arXiv:2302.03346v2 [math.GR] 6 Nov 2023

初等可解群的相干性

SAM HUGHES、DAWID KIELAK、PETER H. KROPHOLLER 和 IAN J. LEARY

Abstract. 我们证明，对于初等可解群，群的相干性、群的同调相干性以及整数群环的相干性三者等价。这推广了 Bieri 和 Strebel 关于有限生成可解群的一项结果。

1. 引言

若群 G 是 F_n 型，则 G 存在一个 K(G, 1) 的模型，其 n-骨架有限；若 G 对所有 n 都是 F_n 型，则 G 是 F_∞ 型；若 G 存在一个有限的 K(G, 1) 模型，则 G 是 F 型。若 G 有一个 F 型有限指数子群，则称 G 为 VF 型。将前述定义中的“一个 K(G, 1) 的模型”替换为“ $\mathbb{Z}$ 在 $\mathbb{Z}G$上的投射分解”，便分别得到 FP_n、FP_∞、FP 和 VFP 这些性质。

Bestvina 和 Brady 的工作表明[BB97] 一个群是有限可呈示的与其属于 FP_2 型并不等价。在本文中，我们研究这些性质的局部版本的等价性。

如果一个群 G 是 相干的，则其每个有限生成子群都是有限呈示的；如果每个有限生成子群都属于 FP型，则称其为同调相干的。$_2$如果一个环 R 是 相干的，则其每个有限生成左理想都是有限呈示的。这些不同的相干性概念目前正受到非常积极的研究——这里提及 Jaikin-Zapirain–Linton 的一篇近期重要文章 [JZL23] ，该文通过同调变体确立了单关系群的相干性。

如果 $\mathbb{Z}G$ 是相干的，或者 G 是相干的，那么 G 是同调相干的。两个逆命题均尚未得到证明；特别是，目前尚不知道 $\mathbb{Z}G$ 相干与 G 相干这两个性质之间是否存在蕴含关系。

在 [BS79], Bieri 和 Strebel 证明，对于有限生成可解群，群的相干性、同调相干性和群环的相干性这几种性质彼此等价。在证明过程中，他们将这些性质与升链HNN扩张联系起来；这类群由一个 顶点群 B 和一个 稳定字母 t生成，且 $t^{-1}Bt \supseteq B$，对应于

(S.Hughes 和 D. Kielak) Mathematical Institute、 University of Oxford、 Andrew Wiles Building、 Radcliffe Observatory Quarter、 Woodstock Road、 Oxford OX2 6GG、 United Kingdom(P.H. Kropholler 和 I.J. Leary)
School of Mathematical Sciences、 Universityof Southampton、
Southampton SO17 1BJ United Kingdom*E-mail addresses*: sam.hughes@maths.ox.ac.uk、kielak@maths.ox.ac.uk、p.h.kropholler@soton.ac.uk、i.j.leary@soton.ac.uk。

具有一个边轨道和一个标记端的树上的作用。若 $t^{-1}Bt \supset B$，则该HNN扩张是严格上升的。

注意到 Groves [Gro78] 独立证明了下文 (2) 和 (3) 的等价性。

定理 1.1（Bieri–Strebel）。对于有限生成可解群 G，以下条件等价：

(1) G 是相干的；(2) G 是同调相干的；(3) $\mathbb{Z}G$是相干的；(4) G 是多循环群，或 G 是一个具有多循环顶点群的真上升HNN扩张。

我们的主要定理（下文的定理 1.2）讨论初等可解群。回顾一下，初等可解群这一类是包含所有有限群和阿贝尔群，并且对扩张和直接极限（以及同构）封闭的最小群类。本文中，群类均默认对同构封闭。初等可解群这一类的雏形见于冯·诺依曼的开创性著作[vN29]，，随后以初等群这一简称在 [Day57] 中重新提出，并在 [Cho80]中得到进一步研究。不难证明，该类对取子群和取商群封闭，并且包含所有可解群。因此，下文的结果推广了 Bieri 和 Strebel 的结论。

