arXiv:2302.03354v1 [math.DG] 7 Feb 2023

紧 Hermitian 流形上的退化复 Hessian 方程

VINCENT GUEDJ & CHINH H. LU

Abstract. 本文为紧 Hermitian 流形上退化复 Hessian 方程的解提供一致的先验估计。我们的方法依赖于相应的 Monge-Amp`ère 方程先验估计；该方法既推广了 Dinew-Kołodziej、Kołodziej-Nguyen 和 Guo-Phong-Tong 的结果，也提供了一种简短的替代证明。

À la mémoire de Jean-Pierre Demailly.

Introduction

设 X 是一个配备厄米形式 ω_X 的紧致复流形。固定 $1 \leq k \leq n =$ 维数 $_{\mathbb{C}} X$、ω 另一个厄米形式，以及 X 上的 μ_X 一个体积形式。复 Hessian 方程为

$$(\omega + dd^c\varphi)^k \wedge \omega_X^{n-k} = c\mu_X,$$

其中 $c > 0$ 是一个正的常数，φ（未知函数）是一个光滑的（ω，ω_X，k）-次调和函数，即对所有 $1 \leq j \leq k$，均有 $(\omega + dd^c\varphi)^j \wedge \omega_X^{n-j} \geq 0$。

当 $k = 1$ 这就化为拉普拉斯方程。当 $k = n$ 这就得到复 Monge-Amp`ere 方程，该方程由丘成桐[丘成桐78]在 ω 为 K¨ähler 时著名地求解，而在厄米 [TW10] 情形下则由 Tosatti-Weinkove 求解。

从现在起，我们假设 $1 < k < n$。Dinew-Kołodziej[DK17] 在 $\omega = \omega_X$ 为 K¨ähler 时给出了唯一解；厄米情形则由 Sz´ekelyhidi [Szek18] 和张 [Zh17]独立解决。

考虑此类方程在退化情形下的情况十分自然，此时允许测度 $\mu_X = f\omega_X^n$ 相对于体积形式 ω_X^n仅为绝对连续。过去十五年来，人们对这类退化复 Hessian 方程进行了深入研究（参见[Blo05，Lu13，DK14，DL15，LN15，Lu15，KN16，Char16，GN18，DDT19，BZ20，GP22] 以及其中所列参考文献）。

在本文中，我们更进一步，允许形式 ω 也发生退化：我们不再假设它是正的，只要求它是 大，这与代数几何中的相应概念类似 [BEGZ10], 即我们假设存在一个 ω-psh 函数 ρ，它具有解析奇点，并且满足 $\omega + dd^c\rho$ 支配某个厄米形式。我们令 Ω 表示 ρ 光滑的 Zariski 开集。

不能再期待 (ω, ω_X, k)-次调和函数在 X 中是光滑的，但我们在第 1.2 节说明如何为这类在 Ω 中$H_k(f) = (\omega + dd^c\varphi)^k \wedge \omega_X^{n-k}$ 连续且在 φ 上全局有界的函数定义海森算子 X。

Date：2023年2月8日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 32W20, 32U05, 32Q15, 35A23。*Key words and phrases.* 复 Hessian 方程与 Monge-Amp`ere 方程，先验估计。

在此背景下，我们得到如下结果：

定理 A. 设 ω 为半正且大形式，$f \in L^p(\omega_X^n)$ 满足 $p > n/k$和 $\int_X f\omega_X^n > 0$。存在 $c > 0$和 φ，它们是有界的 (ω, ω_X, k)-次调和函数，并且在 Ω 中连续，使得

$$(\omega + dd^c\varphi)^k \wedge \omega_X^{n-k} = cf\omega_X^n.$$

这一结果推广了 [KN16] 的主要结果。特别地，它适用于以下情形：$\pi : X \to Y$ 是紧致厄米簇 Y的消奇点化，且 $\omega = \pi^*\omega_Y$ 是厄米形式 ω_Y 在 Y上的拉回。

与类似情形一样，主要难点在于建立一致的先验估计。这正是我们的第二个主要结果的内容：

定理 B. 设 ω_0, ω 为半正且大形式，满足 $\omega_0 \leq \omega$。设 φ为光滑的 (ω, ω_X, k)-次调和函数解，满足

$$(\omega + dd^c\varphi)^k \wedge \omega_X^{n-k} = f\omega_X^n,$$

其中 $f \in L^p(dV_X)$，$p > n/k$。于是

$$\mathrm{Osc}_X(\varphi) \leq C,$$

其中 $C > 0$ 取决于 ω_0、n、k、p 以及 $||f||_{L^p}$ 的一个上界。

Kołodziej-Nguyen 的方法依赖于多势理论，用于研究厄米流形上退化的复 Hessian 方程（仿照这些作者和 Dinew 针对 Monge-Amp`ère 方程[DK12], [KN15], [KN19], [Ng16]所取得的相应结果）。Guo-Phong-Tong-Wang 最近给出了一种替代性的偏微分方程证明，见 [GPT21、GPTW21] 当 X 为 K¨ahler 时；而 Guo-Phong [GP22] 则在 X 为厄米且 ω 是厄米形式时给出了证明。

本文给出一种证明，它直接依赖于复 Monge-Amp`ère 算子的相应结果。给定 $\varphi$ 一个 $k$- Hessian 方程的解，其密度为 $f$，我们证明 $\omega$的 -psh 包络 $\varphi$ 满足一个 Monge-Amp`ère 方程，其密度的上界为 $f^{n/k}$。因此，φ 的下界可由 L^∞中建立的 Monge-Amp`ère 方程的先验估计 [GL21]推出。

我们的方法是新的，而且在 X 为 K¨ahler 的情形下也颇有意义；该方法适用于更一般的密度（见注3.2）；特别是，当 f 仅满足

$$\int_X f^{\frac{n}{k}} |\log f|^n (\log|\log f|)^{n+\delta} < +\infty,$$

对某个 $\delta > 0$ 成立。径向例子表明，这一条件几乎是最优的。

致谢。本研究部分得到 HERMETIC (ANR-11-LABX-0040) 研究项目以及 ANR 项目 PARAPLUI 的资助。

1. 预备知识

在全文中，我们用 (X, ω_X) 表示一个复维数为 $n \in \mathbb{N}^*$、配备固定厄米形式 ω_X 的紧致复流形。我们使用¯ ¯ ¯实微分算子 $d = \partial + \bar\partial$, $d^c = i(\partial - \bar\partial)$，使得 $dd^c = 2i\partial\bar\partial$。

我们还固定一个半正 (1, 1) 形式 ω，它是大形式：

定义 1.1. 若存在一个 ω-psh 函数 ρ，使得 $\omega + dd^c\rho$ 支配某个厄米形式，则称 ω 是大。

由 Demailly 的正则化定理可知 [Dem94] 可以进一步假设 ρ 具有解析奇点，特别是 $\omega+dd^c\rho$ 在某个 Zariski 开集上是厄米形式，以下通常将该开集记为 Ω。

大形式的一个重要例子来自以下构造：若 V 是赋有厄米形式ω_V的紧复空间，且 $\pi: X \to V$是一个奇点消解，则 $\omega = \pi^*\omega_V$是大形式。

1.1. (ω, ω_X, k)-次调和函数。

1.1.1. 定义。设 $U \subset X$ 是一个开子集， γ 是 U上的一个厄米形式。若函数 $h \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ 满足

$$dd^c h \wedge \gamma^{n-1} = 0 \text{ pointwise in } U.$$

我们用 $H_\gamma(U)$ 表示 U中所有 γ-调和函数的集合。若函数 $u: U \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 上半连续，且对每个 $D \subset U$及每个 $h \in H_\gamma(D)$，以下蕴含关系成立，则称其为 γ-次调和函数

$$u \le h \text{ on } \partial D \Longrightarrow u \le h \text{ in } D.$$

如[HL13第 9] 节所示， γ-次调和性也可以用粘性理论等价地定义：若 u 在 γ中是次调和函数，当且仅当不等式 U 在粘性意义下于$dd^c u \wedge \gamma^{n-1}$ 中成立。后一个条件意味着，对每个 U以及每个 $x_0 \in U$ 在 $\mathcal{C}^2$ 的邻域内定义的函数 χ ，以下蕴含关系成立： V x_0

$$[u(x) \le \chi(x),\ \forall x \in V \text{ and } u(x_0) = \chi(x_0)] \Longrightarrow dd^c\chi \wedge \gamma^{n-1} \ge 0 \text{ at } x_0.$$

当 $u \in \mathcal{C}^2(U)$ 时，它是 γ-次调和的，当且仅当 $dd^c u \wedge \gamma^{n-1} \ge 0$ 逐点 e.

