arXiv:2302.03345v2 [math.PR] 8 Feb 2023

由分数布朗运动驱动的带反射随机时滞微分方程的解的密度的存在性

M. BESALÚ、D. MÁRQUEZ-CARRERAS、C. ROVIRA

摘要。在本文中，我们证明了具有法向反射的一维随机时滞微分方程的解的分布存在密度。这些方程由赫斯特参数为 $H > 1/2$ 的分数布朗运动驱动。关于分数布朗运动的随机积分是路径意义下的黎曼–斯蒂尔斯积分。

1. 引言

有一些模型会受到某种噪声的影响，其动力学与传播时滞有关，并且其中一些模型自然涉及非负量。例如，互联网模型中的费率和价格、离子浓度或感染人群比例（参见 [13] 中的参考文献）。因此，考虑带时滞和非负约束的随机微分方程是很自然的。在我们的论文 [1], 中，我们开始研究噪声为分数布朗运动的情形，并获得了解的存在唯一性。

更准确地说，考虑如下具有正性约束的随机时滞微分方程：

$$\begin{aligned} X_t &= \eta_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_{s-r})dW_s^H + Y_t, \quad t \in (0, T_0], \\ X_t &= \eta_t, \qquad t \in [-r, 0]. \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中， r 表示严格为正的时滞； W^H 是定义在完备概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上、赫斯特参数为 $H > \frac{1}{2}$ 的分数布朗运动； η: $[-r, 0] \to \mathbb{R}_+$是非负光滑函数，且满足 $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$; Y 是一个取向量值的非递减过程，用以确保对 X 施加非负约束。

Set

$$Z_t = \eta_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_{s-r})dW_s^H, \qquad t \in [0, T_0]. \tag{1.2}$$

已知调节项 Y 可以用 Z表示为一个显式公式：

$$Y_t = \max_{s\in[0,t]} (Z_s)^-, \qquad t \in [0, T_0],$$

日期：2023年2月9日。D. Márquez-Carreras 和 C. ROVIRA 获得了 SEIDI（经济与竞争力部）资助的项目 PID2021-123733NB-I00 的支持。

其中 $x^- = \max(0, -x)$。然后，利用所谓的 Skorohod映射，方程 (1.1) 的解满足

$$X_t = \begin{cases} Z_t + Y_t, & t \in [0, T_0], \\ \eta_t, & t \in [-r, 0]. \end{cases}$$

如 $H > \frac{1}{2}$所述，相对于 W^H的积分可以利用 Young [24]给出的结果定义为路径上的黎曼–斯蒂尔杰斯积分。此外，Zälhe [25] 运用分数阶微积分的技术引入了广义斯蒂尔杰斯积分。特别是，她利用分数阶导数获得了黎曼–斯蒂尔杰斯积分的一个公式（见下文中的（2.2））。利用该公式，Nualart and Răşcanu [19] 证明了一类一般微分方程的解具有存在性、唯一性和有限阶矩。在 [1] 中，我们将这些结果推广到了方程（1.1）。

Nualart and Sausserau [21] 获得了 [19]中所考虑方程的解的Malliavin可微性和密度的存在性。我们的目标是将这些结果推广到我们的方程，并研究方程（1.1）的解的密度的存在性。

与所有沿用 [19], 中所述方法的论文一样，我们将首先得到确定性结果，然后再逐路径应用于随机方程。

我们的主要结果如下：

定理 1.1。 假设 b， $\sigma \in \mathcal{C}_b^2$且 $\eta \in \mathcal{C}^{1-\alpha}$（$-r$， 0）。令 X为方程（*1.1*）的解，并假设 $\sigma > 0$ 在 $\mathbb{R}^+$上成立。那么，对于任意 $t_0 \in$（0， T_0]， X_{t_0}在 （0， $+\infty$）上的限制分布是绝对连续的。

注意到，我们只能得到在（0, $+\infty$）上的限制正则性，因为无法证明 $P(X_{t_0} = 0) = 0$。这与研究 [6] 中随机偏微分方程时出现的情况相同。在本文中，问题的主要困难在于：对于处理分数布朗运动时所采用的拓扑，Skorohod映射缺乏相应的性质。

时滞随机系统已得到深入研究（参见基础参考文献 [17]），但关于由分数布朗运动驱动的时滞随机微分方程的文献却很少。已有文献分别讨论了解的存在唯一性 [7, 16, 18, 23], 、密度的存在性与正则性 [16] ，以及时滞趋于零时的收敛性 [8]。关于由标准布朗运动驱动且带有非负约束的时滞随机微分方程，相关研究也很少。我们只能向读者推荐专门研究数值方法的文献 [12], ，以及作者在其中获得平稳解存在唯一性充分条件的文献 [13] 。关于带分数布朗运动和非负约束的方程，研究同样较为薄弱。 [9]给出了该解的存在性，而 [10]则给出了其存在唯一性。在 [4] 中，作者利用粗糙路径技术处理了解的存在唯一性问题。

另一方面，对带反射的随机微分方程的解的正则性进行研究的文献也很少。我们可以向读者推荐最初研究带反射的扩散过程的论文 [14] 和 [15] ，以及专门研究随机偏微分方程的工作 [6] 和 [20]。

本文结构如下。下一节将介绍有关 Skorohod问题和分数阶微积分的预备知识。在第3、4、5和6节中，我们讨论

确定性情形。第3节旨在为确定性方程建立一些比较定理以及存在唯一性定理。第4节将得到收敛结果，以求解确定性 Skorohod问题。第5节讨论确定性方程的弗雷歇可微性；第6节则汇总前几节的确定性结果，得到将在随机情形中逐路径考察的近似。最后，第7节将所有确定性结果应用于随机情形，并证明主定理。

2. Preliminaries

2.1. **Skorokhod问题**。令

$$\mathcal{C}_+(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}) := \{x \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}) : x(0) \in \mathbb{R}_+\}.$$

现在回顾一下Skorokhod问题。

定义 2.1. 给定一条路径 $z \in \mathcal{C}_+(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$，若一对函数$(x,y)$ 属于$\mathcal{C}_+(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ 并满足以下条件，则称其为 z 的反射*Skorokhod*问题的解：

(1) $x_t = z_t + y_t$ 对所有 $t \geq 0$ 成立，且对每个 $t \geq 0$都有 $x_t \in \mathbb{R}_+$，(2) $y(0) = 0$，并且 y 非递减，(3) 对所有 $t \geq 0$都有 $\int_0^t x_s dy_s = 0$，因此 y 仅当 x 为零时才能增加。

已知我们可以用 z表示 y 的显式公式：

$$y_t = \max_{s\in[0,t]} (z_s)^-.$$

路径 z 称为 x 的反射路径，路径 y 称为 x的调节路径。我们使用 Skorokhod映射，通过在原点处反射，将连续实值函数约束为非负。我们将其应用于由 (1.2) 定义的 z 的每条路径。

2.2. **分数阶微积分**。设 $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 和 $(a,b) \subseteq [-r,T]$。我们将 $W_1^\alpha(a,b)$记为由可测函数 $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ 构成的空间，使得

$$\|f\|_{\alpha,1(a,b)} := \sup_{u\in[a,b]} \Delta_t^\alpha(f) = \sup_{u\in[a,b]} \left(|f(u)| + \int_a^u \frac{|f(u)-f(v)|}{(u-v)^{\alpha+1}} dv \right) < \infty.$$

我们还将 $W_2^{1-\alpha}(0,T)$记为由可测函数 $g\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ 构成的空间，使得

$$\|g\|_{1-\alpha,2} := \sup_{0\leq u<v\leq T} \left(\frac{|g(v)-g(u)|}{|v-u|^{1-\alpha}} + \int_u^v \frac{|g(y)-g(u)|}{(y-u)^{2-\alpha}} dy \right) < \infty.$$

最后，我们将函数 $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ 的上确界范数定义为

$$\|f\|_{\infty(a,b)} = \sup_{u\in[a,b]} |f(u)|,$$

λ-赫尔德连续函数空间 $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ 对任意$0 < \lambda \leq 1$，记作 $\mathcal{C}^\lambda(a,b)$，其范数为

$$\|f\|_{\lambda(a,b)} := \|f\|_{\infty(a,b)} + \sup_{a\leq u<v\leq b} \frac{|f(v)-f(u)|}{(v-u)^\lambda} < \infty,$$

对于任意整数 $k \geq 1$，我们将定义在 $\mathbb{R}$ 上、k 次连续可微且直到第 k阶偏导数均有界的实值函数类记作 $\mathcal{C}_b^k$。

显然，对于任意 $\varepsilon > 0$,

$$C^{1-\alpha+\varepsilon}(0,T) \subset W_2^{1-\alpha}(0,T) \subset C^{1-\alpha}(0,T). \tag{2.1}$$

