_r(\mathbf{u}^{(k)} \cdot \mathbf{e}_{x_1}))\mathbf{e}_\theta \quad \text{in } \Omega_L, \\ \partial_{x_1} \mathbf{W} = \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma_0, \quad \mathbf{W} = \mathbf{0} \quad \text{on } \partial\Omega_L \backslash \Gamma_0 \end{cases}$$

有唯一的轴对称解 $\mathrm{W}^{(k)} = \phi^{(k)}\mathrm{e}_\theta \in H^5(\Omega_L; \mathbb{R}^3)$;

(iv) $\varphi^{(k)}(x_1, \mathrm{x}') := \displaystyle\int_0^{x_1} \left[\mathbf{u}^{(k)} \cdot \mathbf{e}_{x_1} - \frac{1}{|\mathrm{x}'|}\partial_r(|\mathrm{x}'|\phi^{(k)})\right](y, \mathrm{x}')dy.$

通过使用估计 (2.20) 进行直接计算可知，对于某个常数 $C > 0$，每个 $(S^{(k)}, \Lambda^{(k)}, \varphi^{(k)}, \Phi^{(k)}, \phi^{(k)}\mathrm{e}_\theta)$ 都满足估计 (4.8)。此外，利用方程 $-\Delta \mathrm{W} = (\partial_{x_1}(\mathrm{u}^{(k)} \cdot \mathrm{e}_r) - \partial_r(\mathrm{u}^{(k)} \cdot \mathrm{e}_x))\mathrm{e}_\theta$ in Ω_L，根据 $\varphi^{(k)}$ 的定义可以直接验证

$$\nabla\varphi^{(k)} = \mathbf{u}^{(k)} - [\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{u}^{(k)}]\mathbf{e}_\theta - \nabla \times (\phi^{(k)}\mathbf{e}_\theta) \quad \text{in } \overline{\Omega_L}.$$

将此方程与 (ii) 中给出的 $\Lambda^{(k)}$ 的定义结合起来，可得

$$\mathbf{u}^{(k)} = \nabla\varphi^{(k)} + \nabla \times (h^{(k)}\mathbf{e}_r + \phi^{(k)}\mathbf{e}_\theta) \quad \text{for } h^{(k)}(x_1, \mathrm{x}') := \int \frac{\Lambda^{(k)}(x_1, \mathrm{x}')}{|\mathrm{x}'|}\, dx_1.$$

这意味着 $(S^{(k)}, \Lambda^{(k)}, \varphi^{(k)}, \Phi^{(k)}, \phi^{(k)}\mathrm{e}_\theta)$ 是问题 4.1 的一个解。因此，我们可以固定一个常数 $\sigma_1 \in (0, \sigma_2]$，它仅依赖于数据和 $(L, \bar{\epsilon})$，使得若不等式

$$\sigma(b, u_{\mathrm{en}}, v_{\mathrm{en}}, w_{\mathrm{en}}, S_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{en}}, E_{\mathrm{ex}}) \le \sigma_1$$

成立，则 §4.2.3 中给出的论证（见步骤 3）可得

$$(S^{(1)}, \Lambda^{(1)}, \varphi^{(1)}, \Phi^{(1)}, \phi^{(1)}\mathbf{e}_\theta) = (S^{(2)}, \Lambda^{(2)}, \varphi^{(2)}, \Phi^{(2)}, \phi^{(2)}\mathbf{e}_\theta) \quad \text{in } \overline{\Omega_L},$$

由此可直接推出

$$(\mathbf{u}^{(1)}, \rho^{(1)}, p^{(1)}, \Phi^{(1)}) = (\mathbf{u}^{(2)}, \rho^{(2)}, p^{(2)}, \Phi^{(2)}) \quad \text{in } \overline{\Omega_L}.$$

这就完成了定理 2.11 的证明。

□

Appendix A. Proof of Lemma 3.18

证明。在 $\mathbb{R}^2$ 中，取一个边界 $^-$ 光滑的开、连通且有界的区域 $\mathcal{D}$。对于常数 $L \in$（0, L], 定义三维圆柱 Ω_L 为

$$\Omega_L := \left\{\mathrm{x} = (x_1, \mathrm{x}') \in \mathbb{R}^3 :\ 0 < x_1 < L,\, \mathrm{x}' = (x_2, x_3) \in \mathcal{D}\right\}.$$

并固定一个函数 u: $\Omega_L \overline{\to} \mathbb{R}$。

1.（关于 Γ_0的延拓）假设 u 满足相容条件

$$\partial_{x_1}^{k-1} u = 0 \quad \text{on } \Gamma_0^{\bar{\epsilon}} \text{ for } k = 1, 3. \tag{A.1}$$

首先，我们将 u 延拓为

$$\mathcal{R}u(x_1, \mathrm{x}') := \begin{cases} u(x_1, \mathrm{x}') & \text{for } 0 \le x_1 < L, \\ -u(-x_1, \mathrm{x}') & \text{for } -\frac{L}{2} < x_1 < 0. \end{cases}$$

接下来，我们将 u 延拓为另一种形式

$$\mathcal{S}u(x_1, \mathrm{x}') := \begin{cases} u(x_1, \mathrm{x}') & \text{for } 0 \le x_1 < L, \\ \sum_{j=0}^{4} c_j u(-\frac{x_1}{2^j}, \mathrm{x}') & \text{for } -\frac{L}{2} < x_1 < 0 \end{cases}$$

对于满足以下线性方程组的 $(c_0, c_1, \cdots, c_4)$:

$$\sum_{j=0}^{4} \left(-\frac{1}{2^j}\right)^k c_j = 1 \quad \text{for } k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

由于 $\partial\mathcal{D}$ 是光滑的，我们可以取一个光滑函数 $\xi : \overline{\mathcal{D}} \to \mathbb{R}_+$，使其满足以下性质:

$$\xi(\mathrm{x}') = \begin{cases} 1 & \text{if } \operatorname{dist}(\mathrm{x}', \partial\mathcal{D}) \le \frac{3\bar{\epsilon}}{4} \\ 0 & \text{if } \operatorname{dist}(\mathrm{x}', \partial\mathcal{D}) \ge \frac{4\bar{\epsilon}}{5} \end{cases} \quad \text{and} \quad 0 \le \xi \le 1 \text{ in } \overline{\mathcal{D}}.$$

最后，我们将 u 延拓到 $(-\frac{L}{2}, L) \times \mathcal{D}_*$ 上，记为 $\mathcal{E}u$

$$\mathcal{E}u(x_1, \mathrm{x}') := \begin{cases} u(x_1, \mathrm{x}') & \text{for } \mathrm{x} = (x_1, \mathrm{x}') \in \overline{\Omega_L}, \\ \xi(\mathrm{x}')\mathcal{R}u(x_1, \mathrm{x}') + (1 - \xi(\mathrm{x}'))\mathcal{S}u & \text{for } \mathrm{x} = (x_1, \mathrm{x}') \in (\overline{\Omega_L})^c. \end{cases}$$