定义 1.2。我们将 $SH_\gamma(U)$ 记作所有在 U 中局部可积的 γ-次调和函数的集合。

若 $u \in SH_\gamma(U)$，则根据 [HH72，定理`1，第136]页， $dd^c u \wedge \gamma^{n-1} \ge 0$ 在分布的意义下成立。反过来，根据 [Lit83，定理 A]，，后一个条件意味着 u 几乎处处与唯一的函数 $\hat{}u \in SH_\gamma(U)$ 相等，该函数定义为

$$\hat{u}(x) := \operatorname{ess}\limsup_{y \to x} u(y) := \lim_{r \searrow 0} \operatorname{ess}\sup_{B(x,r)} u,$$

其中 ess $\sup^{B(x,r)} u$ 是 $B(x, r)$ 球内 u 的本质上确界。

定义 1.3。函数 $\varphi: U \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 若局部满足 $\varphi = u + \rho$ ，其中 u 是 γ-次调和函数且 ρ 光滑，则称为拟 -γ- 次调和函数。

若函数 φ 是 (ω, γ)-次调和的，则称其为准-γ-次调和函数，且 $(\omega + dd^c\varphi) \wedge \gamma^{n-1} \ge 0$ 在 X 上以分布的意义成立。

我们用 $SH_\gamma(U, \omega)$ 表示 U中所有 (ω, γ)-次调和函数构成的集合。

若 $u \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$，则 $u \in SH_\gamma(U, \omega)$ 当且仅当 $(\omega + dd^c u) \wedge \gamma^{n-1} \ge 0$逐点成立。一般而言，这个不等式在粘性意义下成立：

引理 1.4. 若 $\varphi \in SH_\gamma(U, \omega)$，且 χ 是一个 $\mathcal{C}^2$ 函数，使得 $\varphi - \chi$ 在 $x_0 \in U$处取得局部最大值，则 $(\omega + dd^c\chi) \wedge \gamma^{n-1} \ge 0$ 在 x_0处成立。

证明. 固定 $a > 1$。设 ρ 是一个二次函数，满足 $dd^c\rho = a\omega(x_0)$。由 ω的连续性可知，在 x_0周围的某个小球 B 内， $dd^c\rho \ge \omega$ 成立。于是函数$\rho + \varphi$在 B内是 γ-次调和的，并且函数 $\rho + \varphi - (\rho + \chi)$ 在 x_0处取得局部最大值。因此，在 x_0处，

$$(a\omega + dd^c\chi) \wedge \gamma^{n-1} = dd^c(\rho + \chi) \wedge \gamma^{n-1} \ge 0.$$

令 $a \searrow 1$ 即可得出结论。 □

固定整数 $1 \leq k \leq n$，并令 $\Gamma_k(\omega_X)$ 表示所有满足下列条件的 $(1,1)$-形式 α

$$\alpha^j \wedge \omega_X^{n-j} > 0, \ j = 1, ..., k.$$

根据 G˚arding 不等式 [Gar59], if α, α_1, ..., $\alpha_{k-1} \in \Gamma_k(\omega_X)$ 则

$$\alpha \wedge \alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_{k-1} \wedge \omega_X^{n-k} > 0.$$

特别地，$\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_{k-1} \wedge \omega_X^{n-k}$ 是一个严格正的（$n-1$, $n-1$）形式于X。由 [Mic82], 可写成 $\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_{k-1} \wedge \omega_X^{n-k} = \gamma^{n-1}$，其中某个厄米形式 γ。我们将 $F_k(\omega_X)$ 记为所有此类厄米形式的集合。

定义 1.5. 函数 $\varphi\colon U \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 若对所有 $\gamma \in F_k(\omega_X)$，在 U 中是 (ω, γ)-次调和函数，则称其为 (ω, ω_X, k)-次调和函数。

我们将 $SH_{\omega_X}(U, \omega, k)$ 记为 U 上所有 (ω, ω_X, k)-次调和函数的集合，这些函数在 U 中局部可积。

如果 u 属于类 $\mathcal{C}^2$ 在 U那么，根据[Gar59], u 是（ω, ω_X, k）-次调和函数，当且仅当 $\omega + dd^c u \in \Gamma_k$（$\omega_X$）。关于（[Blo05] 和 [KN16第 2 节3]中（ω, ω_X, k）-sh 函数的基本性质，敬请参阅；这些性质可以直接推广到我们的情形。

由于本文中 ω_X 始终固定，我们用 $SH(X, \omega, k)$ 表示（ω, ω_X, k）-sh 函数的集合；它们构成一个嵌套序列

$$SH(X, \omega) \supset \cdots SH(X, \omega, k-1) \supset SH(X, \omega, k) \supset \cdots \supset PSH(X, \omega),$$

其中，$SH(X, \omega) = SH(X, \omega, 1)$ 是 ω-sh 函数的集合，而 $PSH(X, \omega) = SH(X, \omega, n)$ 是 ω-psh 函数的集合；对于这些函数，$\omega + dd^c\varphi \geq 0$ 是双次数为（1, 1）的正流（见 [GZ17，第 8] 章）。

注意到 $SH(X, \omega, k) \subset SH(X, \omega', k)$ 若 $\omega \leq \omega'$。由于 $\omega \leq A\omega_X$ 对某个$A > 0$, 任意一个 (ω, ω_X, k)-sh 函数也是 $(A\omega_X, 1)$-sh 函数。因此，我们得到以下紧性结果（参见 [KN16，引理 3。3], [GN18，第 9]节）。

命题 1.6. 归一化的 (ω, ω_X, k)-次调和函数集合在 L^1-拓扑下是紧的。特别地，存在 $C > 0$，使得对所有满足 $\sup_X \varphi = 0$ 归一化条件的 $\varphi \in SH(X, \omega, k)$,

$$\int_X (-\varphi)\omega_X^n \leq C.$$

1.1.2. 光滑逼近。

定理 1.7. 若 ω 是厄米的，则任意 (ω, k)-次调和函数都是一列光滑 (ω, k)-次调和函数的递减序列的逐点极限。

这一结果略微推广了[KN16，引理 3。20], 而该结果本身又推广了[LN15，定理 1。2]，将结果从 K¨ahler 情形推广到了厄米情形。下面我们提出另一种更直接的证明。

证明。设 u 是 X 上的光滑函数，并设 f 是一个光滑正密度，使得

$$(\omega + dd^c u)^k \wedge \omega_X^{n-k} \leq f\omega_X^n.$$

对于 $j \geq 1$，我们求解复 Hessian 方程

$$(\omega + dd^c\varphi_j)^k \wedge \omega_X^{n-k} = e^{j(\varphi_j - u)} f\omega_X^n.$$

如[KN16], 中建立的估计所示，[Szek18] 给出了一个光滑解φ_j，它在ω、k上是（X次调和的。我们要证明φ_j 一致收敛到$P_{\omega,\ k}$（u），即小于ω、k的最大（ u 次调和函数。正如 [LN15、KN16]所示，定理由此即得。