此外，由于 $\alpha \in (0, 1/2)$,

$$C^{1-\alpha}(0,T) \subset W_1^{\alpha}(0,T).$$

若 $f \in C^{\lambda}(a,b)$ 且 $g \in C^{\mu}(a,b)$，其中 $\lambda + \mu > 1$，则文献 [25] 证明了 Riemman–Stieltjes 积分 $\int_a^b f dg$ 存在，且可表示为

$$\int_a^b f dg = (-1)^{\alpha} \int_a^b D_{a+}^{\alpha} f(t) D_{b-}^{1-\alpha} g_{b-}(t) dt, \tag{2.2}$$

其中 $g_{b-}(t) = g(t) - g(b)$ $1 - \mu < \alpha < \lambda$，分数阶导数定义如下

$$\begin{aligned} D_{a+}^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{f(t)}{(t-a)^{\alpha}} + \alpha \int_a^t \frac{f(t) - f(s)}{(t-s)^{\alpha+1}} ds \right), \\ D_{b-}^{\alpha} f(t) &= \frac{(-1)^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{f(t)}{(b-t)^{\alpha}} + \alpha \int_t^b \frac{f(t) - f(s)}{(s-t)^{\alpha+1}} ds \right). \end{aligned}$$

关于这一广义积分和分数阶微积分的详细介绍，可参见 [19] 和 [25] 及其中的参考文献。

令 $\Omega = C_0([0,T]; \mathbb{R})$ 为由连续函数组成的巴拿赫空间，这些函数在时刻 0 取值为零，并配备上确界范数。令 P 为 Ω 上唯一的概率测度，使得典范过程 $\{W_t^H, t \in [0,T]\}$ 是赫斯特参数为 $H > \frac{1}{2}$ 的一维分数布朗运动。

我们用 $\mathcal{E}$ 表示取值于 $\mathbb{R}$ 的 $[0,T]$ 上阶梯函数空间。令 $\mathcal{H}$ 为希尔伯特空间，它是 $\mathcal{E}$ 关于标量积的闭包

$$\langle \mathbf{1}_{[0,t]}, \mathbf{1}_{[0,s]} \rangle_{\mathcal{H}} = R_H(t,s),$$

其中

$$R_H(t,s) = \int_0^{t \wedge s} K_H(t,r) K_H(s,r) dr,$$

并且 $K_H(t,s)$ 是由下式定义的平方可积核

$$K_H(t,s) = c_H s^{1/2-H} \int_s^t (u-s)^{H-3/2} u^{H-1/2} du, \qquad \text{for } t > s, \tag{2.3}$$

其中 $c_H = \sqrt{\frac{H(2H-1)}{\beta(2-2H, H-1/2)}}$，且 β 表示贝塔函数。对于 $t \leq s$，令$K_H(t,s) = 0$。

映射 $\mathbf{1}_{[0,t]} \to W_t^H$可扩展为 $\mathcal{H}$ 与关联于 W^H的高斯空间 $\mathcal{H}_1$之间的等距映射。我们将此等距映射记为 $\varphi \to W^H(\varphi)$。

考虑从 $\mathcal{E}$到 $L^2(0,T;\mathbb{R})$ 的算子 K_H^*，其定义如下:

$$(K_H^*\varphi)(s)=\int_s^T \varphi(t)\partial_t K_H(t,s)dt.$$

由（2.3）式可得

$$\partial_t K_H(t,s)=c_H\left(\frac{t}{s}\right)^{H-1/2}(t-s)^{H-3/2}.$$

注意

$$K_H^*(\mathbf{1}_{[0,t_1]},\dots,\mathbf{1}_{[0,t_m]})=(K_H(t_1,\cdot),\dots,K_H(t_m,\cdot)).$$

对于任意 $\varphi,\psi\in\mathcal{E}$,

$$\langle\varphi,\psi\rangle_{\mathcal{H}}=\langle K_H^*\varphi,K_H^*\psi\rangle_{L^2(0,T;\mathbb{R}^m)}=\mathrm{E}(W^H(\varphi)W^H(\psi))$$

且 K_H^* 在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 与$L^2(0,T;\mathbb{R})$的一个闭子空间之间给出一个等距映射。

按照 [21], ，我们考虑 Cameron-Martin空间 $\mathcal{H}_H$ 的分数阶版本：$=\mathcal{K}_H(L^2(0,T;\mathbb{R}))$，其中对于 $h\in L^2(0,T;\mathbb{R})$,

$$(\mathcal{K}_H h)(t):=\int_0^t K_H(t,s)h_s ds.$$

最后，我们将 $\mathcal{R}_H=\mathcal{K}_H\circ\mathcal{K}_H^*$： $\mathcal{H}\to\mathcal{H}_H$ 记为该算子

$$\mathcal{R}_H\varphi=\int_0^{\cdot} K_H(\cdot,s)(\mathcal{K}_H^*h)(s)ds.$$

我们注意到，对于任意 $\varphi\in\mathcal{H}$， $\mathcal{R}_H\varphi$ 是阶为 H 的赫尔德连续函数。因此，对于任意 $1-H<\alpha<1/2$,

$$\mathcal{H}_H\subset C^H(0,T;\mathbb{R})\subset W_2^{1-\alpha}(0,T;\mathbb{R}).$$

注意到 $\mathcal{R}_H\mathbf{1}_{[0,t]}=R_H(t,\cdot)$，因此， $\mathcal{H}_H$是与高斯过程 W^H相关联的再生核希尔伯特空间。嵌入 $\mathcal{R}_H$： $\mathcal{H}\to\Omega$ 将 $\mathcal{H}$ 稠密地嵌入 Ω，并且对于任意 $\varphi\in\Omega^*\subset\mathcal{H}$,

$$\mathrm{E}\left(e^{iW^H(\varphi)}\right)=\exp\left(-\frac{1}{2}\|\varphi\|_{\mathcal{H}}^2\right).$$

因此，(Ω $\mathcal{H}$, P) 按照 Gross 的意义是一个抽象维纳空间。

3. Comparison and existence and uniqueness theorems

设 $0<\alpha<\frac{1}{2}$。现在考虑以下方程

$$w_t=\eta_0+\zeta_t+\int_0^t b(w_s)ds,\quad t\in(0,T], \tag{3.1}$$

其中 $\zeta\in\mathcal{C}^{1-\alpha}(0,T)$ 且 $\eta_0>0$。

本节将证明该方程解的存在唯一性，并给出一个比较结果。 (3.1)

引理 3.1. 假设 b 是一个利普希茨函数，且 $\zeta\in\mathcal{C}^{1-\alpha}(0,T)$。那么存在唯一解 (3.1)
$w\in\mathcal{C}^{1-\alpha}(0,T)$。

证明。 证明过程与 [21] 中定理 5.1 的证明类似。 □

引理 3.2. 设 $b, \tilde{b}$ *Lipschitz* 函数，使得 $b \leq \tilde{b}$, $\zeta \in \mathcal{C}^{1-\alpha}(0,T)$ 且 $t \in [0,T]$，那么若

$$\begin{aligned} w_t &= \eta_0 + \zeta_t + \int_0^t b(w_s)ds, \\ \tilde{w}_t &= \eta_0 + \zeta_t + \int_0^t \tilde{b}(\tilde{w}_s)ds, \end{aligned}$$

我们有 $w_t \leq \tilde{w}_t$，对任意 $t \in [0,T]$。

证明。 对于 $k > 0$，考虑函数

$$\varphi_k(x) = \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}} \int_0^x \int_0^y \rho_k(z)dzdy,$$

其中

$$\rho_k(z) = \begin{cases} 2kz, & \text{if } z \in \left[0, \frac{1}{k}\right], \\ 2 \times \mathbf{1}_{\{z \geq \frac{1}{k}\}}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

根据 [11, 定理 5.1], ，我们可以验证 $\varphi_k \in \mathcal{C}_b^2$，且它们的导数有界：

$$0 \leq \varphi_k'(x) \leq 2x^+, \text{ and } 0 \leq \varphi_k''(x) \leq 2 \times \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}},$$

其中 $x^+ = \max(0, x)$。我们还有，当 $k \to 0$ 时， $\varphi_k(x) \uparrow (x^+)^2$ 。

然后，利用 φ_k 上的这些性质，我们有

$$\begin{aligned} \varphi_k(w_t - \tilde{w}_t) &= \int_0^t \varphi_k'(w_s - \tilde{w}_s)(b(w_s) - \tilde{b}(\tilde{w}_s))ds \\ &\leq \int_0^t \varphi_k'(w_s - \tilde{w}_s)(\tilde{b}(w_s) - \tilde{b}(\tilde{w}_s))ds \\ &\leq C \int_0^t (w_s - \tilde{w}_s)^+ |w_s - \tilde{w}_s| ds \\ &\leq C \int_0^t \left((w_s - \tilde{w}_s)^+\right)^2 ds, \end{aligned}$$