上文给出的线性延拓算子 $\mathcal{E}$: $H^4_*(\Omega_L) \cap \mathcal{W}^{4,*}_{\mathcal{D}}{}^{\infty}(0, L) \to H^4_*((-\frac{L}{2}, L) \times \mathcal{D}) \cap \mathcal{W}^{4,*}_{\mathcal{D}}{}^{\infty}(-\frac{L}{2}, L)$，若函数 u 满足 (A.1)，则具有以下性质:

(i) $\mathcal{E}u = u$ 属于 Ω_L; (ii) $\mathcal{E}u$ 关于 x_1 在 $x_1 = 0$ 处为奇函数，对 $\mathrm{x} = (x_1, \mathrm{x}')$ 且 $|x_1| < \frac{L}{4}$、$\operatorname{dist}(\mathrm{x}', \partial\mathcal{D}) \le \frac{3\bar{\epsilon}}{4}$ 成立; (iii) 存在常数 $\mu_1 > 0$，仅依赖于 $(\mathcal{D}, L)$，使得

$$\begin{aligned} \|\mathcal{E}u\|_{H^4_*((-\frac{L}{2}, L)\times\mathcal{D})} &\le \mu_1 \|u\|_{H^4_*(\Omega_L)}, \\ \|\mathcal{E}u\|_{\mathcal{W}^{4,\infty}_{*,\mathcal{D}}(-\frac{L}{2}, L)} &\le \mu_1 \|u\|_{\mathcal{W}^{4,\infty}_{*,\mathcal{D}}(0,L)}. \end{aligned} \tag{A.2}$$

2. 设 $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是满足以下条件的光滑函数:

- 对所有 $x_1 \in \mathbb{R}$, $\chi(x_1) \ge 0$; -
对所有 $x_1 \in \mathbb{R}$, $\chi(x_1) = \chi_1(-x_1)$; -
$\operatorname{spt}\chi \subset (-1, 1)$; - $\int_{\mathbb{R}} \chi(x_1)\, dx_1 = 1$。

对于常数 $\tau > 0$，我们定义函数 $\chi^{(\tau)}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 如下:

$$\chi^{(\tau)}(x_1) := \frac{1}{\tau}\chi\left(\frac{x_1}{\tau}\right).$$

我们将远离 Γ_L 的 u 定义为部分光滑逼近:

$$u_1^{(\tau)}(x_1, \mathrm{x}') := \int_{\mathbb{R}} \mathcal{E}u(x_1 - y_1, \mathrm{x}')\chi^{(\tau)}(y_1)\, dy_1. \tag{A.3}$$

引理 A.1. 对于满足不等式 $0<\tau<\frac{1}{10}\min\{1,\frac{L}{2}\}$ 的每个常数 $\tau>0$，由 (A.3) 给出的函数 $u_1^{(\tau)}$ 满足以下性质：

(a) 对每个固定的 $\mathrm{x}'\in\mathcal{D}$，$u_1^{(\tau)}(\cdot,\mathrm{x}')$ 关于 $x_1\in[0,\frac{9}{10}L]$是 C^∞；(b) 相容条件 $\partial_{\mathbf{n}_w}u_1^{(\tau)}=0$ 在 Γ_{w}上成立；(c) 相容条件 $\partial_{x_1}^{k-1}u_1^{(\tau)}=0$ 对 $k=1,3$ 在 $\Gamma_0^{\bar\epsilon/2}$ 上成立；(d) 存在一个仅依赖于 $(\mathcal{D},L)$ 的常数 $\tilde\mu>0$，使得以下估计成立：

$$\|u_1^{(\tau)}\|_{H^4(\Omega_{9L/10})}\le\tilde\mu\|u\|_{H^4(\Omega_{9L/10})},\tag{A.4}$$

$$\|u_1^{(\tau)}\|_{\mathcal{W}^{4,\infty}_{\mathcal{D}}(0,9L/10)}\le\tilde\mu\|u\|_{\mathcal{W}^{4,\infty}_{\mathcal{D}}(0,9L/10)};\tag{A.5}$$

(e) $\lim_{\tau\to0+}\|u_1^{(\tau)}-u\|_{H^4(\Omega^{9L/10})}=0$。

3. 为了将函数 u 延拓至边界 Γ_L，我们将使用平移算子。对于满足不等式 $0<\tau<\frac{1}{10}\min\{1,\frac{L}{2}\}$ 的常数 τ，定义平移算子 T_τ 如下：

$$T_\tau u(x_1,\mathrm{x}'):=u(x_1-2\tau,\mathrm{x}').$$

并且，我们定义函数 $u_2^{(\tau)}$ 如下：

$$u_2^{(\tau)}(x_1,\mathrm{x}'):=(T_\tau u_1^{(\tau)})(x_1,\mathrm{x}').$$

那么，函数 $u_2^{(\tau)}$ 满足以下性质：

(i) 对每个固定的 $\mathrm{x}'\in\mathcal{D}$，$u_2^{(\tau)}(\cdot,\mathrm{x}')$ 关于 $x_1\in[\frac{L}{2},L]$ 是 C^∞；(ii) $\lim_{\tau\to0+}\|u_2^{(\tau)}-u\|_{H^3(\Omega_L\cap\{x_1>\frac{L}{2}\})}=0$；(iii) 相容条件 $\partial_{\mathbf{n}_w}u_2^{(\tau)}=0$ 在 $\Gamma_{\mathrm{w}}\cap\{x_1>\frac{4}{5}L\}$上成立。

4. 设 ζ 为一个满足以下性质的截断函数：

(i) $\zeta\in C^\infty(\mathbb{R})$;

(ii) $\zeta(x_1)=\begin{cases}1 & \text{for } x_1<\frac{L}{2},\\ 0 & \text{for } x_1>\frac{2}{3}L;\end{cases}$

(iii) $0\le\zeta\le1\quad\text{and}\quad\zeta'\le0\quad\text{on }\mathbb{R}.$

最后，我们定义 u 的一个部分光滑的全局逼近如下：

$$u^{(\tau)}(\mathrm{x}):=\zeta(x_1)u_1^{(\tau)}(\mathrm{x})+(1-\zeta(x_1))u_2^{(\tau)}(\mathrm{x})\tag{A.6}$$

对于 $\mathrm{x}=(x_1,\mathrm{x}')\in\Omega_L$

引理 A.2. 假设函数 $u\in H^4_*(\Omega_L)\cap\mathcal{W}^{4,\infty}_{*,\mathcal{D}}(0,L)$ 满足相容条件 (A.1)。那么，存在一个仅依赖于 $(\mathcal{D},L,\bar\epsilon)$ 的充分小常数 $\bar\tau>0$，使得对于任意 $\tau\in(0,\bar\tau]$，由 (A.6) 给出的函数 $u^{(\tau)}$ 满足以下性质：