经典最大值原理保证 $\varphi_j \leq u$，因此$\varphi_j \leq P_{\omega,\ k}(u)$。现在固定满足 $\varphi \leq u$的 $\varphi \in SH(X,\omega,k)$。设 $x_0 \in X$ 是函数 $\varphi - (1+1/j)\varphi_j$ 在 X上取得最大值的点。根据定义， φ 属于$SH_\gamma(X,\omega)$，其中 γ 是满足以下条件的厄米形式

$$\gamma^{n-1} = (\omega + dd^c\varphi_j)^{k-1} \wedge \omega_X^{n-k}.$$

从现在起，所有计算均在 x_0处进行。由引理1.4 可知

$$(\omega + (1+1/j)dd^c\varphi_j) \wedge \gamma^{n-1} \geq 0.$$

由此以及 G°årding 不等式 [Gar59] 可得

$$\begin{aligned}\frac{j+1}{j}(\omega + dd^c\varphi_j)^k \wedge \omega_X^{n-k} &\geq \frac{1}{j}\omega \wedge (\omega + dd^c\varphi_j)^{k-1} \wedge \omega_X^{n-k} \\ &\geq \frac{1}{j} e^{\frac{j(k-1)}{k}(\varphi_j - u)} f^{(k-1)/k} g^{1/k} \omega_X^n,\end{aligned}$$

其中 $g\omega_X^n = \omega^k \wedge \omega_X^{n-k}$。令 $b \in (0,1)$ 为一个正数，使得 $g \geq b^k f$在 X上成立。由上述不等式可得

$$(1+j)e^{j(\varphi_j - u)/k} \geq b,$$

因此

$$\varphi_j - u \geq \frac{k(\log b - \log(1+j))}{j}.$$

因此，对于某个一致常数 $C \geq 1$ ，有

$$\left(1 + \frac{1}{j}\right)\varphi_j - u \geq \left(1 + \frac{1}{j}\right)(\varphi_j - u) + \frac{u}{j} \geq -C\frac{\log j}{j}.$$

由于 $\varphi \leq u$，我们还得到

$$\varphi - \left(1 + \frac{1}{j}\right)\varphi_j \leq C\frac{\log j}{j}.$$

这个不等式在 X 上成立，因为 $\varphi - (1+1/j)\varphi_j$ 在 x_0 处取得全局最大值。由于这对所有低于 u 的 $\varphi \in SH(X,\omega,k)$ 都成立，我们得到

$$P_{\omega,k}(u) - C'\frac{\log j}{j} \leq \varphi_j \leq P_{\omega,k}(u),$$

对于某个一致常数 C'，这证明 φ_j 一致收敛到 $P_{\omega,\ k}(u)$。 □

1.2. Hessian 算子。

1.2.1. Hermitian 形式。我们在本小节中假设 ω 是一个厄米形式。对于属于 $\mathcal{C}^2$ 类的 (ω,ω_X,k)- 次调和函数 φ，复 Hessian 算子定义为

$$H_k(\varphi) = (\omega + dd^c\varphi)^k \wedge \omega_X^{n-k}.$$

根据定理 1.7，任何 (ω,ω_X,k)-sh 函数 φ都可以逐点从上方逼近为一列递减的光滑 (ω,ω_X,k)-sh 函数φ_j。

如果 φ 此外在 X上连续，那么收敛是一致的。文献[KN16] 证明了 Hessian 测度序列 $H_k(\varphi_j)$弱收敛到唯一的正 Radon 测度，且该测度与逼近项无关。定义

$$H_k(\varphi) := \lim_{j\to+\infty} H_k(\varphi_j) := (\omega + dd^c\varphi)^k \wedge \omega_X^{n-k}.$$

很可能可以为仅有界的(ω,ω_X,k)-sh 函数定义这些算子。当 ω_X 为闭时，确实如此：我们可以依照 Bedford-Taylor 的构造，通过归纳法并使用分部积分

[BT76, BT82]。然而，在一般的厄米情形下，情况较为微妙，也比 Monge-Amp`ère 算子更为复杂。

该算子具有以下基本性质：

- $\varphi \mapsto H_k(\varphi)$ 关于一致拓扑是连续的；
- 若 $u_1,\dots,u_k \in \mathcal{SH}(X,\omega,k)$ 连续，则混合海森算子 $(\omega+dd^c u_1)\wedge\cdots\wedge(\omega+dd^c u_k)\wedge\omega_X^{n-k}$ 也可类似地定义，且是连续的；
- 若 $u_1,\dots,u_k$ 光滑且 $(\omega+dd^c u_j)^k\wedge\omega_X^{n-k}=f_j dV_X$，则

$$(\omega+dd^c u_1)\wedge\cdots\wedge(\omega+dd^c u_k)\wedge\omega_X^{n-k}\geq (f_1\cdots f_k)^{1/k}dV_X. \tag{1.1}$$

这些性质是 G°arding 所给不等式的推论。

1.2.2. 大形式。现在我们不再假设 ω 是正的，而是假设它是半正且大的。取一个具有解析奇点的拟多重次调和函数 $\rho:\ X\to\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$，使得对于某个常数 $\delta>0$ 有 $\omega+dd^c\rho\geq\delta\omega_X$。记 Ω 为 ρ 光滑的 Zariski 开集。

若 $\varphi\in\mathcal{SH}(X、\ \omega、\ k)\cap L^\infty(X)$ 在 Ω 中连续，则由 [KN16，命题29] 可知，对于每个光滑形式 γ，混合乘积 $(\omega_X+dd^c\varphi)^j\wedge\gamma^{l-j}\wedge\omega_X^{n-l}$ 是在 Ω 中定义良好的 Radon测度，且质量有限。

定义1.8。对于 $\varphi\in\mathcal{SH}(X,\omega,k)\cap L^\infty(X)\cap\mathcal{C}^0(\Omega)$，我们令

$$H_k(\varphi):=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(\omega_X+dd^c\varphi)^j\wedge(\omega-\omega_X)^{k-j}\wedge\omega_X^{n-k}.$$

该算子在总质量有限的 Ω 上定义良好，因此我们考虑其到 X 的平凡延拓。该定义的动机来自恒等式

$$\begin{aligned}(\omega+dd^c\varphi)^k\wedge\omega_X^{n-k}&=(\omega_X+dd^c\varphi+\omega-\omega_X)^k\wedge\omega_X^{n-k}\\&=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(\omega_X+dd^c\varphi)^j\wedge(\omega-\omega_X)^{k-j}\wedge\omega_X^{n-k}.\end{aligned}$$

该算子 H_k 沿着在 Ω 中局部一致收敛的序列是连续的[KN16，命题2。11]下面的结果随即得到。

命题1.9. 如果 $\varphi\in\mathcal{SH}(X,\omega,k)\cap L^\infty(X)\cap\mathcal{C}^0(\Omega)$，那么 $H_k(\varphi)$ 是一个正 Radon 测度。

证明。取定 $\varepsilon>0$ 并利用 φ 定理1.7对其进行逼近——通过一个递减序列 (φ_j)，其中各项是 $(\omega+\varepsilon\omega_X)$-sh 函数。由于 $(\omega+\varepsilon\omega_X+dd^c\varphi_j)^k\wedge\omega_X^{n-k}\geq 0$，由 [KN16，命题2。11] 可知 $(\omega+\varepsilon\omega_X+dd^c\varphi)^k\wedge\omega_X^{n-k}\geq 0$。令 $\varepsilon\to 0$，即可得到结论，因为此时有 $(\omega+dd^c\varphi)^k\wedge\omega_X^{n-k}\geq 0$。□

引理 1.10. 设 φ,ψ 是 (ω,ω_X,k)-sh 函数，它们在 Ω 上连续且在 X 上有界。那么

$$H_k(\max(\varphi,\psi))\geq\mathbf{1}_{\{\varphi>\psi\}}H_k(\varphi)+\mathbf{1}_{\{\psi\geq\varphi\}}H_k(\psi).$$

特别地，如果 $\varphi\leq\psi$，那么

$$1_{\{\psi=\varphi\}}H_k(\varphi)\leq 1_{\{\psi=\varphi\}}H_k(\psi).$$

证明。固定 $t>0$。由于 $\{\varphi<\psi+t\}$ 和 $\{\psi+t<\varphi\}$ 在 Ω 中是开集，我们有

$$\begin{aligned}H_k(\max(\varphi,\psi+t))&\geq\mathbf{1}_{\{\varphi>\psi+t\}}(\omega+dd^c\varphi)^k\wedge\omega_X^{n-k}+\mathbf{1}_{\{\psi+t>\varphi\}}(\omega+dd^c\psi)^k\wedge\omega_X^{n-k}\\&\geq\mathbf{1}_{\{\varphi>\psi+t\}}(\omega+dd^c\varphi)^k\wedge\omega_X^{n-k}+\mathbf{1}_{\{\psi\geq\varphi\}}(\omega+dd^c\psi)^k\wedge\omega_X^{n-k}.\end{aligned}$$

令 $t \searrow 0$，即可得到引理的第一条结论。第二条结论可由第一条直接推出。□

1.2.3. $SH(X,\omega,k)$-包络。本文考虑两类包络 .