其中 C 不依赖于 k。现在，令 $k \to 0$ ，最后一个不等式变为

$$\left((w_t - \tilde{w}_t)^+\right)^2 \leq C \int_0^t \left((w_s - \tilde{w}_s)^+\right)^2 ds,$$

利用 Gronwall 不等式，我们得到 $((w_t - \tilde{w}_t)^+)^2 = 0$ ，由此得到所需结果。□

4. Convergence results

在本节中，我们考虑以下方程

$$x_t^{(\zeta)} = \eta_0 + \zeta_t + \int_0^t b(x_s^{(\zeta)})ds + y_t^{(\zeta)}, \qquad t \in [0,T], \tag{4.1}$$

其中， $y^{(\zeta)}$ 是 $x^{(\zeta)}$的调节项，并且

$$x_t^{(\zeta),\varepsilon} = \eta_0 + \zeta_t + \int_0^t \left[b(x_s^{(\zeta),\varepsilon}) + \frac{1}{\varepsilon} f(x_s^{(\zeta),\varepsilon}) \right] ds, \qquad t \in [0,T]. \tag{4.2}$$

我们假设 f 是一个 $\mathcal{C}_b^2$ 非递增函数，满足

$$\begin{cases} f(x) = 0, & \text{if } x \geq 0, \\ 0 < f(x) \leq x^-, & \text{if } x < 0, \end{cases}$$

且 $x^- = \max(0, -x)$。

本文中我们始终采用 f 这一设定。

根据 [1], 中的相同计算，我们可以很容易地验证方程（4.1）存在唯一解。本节旨在证明方程（4.2）存在唯一解，并且当 ε趋于零时，这些解收敛于方程（4.1）的解。结果如下:

定理 4.1。 假设 b 是一个利普希茨函数， $\zeta \in \mathcal{C}^{1-\alpha}(0,T)$。那么，$(4.2)$ 的解$_{x^{(\zeta),\varepsilon}}$ 当 $\varepsilon \to 0$时一致收敛于 $x^{(\zeta)}$，即方程(4.1)的唯一解。此外， $x^{(\zeta)} \in \mathcal{C}^{1-\alpha}(0,T)$。

该定理的证明可由本节中的以下三个命题直接推出。

命题 4.2。 在定理 *4.1* 的假设下，方程 (4.2) 有唯一解 $x^{(\zeta)}{}_{,t}{}^{\varepsilon} \in \mathcal{C}^{1-\alpha}(0,T)$。

证明。 若考虑 $\tilde{b}(x) = b(x) + \frac{1}{\varepsilon} f(x)$，由于 f是 Lipschitz 连续的，我们可以应用引理 3.1，从而得到所需结果。 □

命题 4.3。 在定理 *4.1* 的假设下，解 $x^{(\zeta),\varepsilon}$ 一致收敛于 $[0,T]$ 上的连续函数 G，当 (4.2) $\varepsilon \to 0$ 时。

证明。 沿用 [5], 中的方法，我们将证明分为几个步骤。

步骤*1*。 我们考虑关于 $t \in [0,T]$ 的以下方程,

$$v_t = \eta_0 + \zeta_t + \int_0^t b(v_s) ds. \tag{4.3}$$

我们希望证明，对于所有 $\varepsilon > 0$ 和 $t \in [0,T]$, $v_t \leq x^{(\zeta),}{}_t{}^{\varepsilon}$。

$\tilde{}$ $\tilde{}$利用引理 3.1，方程 (4.3) 有唯一解。此外，由于 $b \leq b$ ($b(x) = b(x) + \frac{1}{\varepsilon} f(x)$, 其中 $\frac{1}{\varepsilon} f(x) \geq 0$)，我们可以应用引理 3.2，从而得到所需结果。

步骤*2*。 现在我们考虑

$$u_t = \eta_0 + \zeta_t + \int_0^t b\left(u_s + \sup_{s' \leq s} u_{s'}^- \right) ds. \tag{4.4}$$

我们还定义 $\tilde{u}_t = u_t + \sup_{s' \leq t} u_{s'}^-$和 $\phi_t = \sup_{s' \leq t} u_{s'}^-$，因此可以写出 $\tilde{u}_t = u_t + \phi_t$。我们注意到 $\tilde{u}_t \geq 0$，且 ϕ_t 是递增函数。按照引理 3.1 证明中的相同思路，我们可以证明方程（4.4）有唯一解。我们要证明，对于所有 $\varepsilon > 0$, $x^{(\zeta),}{}_t{}^{\varepsilon} \leq \tilde{u}_t$。记 $\tilde{\theta}_t^{\varepsilon} = x^{(\zeta),}{}_t{}^{\varepsilon} - \tilde{u}_t$。

我们可以再次使用引理 3.2 证明中定义的函数 φ_k，并且有

$$\begin{aligned}\varphi_k(\tilde{\theta}_t^\varepsilon) &= \int_0^t \varphi_k'(\tilde{\theta}_s^\varepsilon)\left(b(x_s^{(\zeta),\varepsilon}) + \frac{1}{\varepsilon}f(x_s^{(\zeta),\varepsilon}) - b(\tilde{u}_s)\right)ds - \int_0^t \varphi_k'(\tilde{\theta}_s^\varepsilon)d\phi_s \\ &= \int_0^t \varphi_k'(\tilde{\theta}_s^\varepsilon)\left(b(x_s^{(\zeta),\varepsilon}) - b(\tilde{u}_s)\right)ds + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \varphi_k'(\tilde{\theta}_s^\varepsilon)f(x_s^{(\zeta),\varepsilon})ds - \int_0^t \varphi_k'(\tilde{\theta}_s^\varepsilon)d\phi_s \\ &= T_1^\varepsilon(k) + T_2^\varepsilon(k) + T_3^\varepsilon(k). \end{aligned} \tag{4.5}$$

现在我们注意到，

$$0 \le T_2^\varepsilon(k) \le \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t 2(\tilde{\theta}_s^\varepsilon)^+(x_s^{(\zeta),\varepsilon})^- ds = 0.$$

事实上，如果 $(\tilde{\theta}_s^\varepsilon)^+ > 0$，那么 $\tilde{\theta}_s^\varepsilon = x^{(\zeta),\varepsilon}_s - \tilde{u}_s > 0$。因此，既然我们已经证明了 $\tilde{u}_t \ge 0$，就必然有 $x^{(\zeta),\varepsilon}_s > 0$，进而 $(x^{(\zeta),\varepsilon}_s)^- = 0$。

另一方面，$T_3^\varepsilon(k) \le 0$，因为 $\varphi_k'(\theta_s^\varepsilon) \ge 0$，且 ϕ_t 是一个递增过程。于是，

$$\begin{aligned} 0 &\le T_1^\varepsilon(k) \le \int_0^t 2(\tilde{\theta}_s^\varepsilon)^+|b(x_s^{(\zeta),\varepsilon}) - b(\tilde{u}_s)|ds \\ &\le C\int_0^t (\tilde{\theta}_s^\varepsilon)^+|x_s^{(\zeta),\varepsilon} - \tilde{u}_s|ds = C\int_0^t (\tilde{\theta}_s^\varepsilon)^+|\tilde{\theta}_s^\varepsilon|ds = C\int_0^t \left((\tilde{\theta}_s^\varepsilon)^+\right)^2 ds. \end{aligned}$$

将先前对 $T_1^\varepsilon(k)$、$T_2^\varepsilon(k)$ 和 $T_3^\varepsilon(k)$ 的计算代入 (4.5)，并取 $k \to 0$，我们得到

$$\left((\tilde{\theta}_t^\varepsilon)^+\right)^2 \le C\int_0^t \left((\tilde{\theta}_s^\varepsilon)^+\right)^2 ds.$$

现在只需应用格朗沃尔引理，即可得到 $(\tilde{\theta}_t^\varepsilon)^+ = 0$。因此，对所有 ε，$x^{(\zeta),\varepsilon}_t \le \tilde{u}_t$。

步骤 *3.* 由于我们已经看到 $v_t \le x^{(\zeta),\varepsilon}_t \le \tilde{u}_t$ 和 $|\tilde{u}_t| \le 2\sup_{s\le t}|u_s|$，因此可以得出

$$|x_t^{(\zeta),\varepsilon}| \le |v_t| + 2\sup_{s\le t}|u_s|.$$

So,

$$\sup_\varepsilon |x_t^{(\zeta),\varepsilon}| \le |v_t| + 2\sup_{s\le t}|u_s|.$$

步骤 *4.* 利用引理 3.2 可知，当 ε 递减时，$x^{(\zeta),\varepsilon}_t$ 是一个递增序列。根据我们已证明其对所有 $\varepsilon > 0$ 都有界这一点，可以定义 $G_t := \lim_{\varepsilon\to 0} x^{(\zeta),\varepsilon}_t$。由于序列 $\{x^{(\zeta),\varepsilon}\}_\varepsilon$ 递增，因此在 $[0,T]$ 上一致收敛（见 [20]）。也就是说，当 $\varepsilon \to 0$时，$\sup_t |x^{(\zeta),\varepsilon}_t - G_t| \to 0$，因此 G 是一个连续函数。□

命题 4.4. 若 G是命题 *4.3* 中出现的函数，则 G_t 是方程 (4.1) 的解，且 $G \in \mathcal{C}^{1-\alpha}(0,T)$.