定理 1.2. 对于有限生成初等可解群 G，以下条件等价：

(1) G 是相干的；(2) G 是同调相干的；(3) $\mathbb{Z}G$是相干的；(4) 或者 G 几乎多循环，或者 G 是一个以几乎多循环顶点群为顶点群的真上升HNN扩张。

我们将上述结果与以下三个观察结合起来：首先，可解群的上升HNN扩张是可解群（见引理 3.9）；其次，若一个群属于 $\mathtt{F}\infty$ 型，则它的上升HNN扩张也属于 $\mathtt{F}\infty$ 型；第三，根据 [KMPN09，定理 1.1]，属于 $\mathtt{F}\infty$ 型的初等可解群属于 VF 型。由此得到以下结论。

推论 1.3. 每个（同调）相干的初等可解群都是几乎可解群，且属于 VF 型。

尽管定理 1.1 和 1.2 的结论非常相似，但证明方法却大不相同。

Bieri–Strebel 证明，任何同调相干的可解群 G 都有有限的 Pr¨ufer 秩——也就是说，存在一个 r，使得每个子群都可由 r 个元素生成。据此，他们运用 Mal'cev 的结果和幂零群理论，推导出 G 是多循环群，或者 G 是一个具有多循环顶点群的真上升HNN扩张。

相比之下，我们引入 G 具有可指标相干的概念（定义3.1），并证明，若一个群没有非阿贝尔自由子群，则其商群也继承这一性质，因此初等可解群也具有这一性质。我们为

初等可解群提供了一般性的虚分裂原理，将其表示为复杂度较低群的上升HNN扩张。借助这两种工具，我们证明每个有限生成的初等可解且可指示相干群 G几乎可解。

由于我们所用的技术很大程度上基于对到 $\mathbb{Z}$ 的满同态及其核的理解，并且我们在推论 2.3 的证明中明确运用了这一技术，因此我们简要讨论一下 Bieri–Neumann–Strebel 不变量。该不变量由 [BNS87] 引入；请注意，我们讨论的是该不变量的一个稍有限制的版本，取值域为 $\mathbb{Z}$ 而非 $\mathbb{R}$。对于群 G，我们将第一上同调群 $\mathrm{H}^1(G;\mathbb{Z})$ 与同态集合 $G \to \mathbb{Z}$ 等同。在这一同构下，$\mathrm{H}^1(G;\mathbb{Z})$ 的本原元素对应于满同态 $G \to \mathbb{Z}$。BNS 不变量 $\Sigma^1(G)$ 是 $\mathrm{H}^1(G;\mathbb{Z})$ 的本原元素集合的子集，恰由那些由顶点群有限生成的升链 HNN扩张所诱导的满同态组成 [Bro87, 命题 3.1 和定理 5.2]。BNS 不变量满足以下性质：给定满同态ϕ: $G \to \mathbb{Z}$，核 $\ker \phi$ 有限生成，当且仅当 ϕ 和 $-\phi$ 均属于 $\Sigma^1(G)$ [BNS87, 定理 B1]。

两个猜想。我们以两个猜想结束引言。首先，回顾诺特性质和环的相干性的两个相关表述：即，一个环 R 是诺特的，当且仅当每个有限生成左或右 R-模都是 FP_∞型；一个环 R 是相干的，当且仅当每个有限呈示左或右 R-模都是 FP_∞型。换言之，诺特环是这样一类环：其有限生成（左或右）模的范畴是阿贝尔的；而相干环是这样一类环：其有限呈示（左或右）模的范畴是阿贝尔的。