定义 1.11. 若 $h : X \to \mathbb{R}$ 是连续函数，则令

$$P_\omega(h) := \sup\{u \in PSH(X,\omega),\ u \le h\},$$

且 $P_{\omega,\ k}(h) := \sup\{u \in SH(X,\omega,k)\ \ u \le h\}$。

以下列出这些包络的一些基本性质。

- 测度 $(\omega + dd^c P_\omega(h))^n$ 集中在集合 $\mathcal{C} = \{P_\omega(h) = h\}$。
- 复 Hessian 测度 $(\omega + dd^c P_{\omega,\ k}(h))^k \wedge \omega_X^{n-k}$ 集中在接触集 $\mathcal{C}_k = \{P_{\omega,k}(h) = h\}$上。
- 若 h 是 $\mathcal{C}^{1,\ 1}$-光滑的，且 ω 是厄米的，则 $P_\omega(h)$ 是 $\mathcal{C}^{1,\ 1}$-光滑的，并且
$$(\omega + dd^c P_\omega(h))^n = \mathbf{1}_{\mathcal{C}}(\omega + dd^c h)^n.$$
- 若 h 是 $\mathcal{C}^{1,\ 1}$-光滑的，且 ω 是厄米的，则 $P_{\omega,\ k}(h)$ 是 $\mathcal{C}^{1,\ 1}$-光滑的，并且
$$(\omega + dd^c P_{\omega,k}(h))^k \wedge \omega_X^{n-k} = \mathbf{1}_{\mathcal{C}_k}(\omega + dd^c h)^k \wedge \omega_X^{n-k}.$$

关于这些结果的证明以及有关这些包络的更多信息，请参阅 [Ber19、Tos18、GLZ19、CZ19、CM21] 。

1.3. 复 Monge-Ampère 算子的先验估计。`我们将使用以下在 [GL21] 中建立的先验估计。

定理 1.12. 设 ω、ω_0 为半正且大 (1, 1) 形式，使得 $\omega \ge \omega_0$。固定 $\delta > 0$，并设 $g \in L^{1+\delta}(dV_X)$ 为非负密度。若 $\varphi \in PSH(X,\ \omega) \cap L^\infty(X)$ 满足 $(\omega + dd^c\varphi)^n \le g dV_X$，则

$$\mathrm{Osc}_X(\varphi) \le C$$

对于某个 $C \in \mathbb{R}^+$，它取决于 n、δ、ω_0 以及 $||g||_{L^{1+\delta}}$ 的一个上界。

由于这一结果并未在 [GL21], 中明确陈述，我们简要概述其证明。

证明。我们对 φ 作归一化，使得 $\sup_X \varphi = 0$。由 Skoda 一致可积性定理[GZ17, 定理 8。11] 可知，当 $0 < \alpha$ 充分小时，

$$\int_X e^{-\alpha \frac{(2+\delta)(1+\delta)}{\delta}\varphi} dV_X \le C_\alpha$$

其上界与 φ 无关。令 $\tilde{g} = e^{-\alpha\varphi} g$，则由 H¨older 不等式可得 $\tilde{g} \in L^{1+\delta/2}$，其中

$$||\tilde{g}||_{L^{1+\delta/2}} \le C_\alpha^{1/q} ||g||_{L^{1+\delta}}^{1/p},$$

其中 $p = \frac{1+\delta}{1+\delta/2}$ 且 $q = 2 + 2/\delta$。[GL21，引理 3。3] 表明存在$c(\delta,\ \omega) > 0$ 以及 $u \in PSH(X,\ \omega)$，使得 $-1 \le u \le 0$ 并且

$$(\omega + dd^c u)^n \ge c(\delta,\omega)\frac{\tilde{g} dV_X}{||\tilde{g}||_{L^{1+\delta/2}}} \ge e^{\alpha u} c(\delta,\omega)\frac{\tilde{g} dV_X}{||\tilde{g}||_{L^{1+\delta/2}}}.$$

函数 $v := u - \alpha^{-1}\log[c(\delta,\omega)/||\tilde{g}||_{L^{1+\delta/2}}] \in PSH(X,\omega)$ 因此满足

$$e^{-\alpha v}(\omega + dd^c v)^n = e^{-\alpha v}(\omega + dd^c u)^n \ge \tilde{g} dV_X \ge e^{-\alpha\varphi}(\omega + dd^c\varphi)^n.$$

比较原理 [GL21，推论 1。14] 最终确保 $v \le \varphi$.

这为 φ 提供了一个一致的下界，它只依赖于 δ、ω 以及 $||g||_{L^{1+\delta}}$ 的一个上界。□

2. Domination principle

取 ω 一个大形式， ρ 一个具有解析奇点的 ω-多重次调和函数，使得 $\omega + dd^c\rho \geq \delta\omega_X$、 $\delta > 0$，并设 $\Omega := \{\rho > -\infty\}$。

我们固定一个常数 $B_1 > 0$，使得对所有 $x \in \Omega$，

$$-B_1\omega_\rho^2 \leq dd^c\omega_\rho \leq B_1\omega_\rho^2 \quad \text{and} \quad -B_1\omega_\rho^3 \leq d\omega_\rho \wedge d^c\omega_\rho \leq B_1\omega_\rho^3.$$

B_1 的存在性显然，因为 $d\omega = d\omega_\rho$, $d^c\omega = d^c\omega_\rho$ 并且

$$-B\omega_X^2 \leq dd^c\omega \leq B\omega_X^2 \quad \text{and} \quad -B\omega_X^3 \leq d\omega \wedge d^c\omega \leq B\omega_X^3$$

对于某个 $B > 0$。以下是 [GL21，定理 111]的推广。

定理 2.1。假设 ω 是大类。如果 u 是 Ω 上连续的有界 (ω, ω_X, k)-次调和函数，则 $\int_X(\omega + dd^c u)^k \wedge \omega_X^{n-k} > 0$。

证明。固定如上所述的 ρ 和 B_1。令 $m = \inf_\Omega(u - \rho)$。对于 $s > 0$，令

$$\phi = \max(u, \rho + m + s) \quad \text{and} \quad U := \{u < \phi\} = \{u < \rho + m + s\}.$$

注意， U 在 Ω 中相对紧，且根据 m的定义，对所有 $s > 0$，它都非空。因此，由 [KN16，推论 2。4] 可知，对任意 $0 \leq j \leq k-1$，

$$dd^c(\omega_u^j \wedge \omega_\phi^{k-j-1} \wedge \omega_X^{n-k}) \leq C_1 \sum_{m=k-2}^{k-1} \sum_{l=0}^{m} \omega_u^l \wedge \omega_\phi^{m-l} \wedge \omega_X^{n-m},$$

其中 C_1 是一致常数。在开集 U 上，由于 $\omega_\phi \geq \delta\omega_X$，因此有

$$dd^c(\omega_u^j \wedge \omega_\phi^{k-j-1} \wedge \omega_X^{n-k}) \leq C_2 \sum_{l=0}^{k} \omega_u^l \wedge \omega_\phi^{k-l} \wedge \omega_X^{n-k}. \tag{2.1}$$

由于 $u \leq \phi$，引理 1.10 保证

$$\mathbf{1}_{\{u=\phi\}}\omega_u^j \wedge \omega_\phi^{k-j} \wedge \omega_X^{n-k} \geq \mathbf{1}_{\{u=\phi\}}\omega_u^k \wedge \omega_\phi^{n-k}.$$