证明。我们将证明 G 是我们方程的一个解。因此，根据唯一性，我们将得到所需结果。接下来，我们需要验证存在一对 $(G_t, y_t^{(\zeta)}) \in \mathcal{C}_+(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$，它是 $z^{(\zeta)}$ 在 $\mathcal{C}_+(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ 中的一条路径所对应的带反射的斯科罗霍德问题的解。根据定义 2.1，我们需要证明以下事实

(i) 对每个 $t \geq 0$, $G_t = z_t^{(\zeta)} + y_t^{(\zeta)}$ 和 $G_t \geq 0$。(ii) $y_0^{(\zeta)} = 0$ 和 $y^{(\zeta)}$ 非递减。(iii) 对所有 $t \in [0,T]$, $\int_0^t G_s dy_s^{(\zeta)} = 0$。

步骤*1*：利用单调收敛定理定义,

$$\begin{aligned} y_t^{(\zeta)} &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t f\left(x_s^{(\zeta),\varepsilon}\right) ds, \\ z_t^{(\zeta)} &= \eta_0 + \zeta_t + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^t b(x_s^{(\zeta),\varepsilon}) ds = \eta_0 + \zeta_t + \int_0^t b(G_s) ds. \end{aligned} \tag{4.6}$$

因此，只需验证 $G_t \geq 0, \forall t \in [0,T]$。

由于

$$x_t^{(\zeta),\varepsilon} - \eta_0 - \zeta_t - \int_0^t b(x_s^{(\zeta),\varepsilon}) ds = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t f\left(x_s^{(\zeta),\varepsilon}\right) ds$$

and

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\varepsilon x_t^{(\zeta),\varepsilon} - \varepsilon \eta_0 - \varepsilon \zeta_t - \varepsilon \int_0^t b(x_s^{(\zeta),\varepsilon}) ds \right] = 0, \quad \forall\, t \in [0,T],$$

我们有

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^t f\left(x_s^{(\zeta),\varepsilon}\right) ds = 0, \quad \forall\, t \in [0,T].$$

单调收敛定理表明 $\int_0^t f(G_s)\, ds = 0, \forall\, t \in [0,T]$。于是，$G_s^- = 0$ 且 $G_s \geq 0$。

步骤*2*：显然 $y_0^{(\zeta)} = 0$。此外， $y^{(\zeta)}$ 是非递减的，因为 $f \geq 0$.

步骤 *3*：考虑到 $y_t^{(\zeta)}$ 的定义，我们在 $[0,T]$上定义以下两个测度

$$\mu_\varepsilon(A) = \int_A \frac{1}{\varepsilon} f\left(x_s^{(\zeta),\varepsilon}\right) ds, \qquad \mu(A) = \int_A dy_s^{(\zeta)}, \qquad A \in \mathcal{B}([0,T]).$$

我们有 μ_ε 弱收敛到 μ，这意味着

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mu_\varepsilon([0,t]) = \mu([0,t]), \qquad \forall\, t \geq 0.$$

注意，若 $\varepsilon \leq \varepsilon'$，则对所有 $t \in [0,T]$, $x^{(\zeta),\ \varepsilon}{}_t \geq x^{(\zeta),\ \varepsilon'}{}_t$，并且对所有 $t \in [0,T]$, $f(x^{(\zeta),\ \varepsilon}{}_t) \leq f(x^{(\zeta),\ \varepsilon'}{}_t)$。这意味着 supp $\mu_\varepsilon \subseteq$ supp$\mu_{\varepsilon'}$，因此对任意 $\varepsilon > 0$, supp $\mu \subseteq$ supp μ_ε。所以，若 $s \in$ supp μ，则 $f(x^{(\zeta),\ \varepsilon}{}_s) \geq 0$，且满足 $x^{(\zeta),\ \varepsilon}{}_s \leq 0$。因此，对任意$t \in [0,T]$,

$$\int_0^t x_s^{(\zeta),\varepsilon} dy_s^{(\zeta)} = \int_0^t x_s^{(\zeta),\varepsilon} d\mu(s) \leq 0.$$

最后，根据单调收敛定理

$$\int_0^t G_s dy_s^{(\zeta)} \leq 0.$$

条件 $G \geq 0$ 意味着

$$\int_0^t G_s dy_s^{(\zeta)} = 0.$$

步骤 *4*： 为完成证明，我们来检验 $G \in \mathcal{C}^{1-\alpha}(0,T)$。由表达式 (4.6) 可知， z^{ζ}属于 $\mathcal{C}^{1-\alpha}(0,T)$；另一方面，在 [1] 命题 4.2 的证明中，我们已验证 $\|G\|_{1-\alpha(0,T)} \leq 2\|z^{(\zeta)}\|_{1-\alpha(0,T)}$。 □

5. 可微性

本节旨在研究方程解沿方向 $h \in W_1^{1-\alpha}(0,T)$ 的弗雷歇可微性

$$\begin{aligned} x_t^g &= \eta_0 + \int_0^t b(x_s^g)ds + \int_0^t \sigma(\bar{x}_{s-r}^g)dg_s, \qquad t \in [0,T], \\ x_t^g &= \eta_t, \qquad t \in [-r,0] \end{aligned} \tag{5.1}$$

其中 $\bar{x}^g$ 是弗雷歇可微的。我们遵循 [21] 中提出的思路。本节的主要结果如下：

定理 5.1。 设 $\bar{x}$ 是从 $W_2^{1-\alpha}(0,T)$ 到 $W_1^{\alpha}(-r,T-r)$ 的映射 $g \mapsto \bar{x}^g$，沿方向 $h \in W_2^{1-\alpha}(0,T)$ 连续弗雷歇可微。假设 $b,\sigma \in \mathcal{C}_b^2$，并令 x^g 为方程 *(5.1)* 的解。那么映射

$$g \in W_2^{1-\alpha}(0,T) \mapsto x^g \in W_1^{\alpha}(0,T)$$

沿方向 $h \in W_2^{1-\alpha}(0,T)$ 是弗雷歇可微的，并且有

$$D_h x_t^g = \int_0^t b'(x_s^g)D_h x_s^g ds + \int_0^t \sigma(\bar{x}_{s-r}^g)dh_s + \int_0^t \sigma'(\bar{x}_{s-r}^g)D_h\bar{x}_{s-r}^g dg_s.$$

证明。 由命题 5.2 和 5.4 可轻易得出。 □

我们开始研究该积分的可微性。

命题 5.2。 设 x 是一个映射 $g \mapsto \bar{x}^g$，从 $W_2^{1-\alpha}(-r,T-r)$ 到 $W_1^{\alpha}(-r,T)$，沿方向 $h \in W_2^{1-\alpha}(0,T)$连续弗雷歇可微。设 $\sigma \in \mathcal{C}_b^1$。则映射

$$F : W_2^{1-\alpha}(0,T) \mapsto W_1^{\alpha}(0,T),$$

定义为

$$F(g)_\cdot := \int_0^\cdot \sigma(\bar{x}_{s-r}^g)dg_s$$

沿方向 $h \in W_2^{1-\alpha}(0,\ T)$ 弗雷歇可微，其方向导数为

$$D_h F(g)_t = \int_0^t \sigma(\bar{x}_{s-r}^g)dh_s + \int_0^t \sigma'(\bar{x}_{s-r}^g)D_h\bar{x}_{s-r}^g dg_s.$$

证明。 考虑映射

$$H : W_2^{1-\alpha}(0,T) \times W_1^{\alpha}(-r,T-r) \mapsto W_1^{\alpha}(0,T),$$

定义为

$$H(g,x) := \int_0^\cdot \sigma(x_{s-r})dg_s.$$

按照 [21] 中引理 3 的相同计算，我们可以验证 H 是弗雷歇可微的，其方向导数为：

• 对任意 $h \in W_2^{1-\alpha}(0,T)$

$$D_{1,h}H(g,x)_t = \int_0^t \sigma(x_{s-r})dh_s,$$

• 对任意 $w \in W_1^{\alpha}(-r,T-r)$

$$D_{2,w}H(g,x)_t = \int_0^t \sigma'(x_{s-r})w_{s-r}dg_s.$$

那么， 由于 $F(g) = H(g,\bar{x}^g)$，利用链式法则可得，对于 $h \in W_2^{1-\alpha}(0,T$)

$$\begin{aligned} D_hF(g)_t &= D_{1,h}H(g,\bar{x}^g)_t + D_{2,D_h\bar{x}^g}H(g,\bar{x}^g)_t \\ &= \int_0^t \sigma(\bar{x}^g_{s-r})dh_s + \int_0^t \sigma'(\bar{x}^g_{s-r})D_h\bar{x}^g_{s-r}dg_s. \end{aligned}$$

