arXiv:2302.03363v1 [math.ST] 7 Feb 2023

高斯沃尔泰拉过程：渐近增长与统计估计

YULIYA MISHU RA，KOSTIANTYN RALCHENKO，和 SER GIY SHKLYAR

Abstract. 本文致力于研究三参数自相似高斯沃尔泰拉过程，这类过程推广了分数布朗运动。我们研究此类过程的渐近增长以及长程和短程依赖性质。随后，我们考虑由所讨论的高斯沃尔泰拉过程驱动的奥恩斯坦–乌伦贝克过程的漂移参数估计问题。我们构造了一个强相合估计量，并研究其渐近性质。具体而言，我们证明该估计量服从柯西渐近分布。

1. Introduction

如今，分数布朗运动的概念已广为人知并得到充分研究，因此无需解释它属于哪一类随机过程。不过，我们仍然回顾一下：分数布朗运动 $B^H = \{B_t^H, t \geq 0\}$（赫斯特指数为 $H \in \in(0,1)$）是均值为零的高斯随机过程，其协方差函数为

$$\mathsf{E}\, B_t^H B_s^H = \tfrac{1}{2}\left(s^{2H} + t^{2H} - |s-t|^{2H}\right).$$

除 $H = 1/2$ 的情形外，它既不是马尔可夫过程，也不是半鞅过程；在该情形下，它是标准布朗运动。它的非马尔可夫性使其成为经济学、技术、物理学和生物学中非常贴近现实的模型，因为现实中只有最简单的过程才是马尔可夫过程。它还具有平稳增量，并具有自相似性，其系数等于赫斯特指数。一方面，这些性质十分便利，有助于建立完善的解析工具体系，也使轨迹模拟更加容易。另一方面，这些性质限制颇多，并非总能满足，因此屡遭批评。

为了考虑更一般的过程，有几种可行的拓展方向。其中一种推广是多重分数布朗运动，参见例如 [2, 13]。该过程使用赫斯特函数 H_t ，而非固定的赫斯特指数。这类对象具有相当大的灵活性，但测量和建模赫斯特函数并非总是容易，因为通常评估数值参数比评估随时间变化的函数更容易。然而，正如我们已经指出的，单一指数的存在会强烈限制

2020 *Mathematics Subject Classification.* 60G22、60G15、60G17、60G18、62F12。
Key words and phrases. 高斯沃尔泰拉过程、渐近增长、长程与短程依赖、参数估计、奥恩斯坦–乌伦贝克过程。Yuliya Mishura 的研究获得了瑞典战略研究基金会资助，项目编号为 UKR22–0017。Kostiantyn Ralchenko 的研究获得了悉尼数学研究所乌克兰访问学者计划的支持。

过程的性质。论文 [14]，研究了另一种推广，其中一般形式的弗雷德霍姆和沃尔泰拉高斯过程为

$$X_t = \int_0^t K(t,s)dW_s \quad \text{and} \quad X_t = \int_0^T K_T(t,s)dW_s, \quad t \in [0,T],$$

其中 W 是一个维纳过程。这类表示方法由此引入。这种方法很有趣，但我们对这类表示的核了解得越少，就越难确定相应过程具有哪些有用性质。因此，在论文 [9] 中，我们考虑了如下形式的核

$$K(t,s) = a(s)\int_s^t b(u)\,c(u-s)\,du,$$

其中函数 a、 b、 c 保证了这类积分的存在。这是一种更具体的表示，但这类过程的性质虽然各有其独特之处，也受到其存在性和轨迹光滑性的限制。因此，在本文以及论文 [10, 11] 中，我们决定采取以下做法：取分数布朗运动的积分表示（见 [12]）

$$B_t^H = C_H \int_0^t K_H(t,s)\,dW_s, \quad t \geq 0,$$

其中 C_H是某个归一化常数，而对于 $H \in (\frac{1}{2}, 1)$，

$$K_H(t,s) = s^{1/2-H}\int_s^t u^{H-1/2}(u-s)^{H-3/2}\,du, \tag{1}$$

并将其中唯一的指数 H替换为三个可能彼此不同的指数 α、β、γ，从而得到如下形式的核

$$K(t,s) = s^\alpha \int_s^t u^\beta (u-s)^\gamma\,du,$$

并考虑如下形式的过程

$$X_t = \int_0^t s^\alpha \int_s^t u^\beta (u-s)^\gamma\,du\,dW_s,\ t \geq 0. \tag{2}$$

当然， α, β, γ应以适当的方式选取，以确保该核关于维纳过程的积分存在且至少连续。借助这个核，我们得到一个自相似过程 [10, 命题 1]，，但一般而言，它不具备增量平稳性这一限制性性质 [10, 定理 2]。此外，通过选择指标，我们可以得到具有短记忆或长记忆的过程；而对于分数布朗运动，核 $K_H(t,s)$的表示式 (1) 仅在 $H > 1/2$时存在，相应的分数布朗运动也只能具有长记忆。重要的是，我们可以用统一的方式对关于该过程可积的非随机函数进行积分 [11, 定义 1]，；而关于分数布朗运动的积分则会因 H 是否大于或小于 $1/2$ [12, 第 2 节.2]而有本质区别。特别是，关于分数布朗运动可积的函数类取决于 H。因此，借助统一的核 $K(t,s)$，我们可以对各种性质进行建模，而这是分数布朗运动无法做到的。

本文的结构安排如下。第2节研究过程 X 的渐近增长，并证明其几乎处处上界。第3节研究 X_1 与增量$X_{t+1} - X_t$ 之间相关系数的渐近行为，并针对由 X、 X_1 和 $X_{t+1} - X_t$ 构成的过程 (2)，建立短程依赖和长程依赖的条件

。第4节专门讨论奥恩斯坦–乌伦贝克模型，其中噪声是形式为 (2) 的高斯沃尔泰拉过程 X 。对于此类模型，我们构造了一个强相合的漂移参数估计量，并研究其渐近性质。具体而言，我们证明该估计量依分布收敛到某种柯西型分布。附录A包含关于自相似过程的辅助结果。附录 B 建立了第4节中出现的某些确定性积分的渐近性质。

2. Asymptotic growth of the process X

在下文中，设 $\{X_t, t>0\}$ 是一个自相似过程，其自相似指数为ρ。基于该过程，并采用 [7, 15], 中的方法，我们构造另一个过程 $\{Y_s, s\in\mathbb{R}\}$ $Y_s = e^{-\rho s}X_{e^s}$，该过程是平稳的（见附录A中的命题 A.2）。随后，我们利用关于平稳过程 Y的渐近增长的已知结果，获得过程 X的渐近增长界。

定理 2.1. 设 $\{X_t, t>0\}$ 是一个路径连续的、自相似的零均值高斯过程，其自相似指数为 $\rho\in\mathbb{R}$，且 $\mathsf{E}X_1^2=\sigma^2$ $\sigma>0$。则

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{|X_t|}{t^\rho\sqrt{2\log\log t}}\le\sigma \quad a.s.,$$

$$and \quad \sup_{t\ge3}\frac{|X_t|}{t^\rho\sqrt{\log\log t}}<\infty \quad a.s. \tag{3}$$

证明。正如上文所述，根据命题 A.2，$\{Y_s,\ s\in\mathbb{R}\}$ 满足

$$Y_s = e^{-\rho s}\,X_{e^s}$$

是一个连续、均值为零的平稳高斯过程。注意，

$$\mathsf{E}\,Y_s^2 = e^{-2\rho s}\,\mathsf{E}\,X_{e^s}^2 = \mathsf{E}\,X_1^2=\sigma^2.$$

因此，对所有 s，$Y_s/\sigma\sim\mathcal{N}(0,1)$。

根据 [8, 定理 1.4]（参见附录A中的定理 A.3），

$$\limsup_{s\to+\infty}\frac{|Y_s|}{\sigma\sqrt{2\log s}}\le1.$$

因此，

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{|X_t|}{t^\rho\sqrt{2\log\log t}}=\limsup_{s\to+\infty}\frac{|X_{e^s}|}{e^{\rho s}\sqrt{2\log s}}=\limsup_{s\to+\infty}\frac{|Y_s|}{\sqrt{2\log s}}\le\sigma.$$

由于过程 $\{t^{-\rho}\,|X_t|\,/\,\sqrt{2\log\log t},\ t\ge3\}$ 在任意有限区间上有界，这意味着

$$\sup_{t\ge3}\frac{|X_t|}{t^\rho\sqrt{2\log\log t}}<\infty,$$

由此得到（3）。 □

注2.2。1）我们没有在定理 2.1 中说明自相似指数 ρ 是负、零还是正。不过，根据定理 A.4，非平凡且自相似指数为负的自相似过程在点 0 处不可能连续。因此，在定理 2.1 中，我们假设过程 X 在 $(0,+\infty)$ 上连续，而不是在 $[0,+\infty)$ 上连续。