(a) 对每个固定的 $\mathrm{x}'\in\mathcal{D}$, $u^{(\tau)}(\cdot,\mathrm{x}')$ 关于 $x_1\in[0,L]$ 是 C^∞；(b) 相容条件 $\partial_{\mathbf{n}_w}u^{(\tau)}=0$ 在 Γ_{w} 上成立；(c) 相容条件 $\partial_{x_1}^{k-1}u^{(\tau)}=0$ 对于 $k=1,3$ 在 $\Gamma_0^{\bar\epsilon/2}$ 上成立；(d) $\lim_{\tau\to0+}\|u^{(\tau)}-u\|_{H^3(\Omega_L)}=0$;

(e) 存在一个仅依赖于 $(\mathcal{D}, L)$ 的常数 $\mu > 0$，使得对于任意给定的满足不等式 $0 < \tau < \frac{1}{10}\min\{1, \frac{L}{2}\}$ 的 τ，函数 $u^{(\tau)}$ 满足以下估计：

$$\|u^{(\tau)}\|_{H^4_*(\Omega_L)} \le \mu \|u\|_{H^4_*(\Omega_L)}, \tag{A.7}$$

$$\|u^{(\tau)}\|_{\mathcal{W}^{4,\infty}_{*,\mathcal{D}}(0,L)} \le \mu \|u\|_{\mathcal{W}^{4,\infty}_{*,\mathcal{D}}(0,L)}. \tag{A.8}$$

证明。(a)–(d) 中的陈述可直接由定义 (A.6) 验证。因此，我们只需证明陈述 (e)。

对于 $k = 0, 1, \cdots, 4$，我们有

$$\begin{aligned} D^k u^{(\tau)}(\mathrm{x}) &= \zeta(x_1) D^k u_1^{(\tau)}(\mathrm{x}) + (1-\zeta(x_1)) T_\tau(D^k u_1^{(\tau)})(\mathrm{x}) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{k} D^j \zeta(x_1) \left(D^{k-j} u_1^{(\tau)} - T_\tau(D^{k-j} u_1^{(\tau)}) \right)(\mathrm{x}). \end{aligned} \tag{A.9}$$

利用上方右侧给出的表达式，可以直接验证

$$\|u^{(\tau)}\|_{H^3(\Omega_L)} \le \mu \|u\|_{H^3(\Omega_L)} \quad \text{and} \quad \|u^{(\tau)}\|_{\mathcal{W}^{3,\infty}_{\mathcal{D}}(0,L)} \le \mu \|u\|_{\mathcal{W}^{3,\infty}_{\mathcal{D}}(0,L)}$$

对于某个常数 $\mu > 0$，它仅取决于 $(\mathcal{D}, L)$。

在 (A.9) 中取 $k = 4$，我们可以将 $D^4 u^{(\tau)}$ 写为

$$D^4 u^{(\tau)} = \mathcal{M}_\tau + \mathcal{R}_\tau$$

for

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\tau &:= \zeta(x_1) D^4 u_1^{(\tau)} + (1-\zeta(x_1)) D^4 u_2^{(\tau)}, \\ \mathcal{R}_\tau &:= \sum_{m=1}^{4} D^m \zeta(x_1) \left(D^{4-m} u_1^{(\tau)} - D^{4-m} u_2^{(\tau)} \right). \end{aligned}$$

由于 $|D^m \zeta| = 0$ 对于 $x_1 \ge \frac{2}{3}L$，直接计算可知，存在一个仅依赖于 $(\mathcal{D}, L)$ 的常数 $\lambda_0 > 0$，使得对于任意给定的满足不等式 $0 < \tau < \frac{1}{10}\min\{1, \frac{L}{2}\}$ 的 τ，我们有如下估计

$$\|\mathcal{R}_\tau\|_{L^2(\Omega_L)} \le \lambda_0 \|u\|_{H^4(\Omega_L \cap \{x_1 < \frac{5}{6}L\})}.$$

对于 $d \ge \frac{L}{4}$，可以直接验证，若 $\tau < \frac{L}{10}$，则 $\mathcal{M}_\tau$ 满足如下估计

$$\|\mathcal{M}_\tau\|_{L^2(\Omega_L \cap \{x_1 < L-d\})} \le \lambda_1 \|u\|_{H^4(\Omega_L) \cap \{x_1 < \frac{9}{10}L\}}$$

其中某个常数 $\lambda_1 > 0$ 固定，仅依赖于 $(\mathcal{D}, L)$。

接下来，固定 $d \in (0, \frac{L}{4})$。由于 $\zeta(x_1) = 0$ 对于 $x_1 \ge \frac{3}{4}L$，我们有如下估计

$$\|\zeta D^4 u_1^{(\tau)}\|_{L^2(\Omega_L \cap \{x_1 < L-d\})} \le \lambda_2 \|u\|_{H^4(\Omega_L \cap \{x_1 < \frac{3}{4}L\})}$$

其中某个常数 $\lambda_2 > 0$ fixed 仅依赖于 $(\mathcal{D}, L)$。

现在我们来估计 $\|(1-\zeta)D^4u_2^{(\tau)}\|_{L^2(\Omega_L\cap\{x_1<L-d\})}$。首先，我们可以直接验证

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_L\cap\{x_1<L-d\}}|(1-\zeta(x_1))D^4u_2^{(\tau)}|^2\,d\mathrm{x}\\
&\le\int_{\Omega_L\cap\{\frac{L}{2}<x_1<L-d\}}|D^4T_\tau u_1^{(\tau)}(\mathrm{x})|^2\,d\mathrm{x}\\
&\le\int_{\Omega_L\cap\{\frac{L}{2}<x_1<L-d\}}\int_{(-\tau,\tau)}|D^4\mathcal{E}u(x_1-2\tau-y_1,\mathrm{x}')|^2\chi_1^{(\tau)}(y_1)\,dy_1d\mathrm{x}\\
&\le\int_{\Omega_L\cap\{\frac{L}{4}<x_1<L-d-\tau\}}|D^4u(\mathrm{x})|^2\,d\mathrm{x}\\
&\le(d+\tau)^{-1}\|u\|^2_{H^4_*(\Omega_L)}\\
&\le d^{-1}\|u\|_{H^4_*(\Omega_L)}.
\end{aligned}$$

因此，我们可以证明估计 (A.7)。由于估计 (A.8) 可以类似地验证，故略去其证明。□

只需对步骤 1 稍作调整（简单地将 $\mathcal{R}$ 定义为（关于 $x_1=0$ 的）偶延拓算子），即可容易地得到以下引理：

引理 A.3. 假设函数 $w\in H^4_*(\Omega_L)$ 满足以下两个相容条件：

$$\begin{aligned}
&\partial_{\mathbf{n}_w}w=0\quad on\ \Gamma_{\mathrm{w}},\\
&\partial_{x_1}^kw=0\quad on\ \Gamma_0^{\bar\epsilon}\ for\ k=1,3.
\end{aligned}$$