□

在最后一个命题之前，我们需要一个技术引理。

引理 5.3. 假设 $\eta_0 \in \mathbb{R}$ 且 b 属于 C_b^2，并且映射

$$\zeta : W_2^{1-\alpha}(0,T) \mapsto W_1^{\alpha}(0,T)$$

is 在方向 $h \in W_2^{1-\alpha}(0,T)$上弗雷歇可微。于是映射

$$F : W_2^{1-\alpha}(0,T) \times W_1^{\alpha}(0,T) \to W_1^{\alpha}(0,T)$$

定义为

$$(g,x) \mapsto F(g,x) := x - \eta_0 - \int_0^{\cdot} b(x_s)ds - \zeta^g_{\cdot}$$

在方向 $h \in W_2^{1-\alpha}(0,T)$上弗雷歇可微。此外，对于 $h \in W_2^{1-\alpha}(0,T)$,$v \in W_1^{\alpha}(0,T)$ 以及$(g,$ $x) \in W_2^{1-\alpha}(0,T) \times W_1^{\alpha}(0,T)$，关于$h$ 和 v 的弗雷歇导数分别为

$$D_{1,h}F(g,x)_t = -D_h\zeta^g_t, \tag{5.2}$$

$$D_{2,v}F(g,x)_t = v_t - \int_0^t b'(x_s)v_sds. \tag{5.3}$$

证明。 对于$W_2^{1-\alpha}(0,T) \times W_1^{\alpha}(0,T)$中的$(h,x)$和$(\tilde{h},\tilde{x})$， 有

$$F(h,x)_t - F(\tilde{h},\tilde{x})_t = x_t - \tilde{x}_t - \int_0^t (b(x_s) - b(\tilde{x}_s))ds - (\zeta^h_t - \zeta^{\tilde{h}}_t).$$

利用 [2, 命题 2.2], 可得

$$\left\| x - \tilde{x} - \int_0^{\cdot} (b(x_s) - b(\tilde{x}_s))ds \right\|_{\alpha,1} \le c_{\alpha,T}\|x - \tilde{x}\|_{\alpha,1}.$$

另一方面，由于 ζ可微，因此它是连续的，并且可以控制 $|\zeta^h - \zeta^h|$。因此， F 关于两个变量（h,x）均连续。

接下来我们证明弗雷歇可微性。设 $v,w \in W_1^{\alpha}(0,T)$。根据 [2, 命题 2.2]，我们有

$$\|D_{2,v}F(h,x) - D_{2,w}F(h,x)\|_{\alpha,1} \le c_{\alpha,T}\|v - w\|_{\alpha,1}.$$

因此，$D_{2,\cdot}F(h,x)$ 是一个有界线性算子。此外，

$$F(h,x+v)_t - F(h,x)_t - D_{2,v}F(h,x)_t = \int_0^t (b(x_s) - b(x_s+v_s) + b'(x_s)v_s)ds.$$

由中值定理和 [2,命题 2.2],

$$\left\| \int_0^{\cdot} (b(x_s) - b(x_s+v_s) + b'(x_s)v_s)ds \right\|_{\alpha,1} \leq c_{\alpha,T}\|v\|_{\alpha,1}^2.$$

这表明，(5.3) 是关于 x 的 $F(h,x)$ 的弗雷歇导数。根据我们的假设，关于 h 的弗雷歇可微性及其导数可由 (5.2) 轻易得到。□

命题 5.4。假设引理 5.3 的条件成立。设 x^g 是下列方程的解

$$x_t^g = \eta_0 + \zeta_t^g + \int_0^t b(x_s^g)ds, \quad t \in (0,T].$$

那么映射

$$g \in W_2^{1-\alpha}(0,T) \to x^g \in W_1^{\alpha}(0,T)$$

沿方向 h 弗雷歇可微，且其导数为

$$D_h x_t^g = D_h\zeta_t^g + \int_0^t b'(x_s^g)D_h x_s^g ds.$$

证明。沿用 [21] 中命题 4 的证明思路以及引理 5.3的结果，我们有

$$\begin{aligned} D_{2,v}F(0,x^g)_t &= v_t - \int_0^t b'(x_s^g)v_s ds. \\ Dx^g &= -D_{2,\cdot}F(0,x^g)^{-1} \circ D_1F(0,x^g). \end{aligned}$$

那么，对于任意 $h \in W_2^{1-\alpha}(0,T)$，$-D_h x^g$ 是该微分方程的唯一解

$$D_{1,h}F(0,x^g)_t = -D_{2,D_h x^g}F(0,x^g)_t,$$

即

$$-D_h\zeta_t^g = -D_h x_t^g + \int_0^t b'(x_s^g)D_h x_s^g ds.$$

因此，我们得到了所需的导数。 □

我们以弗雷歇导数的表达式结束本节。

命题 5.5. 假设定理 *5.1* 的条件成立。假设沿方向 $h \in W_1^{1-\alpha}(0,T)$ 的导数为

$$D_h\bar{x}_t^g = \int_0^t D_s\bar{x}_t^g dh_s,$$

其中 $D_s\bar{x}_u^g = 0$ 若 $s > u$。那么，方程 (5.1) 的解沿方向 h 的导数为

$$D_h x_t^g = \int_0^t \Phi_t^g(s)dh_s,$$

并且 Φ_t^g （s） 定义为

$$\Phi_t^g(s) = \begin{cases} \int_s^t b'(x_u^g)\Phi_u^g(s)du + \sigma(\bar{x}_{s-r}^g) + \int_s^t \sigma'(\bar{x}_{u-r}^g)D_s\bar{x}_{u-r}^g dg_u, & if\, s \le t, \\ 0, & if\, s > t. \end{cases} \tag{5.4}$$

证明。 证明与 [21, 命题 4]的证明类似。事实上，对于 $t \in [T]$

$$\begin{aligned} \int_0^t \Phi_t^g(s)dh_s &= \int_0^t \Big(\int_s^t b'(x_u^g)\Phi_u^g(s)du + \sigma(\bar{x}_{s-r}^g) + \int_s^t \sigma'(\bar{x}_{u-r}^g)D_s\bar{x}_{u-r}^g dg_u \Big) dh_s \\ &= \int_0^t b'(x_u^g)\Big(\int_0^u \Phi_u^g(s)dh_s \Big)du + \int_0^t \sigma(\bar{x}_{s-r}^g)dh_s + \int_0^t \sigma'(\bar{x}_{u-r}^g)\Big(\int_0^{u-r} D_s\bar{x}_{u-r}^g dh_s \Big)dg_u \\ &= \int_0^t b'(x_u^g)D_h x_u^g du + \int_0^t \sigma(\bar{x}_{s-r}^g)dh_s + \int_0^t \sigma'(\bar{x}_{u-r}^g)D_h\bar{x}_{u-r}^g dg_u, \end{aligned}$$

以及当 $s > t$时 $\Phi_t^g(s) = 0$。注意，我们使用了对于 $s > u - r$，我们知道 $D_s\bar{x}_{u-r}^g = 0$ □

6. 收敛于确定性解的序列的定义 我们的目标是构造一个在长度为 r 的区间上的近似序列，使其收敛于确定性方程的解

$$x_t = \begin{cases} \eta_0 + \int_0^t b(x_s)ds + \int_0^t \sigma(x_{s-r})dg_s + y_t, & \text{if } t \in [0,T], \\ \eta_t, & \text{if } t \in [-r,0]. \end{cases}$$

为简化记号，我们将不写出该方程的解对 g 的依赖关系。回顾一下，对于按第4节定义的 f，$b_\varepsilon(x) = b(x) + \frac{1}{\varepsilon}f(x)$，并且在本节中始终假设 b、$\sigma \in \mathcal{C}_b^2$、$\eta \in \mathcal{C}^{1-\alpha}(-r,0)$以及 $T = mr$。

我们从区间 $[-r,r]$开始。由于映射 $t \to \int_0^t \sigma(\eta_{s-r})dg_s$ 属于 $\mathcal{C}^{1-\alpha}(0,r)$，我们在第4节中已经看到，方程的解

$$x_t^\varepsilon = \begin{cases} \eta_0 + \int_0^t b_\varepsilon(x_s^\varepsilon)ds + \int_0^t \sigma(\eta_{s-r})dg_s, & \text{if } t \in [0,r], \\ \eta_u, & \text{if } t \in [-r,0], \end{cases}$$

一致收敛到属于 $\mathcal{C}^{1-\alpha}(-r,r)$ 的连续函数 x，使得

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{t \in [-r,r]} |x_t^\varepsilon - x_t| = 0,$$