第一个猜想是一个长期悬而未决、归于 Baer 名下的公开问题。众所周知，它对初等可解群成立（我们在定理4.1中包含了这一事实的证明）。

Baer 诺特猜想。设 G 为一个群。则 $\mathbb{Z}G$是诺特的，当且仅当 G 是几乎多循环的。

请注意，猜想的一个方向已得到证明：几乎多循环群的群环是诺特环，这一点由 Philip Hall 于二十世纪五十年代证实 [Hal54]，并且可以将其视为希尔伯特基定理的非交换版本。Hall 的结果无疑启发了 Baer 等人开始探问其逆命题是否成立。正如 Kropholler–Lorensen 所观察到的 [KL19]，，事实是 $\mathbb{Z}G$为诺特环蕴含着G 必为可解群，因此在 Baer 猜想中，我们可以将注意力完全限制在可解群上。

我们提出如下类似的猜想。若群环 $\mathbb{Z}G$ 是适当相干的，则称其为适当相干的，也就是说它是相干的但不是诺特的。

猜想 1.4。设 G是一个有限生成的可和群。那么，当且仅当 G 是一个具有几乎多循环顶点群的真上升HNN扩张时， $\mathbb{Z}G$才是适当相干的。

注意，必须假设可和性，因为 $\mathbb{Z}F_n$，其中 F_n表示秩为 n的自由群，它是半 FIR，因此是相干的。我们的定理1.2 证实了初等可解群的猜想。

致谢。本研究获得了欧洲研究委员会（ERC）通过欧盟“地平线2020”研究与创新计划提供的资助（资助协议编号：850930）。

作者感谢克雷数学研究所“热门主题小型工作组”计划提供的资金支持，该计划促进了本研究的开展。

2. Radicals

在下面的证明中，采用群的 Hirsch–Plotkin 根的一种变体将会很方便。回顾一下，群的 Fitting 子群是所有幂零正规子群的合成。Fitting 引理指出，如果 H 和 K 是群的幂零正规子群，那么 HK 也是幂零正规子群，因此 Fitting 子群是幂零正规子群的有向并。请注意，Fitting 子群本身不一定是幂零的，因此考虑群的 Hirsch–Plotkin 根可能是有益的。Hirsch–Plotkin 根定义为所有正规局部幂零子群的合成，并且它是一个特征的局部幂零子群。有一个引理以类似于 Fitting 引理支撑 Fitting 子群的方式支撑 Hirsch–Plotkin 根：该引理指出，如果 H 和 K 是正规局部幂零子群，那么它们的合成 HK 是局部幂零的。Hirsch–Plotkin 根是所有正规局部幂零子群的合成，而该引理确保它是正规局部幂零子群的有向并；特别地，Hirsch–Plotkin 根是唯一最大的正规局部幂零子群。

对我们的目的而言，其他根更为方便。下面的定义推广了 Hirsch–Plotkin 根。若 $\mathcal{P}$ 是一个对子群封闭的群类，则 L$\mathcal{P}$ 表示由那些其有限生成子群都属于 $\mathcal{P}$ 的群组成的类。

引理 2.1。设 $\mathcal{P}$ 是一个对子群封闭的有限生成群类，并且具有如下性质：若群的 $\mathcal{P}$-子群 H 和 K 都是正规子群，则 HK 也是一个 $\mathcal{P}$-子群。那么每个群都包含唯一最大的正规 L$\mathcal{P}$-子群。

证明。只需证明任意两个正规 L$\mathcal{P}$-子群的并仍属于 L$\mathcal{P}$。下文采用如下记号：对于群的子集 X 和Y， X^Y 表示由共轭元素 $y^{-1}xy$、$x \in X$、 $y \in Y$生成的子群。设 H 和 K 是正规 L$\mathcal{P}$-子群。要证明 HK是一个 L$\mathcal{P}$-群，我们必须证明对于有限子集 $X \subseteq H$ 和 $Y \subseteq K$，子群 $\langle X、 Y\rangle$ 属于 $\mathcal{P}$。固定这样一组 X 和 Y，并令$C = \{[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy;\quad x \in X、 y \in Y\}$。注意，$C$是有限集，且是 $H \cap K$ 的子集，因为 H 和 K 是正规子群。因此， $\langle C、 X\rangle$ 是 H 的有限生成子群，故属于 $\mathcal{P}$。由于 $\mathcal{P}$ 对子群封闭，我们推得 $C^{\langle X\rangle}$ 属于 $\mathcal{P}$，因而它是有限生成的。此外，$C^{\langle X\rangle}$ 包含于 $H \cap K$。因此，$\langle Y、 C^{\langle X\rangle}\rangle$ 是 K 的有限生成子群，故属于 $\mathcal{P}$。所以子群 $C^{\langle X\rangle\langle Y\rangle}$也属于 $\mathcal{P}$。现在由 [Rob96, 5.1.7] 可知， $C^{\langle X\rangle\langle Y\rangle} = [\langle X\rangle, \langle Y\rangle]$，即由所有交换子 $[z, w]$ 生成的子群，其中 $z \in \langle X\rangle$ 且

