arXiv:2302.03372v3 [math.PR] 5 Mar 2024

布朗运动和稳定过程驱动的随机微分方程之间的最优 Wasserstein-1距离

´CHANG-SONG DENG、RENE L. SCHILLING 和 LIHU XU

Abstract. 我们关注以下两个取值于 R^d 的随机微分方程（SDE）：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X_t &= b(X_t)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}L_t, \quad X_0 = x,\\ \mathrm{d}Y_t &= b(Y_t)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}B_t, \quad Y_0 = y,\end{aligned}$$

其中 σ 是可逆的 $d\times d$ 矩阵， L_t 是旋转对称的 α-稳定 Lévy 过程，而 B_t 是 d 维标准布朗运动（注意， B_t 是旋转对称的 α-稳定 Lévy 过程，且 $\alpha = 2$）。我们证明，对于任意 $\alpha_0 \in \in$(1, 2)，Wasserstein-1距离 W_1 对 $\alpha \in [\alpha_0, 2)$ 满足

$$W_1\left(\mathrm{law}(X_t^x), \mathrm{law}(Y_t^y)\right) \le C_1 \mathrm{e}^{-C_2 t}|x-y| + \frac{C}{\alpha_0 - 1}(2-\alpha) d \log(1+d),$$

这尤其意味着，

$$W_1(\mu_\alpha, \mu_2) \le \frac{C}{\alpha_0 - 1}(2-\alpha) d \log(1+d), \tag{0.1}$$

其中 μ_α 和 μ_2 分别是 X_t 和 Y_t 的遍历测度。

对于 d 维 Ornstein–Uhlenbeck系统这一特殊情形，我们证明，对所有 $\alpha \in$ (1, 2)，都有 $W_1(\mu_\alpha, \mu_2) \ge C_d(2-\alpha)$；这表明关于 (0.1) 中 α 的收敛速率是最优的。估计式 (0.1) 中出现的 $d\log(1+d)$ 项对于维数 d 似乎是最优的。

Contents

1. 引言 2 1.1. 主要结果 3 1.2. 预备知识 3 2. 定理 1.1 的证明 6 3. 引理 2.1 的证明 12 3.1. 随机微分方程 (1.2) 的梯度估计 12 3.2. Bismut公式 13 3.3. 随机微分方程 (1.2) 的 Malliavin导数估计 13 3.4. 引理 2.1 的证明 14 4. Ornstein–Uhlenbeck情形的一个下界 18 参考文献 19

1. Introduction

我们研究以下两个取值于 $\mathbf{R}^d$ 的随机微分方程:

$$\mathrm{d}X_t = b(X_t)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}L_t, \quad X_0 = x, \tag{1.1}$$

$$\mathrm{d}Y_t = b(Y_t)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}B_t, \quad Y_0 = y, \tag{1.2}$$

其中， σ 是可逆的 $d \times d$ 矩阵， B_t 是 d维标准布朗运动，而 L_t 是旋转对称的 α-稳定 Lévy 过程，其特征函数为 $\mathsf{E}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi L_t} = \mathrm{e}^{-t|\xi|^\alpha/2}$。在一些适当条件下，我们可以很容易地证明这两个方程都有遍历解。

近年来，由 α-稳定过程驱动的随机微分方程得到了广泛研究。关于梯度估计，请参阅 [4, 16, 28, 15] ；关于结构性质和遍历性，请参阅 [25, 26, 24, 7, 8, 27, 22]; 关于解的存在性与唯一性以及近似格式，请参阅 [2, 5, 14, 13] 。本文旨在研究这两个遍历测度在 Wasserstein 距离下的差异。

根据 L´evy 连续性定理，参见例如 [9], ，我们知道，当 $\alpha \uparrow 2$ 时， α-稳定分布收敛于正态分布。自然且重要的问题是，这种收敛是否也适用于由布朗运动和稳定过程驱动的随机微分方程。作为一项应用，我们可以据此说明，具有二阶矩的重尾金融时间序列可由布朗运动驱动的随机微分方程建模 [11]。关于这一方向已有若干研究结果，参见例如 [17, 18, 19] 及其中的参考文献，但这些结果都只证明了收敛性，并未给出收敛速率。本文得到了最优收敛速率。

全文中，我们作出以下两个假设:

(H1). 存在常数 $\theta_0 > 0$ 和 $K \geq 0$ ，使得

$$\langle x-y, b(x)-b(y)\rangle \leq -\theta_0|x-y|^2 + K \quad \text{for all } \ x, y \in \mathbb{R}^d;$$

(H2). 存在常数 θ_1、 θ_2、 $\theta_3 \geq 0$ ，使得对所有 x、 v_1、 v_2、 $v_3 \in \mathbf{R}^d$,

$$|\nabla_{v_1} b(x)| \leq \theta_1 |v_1|, \tag{1.3}$$

$$|\nabla_{v_2}\nabla_{v_1} b(x)| \leq \theta_2 |v_1||v_2|, \tag{1.4}$$

$$|\nabla_{v_3}\nabla_{v_2}\nabla_{v_1} b(x)| \leq \theta_3 |v_1||v_2||v_3|. \tag{1.5}$$

这里的方向导数将在后文中给出更精确的定义。

众所周知，若（1.3）成立，则（1.1）和（1.2）均具有唯一的非爆炸（强）解。为强调给定 $x \in \mathbf{R}^d$ 的起点$X_0 = x$ ，我们将写作 X_t^x，而不是 X_t；对于给定 $y \in$$\mathbf{R}^d$ 的 Y_t^y ，我们也采用同样的记号。

记号。我们用 C(R^d,R) 和 C^k(R^d,R) 表示连续函数和 k 次连续可微函数的集合；下标“b”和“c”表示这些函数及其所有不超过 k 阶的导数都是有界的，或者具有紧支撑。

用 Lip 表示从 $\mathbf{R}^d$ 到 R 的所有 Lipschitz 函数组成的集合。Lipschitz 常数为 1 的 Lipschitz 函数组成的集合记为

$$\mathrm{Lip}(1) = \left\{h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}\,;\ |h(x)-h(y)| \leq |x-y| \text{ for all } x, y \in \mathbb{R}^d\right\}.$$

两个概率测度 μ 和 ν 之间的 Wasserstein-1距离定义为

$$W_1(\mu,\nu) = \sup_{h\in \mathrm{Lip}(1)} \left\{ \int h(x)\,\mu(\mathrm{d}x) - \int h(x)\,\nu(\mathrm{d}x) \right\} = \sup_{h\in \mathrm{Lip}(1),|h(\cdot)|\le|\cdot|} \left\{ \int h(x)\,\mu(\mathrm{d}x) - \int h(x)\,\nu(\mathrm{d}x) \right\}.$$

对于 $h\in$Lip(1)，$\|\nabla h\|_\infty$ 定义为 $\|\nabla h\|_\infty = \sup_{x,\ y\in\mathbb{R}^d,\ x\neq y} \frac{|h(x) - h(y)|}{|x-y|}$（），即 Lipschitz 常数。

在本文中，C、C_1、C_2 表示正常数，它们可能依赖于θ_0、θ_1、θ_2、θ_3、K、$\|\sigma\|_{\mathrm{op}}$，但始终与 d 和 α无关；这些常数的取值可能逐行变化，恕不另行说明。记 $|x|$ 为 $x\in\mathbb{R}^d$的欧几里得范数。

1.1. 主要结果。由经典的 Lyapunov函数判据 [21] 或 Harris定理 [23, 12] 可知，随机微分方程 (1.1) 和 (1.2) 的解是遍历的。记 μ_α 和 μ_2 分别为 X_t^x和 Y_t^y 的遍历测度。以下定理是本文的主要结果。

定理 1.1. 假设 (H1) 和 (H2) 均成立，并令 $\alpha_0\in$(1, 2) 为任意数。对于任意 $\alpha\in[\alpha_0,2)$，$x,y\in\mathbb{R}^d$和 $t>0$，有

$$W_1\left(\mathrm{law}(X_t^x),\mathrm{law}(Y_t^y)\right) \le C_1\mathrm{e}^{-C_2t}|x-y| + \frac{C}{\alpha_0-1}(2-\alpha)d\log(1+d).$$

特别地，

$$W_1(\mu_\alpha,\mu_2) \le \frac{C}{\alpha_0-1}(2-\alpha)d\log(1+d), \tag{1.6}$$