2）当然，可以用核 K 对自相似 Volterra过程$X_t = \int_0^t K(t,s)dW_s$ 进行一般性刻画：当且仅当对于任意 $a>0, t,s>0$，过程 X 是 ρ-自相似的

$$\int_0^{t\wedge s} K(at,az)K(as,az)dz = a^{2\rho-1}\int_0^{t\wedge s} K(t,z)K(s,z)dz.$$

现在，我们继续讨论过程 X （见式 (2)），并应用定理 2.1。

定理 2.3. 设

$$\alpha > -\frac{1}{2}, \qquad \gamma > -1, \qquad \alpha+\beta+\gamma > -\frac{3}{2}, \tag{4}$$

并设 $\{X_t,\ t\geq 0\}$ 是过程 (2) 的路径连续修正，根据 [10]中的定理 1 和定理 6，该修正在这些参数取值下存在。

Then

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{|X_t|}{t^{\alpha+\beta+\gamma+1.5}(2\log\log t)^{1/2}} \leq \mathsf{E}\, X_1^2 < \infty,$$

$$\sup_{t\geq 3} \frac{|X_t|}{t^{\alpha+\beta+\gamma+1.5}(\log\log t)^{1/2}} < \infty \quad a.s. \tag{5}$$

证明。过程 X 是高斯过程；其均值为零且具有连续路径。根据 [10,命题 1], ，过程 X 是自相似的，其自相似指数为

$$H = \alpha+\beta+\gamma+\frac{3}{2}.$$

根据定理 2.1， X 几乎处处满足所需的不等式。 □

3. Long- and short-range dependence

本节定义随机过程的长记忆或短记忆性质。

定义 3.1。设 $\{X_t,\ t\geq 0\}$ 是具有有限二阶矩的随机过程（即，对于所有 $t\geq 0$，$\mathsf{E}\, X_t^2 < \infty$ ）。

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} |\mathsf{cov}(X_1, X_{n+1}-X_n)| < \infty$，则称过程 X 为短程依赖。

否则，如果 $\sum_{n=1}^{\infty} |\mathsf{cov}(X_1, X_{n+1}-X_n)| = \infty$，则称过程 X 为长程依赖。

注3.2。在某些情况下，将长程或短程依赖与数值 X_1 联系起来并不自然。然而，对于自相似过程 X_t， $t\geq 0$ 对任意固定的 $k>0$ 和 $n\geq k$，其指数为 ρ

$$\mathrm{cov}(X_k, X_{n+1}-X_n) = k^{2\rho}\,\mathrm{cov}\left(X_1, X_{\frac{n+1}{k}} - X_{\frac{n}{k}}\right),$$

因此，无论从哪里开始，渐近行为都相同。

如果 $X_0 = 0$，$\mathsf{var}(X_1) > 0$ 且过程 X 具有正相关增量，那么短程依赖和长程依赖的定义可以简化。若 $\lim_{t\to+\infty}\mathsf{cov}(X_1,X_t)$ 有限，则过程 X 是短程依赖的；若 $\lim_{t\to+\infty}\mathsf{cov}(X_1,X_t) = +\infty$，则 X 是长程依赖的。对于具有负相关增量的过程，也有类似的等价关系：若 $\lim_{t\to+\infty}\mathsf{cov}(X_1,X_t)$ 有限，则 X 是短程依赖的；若 $\lim_{t\to+\infty}\mathsf{cov}(X_1,X_t) = -\infty$，则 X 是长程依赖的。

除非对所有足够大的 n ， $\mathsf{cov}(X_1, X_{n+1} - X_n) = 0$ ，否则我们可以通过将过程 X 乘以一个非随机函数，使其成为长程依赖或短程依赖过程。为了降低“变量尺度”的影响，我们采用皮尔逊相关系数而非协方差，并研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |\mathsf{corr}(X_1, X_{n+1} - X_n)|$ 的收敛性。

本节余下部分，我们考虑式（2）中定义的随机过程 $\{X_t, t \geq 0\}$ 。由于 [10, 式（8）],

$$\begin{aligned}(6)\qquad &\mathsf{E}[(X_{t_2} - X_{t_1})(X_{t_4} - X_{t_3})] \\ &= \int_0^{t_2 \wedge t_4} s^{2\alpha} \int_{s \vee t_1}^{t_2} u^{\beta}(u-s)^{\gamma}\, du \int_{s \vee t_3}^{t_4} v^{\beta}(v-s)^{\gamma}\, dv\, ds > 0.\end{aligned}$$

若 $0 \leq t_1 < t_2$ 且 $0 \leq t_3 < t_4$。因此，过程 X 的增量呈正相关。

为了判断过程 X 是长程依赖还是短程依赖的，我们计算其渐近行为

$$\mathrm{cov}(X_1, (X_{t+1} - X_t)) \quad \text{and} \quad \mathrm{corr}(X_1, (X_{t+1} - X_t))$$

并检验级数的收敛性

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{cov}(X_1, (X_{n+1} - X_n)) \quad \text{and} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{corr}(X_1, (X_{n+1} - X_n))$$

（级数的所有项均为正，因此省略“绝对值”符号。）

定理 3.3. 设假设 (4) 成立，并令过程 X 定义于 (2) 中。则

$$(7)\qquad \mathsf{E}[X_1\,(X_{t+1} - X_t)] \sim \frac{\mathrm{B}(2\alpha+1,\, \gamma+1)}{2\alpha+\beta+\gamma+2}\, t^{\beta+\gamma} \quad as \quad t \to +\infty.$$

如果 $\beta + \gamma < -1$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{cov}(X_1, (X_{n+1} - X_n)) < \infty \quad and \quad \int_0^{\infty} \mathrm{cov}(X_1, (X_{t+1} - X_t))\, dt < \infty,$$

因此过程 X 是短程依赖的。否则，如果 $\beta + \gamma \geq -1$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{cov}(X_1, (X_{n+1} - X_n)) = \infty \quad and \quad \int_1^{\infty} \mathrm{cov}(X_1, (X_{t+1} - X_t))\, dt = \infty,$$

且过程 X 是长程依赖的。

证明。由 (6) 可知，对所有 $t \geq 1$

$$(8)\qquad \mathsf{E}[X_1(X_{t+1} - X_t)] = \int_0^1 s^{2\alpha} \left(\int_s^1 u^{\beta}(u-s)^{\gamma}\, du \right) \left(\int_t^{t+1} v^{\beta}(v-s)^{\gamma}\, dv \right) ds.$$

显然，我们有一致收敛

$$\frac{(t+x)^{\beta}(t+x-s)^{\gamma}}{t^{\beta+\gamma}} = \left(1 + \frac{x}{t}\right)^{\beta} \left(1 + \frac{x-s}{t}\right)^{\gamma} \to 1 \quad \text{as} \quad t \to +\infty, \quad x, s \in [0,1].$$

Then

$$(9)\qquad t^{-\beta-\gamma} \int_t^{t+1} v^{\beta}(v-s)^{\gamma}\, dv = \int_0^1 \frac{(t+x)^{\beta}(t+x-s)^{\gamma}}{t^{\beta+\gamma}}\, dx \to 1$$

当 $t \to +\infty$ 时，在 $s \in [0,1]$ 中一致收敛。由 (8) 和 (9),

$$\begin{aligned} & t^{-\beta-\gamma}\,\mathsf{E}[X_1\,(X_{t+1}-X_t)] \\ &\quad = \int_0^1 s^{2\alpha}\left(\int_s^1 u^{\beta}(u-s)^{\gamma}\,du\right)\left(t^{-\beta-\gamma}\int_t^{t+1} v^{\beta}(v-s)^{\gamma}\,dv\right)ds \\ &\quad \to \int_0^1 s^{2\alpha}\left(\int_s^1 u^{\beta}(u-s)^{\gamma}\,du\right)ds = \int_0^1 u^{\beta}\int_0^u s^{2\alpha}(u-s)^{\gamma}\,ds\,du \\ &\quad = \int_0^1 u^{\beta+2\alpha+\gamma+1}\mathrm{B}(2\alpha{+}1,\,\gamma{+}1)\,du = \frac{\mathrm{B}(2\alpha{+}1,\,\gamma{+}1)}{2\alpha+\beta+\gamma+2} \end{aligned}$$

如 $t \to +\infty$，这等价于 (7)。

积分和级数的收敛性可由众所周知的判据得出。我们利用以下事实：由于过程 $\{X_t,\ t \geq 0\}$ 均方连续，协方差 $\mathsf{cov}(X_1, (X_{t+1}-X_t)) = \mathsf{E}[X_1(X_{t+1}-X_t)]$ 在 t on$[0,+\infty)$ 上连续。□

引理 3.4. 设条件 (4) 成立，且过程 X 定义于 (2) 中。增量方差 $\mathsf{E}(X_{t+1}-X_t)^2$ 在 $t \to +\infty$ 时的渐近行为如下:

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(X_{t+1}-X_t)^2 &\sim \tfrac{\mathrm{B}(\gamma+1,-2\gamma-1)\,t^{2\alpha+2\beta}}{(\gamma+1)(2\gamma+3)} && \text{if } \gamma < -\tfrac{1}{2}, \\ \mathsf{E}(X_{t+1}-X_t)^2 &\sim t^{2\alpha+2\beta}\log t && \text{if } \gamma = -\tfrac{1}{2}, \\ \mathsf{E}(X_{t+1}-X_t)^2 &\sim \mathrm{B}(2\alpha{+}1, 2\gamma{+}1)\,t^{2\alpha+2\beta+2\gamma+1} && \text{if } \gamma > -\tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

证明。根据 [10,Proposition 1]，过程 X 是指数为 $\alpha+\beta+\gamma+\frac{3}{2}$ 的自相似过程。因此

$$\mathsf{E}(X_{t+1}-X_t)^2 = t^{2\alpha+2\beta+2\gamma-3}\,\mathsf{E}(X_{1+1/t}-X_1)^2.$$

应用 [10, 命题 2] 求 $\mathsf{E}(X_{1+1/t}-X_1)^2$，的渐近行为，我们立即得到引理 3.4 的结论。□

现在我们考察相关系数的渐近行为

$$\mathrm{corr}(X_1,\,(X_{t+1}{-}X_t)) = \frac{\mathsf{E}[X_1\,(X_{t+1}{-}X_t)]}{\sqrt{\mathsf{E}\,X_1^2}\sqrt{\mathsf{E}(X_{t+1}{-}X_t)^2}}.$$

定理 3.5. 设条件 (4) 成立，并设过程 X 由 (2) 定义。那么相关系数 $\mathsf{corr}(X_1, (X_{t+1}-X_t))$ 的渐近行为为

$$\mathrm{corr}(X_1,\,(X_{t+1}{-}X_t)) \sim c\,t^{\gamma-\alpha} \qquad \text{if } \gamma < -\tfrac{1}{2}, \tag{10}$$

$$\mathrm{corr}(X_1,\,(X_{t+1}{-}X_t)) \sim c\,t^{-0.5-\alpha}(\log t)^{-1/2} \qquad \text{if } \gamma = -\tfrac{1}{2}, \tag{11}$$

$$\mathrm{corr}(X_1,\,(X_{t+1}{-}X_t)) \sim c\,t^{-0.5-\alpha} \qquad \text{if } \gamma > -\tfrac{1}{2}, \tag{12}$$

其中因子 c取决于 α、β 和 γ。

因此,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{corr}(X_1,\,(X_{n+1}-X_n)) < \infty \quad \textit{and} \quad \int_0^{\infty}\mathrm{corr}(X_1,\,(X_{t+1}-X_t))\,dt < \infty \tag{13}$$

如果 $\min(\gamma, -\frac{1}{2}) < \alpha - 1$，否则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{corr}(X_1,\,(X_{n+1}-X_n)) = \infty \quad \textit{and} \quad \int_1^{\infty}\mathrm{corr}(X_1,\,(X_{t+1}-X_t))\,dt = \infty \tag{14}$$

如果 $\alpha \le \frac{1}{2}$ 和 $\gamma \ge \alpha - 1$。

证明。由定理 3.3 和引理 3.4 可知，关系式 (10) 至 (12) 成立。因此，要么

$$\operatorname{corr}(X_1,\, (X_{t+1}-X_t)) \sim c\, t^{\min(\gamma,-0.5)-\alpha}$$

or

$$\operatorname{corr}(X_1,\, (X_{t+1}-X_t)) \sim c\, t^{\min(\gamma,-0.5)-\alpha}(\log t)^{-0.5}$$

如 $t \to +\infty$。若 $\min(\gamma,-0.5) - \alpha < -1$，则级数和积分 (13) 收敛。若 $\min(\gamma, -0.5)-\alpha \ge -1$（这等价于 $\alpha \le \frac{1}{2}$ 和 $\lambda \ge \alpha - 1$），则级数和积分 (14) 发散。关于 $\operatorname{corr}(X_t, (X_{t+1} - X_t)) \sim c\, t^{-1}(\log t)^{-1/2}$ 的情形，或许需要进一步说明。由于

$$\int t^{-1}(\log t)^{-1/2}\, dt = 2\sqrt{\log t} + C, \qquad \int_2^{\infty} t^{-1}(\log t)^{-1/2}\, dt = \infty,$$

积分和级数 (14) 如所述均发散。 □

注 3.6。回顾一下，赫斯特指数为 $H \in (0, 1)$ 的分数布朗运动 B^H 是一种具有平稳增量的自相似零均值高斯过程。它可以按如下方式归一化，使单位长度增量的方差等于 1：

$$\mathsf{E}(B_1^H)^2 = \mathsf{E}(B_{t+1}^H - B_t^H)^2 = 1,$$

这意味着

$$\operatorname{cov}(B_1^H,\, B_{t+1}^H - B_t^H) = \operatorname{corr}(B_1^H,\, B_{t+1}^H - B_t^H) \quad \text{for all } t.$$

若 $H = 0$ 或 $H = \frac{1}{2}$，则在互不接触且不重叠的区间上，B^H 的增量相互独立[1]。若 $H \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$，过程 B^H 是一个具有负相关增量且具有短记忆的过程；若 $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$，则它是一个具有正相关增量且具有长记忆的过程。关于表示式 (2) 中的指数，$\beta + \gamma = 2H - 2 > -1$，$\alpha = \frac{1}{2} - H \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$（因此$\alpha \le \frac{1}{2}$形式上成立），且 $\gamma = H - \frac{3}{2} > -1 > \alpha - 1$。这些结论与定理 3.3 和 3.5 一致。

注 3.7。可以提出以下问题：当 t_0 趋于无穷大时，增量 $X_{t_0+t} - X_{t_0}$ 是否趋近于 fBm $B^H(t)$？结果表明，这取决于参数 α、β 和 γ 的取值。当且仅当满足以下条件之一时，增量方差 $\operatorname{var}(X_{t_0+t} - X_{t_0})$ 存在非零有限极限：

(a) $\alpha + \beta = 0$ and $\gamma < -1/2$, or
(b) $\alpha + \beta + \gamma = -1/2$ and $\gamma > -1/2$.

在情形 (a) 中，过程 $\{X_{t_0+t} - X_{t_0},\, t \in [0,T]\}$ 趋近于分数布朗运动 cB^H，其赫斯特指数为 $H = \gamma + \frac{3}{2}$，且 $c = (\mathrm{B}(\gamma+1, -2\gamma-1)/((\gamma+1)(2\gamma+1)))^{1/2}$：

$$\operatorname{var}(X_{t_0+t} - X_{t_0}) \to c^2\, |t|^{2H} \quad \text{as} \quad t_0 \to +\infty,$$

$$\operatorname{cov}(X_{t_0+t} - X_{t_0},\, X_{t_0+h+t} - X_{t_0}) \to \frac{c^2(|t|^{2H} + |t+h|^{2H} - |h|^{2H})}{2}$$

当 $t_0 \to +\infty$ 时。

[1]对于 $H = 0$，过程 B^H 定义于 [4]。

在情形 (b) 中，该过程

$$X_t = \int_0^t s^\alpha \int_s^t u^\beta (u-s)^\gamma du\, dW_s = \int_0^t u^\beta \int_0^u s^\alpha (u-s)^\gamma dW_s\, du$$

几乎处处可微，且

$$\dot{X}_t = t^\beta \int_0^t z^\alpha (t-z)^\gamma dW_z.$$

设 $s > t$。则

$$\mathsf{E}\,\dot{X}_s \dot{X}_t = s^\beta t^\beta \int_0^t z^{2\alpha}(t-z)^\gamma (s-z)^\gamma dz,$$

因此，对于 $y > x$

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\,(X_y - X_x)^2 &= \int_x^y \int_x^y \mathsf{E}\,\dot{X}_u \dot{X}_v\, du\, dv = 2\int_x^y \int_x^v \mathsf{E}\,\dot{X}_u \dot{X}_v\, du\, dv \\ &= 2\int_x^y \int_x^v u^\beta v^\beta \int_0^u z^{2\alpha}(u-z)^\gamma (v-z)^\gamma dz\, du\, dv.\end{aligned}$$

现在，假设对于某个固定的 $h > 0$，有 $x \to \infty$ 和 $y = x + h$（$h < 0$ 的情形可以类似地讨论）。那么

(15)

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\,(X_{x+h} - X_x)^2 &= 2\int_x^{x+h} \int_x^v u^\beta v^\beta \int_0^u z^{2\alpha}(u-z)^\gamma (v-z)^\gamma dz\, du\, dv \\ &= 2\int_x^{x+h} \int_x^v u^\beta v^\beta u^{2\alpha+2\gamma+1} \int_0^1 t^{2\alpha} \left(\tfrac{v}{u} - t\right)^\gamma (1-t)^\gamma dt\, du\, dv \\ &= 2x^2 \int_1^{1+h/x} \int_1^r p^{2\alpha+2\gamma+\beta+1} r^\beta \int_0^1 t^{2\alpha} \left(\tfrac{r}{p} - t\right)^\gamma (1-t)^\gamma dt\, dp\, dr.\end{aligned}$$