$w \in \langle Y \rangle$，于是我们有

$$\langle Y, C^{\langle X \rangle} \rangle = \langle Y, C^{\langle X \rangle \langle Y \rangle} \rangle = \langle Y, [\langle X \rangle, \langle Y \rangle] \rangle = Y^{\langle X \rangle}.$$

这表明 $Y^{\langle X \rangle}$ 属于 $\mathcal{P}$。由对称性， $X^{\langle Y \rangle}$ 属于 $\mathcal{P}$。因此， $\langle X, Y \rangle = Y^{\langle X \rangle} X^{\langle Y \rangle}$ 是$\langle X, Y \rangle$的两个正规 $\mathcal{P}$-子群的并，并且属于 $\mathcal{P}$。□

推论 2.2。在任意群中，都存在唯一最大的正规局部多循环子群，也存在唯一最大的正规局部 {几乎多循环}子群，并且这两个子群都是特征的。

证明。 多循环群类和几乎多循环群类都在子群、商群和扩张下封闭。由于几乎多循环群是有限生成的，这两个类都满足引理2.1中的假设。□

推论 2.3。设群 G 有一个 H 有限指数的子群，该子群是基于一个几乎多循环顶点群的升链HNN扩张。那么， G 本身要么是几乎多循环群，要么是基于一个几乎多循环顶点群的升链HNN扩张。

证明。由于以几乎多循环顶点群为底群的升链HNN扩张的有限指数子群仍是以几乎多循环顶点群为底群的升链HNN扩张，我们可以假设 H 是正规子群。

我们可以假设 $H = B*_{B,t}$ 是一个升链HNN扩张，其中 B 是 H 的几乎多循环子群， t 是 H 的一个元素，满足 $B \subseteq B^t$；并且 $K = \bigcup_{n \geqslant 0} B^{t^n}$ 是 H 的正规子群，满足 $H = K\langle t \rangle$。由于它是几乎多循环子群构成的上升并，我们知道 K 是一个局部几乎多循环子群，因此包含于一个特征的此类子群中：即由引理 2.1 及其直接推论给出的根子群L 。显然， G/L 没有非平凡有限正规子群，且几乎循环，因此 G/L 或为平凡群、无限循环群，或无限二面体群。当 $G = L$ 时， G 是局部几乎多循环的。由于 H 是有限生成的， G 也有限生成，因此 G 是几乎多循环的。

如果 G/L 是无限二面体群，那么 $H/(H \cap L) \cong \mathbb{Z}$，而这两个以 K 为核的满同态 $H \to \mathbb{Z}$ ，作为 H 在 $\mathbb{Z}$ 上的第一上同调群中的元素，在 G 的作用下属于同一轨道。由于 H 是一个顶点群有限生成的升链HNN扩张，因此其中一个上同调类属于 Bieri–Neumann–Strebel 不变量 $\Sigma^1(H)$；由于这两个类通过 H 的一个自同构相关联，另一个类也属于该不变量。因此，这两个满同态的核都是有限生成的。这就迫使 $K = B$ 成立，因而 H 几乎多循环。由此可得， G 也几乎多循环。