于是，可以固定一个仅依赖于 $(\mathcal{D},L,\bar\epsilon)$ 且充分小的常数 $\bar\tau>0$，使得对于任意 $\tau\in(0,\bar\tau]$，都可以定义 w 的一个近似 $w^{(\tau)}$，使其满足以下性质：

(a) 对每个固定的 $\mathrm{x}'\in\mathcal{D}$，$w^{(\tau)}(\cdot,\mathrm{x}')$ 关于 $x_1\in[0,L]$ 是 C^∞；(b) 相容条件 $\partial_{\mathbf{n}_w}w^{(\tau)}=0$ 在 Γ_{w} 上成立；(c) 相容条件 $\partial_{x_1}^kw^{(\tau)}=0$ 对于 $k=1,3$ 在 $\Gamma_0^{\bar\epsilon/2}$ 上成立；(d) $\lim_{\tau\to0+}\|w^{(\tau)}-w\|_{H^3(\Omega_L)}=0$；(e) 存在一个仅依赖于 $(\mathcal{D},L)$ 的常数 $\mu>0$，使得对于任意满足不等式 $0<\tau<\frac{1}{10}\min\{1,\frac{L}{2}\}$ 的给定 τ，函数 $w^{(\tau)}$ 满足以下估计：

$$\|w^{(\tau)}\|_{H^4_*(\Omega_L)}\le\mu\|w\|_{H^4_*(\Omega_L)}.$$

5. 对于每个 $m\in\mathbb{N}$，令

$$\tau_m:=\frac{1}{10m}\min\left\{1,\frac{L}{2}\right\}.$$

˜最后，若我们将 ψ_m 定义为如下形式，则引理 3.18 的证明完成：

$$\tilde\psi_m:=\tilde\psi^{(\tau_m)}$$

对于通过应用引理 A.2 得到的 $\tilde\psi^{(\tau)}$，并且若我们将 $\tilde\Psi_m$ 定义为如下形式：

$$\tilde\Psi_m:=\tilde\Psi^{(\tau_m)}$$

其中 $\tilde\Psi^{(\tau)}$ 由应用引理 A.3 得到。 □

Appendix B. A comment on the proof of Lemma 3.3

命题 B.1. 给定希尔伯特空间 H，我们有

$$(L^1(0,L;H))^* = L^\infty(0,L;H).$$

为了验证命题 B.1，我们将应用以下引理：

引理 B.2. [7, 第四章，定理 1] 设 (Ω, Σ, μ) 是一个有限测度空间，$1 \le p < \infty$，且 X 是一个巴拿赫空间。那么 $L_p(\mu, X)^* = L_q(\mu, X^*)$，其中$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，当且仅当 X^* 具有关于 μ的 Radon-Nikod´ym 性质。

在应用引理 B.2 证明命题 B.1 时，我们取 $X = H$，因此根据里斯表示定理有 $X^* = H$。并且，我们取

$$\Omega = (0, L), \quad \mu = m(\text{Lebesgue measure}).$$

因此需要探讨的主要问题如下：

问题。希尔伯特空间 H 是否相对于 $(0, L)$ 上的勒贝格测度 m 满足拉东-尼科迪姆´性质?

定义 B.3。若对每个 μ-连续且有界变差的向量测度 $G\colon \Sigma \to X$，都存在 $g \in L_1(\mu, X)$ 使得，一个巴拿赫空间 X 就具有相对于 (Ω, Σ, μ) 的拉东-尼科迪姆´性质

$$G(E) = \int_E g \, d\mu$$

对所有 $E \in \Sigma$ 均成立。

引理 B.4（冯·诺伊曼，[7, 第 IV 章，推论 4]）。希尔伯特空间具有拉东-尼科迪姆´性质。

命题 B.1 的证明。现在，命题 B.1 可由引理 B.2 和引理 B.4 轻易得到。□

Appendix C. A comment on Lemma 3.7

喷管长度 L 的上界 L^* 的设定目的仅在于实现引理 3.7；该引理是针对由一个二阶双曲型微分方程和一个二阶椭圆方程弱耦合而成的线性方程组的解建立先验 H^1-估计（见命题 3.9）的关键。正如我们之前提到的，引理 3.7 的证明可以通过沿用 $[1,5]$, 中的论证加以验证，其中引入了一个能量权函数，并利用它推导出先验 H^1-估计。在本附录中，我们给出一个不同于 $[1,5]$ 中所用函数的能量权函数，从而可以在附加假设下以不同方式确定上界 L^*。这一思想源自文献 $[4]$ 的工作，该工作研究了欧拉-泊松系统的多维 C^1-加速跨声速流的存在性。在该工作中，我们将背景马赫数的平移作为能量权函数。由于条件（2.16），这一特殊选择成为可能。给出该条件是为了克服由 Ω_L 的壁面边界 Γ_w 非平坦而产生的技术困难。有趣的是，条件（2.16）意味着背景解在喷管入口附近发生减速，而这一观察是引理 C.1 的关键。

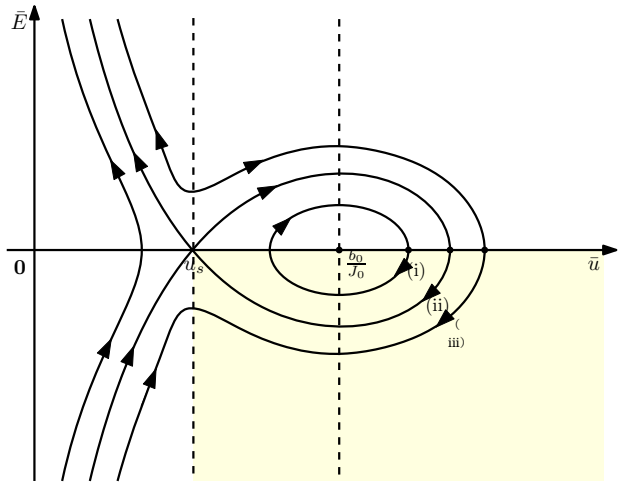


Figure 1. $\bar{u}$-E 相平面：在（i）中，背景解是周期的，因此我们有 $L^* < L$。在（ii）和（iii）中，我们可以固定 L^* 为 $L^* = L$。

给定常数 $\rho_0 \in (0, \rho_s)$，设 $(\bar{\rho}, \bar{u}, S_0, \Phi_0)$ 为根据定义 2.2 与 $(\rho_0, 0)$ 相关的 (1.3) 的背景解。对于固定常数 $\delta \in (0, \rho_s)$，

令 L 为引理2.1中给出的常数。于是，可以取常数 $L^* \in (0, L]$，使背景解满足以下性质（见图1）：

$$\bar{\rho}'(x_1) > 0 (\Leftrightarrow \bar{u}'(x_1) < 0), \quad \bar{u}(x_1) > u_s (:= \frac{J_0}{\rho_s}), \quad \bar{E}(x_1) < 0 \quad \text{for } x_1 \in (0, L^*].$$