设 $x \to \infty$。那么 $\frac{r}{p} \downarrow 1$,

$$\int_0^1 t^{2\alpha} \left(\tfrac{r}{p} - t\right)^\gamma (1-t)^\gamma dt \to B(2\alpha+1, 2\gamma+1).$$

因此，式（15）中的最后一个积分具有如下渐近行为

$$\begin{aligned}&B(2\alpha+1,2\gamma+1)\cdot 2x^2 \int_1^{1+h/x} \int_1^r p^{-\beta} r^\beta\, dp\, dr \\ &\quad = B(2\alpha+1,2\gamma+1)\frac{2x^2}{1-\beta} \int_1^{1+h/x} \left(r^{1-\beta} - 1\right) r^\beta\, dr \\ &\quad = B(2\alpha+1,2\gamma+1)\frac{2x^2}{1-\beta} \int_1^{1+h/x} \left(r - r^\beta\right) dr \\ &\quad = B(2\alpha+1,2\gamma+1)\frac{2x^2}{1-\beta} \left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{h}{x}\right)^2 - \frac{1}{2} - \frac{(1+\frac{h}{x})^{\beta+1} - 1}{1+\beta}\right) \\ &\quad = B(2\alpha+1,2\gamma+1)\frac{2x^2}{1-\beta} \left(\frac{1}{2}\frac{h^2}{x^2} - \frac{\beta}{2}\frac{h^2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &\quad \to B(2\alpha+1,2\gamma+1)h^2, \quad x \to \infty.\end{aligned}$$

因此，极限过程可以（相差一个常数）作为具有 $H = 1$ 的分数布朗运动来处理，即作为具有 $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$ 的 $B_t^1 = t\xi$。

4. Drift parameter estimation in the Ornstein–Uhlenbeck process driven by Gaussian Volterra process

设不等式 (4) 成立，并设过程 X 定义于 (2) 中。本节将通过观测过程 $Z = \{Z_t, t \geq 0\}$ 来估计未知参数 $\theta > 0$ ，该过程是以下朗之万型随机微分方程的解

$$Z_t = \theta \int_0^t Z_s \, ds + X_t. \tag{16}$$

接下来，我们将用到过程 X 的以下两个性质。首先，回顾一下，根据 [10, 定理 6],

(H1) 过程 X 具有一个连续修正，其 H¨阶 Hölder 连续性可达到 $\lambda = \min\left(\alpha + \beta + \gamma + \frac{3}{2}, \gamma + \frac{3}{2}, 1\right)$。

接下来，我们将考虑这一修正。其次，根据 [10,命题 1],，过程 X 是自相似的，其指数为 $\alpha + \beta + \gamma + \frac{3}{2}$，因此，

(H2) for every $t \geq 0$, $\mathsf{E}\, X_t^2 = Ct^{2\alpha+2\beta+2\gamma+3}$, where $C = \mathsf{E}\, X_1^2 < \infty$.

可以验证，方程 (16) 的解可表示为

$$Z_t = e^{\theta t} \int_0^t e^{-\theta s} \, dX_s, \quad t \geq 0. \tag{17}$$

由于 X 的 H¨lder 连续性以及函数 $s \mapsto e^{-\theta s}$ 的 Lipschitz 连续性，式（17）中关于 X 的积分作为逐路径 Riemann–Stieltjes 积分存在。

更准确地说，我们的目标是根据区间 $[0, T]$ 上的连续时间观测来估计未知漂移参数 $\theta > 0$。考虑估计量

$$\hat{\theta}_T = \frac{Z_T^2}{2\int_0^T Z_s^2 \, ds}. \tag{18}$$

注 4.1。如上所述，过程 X 的轨迹以及由此得到的 Z 的轨迹几乎必然具有最高阶数为 λ 的 H¨older 连续性。因此，若 $\lambda > \frac{1}{2}$，则逐路径积分 $\int_0^T Z_s \, dZ_s$ 可作为杨积分良好定义，且等于 $Z_T^2/2$；由此，ˆ θ_T 可写为 ˆ$\theta_T = \frac{\int_0^T Z_s \, dZ_s}{\int_0^T Z_s^2 \, ds}$。因此，ˆ θ_T 与最小二乘估计量一致，该估计量（形式上）使积分 $\theta \mapsto \int_0^T \left|\dot{Z}_s - \theta Z_s\right|^2 ds$ 最小（详情参见 [5] ）。不过，以下我们将采用式（18）的形式来考虑估计量 ˆθ_T，因为该形式对 $\lambda \in$ 的所有取值都有良好定义（$0, 1$]。

ˆ 定理4.2。设 $\theta > 0$。那么估计量 θ_T 强相合，即

$$\hat{\theta}_T \to \theta \quad a.s., \ as \ T \to \infty.$$

证明。注意， Z 是由满足 $X_0 = 0$ 的中心高斯过程 X 驱动的奥恩斯坦–乌伦贝克过程。此类模型的漂移参数估计曾在 [5] 中得到研究。特别地， θ_T 的强相合性可由 [5, 的定理 2.1], 立即推出，其假设因性质 (H1) 和 (H2) 而成立。注意， [5, 的定理 2.1] 的证明隐含地假设，当 $T \to \infty$ 时， $e^{-\theta T} X_T \to 0$ 几乎处处成立（从 (2.8) 和 (2.10) 推导出 [5] 中的收敛式 (2.11) 需要这一条件）。在我们的情形下，由定理 2.3 可知该假设同样成立。□

我们的下一个目标是证明 θ_T 具有柯西型渐近分布。记

$$\eta_t \coloneqq \int_0^t e^{-\theta s} X_s \, ds, \quad t \geq 0.$$

那么，随机变量 $\eta_\infty \coloneqq \int_0^\infty e^{-\theta s} X_s \, ds$ 定义良好，而且，$\eta_t \to \eta_\infty$ 当 $t \to \infty$ 时几乎必然成立，并且在 $L_2(\Omega)$ 中成立。

令 $\xrightarrow{d}$ 表示分布弱收敛，并令 $\mathcal{C}(1)$ 为标准柯西分布，其概率密度函数为 $\pi^{-1}(1+x^2)$，$x \in \mathbb{R}$。下一个定理是本节的主要结果。

定理 4.3. 设 α、β 和 γ 满足条件 (4)，并设 $\theta > 0$。

(1) If $\gamma \in (-1, -\frac{1}{2})$, *then*

$$\frac{e^{\theta T}}{T^{\alpha+\beta}} \left(\hat{\theta}_T - \theta \right) \xrightarrow{d} \frac{2\sigma}{\theta^{\gamma+3/2} \sqrt{\mathsf{E}\, \eta_\infty^2}} \mathcal{C}(1), \quad \text{as } T \to \infty,$$

where $\sigma = \sigma(\gamma) = \sqrt{\frac{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(-2\gamma-1)\Gamma(2\gamma+2)}{\Gamma(-\gamma)}}$.

(2) If $\gamma = -\frac{1}{2}$, *then*

$$\frac{e^{\theta T}}{T^{\alpha+\beta}\sqrt{\log T}} \left(\hat{\theta}_T - \theta \right) \xrightarrow{d} \frac{2}{\theta \sqrt{\mathsf{E}\, \eta_\infty^2}} \mathcal{C}(1), \quad \text{as } T \to \infty.$$

(3) If $\gamma > -\frac{1}{2}$, *then*

$$\frac{e^{\theta T}}{T^{\alpha+\beta+\gamma+1/2}} \left(\hat{\theta}_T - \theta \right) \xrightarrow{d} \frac{2\varsigma}{\theta \sqrt{\mathsf{E}\, \eta_\infty^2}} \mathcal{C}(1), \quad \text{as } T \to \infty,$$

where $\varsigma = \varsigma(\alpha, \gamma) = \sqrt{\frac{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(2\gamma+1)}{\Gamma(2\alpha+2\gamma+2)}}$.