并且满足反射方程

$$x_t = \begin{cases} \eta_0 + \int_0^t b(x_s)ds + \int_0^t \sigma(x_{s-r})dg_s + y_t, & \text{if } t \in [0,r], \\ \eta_u, & \text{if } t \in [-r,0]. \end{cases}$$

现在考虑区间 $[-r, 2r]$ 以及方程

$$x_t^\varepsilon = \begin{cases} x_t^\varepsilon, & \text{if } t \in [-r, r], \\ x_r^\varepsilon + \int_r^t b_\varepsilon(x_s^\varepsilon)ds + \int_r^t \sigma(x_{s-r})dg_s, & \text{if } t \in [r, 2r], \end{cases}$$

可写为

$$x_t^\varepsilon = \eta_0 + \int_0^t b_\varepsilon(x_s^\varepsilon)ds + \int_0^t \sigma(x_{s-r})dg_s,$$

对于 $t \in [0, 2r]$。按照相同的论证，存在一个连续函数 x 使得

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{t\in[-r,2r]} |x_t^\varepsilon - x_t| = 0,$$

并且满足反射方程

$$x_t = \begin{cases} \eta_0 + \int_0^t b(x_s)ds + \int_0^t \sigma(x_{s-r})dg_s + y_t, & \text{if } t \in [0, 2r], \\ \eta_u, & \text{if } t \in [-r, 0]. \end{cases}$$

注意，我们使用了相同的记号 x，因为该解是对 $[-r, r]$. 中定义的函数的显然延拓

重复 th　　重复相同的论证 m 次（回顾 $T = mr$），我们将得到一个序列

$$x_t^\varepsilon = \begin{cases} \eta_t, & \text{if } t \in [-r, 0] \\ x_r^\varepsilon + \int_r^t b_\varepsilon(x_s^\varepsilon)ds + \int_r^t \sigma(x_{s-r})dg_s, & \text{if } t \in [0, T], \end{cases}$$

以及一个属于 $\mathcal{C}^{1-\alpha}(0, T)$ 的函数 x，满足

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{t\in[-r,T]} |x_t^\varepsilon - x_t| = 0,$$

使得

$$x_t = \eta_0 + \int_0^t b(x_s)ds + \int_0^t \sigma(x_{s-r})dg_s + y_t,$$

对所有 $t \in [0, T]$ 均成立。

现在我们有一个序列，它在 $(-r, T]$ 上一致收敛于 x。接下来我们要讨论它的弗雷歇可微性。

首先，我们再次讨论区间 $[0, r]$。显然，由定理 5.1 可知，x_t^ε 沿方向 $h \in W_2^{1-\alpha}(0, r)$ 弗雷歇可微，且其导数为，对于 $t \in [0, r]$

$$D_h x_t^\varepsilon = \int_0^t b'_\varepsilon(x_s^\varepsilon) D_h x_s^\varepsilon ds + \int_0^t \sigma(\eta_{s-r})dh_s.$$

此外，根据命题 5.5，沿 h 方向的导数为

$$D_h x_t^\varepsilon = \int_0^t \Phi_t^{g,\varepsilon}(s)dh_s,$$

其中 $t \in [0, r]$ 和 $\Phi_t^{\varepsilon}(s)$ 定义为

$$\Phi_t^{g,\varepsilon}(s) = \begin{cases} \int_s^t b'_\varepsilon(x_u^\varepsilon)\Phi_u^{g,\varepsilon}(s)du + \sigma(\eta_{s-r}), & \text{if } s \le t, \\ 0, & \text{if } s > t. \end{cases}$$

考虑一般情形，即对于 $t \in [(l-1)r,\ lr]$。假设 x_t 沿方向 h可微。那么根据定理 5.1，我们显然有， x_t^ε 沿方向 h 弗雷歇可微，并且还可以得到其导数。

$$\begin{aligned} D_h x_t^\varepsilon &= D_h \int_0^t \sigma\left(x_{s-r}\right) dg_s + \int_0^t b'_\varepsilon\left(x_s^\varepsilon\right) D_h x_s^\varepsilon ds \\ &= \int_0^t b'_\varepsilon\left(x_s^\varepsilon\right) D_h x_s^\varepsilon ds + \int_0^t \sigma\left(x_{s-r}\right) dh_s + \int_0^t \sigma'(x_{s-r}) D_h x_{s-r} dg_s. \end{aligned}$$

根据命题 5.5，该沿方向 h 的导数可以写为

$$D_h x_t^\varepsilon = \int_0^t \Phi_t^{g,\varepsilon}(s) dh_s,$$

对于定义为如下形式的 $t \in [0, lr]$ 和 $\Phi_t^{\varepsilon}(s)$

$$\Phi_t^{g,\varepsilon}(s) = \begin{cases} \int_s^t b'_\varepsilon(x_u^\varepsilon)\Phi_u^{g,\varepsilon}(s)du + \sigma(x_{s-r}) + \int_s^t \sigma'(x_{u-r}) D_s x_{u-r} dg_u, & \text{if } s \le t, \\ 0, & \text{if } s > t. \end{cases}$$

7. 随机情形

本节将前几节所得的结果应用于具有正性约束的随机时滞微分方程（1.1）。不失一般性，我们可以假设 $T_0 = mr$。

回忆一下， $W^H = \{W_t^H, t \in [0, T_0]\}$ 是一个赫斯特参数为 $H > \frac{1}{2}$ 的单维分数布朗运动。也就是说，它是一个协方差函数为

$$\mathbf{E}(W_t^H W_t^H) = R_H(t,s) = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right).$$

固定 $\alpha \in (1-H, \frac{1}{2})$。由于 W^H的轨迹对所有$\epsilon < H + \alpha - 1$都是$(1-\alpha+\epsilon)$-赫尔德连续的，根据（2.1）中的第一个包含关系，我们可以应用前几节的框架。特别地，在定理 1.1的假设下，方程（1.1）的解以及本节中出现的所有其他随机方程的解均存在。

接下来我们研究解的Malliavin可微性。我们首先将定理 5.1中的确定性结果应用于这一类随机方程。

定理 7.1. 设 $\{X_t, t \in [-r, kr]\}$ 是一个取值于 $W_1^\alpha(-r, kr)$，的随机过程，且 X 沿 *Cameron-Martin*空间中的方向几乎必然可微。假设

b，$\sigma \in \mathcal{C}_b^2$ 并令 $\tilde{X}$ 为方程的解

$$\tilde{X}_t = \eta_0 + \int_0^t b(\tilde{X}_s)ds + \int_0^t \sigma(\bar{X}_{s-r})dW_s^H, \qquad t \in [0, r(k+1)],$$
$$\tilde{X}_t = \eta_t, \qquad t \in [-r, 0].$$

˜那么，解 X 几乎必然沿 *Cameron-Martin* 空间中的方向可微。此外，对于任意 $t > 0$，其导数满足

$$D_s\tilde{X}_t = \int_0^t b'(\tilde{X}_u)D_s\tilde{X}_u du + \sigma(\bar{X}_{s-r}) + \int_0^t \sigma'(\bar{X}_{u-r})D_s\bar{X}_{u-r}dW_u^H \tag{7.1}$$

˜若 $s \le t$，则 $D_sX_t = 0$；若 $s > t$，则。

证明。根据命题 5.5，解是弗雷歇可微的，并且对所有 $\varphi \in \mathcal{H}$，弗雷歇导数

$$D_{\mathcal{R}_H\varphi}\tilde{X}_t^i = \frac{d}{d\epsilon}\tilde{X}_t^i(\omega + \epsilon\mathcal{R}_H\varphi)|_{\epsilon=0}$$

存在，这证明了定理的第一条陈述。

˜导数 $D_{\mathcal{R}_H\varphi}X_t$ 与 $\langle DX_t, \varphi\rangle_{\mathcal{H}}$一致，其中 D 是通常的 Malliavin 导数。此外，对于任意 $\varphi \in \mathcal{H}$，由于我们可以写成

$$D_{\mathcal{R}_H\varphi}\bar{X}_t = \langle D\bar{X}_t, \varphi\rangle_{\mathcal{H}},$$

由命题 5.5 可得，

$$\begin{aligned} D_{\mathcal{R}_H\varphi}\tilde{X}_t &= \int_0^t \Phi_t^{W^H}(s)d(\mathcal{R}_H\varphi)(s) \\ &= \int_0^t \Phi_t^{W^H}(s)\left(\int_0^s \partial_s K_H(s,u)(\mathcal{K}_H^*\varphi)(u)du\right)ds \\ &= \sum_{j=1}^m \int_0^T (\mathcal{K}_H^*\Phi_t^{W^H})(s)(\mathcal{K}_H^*\varphi)(s)ds \\ &= \langle \Phi_t^{W^H}, \varphi\rangle_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