注意到 $X \setminus U = \{u = \phi\}$，我们可以写成

$$\begin{aligned}\int_U (\omega_u^j \wedge \omega_\phi^{k-j} \wedge \omega_X^{n-k} - \omega_u^k \wedge \omega_X^{n-k}) &\leq \int_X (\omega_u^j \wedge \omega_\phi^{k-j} \wedge \omega_X^{n-k} - \omega_u^k \wedge \omega_X^{n-k}) \\ &= \int_X dd^c(\phi - u) \wedge \sum_{l=0}^{k-j} \omega_u^l \wedge \omega_\phi^{k-j-l} \wedge \omega_X^{n-k} \\ &= \int_X (\phi - u) dd^c \left[\sum_{l=0}^{k-j} \omega_u^l \wedge \omega_\phi^{k-j-l} \wedge \omega_X^{n-k}\right].\end{aligned}$$

在上面的最后一行中，我们使用了斯托克斯定理。由于 $0 \leq \phi - u \leq s$，利用（2.1），可将上述不等式继续写为：

$$\int_U (\omega_u^j \wedge \omega_\phi^{k-j} \wedge \omega_X^{n-k} - \omega_u^k \wedge \omega_X^{n-k}) \leq C_3 s \sum_{l=0}^{k} \int_U \omega_u^l \wedge \omega_\phi^{k-l} \wedge \omega_X^{n-k}.$$

将上述关于 $j = 0, ..., k$ 的不等式相加，可得

$$(1 - C_4 s) \sum_{l=0}^{k} \int_U \omega_u^l \wedge \omega_\phi^{k-l} \wedge \omega_X^{n-k} \leq (k+1) \int_U \omega_u^k \wedge \omega_X^{n-k}.$$

如果 $\omega_u^k \wedge \omega_X^{n-k} = 0$，那么当 $s > 0$ 足够小时，上述不等式给出 $\int_U \omega_\phi^k \wedge \omega_X^{n-k} = 0$，因此 U 的勒贝格测度为 0，这不可能。□

定理 2.2. 假设 ω 是厄米的， u、 v 是连续的（ω、 ω_X、 k）次调和函数，并且在 $\{u<v\}$上有 $\omega_u^k\wedge\omega_X^{n-k}=0$ 。那么 $u\geq v$。

证明。将 v 替换为 $\max(u,v)$，并注意到 $\{u<v\}=\{u<\max(u,v)\}$，我们可以假设 $u\leq v$。因此，我们的目标是证明 $u=v$。

对于 $b\geq 1$，令 $\phi_b:=P_{\omega,\ k}(bu-(b-1)v)$。这是一个负的 (ω,k)-次亚调和函数。由于 $bu-(b-1)v$ 在 X 上连续，因此 ϕ_b 也连续。还需注意，

$$b^{-1}\phi_b+(1-b^{-1})v\leq u$$

wi接触集上的等式 $\mathcal{C}:=\{\phi_b=bu-(b-1)v\}$。现在由引理 1.10

$$\mathbf{1}_{\mathcal{C}}\left(b^{-k}\omega_{\phi_b}^k\wedge\omega_X^{n-k}+(1-b^{-1})^k\omega_v^k\wedge\omega_X^{n-k}\right)\leq\mathbf{1}_{\mathcal{C}}\omega_u^k\wedge\omega_X^{n-k},$$

而 $\int_{\mathcal{C}}H_k(\phi_b)=\int_X H_k(\phi_b)>0$ 由定理 2.1。由于 $H_k(u)=0$ 在 $\{u<v\}$上，故 $\mathcal{C}\cap\{u=v\}$ 至少包含一个点，记为 x。于是有

$$\phi_b(x)=bu(x)-(b-1)v(x)=v(x)\geq\inf_X v;$$

特别是 $\sup_X\phi_b\geq\inf_X v$。

注意， ϕ_b 在 b 上递减，因为 $u\leq v$。极限 $\phi:=\lim_{b\to+\infty}\phi_b$ 是一个不恒等于 $-\infty$ 的（ω,k）-次调和函数。对于任意 $a>0$,

$$\phi_b\leq bu-(b-1)v\leq v-ba$$

在开集 $\{u<v-a\}$上，因此 $\phi=-\infty$ 在此集合上。由于 ϕ 在X上可积，集合 $\{u<v-a\}$ 必为空，因此令 $a\to 0^+$，得到 $u\geq v$。□

推论 2.3。假设 ω 是厄米的， u 和 v 是连续的（ω,ω_X,k）-次调和函数，且对于某个$c\in[0,1)$，在 $\{u<v\}$ 上有$\omega_u^k\wedge\omega^{n-k}\leq c\omega_v^k\wedge\omega^{n-k}$。那么 $u\geq v$。

证明。取 b 充分大，使得（$1-b^{-1}$）$^k\geq c$，并考虑 $\phi:=P_{\omega,k}$（$bu-$（$b-1$）v）。那么 $b^{-1}\phi+$（$1-b^{-1}$）$v\leq u$，且在接触集上取等号

$$\mathcal{C}:=\{\phi=bu-(b-1)v\}.$$

根据引理 1.10 可得

$$\mathbf{1}_{\mathcal{C}}\left(b^{-k}\omega_\phi^k\wedge\omega_X^{n-k}+(1-b^{-1})^k\omega_v^k\wedge\omega_X^{n-k}\right)\leq\mathbf{1}_{\mathcal{C}}\omega_u^k\wedge\omega_X^{n-k}.$$

两边乘以 $\mathbf{1}_{\{u<v\}}$，并利用关于$\{u<v\}$ 的假设$\omega_u^k\wedge\omega^{n-k}\leq c\omega_v^k\wedge\omega^{n-k}$ 以及 $(1-b^{-1})^k\geq c$，即可得到

$$\mathbf{1}_{\mathcal{C}\cap\{u<v\}}\omega_\phi^k\wedge\omega^{n-k}=0.$$

由于 $\omega_\phi^k\wedge\omega^{n-k}$ 的支集包含于 $\mathcal{C}$，因此有

$$\int_{\{\phi<v\}}\omega_\phi^k\wedge\omega^{n-k}=\int_{\{bu-(b-1)v<v\}}\omega_\phi^k\wedge\omega^{n-k}=\int_{\{u<v\}}\omega_\phi^k\wedge\omega^{n-k}=0.$$

应用支配原理（定理 2.2），可得 $\phi\geq v$。由此可知 $bu-(b-1)v\geq\phi\geq v$，因此 $u\geq v$。□

推论 2.4. 假设 ω 是厄米的，且 u 和 v 是连续的 (ω,ω_X,k)-次调和函数。那么

$$e^{-v}(\omega+dd^cv)^k\wedge\omega_X^{n-k}\geq e^{-u}(\omega+dd^cu)^k\wedge\omega_X^{n-k}\Longrightarrow u\geq v.$$

证明。 固定 $a>0$。在集合 $\{u<v-a\}$ 上，我们有 $H_k(u)\leq e^{-a}H_k(v)$。根据推论 2.3， $u\geq v-a$。由于这对所有 $a>0$都成立，我们得到 $u\geq v$。□

3. Proof of the main theorems

3.1. 先验估计。 本节证明定理 B，这是对 Kołodziej-Nguyen 主要结果的一个扩展 [KN16]:

定理 3.1. 设 ω_0、ω 是半正且大形式，满足 $\omega_0 \leq \omega$。设 φ 是满足以下条件的光滑 (ω, ω_X, k)-次调和函数

$$(\omega + dd^c\varphi)^k \wedge \omega_X^{n-k} \leq f dV_X,$$

其中 $f \in L^p(dV_X)$， $p > n/k$。则

$$\mathrm{Osc}_X(\varphi) \leq C,$$

其中 $C > 0$ 取决于 ω_0、n、k、p 以及 $||f||_{L^p}$ 的一个上界。

证明。 不妨设上确界为 $_X\,\varphi = 0$。令 $u := P_\omega(\varphi)$ 为低于 ω 的最大 ω-psh 函数。令 $\mathcal{C}$ 表示接触集 $\mathcal{C} := \{u = \varphi\}$。则 u 是 (ω, ω_X, k) -sh，且 $u \leq \varphi$ 因此引理 1.10 给出

$$\mathbf{1}_{\mathcal{C}}(\omega + dd^c u)^k \wedge \omega_X^{n-k} \leq \mathbf{1}_{\mathcal{C}}(\omega + dd^c\varphi)^k \wedge \omega_X^{n-k} \leq f dV_X.$$