ˆ 注 4.4. 当 X 为分数布朗运动时，θ_T 的渐近分布最早由 [3]给出。在此情形下，$\alpha = \frac{1}{2} - H$、$\beta = H - \frac{1}{2}$、$\gamma = H - \frac{3}{2}$ 对于 $H \in (\frac{1}{2}, 1)$，因此对应于定理 4.3 的第一种表述。

定理 4.3 的证明沿用 [5] 中的思路。我们将证明分为几个引理。首先，注意到，与 [5, Thm. 2.2], 的证明类似，我们有 $e^{\theta T}\left(\hat{\theta}_T - \theta \right)$ 的如下表示。

引理 4.5（[5]）。对于任意 $T > 0$,

$$e^{\theta T}\left(\hat{\theta}_T - \theta \right) = a_T b_T + c_T, \tag{19}$$

其中

$$a_T = \frac{e^{-\theta T} \int_0^T e^{\theta s} \, dX_s}{\eta_\infty}, \qquad b_T = \frac{\theta \eta_T \eta_\infty}{e^{-2\theta T} \int_0^T Z_s^2 \, ds}, \qquad c_T = \frac{e^{-\theta T} R_T}{e^{-2\theta T} \int_0^T Z_s^2 \, ds},$$

$R_T = \frac{1}{2} X_T^2 - \theta \int_0^T X_s^2 \, ds + \theta^2 \int_0^T \int_0^s X_s X_r e^{-\theta(s-r)} \, dr \, ds$。此外，当 $T \to \infty$ 时，以下收敛关系成立

$$b_T \to 2 \ \ a.s., \qquad c_T \to 0 \ \ \textit{in probability.} \tag{20}$$

事实上，对 [5, 定理 2.2]证明的分析表明，条件 (H1) 和 (H2) 足以保证表示式 (19) 成立，也足以保证收敛关系 (20) 成立。因此，接下来需要研究 a_T 的渐近行为。本节余下部分将致力于这一问题。我们的首要目标是研究这些期望的渐近行为

$$\mathsf{E}\left(e^{-\theta T}\int_0^T e^{\theta s}dX_s\right)^2 \quad \text{and} \quad \mathsf{E}\left(X_s e^{-\theta T}\int_0^T e^{\theta r}dX_r\right),\ s\geq 0. \tag{21}$$

注4.6. 一般而言，期望 (21) 不满足论文 [5] 中的条件 ($\mathcal{H}3$) 和 ($\mathcal{H}4$)。特别是，第一个期望不会收敛到正定常数（见下文引理 4.7）。因此，不能直接应用 [5] 的结果（特别是引理 2.4）来确定 a_T 的渐近行为。

下面的引理描述了 (21) 中第一个期望的渐近行为。该结果可视为 [5] 中假设 ($\mathcal{H}3$) 的一种对应形式。

引理 4.7. 设 α、β 和 γ 满足条件 (4)，且设 $\theta>0$。

(1) If $\gamma\in(-1,-\frac{1}{2})$, then

$$\mathsf{E}\left(e^{-\theta T}\int_0^T e^{\theta s}dX_s\right)^2 \sim \frac{\sigma^2}{\theta^{2\gamma+3}}T^{2\alpha+2\beta},\quad as\ T\to\infty.$$

(2) If $\gamma=-\frac{1}{2}$, then

$$\mathsf{E}\left(e^{-\theta T}\int_0^T e^{\theta s}dX_s\right)^2 \sim \frac{1}{\theta^2}T^{2\alpha+2\beta}\log T,\quad as\ T\to\infty.$$

(3) If $\gamma>-\frac{1}{2}$, then

$$\mathsf{E}\left(e^{-\theta T}\int_0^T e^{\theta s}dX_s\right)^2 \sim \frac{\varsigma^2}{\theta^2}T^{2\alpha+2\beta+2\gamma+1},\quad as\ T\to\infty.$$

证明。利用 [11] 中关于 X 的积分的公式 (14)，可写为

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\left(e^{-\theta T}\int_0^T e^{\theta s}dX_s\right)^2 &= e^{-2\theta T}\,\mathsf{E}\left(\int_0^T s^\alpha\int_s^T e^{\theta t}t^\beta(t-s)^\gamma\,dt\,dW_s\right)^2\\ &= e^{-2\theta T}\int_0^T s^{2\alpha}\left(\int_s^T e^{\theta t}t^\beta(t-s)^\gamma\,dt\right)^2 ds.\end{aligned}$$

1. 设 $\gamma\in(-1,-\frac{1}{2})$。由此应用洛必达法则可得

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty}T^{-2\alpha-2\beta}\,\mathsf{E}\left(e^{-\theta T}\int_0^T e^{\theta s}dX_s\right)^2 &= \lim_{T\to\infty}\frac{\int_0^T s^{2\alpha}\left(\int_s^T e^{\theta t}t^\beta(t-s)^\gamma\,dt\right)^2 ds}{T^{2\alpha+2\beta}e^{2\theta T}}\\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{\int_0^T s^{2\alpha}\cdot 2\left(\int_s^T e^{\theta t}t^\beta(t-s)^\gamma\,dt\right)e^{\theta T}T^\beta(T-s)^\gamma ds}{2\theta T^{2\alpha+2\beta}e^{2\theta T}+(2\alpha+2\beta)T^{2\alpha+2\beta-1}e^{2\theta T}}\\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{\int_0^T s^{2\alpha}\left(\int_s^T e^{\theta t}t^\beta(t-s)^\gamma\,dt\right)(T-s)^\gamma ds}{\theta T^{2\alpha+\beta}e^{\theta T}+(\alpha+\beta)T^{2\alpha+\beta-1}e^{\theta T}}=\frac{\sigma^2}{\theta^{2\gamma+3}},\end{aligned}$$

其中最后一个等式由引理 B.2（附录 B）得出。

2. 设 $\gamma = -\frac{1}{2}$。则由洛必达法则和引理 B.2（附录 B），可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T^{2\alpha+2\beta}\log T}\,\mathsf{E}\left(e^{-\theta T}\int_0^T e^{\theta s}dX_s\right)^2 \\
&\quad= \lim_{T\to\infty} \frac{\int_0^T s^{2\alpha}\left(\int_s^T e^{\theta t}t^{\beta}(t-s)^{-\frac{1}{2}}\,dt\right)^2 ds}{T^{2\alpha+2\beta}(\log T)e^{2\theta T}} \\
&\quad= \lim_{T\to\infty} \frac{\int_0^T s^{2\alpha}\cdot 2\left(\int_s^T e^{\theta t}t^{\beta}(t-s)^{-\frac{1}{2}}\,dt\right)e^{\theta T}T^{\beta}(T-s)^{-\frac{1}{2}}ds}{2\theta T^{2\alpha+2\beta}e^{2\theta T}\log T + (2\alpha+2\beta)T^{2\alpha+2\beta-1}e^{2\theta T}\log T + T^{2\alpha+2\beta-1}e^{2\theta T}} \\
&\quad= \frac{1}{\theta^2}.
\end{aligned}$$

3. 设 $\gamma > -\frac{1}{2}$。仿照上述论证，可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T^{2\alpha+2\beta+2\gamma+1}}\,\mathsf{E}\left(e^{-\theta T}\int_0^T e^{\theta s}dX_s\right)^2 \\
&\quad= \lim_{T\to\infty} \frac{\int_0^T s^{2\alpha}\left(\int_s^T e^{\theta t}t^{\beta}(t-s)^{\gamma}\,dt\right)^2 ds}{T^{2\alpha+2\beta+2\gamma+1}e^{2\theta T}} \\
&\quad= \lim_{T\to\infty} \frac{\int_0^T s^{2\alpha}\cdot 2\left(\int_s^T e^{\theta t}t^{\beta}(t-s)^{\gamma}\,dt\right)e^{\theta T}T^{\beta}(T-s)^{\gamma}ds}{2\theta T^{2\alpha+2\beta+2\gamma+1}e^{2\theta T} + (2\alpha+2\beta+2\gamma+1)T^{2\alpha+2\beta+2\gamma}e^{2\theta T}} = \frac{\varsigma^2}{\theta^2}. \quad \square
\end{aligned}$$

式 (21) 中第二个期望的渐近行为由以下结果给出。

引理 4.8. 设 α、β 和 γ 满足条件 (4)，且设 $\theta > 0$。则对任意 $s \geq 0$

$$\mathsf{E}\left(X_s e^{-\theta T}\int_0^T e^{\theta r}dX_r\right) \sim \frac{B(2\alpha+1,\gamma+1)s^{2\alpha+\beta+\gamma+2}}{\theta(2\alpha+\beta+\gamma+2)}\,T^{\beta+\gamma}, \quad as\ T\to\infty.$$

证明。根据 [11] 中关于 X的积分的公式 (14)，我们有 $0 < s < T$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\left(X_s e^{-\theta T}\int_0^T e^{\theta r}dX_r\right) \\
&\quad= e^{-\theta T}\,\mathsf{E}\left(\int_0^s r^{\alpha}\int_r^s u^{\beta}(u-r)^{\gamma}\,du\,dW_r \cdot \int_0^T r^{\alpha}\int_r^T e^{\theta t}t^{\beta}(t-r)^{\gamma}\,dt\,dW_r\right) \\
&\quad= e^{-\theta T}\int_0^s r^{2\alpha}\int_r^s u^{\beta}(u-r)^{\gamma}\,du\int_r^T e^{\theta t}t^{\beta}(t-r)^{\gamma}\,dt\,dr
\end{aligned}$$

然后利用这一表示以及洛必达法则，我们得到

$$\begin{aligned}
&\lim_{T\to\infty} T^{-\beta-\gamma}\,\mathsf{E}\left(X_s e^{-\theta T}\int_0^T e^{\theta r}dX_r\right) \\
&\qquad= \lim_{T\to\infty} \frac{\int_0^s r^{2\alpha}\int_r^s u^{\beta}(u-r)^{\gamma}\,du\int_r^T e^{\theta t}t^{\beta}(t-r)^{\gamma}\,dt\,dr}{e^{\theta T}T^{\beta+\gamma}}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{\int_0^s r^{2\alpha} \int_r^s u^\beta (u-r)^\gamma \, du \, e^{\theta T} T^\beta (T-r)^\gamma \, dr}{\theta e^{\theta T} T^{\beta+\gamma} + e^{\theta T}(\beta+\gamma) T^{\beta+\gamma-1}}$$
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{\int_0^s r^{2\alpha} (1-\frac{r}{T})^\gamma \int_r^s u^\beta (u-r)^\gamma \, du \, dr}{\theta + (\beta+\gamma) T^{-1}}.$$