方程（7.1）由（5.4）得出。证明至此完成。 □

现在，我们可以讨论方程（1.1）的解的 Malliavin 可微性。首先，我们回顾 [22] 中证明的一个技术引理。

引理7.2。设 $\{F_n, n \ge 1\}$ 是 $\mathbb{D}^{1,p}$ 中的一个随机变量序列，它在 $L^p(\Omega)$ 中收敛到 F，并且满足

$$\sup_n \mathbf{E}\left[\|DF_n\|_{\mathcal{H}}^p\right] < \infty.$$

那么，F 属于 $\mathbb{D}^{1,p}$，且导数序列 $\{DF_n, n \ge 1\}$ 在 $L^p(\Omega\ \mathcal{H})$ 的弱拓扑下收敛到 DF。

利用上述引理，我们可以陈述以下结果：

命题 7.3。对于任意 $t \in (0,\ T_0],\quad X_t \in \mathbb{D}^{1,\ 2}$。

证明。我们回顾一下，在确定性情形下有 $x_t = \lim_{\varepsilon\to 0} x_t^\varepsilon$，并且$x_t^\varepsilon$ 是一个递增序列（命题4.3和命题4.4）。因此， X_t^ε 几乎必然收敛到 X_t。由于 X_t^ε 是一个递增序列，且我们知道 $E(X_t^2) < \infty$，所以$\{X_t^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ 在 L^2中收敛到 X_t。

我们开始研究 $t \in [0, r]$。根据定理 7.1，由于初始条件 η 是确定性的，我们得到，对于任意 $\varepsilon > 0$， X_t^ε 属于 $\mathbb{D}^{1,\,2}$，且其导数满足，对于$s < t$

$$D_s X_t^\varepsilon = \int_s^t b_\varepsilon'(X_u^\varepsilon) D_s X_u^\varepsilon du + \sigma(\eta_{s-r}).$$

该方程的解可写为

$$\begin{aligned} D_s X_t^\varepsilon &= \sigma(\eta_{s-r}) \exp\left(\int_s^t b_\varepsilon'(X_u^\varepsilon) du\right) \\ &= \sigma(\eta_{s-r}) \exp\left(\int_s^t b'(X_u^\varepsilon) du\right) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t f'(X_u^\varepsilon) du\right). \end{aligned}$$

利用

$$\mathbf{E}\left[\|DX_t^\varepsilon\|_{\mathcal{H}}^2\right] \le C_H \int_0^t \mathbf{E}\left(|D_u X_t^\varepsilon|^2\right) du, \tag{7.2}$$

由于 $f' < 0$，我们很容易得到

$$\sup_\varepsilon \mathbf{E}\left[\|DX_t^\varepsilon\|_{\mathcal{H}}^2\right] \le C_H \int_0^t \sigma^2(\eta_{u-r}) \exp\left(2(t-u)\|b'\|_\infty\right) du < \infty.$$

应用引理7.2，我们得到，对于任意 $t \in [0, r]$， $X_t \in \mathbb{D}^{1,\,2}$。

我们继续研究 $t \in [0, 2r]$。再次利用定理 7.1，我们得到每个 X_t^ε 都属于 $\mathbb{D}^{1,\,2}$，并且其导数满足：对于 $t \in [r, 2r]$ 以及对于 $s < t$

$$D_s X_t^\varepsilon = \int_s^t b_\varepsilon'(X_u^\varepsilon) D_s X_u^\varepsilon du + \sigma(X_{s-r}) + \int_s^t \sigma'(X_{u-r}) D_s X_{u-r} dW_u.$$

该方程的解可以写成

$$\begin{aligned} D_s X_t^\varepsilon &= \left(\sigma(X_{s-r}) + \int_s^t \sigma'(X_{u-r}) D_s X_{u-r} dW_u\right) \\ &\quad \times \exp\left(\int_s^t b'(X_u^\varepsilon) du\right) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t f'(X_u^\varepsilon) du\right). \end{aligned} \tag{7.3}$$

再次利用（7.2），由于 $f' < 0$，我们很容易得到

$$\begin{aligned} \sup_\varepsilon \mathbf{E}\left[\|DX_t^\varepsilon\|_{\mathcal{H}}^2\right] \le 2C_H \int_0^t \mathbf{E}\left(\sigma^2(X_{s-r}) + \left|\int_s^t \sigma'(X_{u-r}) D_s X_{u-r} dW_u\right|^2\right) \\ \times \exp\left(2(t-u)\|b'\|_\infty\right) du < \infty. \end{aligned}$$

因此， $X_t \in \mathbb{D}^{1,\,2}$。

将此过程迭代 m 次，可得 $X_t \in \mathbb{D}^{1,\,2}$ 对任意 $t \in [0, T_0]$均成立。显然，这意味着 $Y_t \in \mathbb{D}^{1,\,2}$ 对任意 $t \in [0, T_0]$ 均成立，因此对于 $s < t$，我们可以写成

$$D_s X_t = \int_s^t b'(X_u) D_s X_u du + \sigma(X_{s-r}) + \int_s^t \sigma'(X_{u-r}) D_s X_{u-r} dW_u + D_s Y_t.$$

□

注记 7.4。 注意，在前面的证明中我们已经看到

$$\sup_{\varepsilon} \int_0^{t_0} \mathbf{E}\left(|D_s X_{t_0}^{\varepsilon}|^2\right) ds < \infty.$$

因此，存在一个收敛子序列，它将在$L^2(\Omega;\, L^2([0,T]))$的弱拓扑下收敛。此外，由唯一性可知，极限为 DX_{t_0}.

现在我们可以给出本文主要结果的证明。

定理 *1.1* 的证明。 我们将证明，对于任意 $a > 0$， X_{t_0} 的分布在 $[a, +\infty)$上的限制是绝对连续的。我们在命题 7.3 中已经看到， X_{t_0} 属于$\mathbb{D}^{1,\,2}$。 于是，利用 Bouleau 和 Hirsch 的经典结果（见 [3] 或 [22, 定理 2.1.2]），只需验证在集合 $\Omega_a = \{\omega, X_{t_0}(\omega) \geq a\}$

$$\int_0^{t_0} (D_s X_{t_0})^2 ds > 0, \qquad \text{a.s on } \Omega_a.$$

由于

$$\int_0^{t_0} |D_s X_{t_0}| ds < t_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{t_0} (D_s X_{t_0})^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

只需验证

$$\int_0^{t_0} |D_s X_{t_0}| ds > 0, \qquad \text{a.s on } \Omega_a.$$

另一方面，由于 $\sigma > 0$，我们有 $\sigma(X_{t_0-r}) > 0$ ，并且可以找到 $t_1(\omega) < t_0$，使得对于 $s \in [t_1, t_0]$

$$\sigma(X_{s-r}) + \int_s^{t_0} \sigma'(X_{u-r}) D_s X_{u-r} dW_u > \frac{1}{2} \sigma(X_{t_0-r}) > 0.$$

由表达式 (7.3) 可得，对于任意 s， $t_1(\omega) < s < t_0$ ，且对所有 $\varepsilon > 0$ ，都有$D_s X_{t_0}^{\varepsilon} > 0$。

取极限后，我们得到，对于任意 s， $t_1(\omega) < s < t_0$ ，都有 $D_s X_{t_0} \geq 0$ ，因此只需证明

$$\int_{t_1}^{t_0} D_s X_{t_0} ds > 0, \qquad \text{a.s on } \Omega_a.$$

固定 $a > 0$集 $B_s = \{\omega, X_s(\omega) > \frac{a}{2}\}$和 $\tau_s =$无穷小 $\{t \geq s, X_t = \frac{a}{2}\}$。我们将假设路径 ω 属于 B_{t_0}. ，那么

$$\int_{t_1}^{t_0} D_s X_{t_0} ds \geq \int_{t_1}^{t_0} D_s X_{t_0} \mathbf{1}_{\{\tau_s > t_0\}} ds. \tag{7.4}$$

由注记 7.4 可得，存在一个子序列将在弱拓扑下收敛，使得，

$$\int_{t_1}^{t_0} D_s X_{t_0} \mathbf{1}_{\{\tau_s > t_0\}} ds = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{t_1}^{t_0} D_s X_{t_0}^{\varepsilon} \mathbf{1}_{\{\tau_s > t_0\}} ds, \tag{7.5}$$

在 $L^2(\Omega\ L^2(0,T))$ 的弱拓扑中。

设 $F_{s,\ t}^{\varepsilon}$ 为积分方程的解，其中 $s < t$

$$F_{s,t}^{\varepsilon} = \sigma(X_{s-r}) + \int_s^t \sigma'(X_{u-r}) D_s X_{u-r} dW_u + \int_s^t b'(X_u^{\varepsilon}) F_{s,u}^{\varepsilon} du.$$

考虑一个带有 $\tau_s > t_0$ 的 $s \in [t_1, t_0]$。对所有 $u \in [s, t_0]$，均有 $X_u \geq \frac{a}{2}$.