引理 C.1. 固定常数 $\mathfrak{a} \in (0, L^*)$，并令 ε_0 为引理 3.4 中给出的小常数。于是，存在一个仅依赖于数据和 $\mathfrak{a}$ 的小常数 $d \in (0,1)$，使得如果

- L 满足 $L \le L^* - \mathfrak{a}$，- 根据 $\mathcal{J}_\delta$ 的定义 (3.10)，
δ 满足 $\delta \le \varepsilon_0$，- 对于 $x_1 \in [\mathfrak{a}, L + \mathfrak{a}]$，有

$$\frac{\bar{u}(\mathfrak{a})}{u_s} - d \le \frac{\bar{u}(x_1)}{u_s} \le \frac{\bar{u}(\mathfrak{a})}{u_s}, \tag{C.1}$$

于是，对于某些正的常数 μ_0 和 μ_1 （它们仅依赖于数据和 $\mathfrak{a}$），不等式 (3.24) 成立。

证明。背景解 $(\bar{\rho}, \bar{u}, S_0, \Phi(=\int \bar{E}\, dx_1))$ 的马赫数函数 $M(x_1)$（按照定义 2.2 的含义）由下式给出

$$M(x_1) := \frac{\bar{u}(x_1)}{\sqrt{\gamma S_0 \bar{\rho}^{\gamma-1}(x_1)}}.$$

对于两个待确定的常数 $\mathfrak{a} \in (0, L^*)$ 和 $\eta > 0$，令常数 K 为

$$K := M(\mathfrak{a}), \tag{C.2}$$

并定义函数 $\mathfrak{M} : [0, L] \to \mathbb{R}$ 如下

$$\mathfrak{M}(x_1) := \left(\frac{M(x_1 + \mathfrak{a})}{K} \right)^\eta =: (\mathcal{R}_\mathfrak{a})^\eta(x_1). \tag{C.3}$$

那么 $\mathfrak{M}$ 满足以下性质：

$$\mathfrak{M}'(x_1)(= \eta \mathcal{R}_\mathfrak{a}^{\eta-1} \mathcal{R}_\mathfrak{a}') < 0 \quad \text{and} \quad 0 < \mathfrak{M}(L) < \mathfrak{M}(x_1) < 1 \quad \text{for } 0 < x_1 < L.$$

我们将 (3.23) 中给出的项 $\mathcal{I}_{\text{main}}$ 改写如下：

$$\mathcal{I}_{\text{main}} = \mathcal{I}_{\text{bd}} + \mathcal{I}_{\text{coer}} + \mathcal{I}_{\text{mix}}$$

其中 $\mathcal{I}_{\text{bd}}$、$\mathcal{I}_{\text{coer}}$ 和 $\mathcal{I}_{\text{mix}}$ 定义为

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\text{bd}} &:= \int_{\Gamma_L} ((\partial_1 V)^2 - \sum_{i,j=2}^{3} a_{ij} \partial_i V \partial_j V) \frac{\mathfrak{M}}{2} d\mathbf{x}' - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} g_1^2 \mathfrak{M} d\mathbf{x}', \\
\mathcal{I}_{\text{coer}} &:= \int_{\Omega_L} (\bar{a}_1 \mathfrak{M} - \frac{1}{2}\mathfrak{M}')(\partial_1 V)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=2}^{3} \partial_1(\bar{a}_{ij}\mathfrak{M}) \partial_i V \partial_j V d\mathbf{x} \\
&\quad + \int_{\Omega_L} |\nabla W|^2 + \bar{h}_1 W^2 d\mathbf{x}, \\
\mathcal{I}_{\text{mix}} &:= \int_{\Omega_L} (\bar{b}_1 \partial_1 W + \bar{b}_2 W) \mathfrak{M} \partial_1 V + \bar{h}_2 W \partial_1 V d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

由于 $\mathfrak{M} > 0$ 和 $[a_{ij}]_{i,\,j=2}^3$ 是负定的（见引理 3.4(c)），因此存在正的常数 ν_0 和 ν_1，使得

$$\mathcal{I}_{\text{bd}} \ge \nu_0 \int_{\Gamma_L} |\nabla V|^2 d\mathbf{x}' - \nu_1 \int_{\Gamma_0} g_1^2 d\mathbf{x}'.$$

利用柯西-施瓦茨不等式，可以验证

$$\mathcal{I}_{\rm coer}+\mathcal{I}_{\rm mix}\geq\int_{\Omega_L}\alpha|\partial_1 V|^2+\frac{1}{2}\sum_{i,j=2}^{3}\partial_1(\bar{a}_{ij}\mathfrak{M})\partial_i V\partial_j V d\mathbf{x}+\int_{\Omega_L}\frac{3}{4}|\nabla W|^2+\frac{3}{4}\bar{h}_1 W^2 d\mathbf{x}$$

其中 α 定义为

$$\alpha:=(\bar{a}_1\mathfrak{M}-\frac{1}{2}\mathfrak{M}')-2(\bar{b}_1\mathfrak{M})^2-\frac{2}{\bar{h}_1}(\bar{b}_2\mathfrak{M}+\bar{h}_2)^2.$$

若能找到满足以下条件的常数 $\mu>0$，则不等式 (3.24) 可取等号

$$\alpha\geq\mu\quad\text{and}\quad[\partial_1(\bar{a}_{ij}\mathfrak{M})]_{i,j=2}^3\geq\mu\mathbb{I}_2\quad\text{in }\overline{\Omega_L}. \tag{C.4}$$

由于 $\bar{a}_{23}=\bar{a}_{32}=0$ 和 $\bar{a}_{22}=\bar{a}_{33}$，(C.4) 等价于

$$\alpha(x_1)\geq\mu\quad\text{and}\quad\partial_1(\bar{a}_{22}\mathfrak{M})(x_1)\geq\mu\quad\text{in }\overline{\Omega_L}. \tag{C.5}$$

容易验证，当且仅当 η 满足以下条件时，$\partial_1(\overline{\bar{a}_{22}\mathfrak{M}})\geq M_{\mathfrak{a}}^{\eta}$ 在 Ω_L 中成立

$$\eta\geq\frac{(\mathcal{R}_{\mathfrak{a}})^{\eta}(x_1)-\partial_1\bar{a}_{22}(\mathcal{R}_{\mathfrak{a}})^{\eta}(x_1)}{\bar{a}_{22}(\mathcal{R}_{\mathfrak{a}})^{\eta-1}(x_1)\mathcal{R}_{\mathfrak{a}}'(x_1)}\quad\text{for}\leq x_1\leq L. \tag{C.6}$$