最后，对分子应用勒贝格控制收敛定理，我们得到

$$\lim_{T\to\infty} T^{-\beta-\gamma} \mathsf{E}\left(X_s e^{-\theta T} \int_0^T e^{\theta r} dX_r \right) = \frac{1}{\theta} \int_0^s r^{2\alpha} \int_r^s u^\beta (u-r)^\gamma \, du \, dr$$
$$= \frac{1}{\theta} \int_0^s u^\beta \int_0^u r^{2\alpha} (u-r)^\gamma \, dr \, du = \frac{1}{\theta} B(2\alpha+1, \gamma+1) \int_0^s u^{2\alpha+\beta+\gamma+1} \, du$$
$$= \frac{B(2\alpha+1,\gamma+1) s^{2\alpha+\beta+\gamma+2}}{\theta(2\alpha+\beta+\gamma+2)}.$$ □

引理 4.9. 假设条件 (4) 成立。设 F 为任意一个 $\sigma\{X\}$-可测随机变量，且满足 P($F < \infty$) $= 1$。记 N 为与 X 独立的标准正态随机变量。

(1) 若 $\gamma \in (-1, -\frac{1}{2})$，则

$$\left(F, \frac{1}{T^{\alpha+\beta}} e^{-\theta T} \int_0^T e^{\theta s} dX_s \right) \xrightarrow{d} \left(F, \frac{\sigma}{\theta^{\gamma+3/2}} N \right), \quad as\ T \to \infty.$$

(2) 若 $\gamma = -\frac{1}{2}$，则

$$\left(F, \frac{1}{T^{\alpha+\beta}\sqrt{\log T}} e^{-\theta T} \int_0^T e^{\theta s} dX_s \right) \xrightarrow{d} \left(F, \frac{1}{\theta} N \right), \quad as\ T \to \infty.$$

(3) 若 $\gamma > -\frac{1}{2}$，则

$$\left(F, \frac{1}{T^{\alpha+\beta+\gamma+1/2}} e^{-\theta T} \int_0^T e^{\theta s} dX_s \right) \xrightarrow{d} \left(F, \frac{\varsigma}{\theta} N \right), \quad as\ T \to \infty.$$

证明。引理的三个结论均可由引理 4.7 和 4.8 推出。例如，考虑第一个结论。正如在 [5,引理 2.4], 的证明中所述，只需证明：对于任意 $d \geq 1$ 和任意 $s_1, \ldots, s_d \in [0, \infty)$，当 $T \to \infty$ 时，

$$\left(X_{s_1}, \ldots, X_{s_d}, \frac{1}{T^{\alpha+\beta}} e^{-\theta T} \int_0^T e^{\theta s} dX_s \right) \xrightarrow{d} \left(X_{s_1}, \ldots, X_{s_d}, \frac{\sigma}{\theta^{\gamma+3/2}} N \right),$$

此外，由于高斯性，只需验证相应协方差矩阵的收敛性即可。而这一收敛性可由引理 4.7 和 4.8 得出。引理的第二和第三个结论可通过类似论证证明。□

由引理 4.9 可得式 (19) 中定义的项 a_T 的渐近行为。

推论 4.10. 设定理 4.3 的条件成立。

(1) 若 $\gamma \in (-1, -\frac{1}{2})$，则

$$\frac{a_T}{T^{\alpha+\beta}} \xrightarrow{d} \frac{\sigma}{\theta^{\gamma+3/2}} \frac{N}{\eta_\infty} \stackrel{d}{=} \frac{\sigma}{\theta^{\gamma+3/2}\sqrt{\mathsf{E}\,\eta_\infty^2}}\, \mathcal{C}(1), \quad as\ T \to \infty.$$

(2) 若 $\gamma = -\frac{1}{2}$，则

$$\frac{a_T}{T^{\alpha+\beta}\sqrt{\log T}} \xrightarrow{d} \frac{1}{\theta} \frac{N}{\eta_\infty} \stackrel{d}{=} \frac{1}{\theta\sqrt{\mathsf{E}\,\eta_\infty^2}}\, \mathcal{C}(1), \quad as\ T \to \infty.$$

(3) 若 $\gamma > -\frac{1}{2}$，则

$$\frac{a_T}{T^{\alpha+\beta+\gamma+1/2}} \xrightarrow{d} \frac{\varsigma}{\theta^{\gamma+1/2}} \frac{N}{\eta_\infty} \stackrel{d}{=} \frac{\varsigma}{\theta^{\gamma+1/2}\sqrt{\mathsf{E}\,\eta_\infty^2}}\, \mathcal{C}(1), \quad as\ T \to \infty.$$

定理 4.3 的证明。现在，根据表示式 (19)、收敛关系 (20) 和推论 4.10，利用斯卢茨基定理即可立即得到定理 4.3 的证明。□

注 4.11。定理 4.3 中的极限包含二阶矩 $\mathsf{E}\,\eta_\infty^2$。它可以通过以下公式计算：

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\,\eta_\infty^2 &= \frac{2\Gamma(2\alpha+2\beta+2\gamma+3)}{\theta^{2\alpha+2\beta+2\gamma+5}} \cdot \frac{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(2\alpha+\gamma+2)} \\ &\quad \times \int_0^1 \frac{x^{2\alpha+\beta+\gamma+1}}{(1+x)^{2\alpha+2\beta+2\gamma+3}}\ {}_2F_1(-\gamma, 2\alpha+1; 2\alpha+\gamma+2; x)\, dx,\end{aligned} \tag{22}$$

其中，${}_2F_1$ 表示高斯超几何函数（参见附录 B）。事实上，利用分部积分，我们可以将 η_∞ 表示如下

$$\eta_\infty = -\frac{1}{\theta}\int_0^\infty X_s\, de^{-\theta s} = -\frac{1}{\theta} X_s e^{-\theta s}\Big|_{s=0}^{\infty} + \frac{1}{\theta}\int_0^\infty e^{-\theta s} dX_s = \frac{1}{\theta}\int_0^\infty e^{-\theta s} dX_s.$$

这里的几乎处处收敛 $X_s e^{-\theta s} \to 0$ as $s \to \infty$ 可由界 (5) 得出。根据[11, 公式 (14)], , 关于 X 的积分的二阶矩可写为

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\,\eta_\infty^2 &= \frac{1}{\theta^2}\int_0^\infty s^{2\alpha}\left(\int_s^\infty e^{-\theta t} t^\beta (t-s)^\gamma\, dt\right)^2 ds \\ &= \frac{1}{\theta^2}\int_0^\infty\int_s^\infty\int_s^\infty s^{2\alpha} e^{-\theta t-\theta r} t^\beta (t-s)^\gamma r^\beta (r-s)^\gamma\, dr\, dt\, ds \\ &= \frac{1}{\theta^2}\int_0^\infty\int_0^t\int_s^\infty s^{2\alpha} e^{-\theta t-\theta r} t^\beta (t-s)^\gamma r^\beta (r-s)^\gamma\, dr\, ds\, dt \\ &= \frac{1}{\theta^2}\int_0^\infty\int_0^t\int_s^t s^{2\alpha} e^{-\theta t-\theta r} t^\beta (t-s)^\gamma r^\beta (r-s)^\gamma\, dr\, ds\, dt \\ &\quad + \frac{1}{\theta^2}\int_0^\infty\int_0^t\int_t^\infty s^{2\alpha} e^{-\theta t-\theta r} t^\beta (t-s)^\gamma r^\beta (r-s)^\gamma\, dr\, ds\, dt \\ &= \frac{1}{\theta^2}\int_0^\infty\int_0^t\int_0^r s^{2\alpha} e^{-\theta t-\theta r} t^\beta (t-s)^\gamma r^\beta (r-s)^\gamma\, ds\, dr\, dt \\ &\quad + \frac{1}{\theta^2}\int_0^\infty\int_t^\infty\int_0^t s^{2\alpha} e^{-\theta t-\theta r} t^\beta (t-s)^\gamma r^\beta (r-s)^\gamma\, ds\, dr\, dt \\ &= \frac{2}{\theta^2}\int_0^\infty\int_0^t\int_0^r s^{2\alpha} e^{-\theta t-\theta r} t^\beta (t-s)^\gamma r^\beta (r-s)^\gamma\, ds\, dr\, dt\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\theta^2}\int_0^\infty\int_0^t\int_0^1 z^{2\alpha}e^{-\theta t-\theta r}t^\beta(t-zr)^\gamma r^{2\alpha+\beta+\gamma+1}(1-z)^\gamma\,dz\,dr\,dt$$
$$= \frac{2}{\theta^2}\int_0^\infty\int_0^1\int_0^1 z^{2\alpha}e^{-\theta t(1+x)}t^{2\alpha+2\beta+2\gamma+1}(1-zx)^\gamma x^{2\alpha+\beta+\gamma+1}(1-z)^\gamma dzdxdt$$
$$= \frac{2\Gamma(2\alpha+2\beta+2\gamma+3)}{\theta^{2\alpha+2\beta+2\gamma+5}}\int_0^1\int_0^1 \frac{z^{2\alpha}(1-zx)^\gamma x^{2\alpha+\beta+\gamma+1}(1-z)^\gamma}{(1+x)^{2\alpha+2\beta+2\gamma+3}}\,dz\,dx,$$