其中，μ_α 和 μ_2 分别是 X_t^x和 Y_t^y 的遍历测度。

要改进估计 (1.6) 中的因子 $d$log$(1+d)$ 似乎很困难。从引理 2.3 的证明可以看出这一点，因为该引理中所用的项 J_{11} 的估计是精确的；更多细节将在引理 2.3 的陈述之前不久给出。对于一个 d 维 Ornstein–Uhlenbeck 系统这一特殊情形，我们将在第 4 节证明，存在一个仅依赖于 d 的常数 $C_d>0$，使得对于所有 $\alpha\in$(1, 2)，W_1(μ_α,μ_2) $\ge C_d$(2 − α)，由此可见，定理 1.1 (1.6) 中关于 α 的收敛速率是最优的。

我们的方法依赖于Duhamel原理，以及对两个随机微分方程的解的生成元进行比较；可以将其视为 [3]中建立的概率逼近框架的连续版本。我们分析的另一个关键要素是Malliavin演算中的Bismut公式。

1.2. 预备知识。为了证明主要结果，我们利用随机微分方程的解 $(X_t^x)_{t\ge0}$ 和 $(Y_t^y)_{t\ge0}$ 是马尔可夫过程这一事实。由马尔可夫过程 $(X_t^x)_{t\ge0}$ 诱导的算子半群为

$$P_tf(x) = \mathbb{E}f(X_t^x), \quad f\in C_b(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}),\ t>0.$$

无穷小生成元 $\mathscr{A}^P$ 是定义在无穷远处消失的连续函数集 $C_\infty = C_\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ 上的闭算子，

$$\mathrm{Dom}(\mathscr{A}^P) := \left\{ f \in C_\infty \,;\, g(x) = \lim_{t\to 0} \frac{P_t f(x) - f(x)}{t} \text{ exists for all } x \text{ and } g \in C_\infty \right\},$$
$$\mathscr{A}^P f(x) := \lim_{t\to 0} \frac{P_t f(x) - f(x)}{t}.$$

众所周知，$C_c^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \subset \mathrm{Dom}(\mathscr{A}^P)$。

类似地，我们可以考虑与 $(Y_t^y)_{t\geq 0}$ 相对应的半群 $Q_t f(x) = \mathbb{E} f(Y_t^x)$，及其无穷小生成元 $\mathscr{A}^Q$。

在应用中，我们常研究作用于不属于 $C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ 或 $C_\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ 的函数上的半群，因此需要将定义域 $\mathrm{Dom}(\mathscr{A}^P)$ 和 $\mathrm{Dom}(\mathscr{A}^Q)$ 扩展到更大的函数类。

设 $(X_t^x)_{t\geq 0}$ 是方程 (1.1) 的解。由于 b 的利普希茨性质，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|X_t^x| &\leq |x| + \int_0^t (|b(0)| + C\mathbb{E}|X_s^x|)\,\mathrm{d}s + \mathbb{E}|\sigma L_t| \\ &\leq |x| + |b(0)|t + Ct^{1/\alpha} + C\int_0^t \mathbb{E}|X_s^x|\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

结合格朗沃尔不等式，可得

$$\mathbb{E}[|X_t^x|] \leq C_t(1+|x|) \quad \text{and, similarly,} \quad \mathbb{E}[|Y_t^x|] \leq C_t(1+|x|).$$

因此，自然可以考虑作用于具有线性增长函数类上的半群 $(P_t)_{t\geq 0}$ 和 $(Q_t)_{t\geq 0}$：

$$C_{\mathrm{lin}}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) = \left\{ f \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \,;\, \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \frac{|f(x)|}{1+|x|} < \infty \right\}$$

并将 $\mathscr{A}^P$ 扩展定义为

$$\widetilde{\mathrm{Dom}}(\mathscr{A}^P) := \left\{ f \in C_{\mathrm{lin}} \,;\, g(x) = \lim_{t\to 0} \frac{P_t f(x) - f(x)}{t} \text{ exists for all } x \text{ and } g \in C_{\mathrm{lin}} \right\}$$
$$\mathscr{A}^P f(x) := \lim_{t\to 0} \frac{P_t f(x) - f(x)}{t}.$$