注意到，光滑函数 $h := \omega_X^n/dV_X \geq \delta_0$ 在 X上为正。回顾一下，Monge-Amp`ère 测度 $(\omega + dd^c u)^n$ 的 u 支撑集中于接触集 $\mathcal{C}$。令 $g := (\omega + dd^c u)^n/dV_X$。由 G˚ard-ing 不等式 (1.1) 可得

$$\delta_0^{1-k/n} g^{k/n} \leq h^{1-k/n} g^{k/n} \leq f,$$

因此 $g \leq C_0 f^{n/k}$。由于 $f \in L^p$ 且 $p > n/k$，我们得到 $g \in L^{1+\delta}$ 且 $\delta > 0$。因此，定理 1.12 给出一个一致上界

$$\mathrm{Osc}_X(u) \leq M.$$

如果我们能从下方控制 $\sup_X u$，那么这就为 $u \leq 0$ 提供了一致上界。

令 q' 为 $p' = pk/n > 1$的共轭指数。利用 [GL22，命题 3。4] 以及 H¨older 不等式，可得 $_X\,u$ 的 sup 一致下界

$$\begin{aligned} v_M^-(\omega)(-\sup_X u)^{1/q'} &\leq \int_X |u|^{1/q'}(\omega + dd^c u)^n \\ &\leq \left(\int_X |\varphi|\omega^n\right)^{1/q'} \left(\int_X f^{p'}\omega^n\right)^{1/p'} \\ &\leq C, \end{aligned}$$

由于 $\int_X |\varphi|\omega^n$ 由命题 φ 独立于 1.6而有上界。结合 $\mathrm{Osc}_X(u)$ 的一致上界，可得 $|u|$的一致上界。这意味着 φ 有一致上界，因为 $u \leq \varphi$ 且 $\sup_X \varphi = 0$。 □

注 3.2. 当 f 满足较弱的可积性条件时，我们也有一个一致的先验界

$$\int_X f^{n/k} |\log f|^n \, |h \circ \log \circ \log f|^n \, dt < +\infty$$

其中 h 是一个递增连续函数，满足 $\int^{+\infty} dt/h(t) < +\infty$。事实上，由此可知 g 满足 Kołodziej 的最优可积性条件

$$\int_X g |\log g|^n \, |h \circ \log \circ \log g|^n \, dt < +\infty,$$

这保证了 $\mathrm{Osc}_X(u)$ 具有由 [Kol98，定理 2.5 所给出的统一上界。2]。我们在此实际上需要将 Kołodziej 的结果推广到半正且大形式的情形 [EGZ09], ，以及厄米情形 [DK12，GL21]。

因此，只需稍作修改即可沿用相同的证明：为了得到 $\sup_X u$ 的下界，我们用加法型 Hölder-Young 不等式替代 Hölder 不等式。若 w 表示凸权函数 $w(t) \sim t(\log t)^n(h\circ\log\circ\log t)^n$， w^* 是其共轭凸权函数，而 $(w^*)^{-1}$ 表示 w^* 的逆函数，则由此可得一个一致的上界

$$\begin{aligned} v_M^-(\omega)(w^*)^{-1}(-\sup_X u) &\leq \int_X (w^*)^{-1}(u)(\omega+dd^c u)^n \\ &\leq \int_X w\circ f\, dV_X + \int_X (-u)dV_X \leq C. \end{aligned}$$

3.2. 稳定性估计。我们通过建立以下稳定性估计来加强定理 B：

定理 3.3. 假设 ω 是厄米的，且 $\omega \geq \omega_0$ 对某个半正且大形式 ω_0 成立。设 $0 \leq f$、$g \in L^p(dV_X)$ 满足 $p > n/k$，且 φ、ψ 是连续的 (ω,ω_X,k)-次调和函数，使得

$$(\omega+dd^c\varphi)^k \wedge \omega_X^{n-k} \geq e^{\varphi} f\omega_X^n, \quad and \quad (\omega+dd^c\psi)^k \wedge \omega_X^{n-k} \leq e^{\psi} g\omega_X^n.$$

Then

$$\varphi \leq \psi + C\|f-g\|_p^{1/k} \tag{3.1}$$

对于某个 $C>0$，其取值取决于 ω_0、n、k 以及 $||f||_p$、$\|\varphi\|_\infty$、$|\inf_X \psi|$ 的上界。

特别地，若 φ、ψ 是相应方程的解，则

$$||\varphi-\psi||_\infty \leq C\|f-g\|_p^{1/k},$$

因此，当 f 在 L^p 中接近 g 时，$\varphi-\psi$ 一致收敛于小量。

证明。我们的证明采用了 [GLZ18、LPT21], 中的扰动论证，这一方法可追溯至 [Kol96]。我们求解复 Monge-Amp`ère 方程

$$(\omega+dd^c u)^n = bh\omega_X^n, \quad \text{where} \quad h = \frac{|f-g|^{n/k}}{\|f-g\|_p^{n/k}} + 1,$$

上确界 $\sup_X u = 0$ 且 $b>0$ 是常数。连续解 $u \in PSH(X,\omega)$ 的存在性由 [KN15、KN19] 给出。

不妨设 ω_X 是 Gauduchon 度量（即 $dd^c(\omega_X^{n-1})=0$），且其支配 ω。因此，u 是 ω_X-psh，且满足

$$(\omega_X+dd^c u)^n \geq (\omega+dd^c u)^n \geq b\omega_X^n$$

因为 $h \geq 1$。混合 Monge-Amp`ère 不等式（见 [Ng16]）给出

$$(\omega_X+dd^c u)\wedge\omega_X^{n-1} \geq b^{1/n}\omega_X^n,$$

因此 $b \leq 1$ 由于 $\int_X(\omega_X+dd^c u)\wedge\omega_X^{n-1} = \int_X \omega_X^n$，由 Gauduchon条件可得。

由于 $h \in L^q$ 满足 $q = pk/n > 1$ 且 $b \leq 1$，定理3.1 保证 $\|u\|_\infty$ 一致收敛有界。因此由[GL22，命题 3.4] 可知 $b \geq \delta_0 > 0$一致收敛地以下有界。

如果 $\|f-g\|_p^{1/k}$不够小，通过调整3.1中的 C的取值即可直接得到稳定性不等式（）。因此，在下文的证明中，不失一般性地假设

$$\varepsilon := b^{-1/n}\|f-g\|_p^{1/k} e^{\sup_X \varphi/k} \leq 1/2. \tag{3.2}$$

由混合 Monge-Amp`ère 不等式（1.1），可得

$$(\omega + dd^c u)^k \wedge \omega_X^{n-k} \geq b^{k/n} \frac{|f-g|}{\|f-g\|_p} \omega_X^n.$$

我们设 $C_1 = 2k - \inf_X \varphi$ 且

$$\psi_\varepsilon := (1-\varepsilon)\varphi + \varepsilon u - C_1 \varepsilon,$$

函数 ψ_ε 属于 $SH(X,\omega,k) \cap \mathcal{C}^0(X)$；其赫essian测度满足

$$\begin{aligned}(\omega + dd^c \psi_\varepsilon)^k \wedge \omega_X^{n-k} &\geq (1-\varepsilon)^k e^{\varphi} f \omega_X^n + \varepsilon^k b^{k/n} \frac{|f-g|}{\|f-g\|_p} \omega_X^n \\ &= \left[(1-\varepsilon)^k e^{\varphi} f + e^{\sup_X \varphi} |f-g|\right] \omega_X^n \\ &\geq e^{\varphi - 2k\varepsilon} g \omega_X^n,\end{aligned}$$

us在 (3.2) 中， $|f-g| + f \geq g$ 且不等式 $\log(1-\varepsilon) \geq -2\varepsilon$ 在 $[0, 1/2]$上成立。

现在注意到，根据 C_1 和$u \leq 0$的定义， $\psi_\varepsilon \leq \varphi - \varepsilon\varphi - C_1\varepsilon \leq \varphi - 2k\varepsilon$ 。我们推得

$$(\omega + dd^c \psi_\varepsilon)^k \wedge \omega_X^{n-k} \geq e^{\psi_\varepsilon} g \omega_X^n,$$