由此可得 (22)，这是因为 (23)。

Appendix A. Auxiliary results

在以下定义中，T 是随机过程的指标集；可以是 T =[0, +∞)，也可以是 T = (0, +∞)。

定义 A.1。如果对于每个 $a > 0$ 都存在 $b > 0$，使得过程 $\{X_{at}, t \in \mathrm{T}\}$ 和 $\{bX_t, t \in \mathrm{T}\}$ 具有相同的分布，则随机过程 $\{X_t, t \in \mathrm{T}\}$ 称为自相似过程（定义见 [6]）。

如果对于每个 $a > 0$，过程 $\{X_{at}, t \in \mathrm{T}\}$ 和 $\{a^\rho X_t, t \in \mathrm{T}\}$ 具有相同的分布，则随机过程 $\{X_t, t \in \mathrm{T}\}$ 称为具有自相似指数 ρ 的自相似过程。

命题 A.2（Lamperti [7]）。设 $\{X_t, t > 0\}$ 是一个具有自相似指数 ρ 的自相似零均值高斯过程。则 $\{e^{-\rho t}X_{e^t}, t \in \mathbb{R}\}$ 是一个平稳零均值高斯过程。

定理 A.3（Marcus [8, 定理 1.4]）。设 X 是一个连续平稳高斯过程，且 $\mathrm{E}\,X_t^2 = 1$。那么

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{|X_t|}{(2\log t)^{1/2}} \le 1 \quad \textit{almost surely.}$$

以下结果是 [6]中的定理 1.1.1。

定理 A.4（Embrechts 和 Maejima [6]）。设随机过程 $\{X_t, t \ge 0\}$非平凡、自相似（定义见 [6]），且在点$t = 0$ 处随机连续。那么 $\{X_t, t \ge 0\}$ 是自相似的，且具有唯一的指数 ρ；自相似指数 ρ 非负。

注 A.5。连续性条件对于定理 A.4 至关重要，以下示例对此作了说明。

过程 $\{\dot{X}_t, t \ge 0\}$ 在 [11] 中由公式定义

$$\dot{X}_t = \int_0^t s^\alpha t^\beta(t-s)^\gamma\,dW_s$$

对于 $\alpha > -\frac{1}{2}$、$\beta \in \mathbb{R}$ 和 $\gamma > -\frac{1}{2}$，其为具有指数 $\alpha+\beta+\gamma+\frac{1}{2}$ 的自相似过程。当 $\alpha+\beta+\gamma+\frac{1}{2} > 0$ 时，过程 $\dot{X}$ 在 0 处连续；而当 $\alpha+\beta+\gamma+\frac{1}{2} < 0$ 时，它在 0 处不连续。

具有 $X(t) = t^\rho$ 的非随机过程 $\{X_t, t > 0\}$ 是具有指数 ρ 的自相似过程。若 $\rho \ge 0$，则可以将其连续延拓到点 0。否则，若 $\rho < 0$，则无法进行此类延拓。

还要注意，Embrechts 和 Maejima 对自相似性的 [6] 定义对于处处不连续过程而言过于宽泛。满足 [6, 定义 1.1.1]的过程不一定具有自相似指数。

Appendix B. Gauss hypergeometric function and related integrals

本附录汇集了高斯超几何函数的定义$_2F_1$ 以及证明中所需的一些性质。有关这一主题的更多信息，请参阅著作[1] 。

虽然 $_2F_1(a,b;\ c;\ x)$ 可对复数 a, b, c和 x 定义，但本文仅讨论实参数的情形。此外，我们假设 $c > b > 0$。在此情形下，对于 $x < 1$，我们可通过以下欧拉积分表示 [1, 定理 2.2.1] 定义 $_2F_1(a,b;\ c;\ x)$:

$$_2F_1(a,b;c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a}\,dt. \tag{23}$$

下一个结果描述了超几何函数在 $x \uparrow 1$ 时的行为。

命题 B.1（[1, 定理 2.1.3 和定理 2.2.2]）。

(i) If $c < a + b$, *then* $\lim\limits_{x\uparrow 1} \dfrac{{}_2F_1(a,b;c;x)}{(1-x)^{c-a-b}} = \dfrac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$.

(ii) If $c = a + b$, *then* $\lim\limits_{x\uparrow 1} \dfrac{{}_2F_1(a,b;a+b;x)}{\log(1/(1-x))} = \dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$.

(iii) If $c > a + b$, *then* ${}_2F_1(a,b;c;1) = \dfrac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$.

这一结果使我们能够研究引理 4.7 证明中的二重积分的渐近行为。

引理 B.2. 设 α、 β 和 γ 满足条件 (4)，且设 $\theta > 0$。记

$$h(T) = \int_0^T s^{2\alpha}(T-s)^{\gamma} \int_s^T e^{\theta t} t^{\beta}(t-s)^{\gamma}\,dt\,ds, \quad T > 0.$$

(1) 若 $\gamma \in (-1, -\frac{1}{2})$，则

$$\frac{h(T)}{T^{2\alpha+\beta}e^{\theta T}} \to \frac{\sigma^2}{\theta^{2\gamma+2}}, \quad as\ T \to \infty. \tag{24}$$

(2) 若 $\gamma = -\frac{1}{2}$，则

$$\frac{h(T)}{T^{2\alpha+\beta}e^{\theta T}\log T} \to \frac{1}{\theta}, \quad as\ T \to \infty.$$

(3) 若 $\gamma > -\frac{1}{2}$，则

$$\frac{h(T)}{T^{2\alpha+\beta+2\gamma+1}e^{\theta T}} \to \frac{\varsigma^2}{\theta}, \quad as\ T \to \infty.$$

证明。交换积分次序，然后进行代换 $t = T - x$ 和 $s = (T-x)y$，可将 $h(T)$ 转化为:

$$\begin{aligned} h(T) &= \int_0^T e^{\theta t} t^{\beta} \int_0^t s^{2\alpha}(T-s)^{\gamma}(t-s)^{\gamma}\,ds\,dt \\ &= \int_0^T e^{\theta(T-x)}(T-x)^{\beta} \int_0^{T-x} s^{2\alpha}(T-s)^{\gamma}(T-x-s)^{\gamma}\,ds\,dx \\ &= \int_0^T e^{\theta(T-x)}(T-x)^{2\alpha+\beta+\gamma+1} \int_0^1 y^{2\alpha}(T-(T-x)y)^{\gamma}(1-y)^{\gamma}\,dy\,dx \end{aligned}$$

$$= T^{2\alpha+\beta+2\gamma+1}e^{\theta T} \times \int_0^T e^{-\theta x}\left(1-\frac{x}{T}\right)^{2\alpha+\beta+\gamma+1}\int_0^1 z^{2\alpha}(1-z)^{\gamma}\left(1-\left(1-\frac{x}{T}\right)z\right)^{\gamma} dz\,dx$$

$$=: T^{2\alpha+\beta+2\gamma+1}e^{\theta T}g(T)。 \tag{25}$$

因此，我们需要分三种情形研究 $g(T)$ 的渐近行为。

1. 令 $\gamma\in(-1,-\frac{1}{2})$。记

$$T^{2\gamma+1}g(T) = \int_0^T x^{2\gamma+1}e^{-\theta x}\left(1-\frac{x}{T}\right)^{2\alpha+\beta+\gamma+1} f_1\left(\frac{x}{T}\right)dx, \tag{26}$$

其中

$$\begin{aligned} f_1(y) &\coloneqq y^{-2\gamma-1}\int_0^1 z^{2\alpha}(1-z)^{\gamma}\left(1-\left(1-\frac{x}{T}\right)z\right)^{\gamma} dz \\ &= \frac{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(2\alpha+\gamma+2)} y^{-2\gamma-1}\ {}_2F_1\left(-\gamma, 2\alpha+1; 2\alpha+\gamma+2; 1-y\right). \end{aligned}$$

这里使用了超几何函数的积分表示式（23）。此外，命题 B.1(i)意味着

$$f_1(y)\to \frac{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(-2\gamma-1)}{\Gamma(-\gamma)}, \quad \text{as } y\downarrow 0. \tag{27}$$