因此，我们将选取满足以下条件的 $\mu\in(0,1]$ 和 η

(C.7)

$$0<\mu\leq\min_{x_1\in[0,L]}(\mathcal{R}_{\mathfrak{a}})^{\eta}(x_1)=(\mathcal{R}_{\mathfrak{a}})^{\eta}(L)\quad\text{and}\quad\eta\geq\mathfrak{l}_0:=\max_{x_1\in[0,L]}\left(\frac{(1-\partial_1\bar{a}_{22}(x_1))\mathcal{R}_{\mathfrak{a}}(x_1)}{\bar{a}_{22}(x_1)\mathcal{R}_{\mathfrak{a}}'(x_1)}\right)$$

因此，$\partial_1(\bar{a}_{22}\mathfrak{M})(x_1)\geq\mu$ 在 Ω_L 中成立。

通过直接计算，α 可表示为

$$\alpha(x_1)=\sum_{l=1}^{2}P_l(x_1)+\sum_{k=1}^{4}N_k(x_1)$$

其中 N_k ($k=1,2,3,4$) 和 P_l ($l=1,2$) 定义为

$$\begin{aligned}
N_1&:=-\frac{(-\bar{E})(\gamma\bar{u}^2+\gamma S_0\bar{\rho}^{\gamma-1})}{(\gamma S_0\bar{\rho}^{\gamma-1}-\bar{u}^2)^2}\mathcal{R}_{\mathfrak{a}}^{\eta}\\
N_2&:=-\frac{2\bar{u}^2}{(\bar{u}^2-\gamma S_0\bar{\rho}^{\gamma-1})^2}\mathcal{R}_{\mathfrak{a}}^{2\eta}\\
N_3&:=-2\frac{\gamma S_0\bar{\rho}^{\gamma-1}}{\bar{\rho}}\left(\frac{-(\gamma-1)\bar{u}}{\gamma S_0\bar{\rho}^{\gamma-1}-\bar{u}^2}\frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}}\right)^2\mathcal{R}_{\mathfrak{a}}^{2\eta}\\
N_4&:=-2\frac{\bar{u}J_0}{\gamma S_0\bar{\rho}^{\gamma-1}}\\
P_1&:=-\frac{1}{2}\eta\mathcal{R}_{\mathfrak{a}}^{\eta-1}\mathcal{R}_{\mathfrak{a}}'\\
P_2&:=4\mathcal{R}_{\mathfrak{a}}^{\eta}\frac{(\gamma-1)\bar{u}^2}{\bar{u}^2-\gamma S_0\bar{\rho}^{\gamma-1}}\frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}}.
\end{aligned} \tag{C.8}$$

由于 $\mathfrak{a}>0$，由引理 C.1 中所述的条件可直接得出

$$N_k(x_1)<0\quad\text{and}\quad P_l(x_1)>0\quad\text{for }0<x_1\leq L.$$

接下来，我们将把 (C.8) 改写为关于 (J_0, h_0, κ) 的形式，其中 J_0 由 (2.1) 给出，

$$h_0:=(\gamma S_0)^{\frac{1}{\gamma+1}}\text{ and }\kappa(x_1):=\frac{\bar{u}(x_1)}{u_s}\text{ for }u_s:=h_0J_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}.$$

为此，我们首先通过直接计算将基本函数改写如下:

$$\begin{aligned}&\bar{u}=u_s\kappa=h_0J_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\kappa,\quad \bar{\rho}=\frac{J_0}{\bar{u}}=h_0^{-1}J_0^{\frac{2}{\gamma+1}}\kappa^{-1},\\&\gamma S_0\bar{\rho}^{\gamma-1}=h_0^2J_0^{\frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1}}\kappa^{-\gamma+1},\quad \mathcal{R}_{\mathfrak{a}}=\frac{1}{K}\kappa_{\mathfrak{a}}^{\frac{\gamma+1}{2}}\quad \text{for } \kappa_{\mathfrak{a}}(x_1):=\kappa(x_1+\mathfrak{a}).\end{aligned}\tag{C.9}$$

众所周知，方程 (2.3) 的解 $(\bar{\rho},\bar{E})$ 满足 $\frac{1}{2}\bar{E}^2-H(\bar{\rho})=\frac{1}{2}E_0^2-H(\rho_0)(=:k_0)$，其中 $H(\bar{\rho})$ 定义为

$$H(\bar{\rho}):=\int_{\rho_s}^{\bar{\rho}}\frac{(t-b_0)}{t}\left(\gamma S_0t^{\gamma-1}-\frac{J_0^2}{t^2}\right)dt\quad\text{for }\rho_s:=\frac{J_0}{u_s}.$$

由于采用了 (2.16) 中给出的 $E_0=0$ 假设，且满足条件 $E(x_1)<0$ for $x_1\in(0,L^*]$，我们可以将 $-E$ 表示为

$$-\bar{E}=\sqrt{2h_0J_0^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}\mathcal{F}(\kappa)+2k_0}\tag{C.10}$$

对于由下式定义的 $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F}(\kappa):=\int_1^{\kappa}\left(1-\frac{t}{\zeta_0}\right)\left(1-\frac{1}{t^{\gamma+1}}\right)dt,\quad \zeta_0:=\frac{J_0}{b_0u_s}.$$

利用 (C.9) 和 (C.10)，可得

$$\frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}}=\frac{\sqrt{2h_0J_0^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}\mathcal{F}(\kappa)+2k_0}}{h_0^2J_0^{\frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1}}\left(\kappa^2-\kappa^{-\gamma+1}\right)}.\tag{C.11}$$

并且，对于 $\bar{\rho}_{\mathfrak{a}}(x_1):=\bar{\rho}(x_1+\mathfrak{a})$，有

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{a}}'=-\frac{\gamma+1}{2}\frac{\sqrt{2h_0J_0^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}\mathcal{F}(\kappa_{\mathfrak{a}})+2k_0}}{h_0^2J_0^{\frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1}}\left(\kappa_{\mathfrak{a}}^2-\kappa_{\mathfrak{a}}^{-\gamma+1}\right)}\frac{1}{K}\kappa_{\mathfrak{a}}^{\frac{\gamma+1}{2}}.\tag{C.12}$$