因此 $\psi_\varepsilon \leq \psi$ 由推论 2.4可得。这意味着

$$\varphi \leq \psi + \varepsilon(\varphi - u) + C_1 \varepsilon \leq \psi + C_2 ||f-g||_p^{1/k},$$

对于某个一致常数 C_2，如所需。 □

3.3. 定理 A 的证明。 我们用光滑正密度 f 在 L^p 上逼近 f_j。对于 $j \geq 1$，我们考虑厄米形式 $\omega_j = \omega + 2^{-j}\omega_X$。由 [Zh17、Szek18] 可知，存在唯一的常数 $c_j > 0$ 以及光滑的（ω_j， k）-sh 函数 φ_j 使得

$$(\omega_j + dd^c \varphi_j)^k \wedge \omega_X^{n-k} = c_j f_j \omega_X^n,$$

以及 $\sup_X \varphi_j = 0$。

我们声称，常数 c_j 保持一致有界，当 j 趋于$+\infty$时。为证明这一点，我们使用 Tosatti-Weinkove 的 Monge-Amp`ère 方程解 [TW10]:

$$(\omega_j + dd^c u_j)^n = b_j f_j^{n/k} \omega_X^n.$$

令 $p' = pk/n > 1$。由于 $L^{p'}$ 的范数 $f_j^{n/k}$ 一致有界，依据[GL21，引理 3。3], 存在一个与 $c > 0$ 无关的常数 j 以及一个有界的 ω-psh 函数 u 使得 $\omega_u^n \geq c f_j^{n/k}$ 。根据 [GL21，推论 1。13],$b_j \geq c$。于是，由 G˚arding 不等式可得

$$(\omega_j + dd^c u_j)^k \wedge \omega_X^{n-k} \geq c^{k/n} f_j \omega_X^n.$$

推论 2.3 从而保证 $c_j \geq c^{k/n}$ 一致收敛地被一个正常数从下方有界。

接下来我们从上方估计c_j 。由 G˚arding 不等式可得

$$(\omega_j + dd^c \varphi_j) \wedge \omega_X^{n-1} \geq c_j^{1/k} f_j^{1/k} \omega_X^n.$$

函数 φ_j 属于 $SH(X,\omega_1)$，且在 L^1 中相对紧，因此对 X 积分并利用 $\int_X f_j^{1/k} \omega_X^n \to \int_X f^{1/k} \omega_X^n > 0$，即可得到 c_j 的一致上界。

由于 $\omega \le \omega_j$ 且 $||c_j f_j||_{L^p}$ 从上方一致有界，由定理 3.1 可知 φ_j 一致有界：

$$-C_1 \le \varphi_j \le 0,$$

对于某个一致常数 C_1。在 $L^1(X)$ 中提取并利用归一化的 (ω, ω_X, k)-sh 函数的紧性，我们因此可以假设 $c_j \to c > 0$ 和 φ_j在 $L^1(X)$ 中收敛，并且几乎处处收敛到一个有界函数 φ ；当 $j \to +\infty$时，该函数是 (ω, ω_X, k)-sh 函数。

接下来我们证明收敛 $\varphi_j \to \varphi$ 在 Ω 中是局部一致的。令$g_j := c_j f_j e^{-\varphi_j}$以及 $g = cfe^{-\varphi}$。由 H¨older 不等式， $\|g_j - g\|_q \to 0$对于某个$q > n/k$。取 $j < l$ 充分大。由于 $\omega_j \ge \omega_l$，我们有

$$(\omega_j + dd^c\varphi_l)^k \wedge \omega_X^{n-k} \ge e^{\varphi_l} g_l \omega_X^n.$$

由定理 3.3，我们得到

$$\varphi_l \le \varphi_j + C_2 \|g_j - g_l\|_q^{1/k}, \tag{3.3}$$

对于某个一致常数 C_2。接下来考虑

$$\psi_j := (1-\varepsilon)\varphi_j + \varepsilon\rho - (2k + C_1)\varepsilon,$$

其中当 j 充分大时， $\varepsilon = \delta^{-1}2^{-j} < 1/2$ 。由于 $\omega + dd^c\rho \ge \delta\omega_X$，我们有

$$\begin{aligned}
\omega_l + dd^c\psi_j &\ge \omega + \varepsilon dd^c\rho + (1-\varepsilon)dd^c\varphi_j \\
&\ge \varepsilon\delta\omega_X + (1-\varepsilon)(\omega_j + dd^c\varphi_j) - 2^{-j}\omega_X \\
&= (1-\varepsilon)(\omega_j + dd^c\varphi_j).
\end{aligned}$$

由此可得 $\psi_j \in SH(X, \omega_l, k)$，并且

$$(\omega_l + dd^c\psi_j)^k \wedge \omega_X^{n-k} \ge e^{\varphi_j + k\log(1-\varepsilon)} g_j \omega_X^n \ge e^{\varphi_j - 2k\varepsilon} g_j \omega_X^n \ge e^{\psi_j} g_j \omega_X^n$$

在 Ω 中成立。函数 $\psi_{j,\ l} :\ = \max(\psi_j,\ \varphi_l)$ 是 $(\omega_l,\ k)$-次调和且在 X 上连续。引理 1.10 给出

$$(\omega_l + dd^c\psi_{j,l})^k \wedge \omega_X^{n-k} \ge e^{\psi_{j,l}} \min(g_j, g_l)\omega_X^n.$$

应用定理 3.3 ，我们便得到

$$\psi_{j,l} \le \varphi_l + C_3 \|\min(g_j, g_l) - g_l\|_q^{1/k} \le \varphi_l + C_3\|g_j - g_l\|_q^{1/k},$$

其中一致常数为 C_3。结合（3.3），可得

$$\begin{aligned}
\varphi_j + \delta^{-1}2^{-j}\rho - (2k + C_1)\delta^{-1}2^{-j} &\le \varphi_l + C_3\|g_j - g_l\|_q^{1/k} \\
&\le \varphi_j + C_1\|g_j - g_l\|_q^{1/k}.
\end{aligned}$$

因此，φ_j 在 Ω 中局部一致收敛于 φ。于是，在 φ 于 Ω 中求解复 Hessian 方程的区域内，它是连续的

$$(\omega + dd^c\varphi)^k \wedge \omega_X^{n-k} = cf\omega_X^n.$$

注 3.4。 当形式 ω 是厄米的时，我们构造的解 φ 在整个 X 上连续。对于 φ 在 ω 消失处的连续性，这是一个微妙的问题，即使在复 Monge-Amp`ere 方程的情形下也是如此。感兴趣的读者可参阅 [GGZ23] ， 了解近期综述。

.....的唯一性 φ 在厄米情形下也是一个微妙的问题，参见[KN19] ，其中给出了复 Monge-Amp`ère 方程情形下的部分结果。

References

[BT76] E. Bedford, B.A. Taylor, *The Dirichlet problem for the complex Monge-Ampère operator*. 《数学发明》, 37 (1976), 1–44. [BT82] E. Bedford, B.A. Taylor, *A new capacity for plurisubharmonic functions*. 数学学报 149 (1982), no. 1-2, 1–40. [BZ20] A.Benali, A.Zeriahi,

The Hölder continuous subsolution theorem for complex Hessianequations. J. ´Ec. polytech. Math. 7 (2020), 981–1007. [Ber19] R. J. Berman,

From Monge-Ampère equations to envelopes and geodesic rays in the zero temperature limit **291** 2019 1 2, 365 394 . Math. Z. ( ), no. - – .