[28, (1.7)] 中的论证（这也用于证明（2.2）和（2.3））对于 $f \in C_{\mathrm{lin}}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ 仍然成立，并且在这种情况下表明，$|\nabla^k P_t f(x)| \leq C(1+|x|)t^{-k/\alpha}$，$k = 1, 2$。由于 $C_{\mathrm{lin}}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ 中的所有函数，即从 $\mathbb{R}^d$ 到 $\mathbb{R}$ 的二次可微函数，连同其导数至多呈线性增长，均包含于 $\widetilde{\mathrm{Dom}}(\mathscr{A}^P)$ 中，我们得出 $P_t f \in \widetilde{\mathrm{Dom}}(\mathscr{A}^P)$。类似地，我们可以将 $\mathscr{A}^Q$ 扩展到 $\widetilde{\mathrm{Dom}}(\mathscr{A}^Q)$ 上。由于可以用 $C_c^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ 中的序列在局部一致意义下逼近 $C_{\mathrm{lin}}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ 中的函数，因此显然，柯尔莫哥洛夫方程在逐点意义下仍然成立：

柯尔莫哥洛夫后向方程：对于所有 $f \in C_{\mathrm{lin}}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ 和 $t > 0$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P_t f = \mathscr{A}^P P_t f, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Q_t f = \mathscr{A}^Q Q_t f.$$

柯尔莫哥洛夫前向方程：对于所有 $t>0$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_t f = P_t \mathscr{A}^P f, \quad f \in \widetilde{\mathrm{Dom}}(\mathscr{A}^P),$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q_t f = Q_t \mathscr{A}^Q f, \quad f \in \widetilde{\mathrm{Dom}}(\mathscr{A}^Q).$$

对于 $f \in C^3(\mathbf{R}^d, \mathbf{R})$，以及 $v_1, v_2, v_3, x \in \mathbf{R}^d$，方向导数 $\nabla_{v_1} f(x)$、$\nabla_{v_2}\nabla_{v_1} f(x)$ 和 $\nabla_{v_3}\nabla_{v_2}\nabla_{v_1} f(x)$ 定义为

$$\nabla_{v_1} f(x) := \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(x+\epsilon v_1) - f(x)}{\epsilon},$$
$$\nabla_{v_2}\nabla_{v_1} f(x) := \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\nabla_{v_1} f(x+\epsilon v_2) - \nabla_{v_1} f(x)}{\epsilon},$$

and

$$\nabla_{v_3}\nabla_{v_2}\nabla_{v_1} f(x) := \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\nabla_{v_2}\nabla_{v_1} f(x+\epsilon v_3) - \nabla_{v_2}\nabla_{v_1} f(x)}{\epsilon}.$$

对于 $f \in C^2(\mathbf{R}^d, \mathbf{R})$，记其在 $x \in \mathbf{R}^d$ 处的梯度和海森矩阵分别为 $\nabla f(x)$ 和 $\nabla^2 f(x)$。对于 $v_1, v_2, x \in \mathbf{R}^d$，有

$$\nabla_{v_1} f(x) = \langle \nabla f(x), v_1\rangle, \quad \nabla_{v_2}\nabla_{v_1} f(x) = \langle \nabla^2 f(x), v_1 v_2^\top\rangle_{\mathrm{HS}},$$

其中，上标“$\top$”表示“转置”，而 $\langle A, B\rangle_{\mathrm{HS}} := \sum_{i,\ j=1}^{d} A_{ij}B_{ij}$ 表示矩阵 $A, B \in \mathbf{R}^{d\times d}$ 的希尔伯特–施密特内积。对于任意 $x \in \mathbf{R}^d$，$\nabla^2 f(x) \in \mathbf{R}^{d\times d}$ 和 $\nabla^3 f(x) \in \mathbf{R}^{d\times d\times d}$ 的算子范数为

$$\begin{aligned}\|\nabla^2 f(x)\|_{\mathrm{op}} &:= \sup\left\{|\nabla_{v_2}\nabla_{v_1} f(x)|\,;\, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^d, |v_1| = |v_2| = 1\right\}\\ &= \sup\left\{|\langle \nabla^2 f(x), v_1 v_2^\top\rangle_{\mathrm{HS}}|\,;\, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^d, |v_1| = |v_2| = 1\right\},\end{aligned}$$

and

$$\|\nabla^3 f(x)\|_{\mathrm{op}} := \sup\left\{|\nabla_{v_3}\nabla_{v_2}\nabla_{v_1} f(x)|\,;\, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^d, |v_1| = |v_2| = |v_3| = 1\right\},$$

分别。对于 $f \in C_b^3(\mathbf{R}^d, \mathbf{R})$，我们将使用上确界范数

$$\|\nabla f\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\nabla f(x)|, \qquad \|\nabla^i f\|_{\mathrm{op},\infty} := \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \|\nabla^i f(x)\|_{\mathrm{op}} \quad (i = 2, 3).$$