最后，如果$G/L \cong \mathbb{Z}$ 那么利用 G 是有限呈示的这一事实以及[BS78, 定理 A] 我们得出 G 是一个 HNN 扩张，其顶点群是 L的有限生成子群。由于 G 不包含非阿贝尔自由群，因此该 HNN 扩张是上升的。此外， L 的有限生成子群都是几乎多循环的，结论得证。□

3. Indicability、 coherence、 and cascading groups

定义 3.1。如果一个群是平凡群，或可映射到 $\mathbb{Z}$ 上，则称其为可指示群。

若群 G 对每个有限生成子群 $H \leqslant G$ 及每个满同态 $\phi\colon H \to \mathbb{Z}$ 都满足以下条件，则称其为可指标相干的：群 H 可分解为一个 HNN 扩张，其顶点群 A 有限生成，且 ϕ 与将 H 对 A 的正规闭包取商所得的商映射重合；在这种情况下，我们称该 HNN 扩张实现了满同态 ϕ。

请注意，当 G 是可指标相干的，且不包含非阿贝尔自由群时，我们便可直接得出该 HNN 扩张是上升或下降的。此外，根据[BS78，定理 A]，同调相干群也是可指标相干的。

现在我们来陈述可指标相干群的一项关键性质。

命题3.2. 若 G 是可指标相干的，且不包含非阿贝尔自由群，则 G 的每个商群也都是可指标相干的。

该结果可由下一个引理立即得到。

引理 3.3. 设 G 是一个顶点群为 A 的升链HNN扩张，并诱导满同态 $\phi\colon G \to \mathbb{Z}$。若 $\rho\colon G \to Q$ 是一个满同态，且 ϕ 通过 ρ 分解，那么 Q 是一个顶点群为 $\rho(A)$ 的升链HNN扩张。

证明. 设 $t \in G$ 是给定升链HNN扩张的稳定字母，并设 $\iota\colon A \to A$ 是相应的单同态。注意，$\iota(\ker \rho|_A) = t^{-1} \ker \rho|_A t \leqslant \ker \rho$；显然，$\iota(\ker \rho|_A) \leqslant \iota(A) \leqslant A$，因此

$$\iota(\ker \rho|_A) \leqslant \ker \rho|_A.$$

因此，ι 下降为一个同态 $\iota'\colon \rho(A) \to \rho(A)$。此外，若对于某个 $a' \in \rho(A)$ 有 $\iota'(a') = 1$，那么对于每个 $a \in \rho^{-1}(a')$，我们都有 $\iota(a) \in \ker \rho$，从而 $a = t\iota(a)t^{-1} \in \ker \rho$ 也成立，进而推出 $a' = \rho(a) = 1$。因此，ι' 是单射的。

我们可以定义升链HNN扩张 H，其顶点群为 $\rho(A)$，稳定字母为 t，关联单同态为 ι'。显然，ρ 诱导一个商映射 $G \to H$，再与商映射 $\sigma\colon H \to Q$复合，即得 ρ。

取 $h \in$ 核 σ。由于 $h \in H$，我们可以写成

$$h = t^{n_0} x_1 t^{n_1} \cdots x_m t^{n_m}$$

其中 $x_i \in \rho(A)$，$n_i \in \mathbb{Z}$。由于 ϕ 经由 ρ分解，我们必有 $\sum n_i = 0$，因此可以将 $h = \prod_{i=1}^{m} t^{-n_i'} x_i t^{n_i'}$改写为。令 $N = \max_i |n_i'|$。现在我们有$t^{-N} h t^N \in$ 核 σ，它是由 $\rho(A)$ 中元素的共轭组成的乘积，共轭所用的是 t的非负次幂。但每个这样的共轭，都是从 $\rho(A)$ 中的某个元素出发，经过适当次数的 ι' 作用得到的，因此本身属于 $\rho(A)$。于是，$h \in$ 核 $\sigma \cap \rho(A) = \{1\}$。我们由此得出，$\sigma$ 是一个同构，正如所需。□

定义 3.4（初等可解层级）。定义 EA_0 为有限群或阿贝尔群构成的类。对于每个序数 $\alpha > 0$，定义 EA_α 为满足以下任一形式的群 G 构成的类：