然后，利用 (C.9)-(C.12)，我们得到

$$\begin{aligned}N_1&=-\frac{\sqrt{2h_0J_0^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}\mathcal{F}(\kappa)+2k_0}\left(\gamma\kappa^2+\kappa^{-\gamma+1}\right)}{h_0^2J_0^{\frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1}}\left(\kappa^2-\kappa^{-\gamma+1}\right)^2}\frac{1}{K^{\eta}}\kappa_{\mathfrak{a}}^{\frac{(\gamma+1)\eta}{2}}\\N_2&=-\frac{2\kappa^2}{h_0^2J_0^{\frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1}}\left(\kappa^2-\kappa^{-\gamma+1}\right)^2}\frac{1}{K^{2\eta}}\kappa_{\mathfrak{a}}^{(\gamma+1)\eta}\\N_3&=-2\kappa^{-\gamma+2}\frac{\left[(\gamma-1)\kappa\sqrt{2h_0J_0^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}\mathcal{F}(\kappa)+2k_0}\right]^2}{h_0^3J_0^{\frac{4\gamma-2}{\gamma+1}}\left(\kappa^2-\kappa^{-\gamma+1}\right)^4}\frac{1}{K^{2\eta}}\kappa_{\mathfrak{a}}^{(\gamma+1)\eta}\\N_4&=-2h_0^{-1}J_0^{\frac{2}{\gamma+1}}\kappa^{\gamma}\\P_1&=\eta\frac{\gamma+1}{4}\frac{\sqrt{2h_0J_0^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}\mathcal{F}(\kappa_{\mathfrak{a}})+2k_0}}{h_0^2J_0^{\frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1}}\left(\kappa_{\mathfrak{a}}^2-\kappa_{\mathfrak{a}}^{-\gamma+1}\right)}\frac{1}{K^{\eta}}\kappa_{\mathfrak{a}}^{\frac{(\gamma+1)\eta}{2}}\end{aligned}$$

$$P_2=\frac{4(\gamma-1)\kappa^2\sqrt{2h_0J_0^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}\mathcal{F}(\kappa)+2k_0}}{h_0^2J_0^{\frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1}}\left(\kappa^2-\kappa^{-\gamma+1}\right)^2}\frac{1}{K^\eta}\kappa_{\mathfrak{a}}^{\frac{(\gamma+1)\eta}{2}}.$$

利用 P_1 严格为正这一事实，我们将选取正常数 μ、 η、d 和 $\mathfrak{a}$，使其满足

$$\frac{P_1}{4}+N_k\geq\frac{\mu}{4}\quad\text{for } k=1,2,3,4,$$

由此可直接得出

$$\alpha(x_1)\geq P_1+\sum_{k=1}^{4}N_k\geq\mu\quad\text{for } 0\leq x_1\leq L.$$

对于每个 $k=1$、2、3、4，我们将项 $\frac{P_1}{4}+N_k$ 改写为

$$\begin{cases}\dfrac{P_1(x_1)}{4}+N_k(x_1)=\mathfrak{r}(x_1)(\eta\mathfrak{b}(x_1)-\beta_k(x_1))\quad\text{for } k=1,2,3,\\ \dfrac{P_1(x_1)}{4}+N_4(x_1)=\eta\mathfrak{c}(x_1)-\beta_4(x_1)\end{cases}$$

for

$$\begin{aligned}
\mathfrak{r}(x_1)&:=\frac{1}{h_0^2J_0^{\frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1}}}\frac{1}{K^\eta}\kappa_{\mathfrak{a}}^{\frac{(\gamma+1)\eta}{2}}(x_1),\\
\mathfrak{b}(x_1)&:=\frac{\gamma+1}{16}\frac{\sqrt{2h_0J_0^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}\mathcal{F}(\kappa_{\mathfrak{a}}(x_1))+2k_0}}{\left(\kappa_{\mathfrak{a}}^2(x_1)-\kappa_{\mathfrak{a}}^{-\gamma+1}(x_1)\right)}\\
\mathfrak{c}(x_1)&:=\frac{\gamma+1}{16}\frac{\sqrt{2h_0J_0^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}\mathcal{F}(\kappa_{\mathfrak{a}}(x_1))+2k_0}}{h_0^2J_0^{\frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1}}\left(\kappa_{\mathfrak{a}}^2(x_1)-\kappa_{\mathfrak{a}}^{-\gamma+1}(x_1)\right)}\frac{1}{K^\eta}\kappa_{\mathfrak{a}}^{\frac{(\gamma+1)\eta}{2}}(x_1),\\
\beta_1(x_1)&:=\frac{\sqrt{2h_0J_0^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}\mathcal{F}(\kappa(x_1))+2k_0}\left(\gamma\kappa^2(x_1)+\kappa^{-\gamma+1}(x_1)\right)}{\left(\kappa^2(x_1)-\kappa^{-\gamma+1}(x_1)\right)^2}\\
\beta_2(x_1)&:=\frac{2\kappa^2(x_1)}{\left(\kappa^2(x_1)-\kappa^{-\gamma+1}(x_1)\right)^2}\frac{1}{K^\eta}\kappa_{\mathfrak{a}}^{\frac{(\gamma+1)\eta}{2}}(x_1)\\
\beta_3(x_1)&:=2\kappa^{-\gamma+2}\frac{\left[(\gamma-1)\kappa(x_1)\sqrt{2h_0J_0^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}\mathcal{F}(\kappa(x_1))+2k_0}\right]^2}{h_0J_0^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}\left(\kappa^2(x_1)-\kappa^{-\gamma+1}(x_1)\right)^4}\frac{1}{K^\eta}\kappa_{\mathfrak{a}}^{\frac{(\gamma+1)\eta}{2}}(x_1)\\
\beta_4(x_1)&:=2h_0^{-1}J_0^{\frac{2}{\gamma+1}}\kappa^\gamma(x_1).
\end{aligned}$$

由 $\bar{u}(x_1)$的单调性以及 $L^*\leq L$ 这一事实可知，存在一个常数 $\delta_0>0$ 满足

$$1+\delta_0\leq\kappa_{\mathfrak{a}}(x_1)<\kappa(x_1)\leq\frac{u_0}{u_s}\quad\text{for } x_1\in[0,L].$$

对于由(C.2)给出的常数 K，有 $K = \kappa^{\frac{\gamma+1}{2}}(\mathfrak{a}) = \kappa_{\mathfrak{a}}^{\frac{\gamma+1}{2}}(0)$，因此我们得到

$$0 < \frac{\kappa_{\mathfrak{a}}^{\frac{\gamma+1}{2}}(L)}{K} \leq \frac{\kappa_{\mathfrak{a}}^{\frac{\gamma+1}{2}}(x_1)}{K} \leq 1 \text{ for } x_1 \in [0, L]. \tag{C.13}$$

为简单起见，令

$$\lambda_0 := h_0^2 J_0^{\frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1}}.$$

显然，对于每个 $k = 1$，2，3，我们有

$$\mathfrak{r}(\eta\mathfrak{b} - \beta_k)(x_1) \geq \frac{1}{4}\mathcal{R}_{\mathfrak{a}}^{\eta}(x_1) \quad \text{for } 0 \leq x_1 \leq L \tag{C.14}$$

当且仅当

$$\eta \geq \max_{x_1 \in [0,1]} \frac{1}{\mathfrak{b}} \left(\frac{\lambda_0}{4} + \beta_k \right) \quad \text{for each } k = 1, 2, 3.$$

由 (C.13) 可知，若固定 η 和 L 使其满足

$$\eta \geq \max_{x_1 \in [0,L]} \left\{ \frac{1}{\mathfrak{b}} \left(\frac{\lambda_0}{4} + \beta_1 \right), \frac{1}{\mathfrak{b}} \left(\frac{\lambda_0}{4} + \beta_2^* \right), \frac{1}{\mathfrak{b}} \left(\frac{\lambda_0}{4} + \beta_3^* \right) \right\}$$