如果我们通过上述收敛性在 $y=0$ 处定义 $f_1(y)$，就会在 $[0,1]$上得到连续函数。因此，f_1 在 $[0,1]$, 上有界，即

$$f_1^* \coloneqq \sup_{y\in[0,1]} f_1(y) < \infty. \tag{28}$$

为了在（26）中取极限，我们将积分分成两部分，如下所示： $\int_0^T = \int_0^{T/2} + \int_{T/2}^T$。对于第一部分，我们可以应用勒贝格控制收敛定理。事实上，若 $x\in[0,T/2]$，则

$$\left(1-\frac{x}{T}\right)^{2\alpha+\beta+\gamma+1} \le \max\left(1, 2^{-2\alpha-\beta-\gamma-1}\right) =: c,$$

因此

$$x^{2\gamma+1}e^{-\theta x}\left(1-\frac{x}{T}\right)^{2\alpha+\beta+\gamma+1} f_1\left(\frac{x}{T}\right)\mathbf{1}_{x\in[0,\frac{T}{2}]} \le c f_1^* x^{2\gamma+1}e^{-\theta x}.$$

这里，右端在 $(0,\infty)$ 上可积:

$$\int_0^\infty x^{2\gamma+1}e^{-\theta x} = \frac{1}{\theta^{2\gamma+2}}\int_0^\infty e^{-y}y^{2\gamma+1}\,dy = \frac{\Gamma(2\gamma+2)}{\theta^{2\gamma+2}} < \infty. \tag{29}$$

因此，令 $T\to\infty$ ，并考虑到（27）和（29），可得

$$\begin{aligned} &\int_0^{T/2} x^{2\gamma+1}e^{-\theta x}\left(1-\frac{x}{T}\right)^{2\alpha+\beta+\gamma+1} f_1\left(\frac{x}{T}\right)dx \\ &\qquad \to f_1(0)\int_0^\infty x^{2\gamma+1}e^{-\theta x}\,dx = \frac{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(-2\gamma-1)\Gamma(2\gamma+2)}{\Gamma(-\gamma)\theta^{2\gamma+2}}. \end{aligned} \tag{30}$$

对于 $x\in[T/2,T]$，我们结合 (28) 使用界 $e^{-\theta x}\le e^{-\theta T/2}$，得到

$$\int_{T/2}^T x^{2\gamma+1}e^{-\theta x}\left(1-\frac{x}{T}\right)^{2\alpha+\beta+\gamma+1} f_1\left(\frac{x}{T}\right)dx$$

$$\leq f_1^* e^{-\frac{\theta T}{2}} \int_{T/2}^{T} x^{2\gamma+1} \left(1-\frac{x}{T}\right)^{2\alpha+\beta+\gamma+1} dx$$

$$= f_1^* e^{-\frac{\theta T}{2}} T^{2\gamma+2} \int_{1/2}^{1} y^{2\gamma+1} (1-y)^{2\alpha+\beta+\gamma+1} dy$$

$$\leq f_1^* B(2\gamma+2, 2\alpha+\beta+\gamma+2) e^{-\frac{\theta T}{2}} T^{2\gamma+2} \to 0, \quad \text{as } T\to\infty, \tag{31}$$

其中 $B(a,b) = \int_0^1 y^{a-1}(1-y)^{b-1}dy$ 是贝塔函数。结合 (26) 与 (30)–(31)，可得

$$T^{2\gamma+1} g(T) \to \frac{\sigma^2}{\theta^{2\gamma+2}}, \quad \text{as } T\to\infty.$$

考虑表示式 (25)，即可得到所需的收敛结果 (24)。

$\gamma = -\frac{1}{2}$ 和 $\gamma > -\frac{1}{2}$ 的情形类似，因此我们省略部分细节。

2. 特别地，对于 $\gamma = -\frac{1}{2}$，我们有

$$\frac{g(T)}{\log T} = \int_0^T e^{-\theta x} \left(1-\frac{x}{T}\right)^{2\alpha+\beta+\frac{1}{2}} \frac{\log\frac{T}{x}}{\log T} f_2\left(\frac{x}{T}\right) dx, \tag{32}$$

其中

$$f_2(y) = \frac{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(2\alpha+\frac{3}{2})} \cdot \frac{{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 2\alpha+1; 2\alpha+\frac{3}{2}; 1-y\right)}{\log(1/y)}.$$

为了说明 (32) 中取极限的过程合理，对数项 $\frac{\log(T/x)}{\log T}$ 可以作如下界定：对所有 $x>0$，当 T 充分大时

$$\frac{\log\frac{T}{x}}{\log T} = \frac{\log T - \log x}{\log T} = 1 - \frac{\log x}{\log T} \leq 1 + \frac{C_\delta x^{-\delta}}{\log T} \leq 1 + C_\delta x^{-\delta},$$

其中 $\delta \in (0,1)$ 可以任意选取，C_δ 是一个正定常数。然后，按照上述方法推理，并考虑到收敛性 $f_2(\frac{x}{T}) \to 1$（根据命题 B.1 (ii)），我们得到

$$\frac{g(T)}{\log T} \to \int_0^\infty e^{-\theta x}\, dx = \frac{1}{\theta}, \quad \text{as } T\to\infty.$$

3. 最后，对于 $\gamma > -\frac{1}{2}$，我们有

$$g(T) = \int_0^T e^{-\theta x} \left(1-\frac{x}{T}\right)^{2\alpha+\beta+\gamma+1} f_3\left(\frac{x}{T}\right) dx,$$

其中

$$f_3(y) := \frac{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(2\alpha+\gamma+2)}\, {}_2F_1\left(-\gamma, 2\alpha+1; 2\alpha+\gamma+2; 1-y\right)$$

$$\to \frac{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(2\gamma+1)}{\Gamma(2\alpha+\gamma+2)} \quad \text{as } y\downarrow 0,$$

根据命题 B.1(iii)。令 $T\to\infty$，可得

$$g(T) \to \frac{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(2\gamma+1)}{\Gamma(2\alpha+2\gamma+2)} \int_0^\infty e^{-\theta x}\, dx = \frac{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(2\gamma+1)}{\Gamma(2\alpha+2\gamma+2)\theta},$$

其中，极限过程的合理性可用与引理的第一条结论证明类似的方法加以说明。

□

References

1. G. E. Andrews、R. Askey 和 R. Roy, *Special functions*, 《数学及其应用百科全书》第71卷，剑桥大学出版社，剑桥，1999年。2. A. Ayache 和 J. Levy Vehel, *The generalized multifractional Brownian motion*, 《统计推断与随机过程》3（2000），第1–2期，7–18。3. R. Belfadli、K. Es-Sebaiy 和 Y. Ouknine, *Parameter estimation for fractional Ornstein–Uhlenbeck processes: non-ergodic case*, 《科学与工程前沿》1（2011），1–16。4. K. Borovkov、Y. Mishura、A. Novikov 和 M. Zhitlukhin, *Bounds for expected maxima of Gaussian processes and their discrete approximations* **89** 2017 1, 21 37 , 《随机学》（），第–期。5. M. El Machkouri、K. Es-Sebaiy 和 Y. Ouknine, *Least squares estimator for non-ergodic Ornstein–Uhlenbeck processes driven by Gaussian processes* **45** 2016 , 《韩国统计学会会刊》（），第3期，329–341。6. P. Embrechts 和 M. Maejima, *Selfsimilar processes*, 《普林斯顿应用数学丛书》，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，2002年。7. J. Lamperti, *Semi-stable stochastic processes*, 《美国数学会会刊》104（1962），62–78。8. M. B. Marcus, *Upper bounds for the asymptotic maxima of continuous Gaussian processes*, 《数学统计年刊》43（1972），522–533。9. Y. Mishura、G. Shevchenko 和 S. Shklyar, *Gaussian processes with Volterra kernels*, 《随机过程、统计方法与工程数学》（S. Silvestrov、A. Malyarenko、Y. Ni 和 M. Rancic 编），施普林格，查姆，2022年。10. Y. Mishura 和 S. Shklyar, *Gaussian Volterra processes with power-type kernels. Part I*, 《现代随机理论与应用》9（2022），第3期，313–338。11. , *Gaussian Volterra processes with power-type kernels. Part II*, 《现代随机理论与应用》（2022），22页，DOI 10.15559/22-VMSTA211。12. I. Norros、E. Valkeila 和 J. Virtamo, *An elementary approach to a Girsanov formula and other analytical results on fractional Brownian motions*, 《伯努利》5（1999），第4期，571–587。13. K. V. Ralchenko, *Approximation of multifractional Brownian motion by absolutely continuous processes*, 《概率论与数理统计》(2011)，第82期，115–127。14. T. Sottinen 和 L. Viitasaari, *Stochastic analysis of Gaussian processes via Fredholm repre-sentation*, 《国际随机分析杂志》（2016），文章编号8694365，共15页。15. A. Yazigi, *Representation of self-similar Gaussian processes*, 《统计与概率快报》99（2015），94–100。

Department of Probability Theory, Statistics and Actuarial Mathematics, Taras Shevchenko National University of Kyiv 64/13 01601 Kyiv Ukraine, , *Email address*
Volodymyrs'ka St., , , Yu. Mishura: *Email address* yuliyamishura@knu.ua
kostiantynralchenko@knu.ua , K.Ralchenko: *Email address* , S. Shklyar: shklyar@univ.kiev.ua