由 X^{ε} 到 X 的一致收敛性，存在一个 $\varepsilon_0(\omega)$，使得对所有 $\varepsilon < \varepsilon_0$ 均有 $X_u^{\varepsilon} > \frac{a}{4}$，任意 $u \in [s, t_0]$ 均如此。因此，对所有 $\varepsilon < \varepsilon_0$ 均有 $f'(X_u^{\varepsilon}) = 0$，任意$u \in [s, t_0]$ 均如此。

于是，对任意 $\varepsilon < \varepsilon_0(\omega)$ 以及所有 $u \in [s, t_0]$，由解的唯一性可得

$$F_{s,t_0}^{\varepsilon} = D_s X_{t_0}^{\varepsilon}. \tag{7.6}$$

对于 $s < t$，引入

$$G_{s,t} = \sigma(X_{s-r}) + \int_s^t \sigma'(X_{u-r}) D_s X_{u-r} dW_u + \int_s^t b'(X_u) G_{s,u} du.$$

So,

$$G_{s,t} = \left(\sigma(X_{s-r}) + \int_s^t \sigma'(X_{u-r}) D_s X_{u-r} dW_u \right) \exp\left(\int_s^t b'(X_u) du \right),$$

并且可得，对于任意 $s \in [t_1, t_0]$, $G_{s,\ t_0} > 0$。

注意到

$$\begin{aligned} G_{s,t} - F_{s,t}^{\varepsilon} &= \int_s^t b'(X_u) G_{s,u} du - \int_s^t b'(X_u^{\varepsilon}) F_{s,u}^{\varepsilon} du \\ &= \int_s^t (b'(X_u) - b'(X_u^{\varepsilon})) G_{s,u} du + \int_s^t b'(X_u^{\varepsilon})(G_{s,u} - F_{s,u}^{\varepsilon}) du \end{aligned}$$

于是，

$$G_{s,t_0} - F_{s,t_0}^{\varepsilon} = \left(\int_s^{t_0} (b'(X_u) - b'(X_u^{\varepsilon})) G_{s,u} du \right) \exp\left(\int_s^{t_0} b'(X_u^{\varepsilon}) du \right).$$

利用 t hat b' 具有有界导数，我们有，对于 $s \in [t_1, t_0$]

$$|G_{s,t_0} - F_{s,t_0}^{\varepsilon}| \leq K \|X - X^{\varepsilon}\|_{\infty} \left(\int_s^{t_0} |G_{s,u}| du \right).$$

因此 $F_{s,\ t_0}^{\varepsilon}$ 几乎处处收敛于 $G_{s,\ t_0}$。

利用有界收敛结果，我们得到

$$\lim_{\varepsilon} \int_{t_1}^{t_0} F_{s,t_0}^{\varepsilon} \mathbf{1}_{\{\tau_s > t_0\}} ds = \int_{t_1}^{t_0} G_{s,t_0} \mathbf{1}_{\{\tau_s > t_0\}} ds > 0, \qquad \text{a.s.} \tag{7.7}$$

综合（7.4）、（7.5）、（7.6）和（7.7），我们得到

$$\int_0^{t_0} |D_s X_{t_0}|\, ds = \int_0^{t_1} |D_s X_{t_0}|\, ds + \int_{t_1}^{t_0} |D_s X_{t_0}|\, ds \geq \int_{t_1}^{t_0} |D_s X_{t_0}|\, ds \geq \int_{t_1}^{t_0} D_s X_{t_0} ds > 0.$$

□

参考文献

[1] *M. Besalú* 和 *C. Rovira*：受分数布朗运动驱动的带非负约束的随机时滞方程。*Bernoulli 18 (2012), 24-45.*[2] *M. Besalú* 和 *C. Rovira*：由分数布朗运动驱动、赫斯特参数为 $H > \frac{1}{2}$ 的随机 *Volterra* 方程。*Stochastics and Dynamics 12 (2012).*[3] *B. Bouleau* 和 *F. Hirsch*：*Dirichlet* 空间中的绝对连续性性质及其在随机微分方程中的应用。*Séminaire de Probabilités XX,* 数学讲义 *1204 (1986).*[4] *A. Deya*、*M. Gubinelli*、*M. Hofmanová* 和 *S.Tindel*：一维反射粗微分方程。*Stochastic Processes and their Applications 129 (2019), 3261-3281,*[5] *C. Donati-Martin* 和 *E. Pardoux*：由白噪声驱动的带反射随机偏微分方程。*Probab. Theory Related Fields 95 (1993), 1-24.*[6] *C. Donati-Martin* 和 *E. Pardoux*：反射随机偏微分方程与 *Maliiavin* 演算。*Bull. Sci. Math. 121 (1997), 405-422.*[7] *M. Ferrante* 和 *C. Rovira*：由分数布朗运动驱动、赫斯特参数为 $H > 1/2$ 的随机时滞微分方程。*Bernoulli 12 (2006), 85-100.*[8] *M. Ferrante* 和 *C. Rovira*：由分数布朗运动驱动的时滞微分方程的收敛性。*Journal of Evolution Equations 10 (2010), 761–783.*[9] *M. Ferrante* 和 *C. Rovira*：由分数布朗运动驱动的带非负约束的随机微分方程。*J. Evol. Equ. 13 (2013), 617–632.*[10] *A. Falkowski, L.Słomiński*：由半鞅及具有有界 *p*-变差的过程驱动的带约束随机微分方程。*Stochastic Processes and their Applications 127 (2017), 3536-3557,*[11] *I. Gyöngy*：半线性随机偏微分方程的存在唯一性结果。*Stochastic Process. Appl. 73 (1998), no. 2, 271-299.*[12] *H.J. Kusher*：受控随机时滞系统的数值方法。*Birkhäuser,* 波士顿 *(2008).*[13] *M.S. Kinnally, J. Williams*：关于带非负约束的随机时滞微分方程平稳分布的存在唯一性。*Electronic Journal of Probability 15 (2010), 409-451.*[14] *D. Lépingle* 和 *C. Marois*：一维多值随机微分方程。*Séminaire de Probabilités, XXI, 520–533,* 数学讲义*, 1247, Springer,* 柏林*, 1987.*[15] *D. Lépingle, D. Nualart* 和 *M. Sanz*：反射扩散过程的随机微分。*Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.25 (1989), 283–305.*[16] *J. León* 和 *S. Tindel*：分数阶时滞方程的 *Malliavin* 微积分。*J. Theoret. Probab. 25 (2012), 854–889.*[17] *S.-E. A. Mohammed*：带记忆的随机微分系统：理论、实例与应用。载于 *Stochastic Analysis and Related Topics VI (L. Decreusefond, J. Gjerde, B. Oksendal* 和 *A.S. Üstünel* 编)，*Birkhäuser,* 波士顿*, 1-77 (1998).*[18] *A. Neuenkirch, I. Nourdin, S. Tindel*：由粗糙路径驱动的时滞方程。*Electron. J. Probab. 13 (2008), 2031–2068.*[19] *D. Nualart* 和 *A. Răşcanu*：由分数布朗运动驱动的微分方程。*Collect. Math. 53 (2002) 55-81.*[20] *D. Nualart* 和 *E. Pardoux*：由白噪声驱动的带反射拟线性随机偏微分方程。*Probab. Theory Related Fields 93 (1992) 77–89.*[21] *D. Nualart* 和 *B. Saussereau*：由分数布朗运动驱动的随机微分方程的 *Malliavin* 微积分。*Stochastic Process. Appl. 119 (2009) 391–409.*

[22] D. Nualart：*Malliavin*演算及相关主题。Probability and its Applications。Springer-Verlag, 第 2 版[23] S. Tindel, I. Torrecilla：由赫斯特参数大于 *1/4* 的分数布朗运动驱动的若干微分系统。Stochastic analysis and related topics, 169–202,Springer Proc. Math. Stat., 22, Springer, 海德堡, 2012.[24] L.C. Young：与 *Stieltjes*积分相关的 *Hölder* 型不等式。Acta Math. **67**(1936) 251–282.[25] M. Zähle：关于分形函数积分与随机演算 *I*。Prob. Theory Relat. Fields **111** (1998) 333–374.

Mireia Besalú，生物学系遗传学、微生物学与统计学系，巴塞罗那大学。Diagonal, 645, 08028 巴塞罗那电子邮箱：mbesalu@ub.edu

David Márquez-Carreras，巴塞罗那大学数学与信息学系。Gran Via de les Corts Catalanes, 585, 08007 巴塞罗那电子邮箱：davidmarquez@ub.edu

Carles Rovira，巴塞罗那大学数学与信息学系。Gran Via de les Corts Catalanes, 585, 08007 巴塞罗那电子邮箱：carles.rovira@ub.edu