β_2^* 和 β_3^* 取为

$$\begin{aligned} {\beta_2}^* &:= \frac{2\kappa^2}{\left(\kappa^2 - \kappa^{-\gamma+1}\right)^2} \\ {\beta_3}^* &:= \frac{2(\gamma-1)^2 \kappa^{-\gamma+4} \left(2h_0 J_0^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}} \mathcal{F}(\kappa) + 2k_0 \right)}{h_0 J_0^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}} \left(\kappa^2 - \kappa^{-\gamma+1}\right)^4}. \end{aligned}$$

接下来，令

$$\beta_4^* := 2h_0^{-1} J_0^{\frac{2}{\gamma+1}} \kappa^{\gamma}(0).$$

由 $\bar{u}$ 关于 $0 < x_1 < L$ 的单调性可得

$$\eta\mathfrak{c}(x_1) - \beta_4(x_1) \geq \eta\mathfrak{c}(x_1) - {\beta_4}^* \quad \text{for } 0 \leq x_1 \leq L. \tag{C.15}$$

注意，函数 $\mathfrak{c}(x_1)$ 的值仅取决于 $\kappa_{\mathfrak{a}}(x_1)$ 的值。此外，对于所有 $x_1 \in [0, L]$，$\mathfrak{c}$ 关于 $\kappa_{\mathfrak{a}}(x_1)$ 的值连续依赖。当 $x_1 = 0$ 处 $\kappa_{\mathfrak{a}}(0) = \bar{u}(\mathfrak{a})\, u_s$ 时，我们有

$$\mathfrak{c}(0) = \frac{\gamma+1}{16} \frac{\sqrt{2h_0 J_0^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}} \mathcal{F}(\kappa_{\mathfrak{a}}(0)) + 2k_0}}{h_0^2 J_0^{\frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1}} \left(\kappa_{\mathfrak{a}}^2(0) - \kappa_{\mathfrak{a}}^{-\gamma+1}(0) \right)} =: \mathfrak{c}_0 > 0.$$

现在我们固定一个常数 η，使其满足

$$\eta \geq \max_{x_1 \in [0,L]} \left\{ \mathfrak{l}_0, \frac{1}{\mathfrak{b}} \left(\frac{\lambda_0}{4} + \beta_1 \right), \frac{1}{\mathfrak{b}} \left(\frac{\lambda_0}{4} + \beta_2^* \right), \frac{1}{\mathfrak{b}} \left(\frac{\lambda_0}{4} + \beta_3^* \right), \frac{1}{\mathfrak{c}_0} \left(\frac{1}{4} + \beta_4^* \right) \right\}$$

对于由 (C.7) 定义的 $\mathfrak{l}_0$。注意，η 的选取仅取决于数据和 $\mathfrak{a}$。按照上述方式选取常数 η 后，我们得到了估计 (C.14)，

$$\partial_1(\bar{a}_{22}\mathfrak{M}) \geq \mathcal{R}_{\mathfrak{a}}^{\eta} \quad \text{and} \quad \eta\mathfrak{c}(0) - \beta_4^* \geq \frac{1}{4}.$$

最后，我们可以固定一个仅依赖于数据、 $\mathfrak{a}$ 和 η 的充分小的常数 $d \in (0,1)$，使得若条件 (C.1) 成立，则由 (C.15) 以及 $\mathfrak{c}$ 对 $\kappa_{\mathfrak{a}}$ 的连续依赖可得

$$\eta \mathfrak{c}(x_1) - \beta_4(x_1) \geq \frac{1}{8} \quad \text{for } 0 \leq x_1 \leq L.$$

注意， η 的选择仅取决于数据和 $\mathfrak{a}$，因此我们最终得出，小常数 d 的选择仅取决于数据和 $\mathfrak{a}$。

我们选择常数 d，使得若引理 C.1 中陈述的所有条件均满足，则可得到由下式给出的常数 μ 的估计 (C.5):

$$\mu = \min_{x_1 \in [0,L]} \left\{ \mathcal{R}^{\eta}_{\mathfrak{a}}(x_1), \frac{3}{4}\mathcal{R}^{\eta}_{\mathfrak{a}}(x_1) + \frac{1}{8} \right\} = \min \left\{ \mathcal{R}^{\eta}_{\mathfrak{a}}(L), \frac{3}{4}\mathcal{R}^{\eta}_{\mathfrak{a}}(L) + \frac{1}{8} \right\} > 0.$$

□

致谢：Myoungjean Bae 的研究部分得到三星科学技术基金会项目（项目编号：SSTF- BA1502-51）的资助。Hyangdong Park 的研究部分得到浦项崔钟贤基金会浦项科学奖学金以及韩国高等研究院的高等研究院个人资助（MG086701）的资助。

References

[1] M. Bae, B. Duan, J. Xiao, and C. Xie, *Structural stability of supersonic solutions to the euler–poisson system* 239 2021 679 731 , 《理性力学与分析档案》, (), 第 – 页。[2] M. Bae, B. Duan and C. Xie *Subsonic solutions for steady euler–poisson system in two- , , ,* 《工业与应用数学学会数学分析杂志》, (), 第 – 页。[3] , *Subsonic flow for the multidimensional euler–poisson system*, 《理性力学与分析档案》, 220 (2016), 第 155–191 页。[4] *Two-dimensional, accelerating flow of the steady euler-poisson system with a c^1-transonic transition* 2023 , 预印本, ()。

[5] M. Bae and H. Park, *Three-dimensional supersonic flows of euler-poisson system for potential flow* 20 2021 2421 2440 , 《纯粹与应用分析通讯》, (), 第 – 页。[6] M. Bae and S. Weng, *3-d axisymmetric subsonic flows with nonzero swirl for the compressible euler–poisson system* , 载于《亨利·庞加莱研究所年刊 C 辑：非线性分析》, 第 35 卷，爱思唯尔，2018 年，第 161–186 页。[7] J. Diestel and J. J. U. Jr., *Vector Measures*, 第 15 卷，美国数学会，1977 年。[8] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, 施普林格，2015 年。[9] T. Luo and Z. Xin, *Transonic shock solutions for a system of euler-poisson equations*, 《数学科学通讯》, 10 (2012), 第 419–462 页。[10] R. Temam, *Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis*, 第 343 卷，美国数学会，2001 年。

Department of Mathematical Sciences, KAIST, 291 Daehak-Ro, Yuseong-Gu, Daejeon34141, Republic of Korea*Email address*: mjbae@kaist.ac.kr

School of Mathematics, Korea Institute for Advanced Study (KIAS), 85 Hoegiro, Dongdaemun-gu, Seoul, 02455, Republic of Korea*Email address*: hyangdong@kias.re.kr