- $G = \bigcup_i G_i$，其中 $G_i \in \mathrm{EA}_{\beta_i}$ 且满足 $\beta_i < \alpha$；
- 和 $G = N.Q$，其中 . 是任意群扩张，且 $N, Q \in$ 属于初等可解群$_\beta$，并满足 $\beta < \alpha$。

通过超限归纳法很容易证明，每个类 EA_α 都对子群封闭。

在继续之前，我们需要一个技术性定义。

定义 3.5（级联群）。对于一个序数 α，我们归纳地定义 α-级联群这一类：

- 0-级联群这一类由有限群组成；
- 对于 $\alpha > 0$，如果一个群 G 拥有一个有限指数子群 H 以及一个满同态 $H \to \mathbb{Z}$，使得对于将 H 表示为实现该满同态的 HNN 扩张的每一种分裂，只要顶点群是有限生成的，它就是某个 $\beta < \alpha$的 β-级联群，则称该群为 α-级联的。

如果一个群对于某个序数 α是 α-级联的，则称其为级联的。

注意，许多群将平凡地满足这一定义，因为它们根本没有有限生成的顶点群。将其与可指示相干性结合起来时，这一定义才真正发挥作用。

引理 3.6。有限生成的自由阿贝尔群是级联的，并且级联这一性质可传递到有限指数过群。

第一部分的证明是对秩作显然的归纳法。第二部分则更加简单。

引理 3.7。设 α 和 β 是两个给定的序数，且 $\beta < \alpha$。设 G 是 EA_α中的一个有限生成群，并假设 G 嵌入群扩张

$$K \to G \xrightarrow{\rho} Q$$

其中 K 属于初等可解群$_\beta$。如果 Q ，且初等可解群$_\beta$ 中的所有有限生成群都是级联的，那么 G也如此。

证明。假设 Q 是 γ-级联的。证明采用关于 γ的归纳法。若$\gamma = 0$，则 Q 是有限的，因此 K 是有限生成的。它属于初等可解群$_\beta$，因而是级联的，这迫使 G 也成为级联的。

现在，假设 $\gamma > 0$，并且结论对所有严格小于 γ的序数都成立。设 R 是 Q 的一个有限指数子群，并设 $\phi\colon R \to \mathbb{Z}$是一个满同态，使得对于 R的每一种实现 ϕ的 HNN 扩张分解，若顶点群是有限生成的，则它是 δ-级联的，其中某个 $\delta < \gamma$。令 $H = \rho^{-1}(R)$，并令 $\psi = \phi \circ \rho|_H\colon H \to \mathbb{Z}$。注意到$\psi$ 是一个满同态。

假设 H 分解为一个实现 ψ 、顶点群有限生成的 HNN 扩张 A。那么，利用该 HNN 扩张必为上升或下降型这一事实，引理 3.3 推出 R 分解为一个实现 ϕ 、顶点群为 $\rho(A)$ 的 HNN 扩张。由于 A 是有限生成的， $\rho(A)$ 也有限生成，因此 $\rho(A)$ 是 δ-级联的，其中 $\delta < \gamma$。但现在 A 属于正合列

$$K \cap A \to A \to \rho(A),$$

并且归纳法告诉我们，对于某个序数 ϵ_A， A 是 ϵ_A-级联的。因此， G 是($\bigcup_A \epsilon_A + 1$)-级联的，其中并集遍历所有有限生成的顶点群 A。□

推论 3.8. 若 G 是有限生成的初等可解群，则G 是级联的。

证明. 设 $G \in \mathrm{EA}_\alpha$ ，其中某个序数为 α，并假设 G 是有限生成的。证明采用关于 α的超限归纳法。

若 $\alpha = 0$，则 G 几乎阿贝尔，因而是级联的。

现在假设 $\alpha > 0$，并且结论对所有严格小于 α的序数都成立。由于 G 是有限生成的，如果它是由层级中较低层的群通过有向并得到的，那么它自身也位于层级较低处，归纳假设即得结论。因此，我们可以假设存在一个满同态 ρ: $G \to Q$ 满足 Q，且 $K = \ker \rho$ 位于层级较低处。由于 G 是有限生成的，Q也是有限生成的，因此 Q 是级联的。现在我们可以使用引理3.7。□