[Blo05] Z. Blocki, *Weak solutions to the complex Hessian equation*. 傅里叶研究所年刊 (Grenoble) 55 (2005), no. 5, 1735–1756. [BEGZ 10] *Monge-Ampère equations in big cohomology classes* **205** 2010 2, 199 262

S. Boucksom, P. Eyssidieux, V. Guedj, A. Zeriahi, . 数学学报 ( ), no. – . [Char16] M.Charabati,

Modulus of continuity of solutions to complex Hessian equations. Inter- nat. J. Math. 27 (2016), no. 1, 1650003, 24 pp. [CZ19] J.Chu, B.Zhou,

Optimal regularity of plurisubharmonic envelopes on compact Hermitian manifolds 62 2019 2, 371 380 . Sci. China Math. ( ),

no. – . [CM21] J.Chu, N.McCleerey *Fully non-linear degenerate elliptic equations in complex geometry*. 泛函分析杂志 281 2021 9, 109176 ( ), no. Paper No. Dem J.P. Demailly,

[94] *Regularization of closed positive currents of type* 1, 1 *by the flow of* ( ) . Contributions *a Chern connection* 105 126,

to complex analysis and analytic geometry, – Friedr. Vieweg, Braunschweig (1994). [DDT 19] *A viscosity approach to the Dirichlet problem for degen-* S. Dinew, H.S.Do, *erate complex Hessian-type equations* 12 2019 2, 505 535

T.D.Tˆo, . Anal. PDE ( ), no. – . [DK12] S. Dinew, S.Ko lodziej,

Pluripotential estimates on compact Hermitian manifolds. Ad- vances in geometric analysis, 69-86, Adv. Lect. Math. (ALM), 21, Int. Press, 2012. [DK14] S. Dinew, S.Ko lodziej,

A priori estimates for complex Hessian equations. Anal. PDE 7 (2014), no. 1, 227–244. [DK17] S. Dinew, S.Ko lodziej, *Liouville and Calabi-Yau type theorems for complex Hessian equations* 139 2017 2, 403 415 . Amer. J.

Math. ( ), no. – . [DL15] S. Dinew, C.H Lu, *Mixed Hessian inequalities and uniqueness in the class* $\mathcal{E}(X,\omega,m)$. Math. Z. 279 2015 3 4, 753 766 ( ), no. - – EGZ P. Eyssidieux, V. Guedj, A. Zeriahi,

[09] *Singular Kähler-Einstein metrics*. 美国数学会杂志 22 (2009), no. 3, 607–639. [Gar59] L. G˚arding,

An inequality for hyperbolic polynomials. J. Math. Mech. 8 (1959) 957–965. [GGZ23] V. Guedj, H. Guenancia, A. Zeriahi, *Continuity of singular Kähler-Einstein potentials*. Int. Math. Res. Not. (2023) no. 2, 1355–1377. [

GL22] V. Guedj, C. H. Lu, *Quasi-plurisubharmonic envelopes 2: bounds on Monge-Ampère volumes* 9 2022 6, 688 713 . Algebr. Geom. ( ),

no. – . [GL21] V. Guedj, C.H. Lu,

Quasi-plurisubharmonic envelopes 3: Solving Monge-Ampère equations on hermitian manifolds 2021 . Preprint ( ). [GLZ18]

V. Guedj, C. H. Lu, A. Zeriahi, *Stability of solutions to complex Monge-Ampère flows*. 傅里叶研究所年刊 (Grenoble) 68 (2018), no. 7, p. 2819–2836. [GLZ19] V. Guedj, C. H. Lu, A. Zeriahi,

Plurisubharmonic envelopes and supersolutions. 微分几何杂志 113 (2019), no. 2, 273–313. [GZ17] V. Guedj, A. Zeriahi, *Degenerate complex Monge-Ampère equations*. EMS Tracts in Mathematics, vol. 26, European Mathematical Society (EMS), Z¨urich, 2017. [GN

18] *The Dirichlet problem for a complex Hessian equation on compact* D. Gu, N.C. *Hermitian manifolds with boundary* 5 18 2018 1189 1248

Nguyen, . Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa ( ) ( ), – . [GP22] B. Guo, D.H. Phong,

On L^∞ *estimates for fully nonlinear partial differential equations on Hermitian manifolds* 2022 . Preprint arXiv ( ). [

GPT21] B. Guo, D.H. Phong, F. Tong, *On* L^∞ *estimates for complex Monge-Ampère equations*. Preprint arXiv (2021). [GPTW 21] *On* L^∞ *estimates for complex Monge-Ampère equations and Hessian equations on nef classes* 2021

B.Guo, D.H. Phong, F. Tong, C. Wang, . Preprint arXiv ( ). [HH72] M. Herv

´ ´ *Les fonctions surharmoniques dans l'axiomatique de M. Brelot* e, R.-M. Herve, . 傅里 *associées à un opérateur elliptique dégénéré* 22 1972 131 145

叶研究所年刊, tome ( ), – .

[HL13] R. Harvey, B. Lawson, *The equivalence of viscosity and distributional subsolutions for convex subequations a strong Bellman principle* 44 2013 621 652 , . 巴西数学会公报 ( ), – . [Kol96] S. Ko lodziej, *Some sufficient conditions for solvability of the Dirichlet problem for the complex Monge-Ampère operator* 65 1996 1, 11 21 . 波兰数学年刊 ( ), no. p. – . [Kol98] S. Ko lodziej, *The complex Monge-Ampère equation*. 数学学报 180 (1998), 69–117. [KN15] S. Ko lodziej, N.C.Nguyen, *Weak solutions to the complex Monge-Ampère equation on compact Hermitian manifolds* 644 2015 141 158 . 当代数学 ( ), – [16] KN S. Ko lodziej, N.C.Nguyen, *Weak solutions of complex Hessian equations on compact Hermitian manifolds* 152 2016 11, 2221 2248 . 组合数学 ( ), no. – . [KN19] S. Ko lodziej, N.C.Nguyen, *Stability and regularity of solutions of the Monge-Ampère equation on Hermitian manifolds* 346 2019 264 304 . Adv. Math. ( ), – . [Lit83] W. Littman, *Generalized subharmonic functions: Monotonic approximations and an improved maximum principle* 3 17 1963 207 222 . Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. ( ) ( ), – . [Lu13] C. H. Lu, *Viscosity solutions to complex Hessian equations*. 泛函分析杂志 264 (2013), no. 6, 1355–1379. [Lu15] C. H. Lu, *A variational approach to complex Hessian equations in $\mathbb{C}^n$*. 数学分析与应用杂志 431 (2015), no. 1, 228–259. [LN15] C. H. Lu, V.D. Nguyen, *Degenerate complex Hessian equations on compact Kähler manifolds* 64 2015 6, 1721 1745 . 印第安纳大学数学杂志 ( ), no. – . [LPT21] C. H. Lu, T.T.Phung, T.D.To, *Stability and Hölder regularity of solutions to complex Monge-Ampère equations on compact hermitian manifolds* 71 2021 . 傅里叶研究所年刊 ( ), no. 5, 2019–2045. [Mic82] M.L. Michelsohn, *On the existence of special metrics in complex geometry*. 数学学报 149 (1982), 261–295. [Ng16] N.-C. Nguyen, *The complex Monge-Ampère type equation on compact Hermitian manifolds and applications* 286 2016 240 285 . Adv. Math. ( ), p. – . [Szek18] G. Sz´ekelyhidi, *Fully non-linear elliptic equations on compact Hermitian manifolds*. 微分几何杂志 109 (2018), no. 2, 337–378. [Tos18] V.Tosatti, *Regularity of envelopes in Kähler classes* 25 2018 1, 281 289 . 数学研究快报 ( ), no – . [TW10] V.Tosatti, B. Weinkove, *The complex Monge-Ampère equation on compact Hermitian manifolds* 23 2010 4, 1187 1195 . 美国数学会杂志 ( ), no. – . [Yau78] S. T. Yau, *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation. I* **31** 1978 3, 339 411 . 纯粹与应用数学通讯 ( ), no. – . [Zh17] D.Zhang, *Hessian equations on closed Hermitian manifolds*. 太平洋数学杂志 291 (2017), no. 2, 485–510.

Institut de Mathématiques de Toulouse, Université de Toulouse, 118 route de Narbonne, 31400 Toulouse, France,
Email address: vincent.guedj@math.univ-toulouse.fr
URL: https://www.math.univ-toulouse.fr/~guedj/

Univ Angers, CNRS, LAREMA, SFR MATHSTIC, F-49000 Angers, France.
Email address: hoangchinh.lu@univ-angers.fr
URL: https://math.univ-angers.fr/~lu/