我们将需要以下结果。

引理 3.9。非空的导出长度为 c 的可解群的有向并，是导出长度为 c 的可解群。

证明。由于导出长度至多为 c 的可解性由群恒等式定义，因此它是一个局部性质，故在有向并下保持。我们的并是导出长度恰为 c 的可解群，因为它包含一个类为 c 的可解子群。□

定理 3.10。设 G 是一个有限生成的初等可解群。如果 G 可指标相干，那么 G 几乎可解。

证明。我们已经证明 G 是 α-级联的。现在我们对 α 使用归纳法。

若 $\alpha = 0$，则 G 有限，结论成立。否则，根据级联的定义，存在一个有限指数子群 $H \leqslant G$ 和一个满同态 ϕ: $H \to \mathbb{Z}$。由于 G 可指标相干，我们可以找到一个 HNN 扩张 H，实现 ϕ，且其顶点群 A 有限生成。现在，对于 $\beta < \alpha$， A 是 β- 级联的，因此根据归纳假设，它几乎可解。此外，该 HNN 扩张是上升的（不失一般性）。令 t 表示其稳定字母，并令 ι: $A \to A$ 表示相应的单同态。

由于 A 几乎可解，存在一个有限群 Q，使得所有同态 $A \to Q$ 的核的交 B 是可解的。此外，由于 A 是有限生成的，子群 B 在 A中具有有限指数。现在，关键在于， ι 与任意同态 $A \to Q$ 复合后仍是这样的同态，因此 $\iota(B) \leqslant B$。这使我们能够构造一个新的升链HNN扩张，记作 K，其顶点群为 B，稳定字母为t。显然， $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} t^i B t^{-i}$ 是 $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} t^i A t^{-i}$的正规子群，因为 B 是 A的正规子群。此外， $t^i A t^{-i}$ 在商群 $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} t^i A t^{-i} / \bigcup_{i\in\mathbb{N}} t^i B t^{-i}$ 中的像都是有限的，并且其基数上界为 $|A/B|$。由于该商群是这些像的并，因此它是有限的。因此，K 是 H的有限指数子群。根据引理 3.9，它也是可解的。□

推论 3.11。设 G 是一个有限生成的初等可解群。若 G 是同调相干的，则 G 几乎可解。

证明。 由于 G 具有同调相干性，对每个有限生成子群 H， G 以及每个满同态 $H \to \mathbb{Z}$，我们可将 H 写成一个 HNN 扩张，其顶点群有限生成（事实上是 FP_2），依据 [BS78，定理 A]。因此， G 是可指标相干的。结论由定理3.10得出。 □

现在我们可以证明主要结果了。

定理 **1.2**。对于有限生成的初等可解群 G，以下条件等价:

(1) G 是相干的；(2) G 是同调相干的；(3) $\mathbb{Z}G$是相干的；(4) G 是几乎多循环的，或者 G 是一个具有几乎多循环顶点群的真上升HNN扩张。

证明。显然，(1)和(3)各自都推出(2)。若假设(4)，则群 G 由引理3.9可知几乎可解，因此定理1.1表明 G 有一个有限指数子群 H，其中 $\mathbb{Z}H$ 是相干的。环的相干性可改述如下：环 R 是相干的，当且仅当每个 R-同态（定义在有限生成自由 R-模之间）的核都是有限生成的。从这个角度来看，显然$\mathbb{Z}G$ 也是相干的，于是得出(2)。

最后，假设 (2)。推论 3.11 表明 G 有一个有限指数的可解子群，该子群也是同调相干的。结论 (1) 和 (3) 由定理 1.1以及群的相干性可传递至有限指数上群这一观察得出；群环的情形也类似。对于 (4)，我们还需要使用推论 2.3。 □

4. Noetherian groups

作为背景，我们也提及以下结果。该结果众所周知，但在文献中似乎难以找到。注意，若一个群的所有子群都是有限生成的，则称其为诺特群或纤细群；等价地说，它满足子群的上升链条件 max-s 。

定理 4.1. 每个诺特初等可解群 G 都是几乎多循环的。

证明。证明采用对初等可解层级的归纳法。每个有限群都是几乎多循环的，每个有限生成的阿贝尔群（因此每个诺特阿贝尔群）也都是如此。这说明该结论对类 EA_0成立。

现在假设 G 属于 EA_α，并且对于所有 $\beta < \alpha$，结论对 EA_β 中的所有群都成立。由于 G 是诺特的，因此它是有限生成的。如上所示，这意味着对于某个 $\beta < \alpha$， G 属于 EA_β；或者存在一个满同态 $\rho\colon G \to Q$，其核为 $\rho = K$，且 K和 Q都处于层级中较低的位置。由于诺特性在子群和商群中保持不变，K 和 Q 都是多循环群扩张的有限群。将G换成一个有限指数子群后，我们可以假设 Q 是多循环群。

设 N 是 K 的一个有限指数正规子群，且为多循环群。于是群 G/N 是有限群扩张的多循环群，因此也是多循环群扩张的有限群。由此可得， G几乎多循环。□

References

[BB97] M. Bestvina 和 N. Brady, *Morse theory and finiteness properties of groups*, 《Invent. Math.》 129（1997），第 3 期，445–470。MR1465330（98i:20039）[BNS87] R. Bieri、W. D. Neumann 和 R. Strebel, *A geometric invariant of discrete groups* **90** 1987 3, 451 477 914846 89 20108 , 《Invent. Math.》（ ），第 – 期。MR（ b: ）[Bro87] K. S. Brown, *Trees, valuations, and the Bieri-Neumann-Strebel invariant*, 《Invent. Math.》 **90** 1987 3, 479 504 914847 （ ），第 – 期。MR BS R. Bieri 和 R. Strebel, *Almost finitely presented soluble groups*, 《Comment. Math. Helv.》53（1978），第 2 期，258–278。MR498863[BS79] , *Soluble groups with coherent group rings*, 《同调群论》（专题讨论会，达勒姆, 1977 1979, 235 240 564427 ），第 – 页。MR Cho C. Chou, , 《Illinois J. Math.》（ ），第 3 期，396–407。MR573475[Day57] M. M. Day, *Amenable semigroups*, 《Illinois J. Math.》1 (1957), 509–544, MR92128[Gro78] J. R. J. Groves, *Soluble groups in which every finitely generated subgroup is finitely presented* **26** 1978 1, 115 125 , 《J. Austral. Math. Soc. Ser. A》（ ），第 – 期。MR510595[Hal54] P. Hall, *Finiteness conditions for soluble groups*, 《Proc. London Math. Soc.》（3） **4** 1954 419 436 72873 （ ），–。MR JZL A. Jaikin-Zapirain 和 M. Linton, *On the coherence of one-relator groups and their group algebras* 2023 2303 05976 （3 月 ），可见于 .. [KL19] P. Kropholler 和 K. Lorensen, *Group-graded rings satisfying the strong rank condition* **539** 2019 326 338 , 《Journal of Algebra》（ ），–。MR 3997173 [09] KMPN P. H. Kropholler、C. Martınez-Perez 和 B. E. A. Nucinkis, *Cohomological finiteness conditions for elementary amenable groups.* , 《J. reine angew. Math.》637（2009），49–62（英文）。[Rob96] D. J. S. Robinson, *A course in the theory of groups*, 第二版, 《Graduate Texts in Mathematics》, 第 80, 1996 1357169 卷, Springer-Verlag, 纽约, 。[29] MR vN J. von Neumann, , *Zur allgemeinen Theorie des Masses* 《Fundamenta Mathematicae》13（1929），第 1 期，73–116（德文）。