为简化记号，对于 $v_1, v_2, v_3 \in \mathbf{R}^d$，我们也分别记 $\nabla f(x)v_1 = \nabla_{v_1} f(x)$、$\nabla^2 f(x)v_1 v_2 = \nabla_{v_2}\nabla_{v_1} f(x)$ 和 $\nabla^3 f(x)v_1 v_2 v_3 = \nabla_{v_3}\nabla_{v_2}\nabla_{v_1} f(x)$。

对于（足够光滑的）向量值函数 $f = (f_1, f_2, \cdots, f_d)^\top : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$，方向导数的定义类似：对于 $v_1, v_2, v_3, x \in \mathbf{R}^d$，则

$$\begin{aligned}\nabla f(x)v_1 &= \nabla_{v_1} f(x) = (\nabla_{v_1} f_1(x), \ldots, \nabla_{v_1} f_d(x))^\top,\\ \nabla^2 f(x)v_1 v_2 &= \nabla_{v_2}\nabla_{v_1} f(x) = (\nabla_{v_2}\nabla_{v_1} f_1(x), \ldots, \nabla_{v_2}\nabla_{v_1} f_d(x))^\top,\\ \nabla^3 f(x)v_1 v_2 v_3 &= \nabla_{v_3}\nabla_{v_2}\nabla_{v_1} f(x) = (\nabla_{v_3}\nabla_{v_2}\nabla_{v_1} f_1(x), \ldots, \nabla_{v_3}\nabla_{v_2}\nabla_{v_1} f_d(x))^\top.\end{aligned}$$

对于矩阵 $A \in \mathbf{R}^{d\times d}$，其希尔伯特–施密特范数为 $\|A\|_{\mathrm{HS}} = \sqrt{\langle A,\ A\rangle_{\mathrm{HS}}}$ 其算子范数为 $\|A\|_{\mathrm{op}} = \sup_{v\in\mathbb{R}^d,\ |v|=1} |Av|$。我们有以下关系：

$$\|A\|_{\mathrm{op}} = \sup_{v_1, v_2 \in \mathbb{R}^d, |v_1| = |v_2| = 1} \left|\langle A, v_1 v_2^\top\rangle_{\mathrm{HS}}\right|, \quad \|A\|_{\mathrm{op}} \le \|A\|_{\mathrm{HS}} \le \sqrt{d}\|A\|_{\mathrm{op}}.$$

为便于后续使用，设

$$A(d,\alpha) := \frac{\alpha\Gamma(\frac{d+\alpha}{2})}{2^{2-\alpha}\pi^{d/2}\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}, \quad \omega_{d-1} := \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}. \tag{1.7}$$

2. Proof of Theorem 1.1

证明定理 1.1 需要一些准备工作。首先，以下梯度估计至关重要，其证明推迟到第 3 节。

引理 2.1. 假设 (H2)。则对所有 $h \in \mathrm{Lip}(1)$ 和 $t \in (0,1]$,

$$\|\nabla Q_t h\|_\infty \le C, \tag{2.1}$$

$$\|\nabla^2 Q_t h\|_{\mathrm{op},\infty} \le Ct^{-1/2}, \tag{2.2}$$

$$\|\nabla^3 Q_t h\|_{\mathrm{op},\infty} \le Ct^{-1}. \tag{2.3}$$

引理 2.2. 设 $A(d,\alpha)$ 和 ω_{d-1} 如 (1.7) 中所示。则对所有 $\alpha \in (0,2)$,

$$\frac{A(d,\alpha)\omega_{d-1}}{d(2-\alpha)} \le C \quad and \quad \left|\frac{A(d,\alpha)\omega_{d-1}}{d(2-\alpha)} - 1\right| \le C(2-\alpha)\log(1+d).$$

证明。注意到

$$\frac{A(d,\alpha)\omega_{d-1}}{d(2-\alpha)} = \frac{\alpha\Gamma\left(\frac{d+\alpha}{2}\right)}{d(2-\alpha)2^{1-\alpha}\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} = \frac{\alpha\Gamma\left(\frac{d+\alpha}{2}\right)}{d2^{2-\alpha}\Gamma\left(2-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}.$$

由于对所有 $\alpha \in (0,2)$

$$\Gamma\left(\frac{d+\alpha}{2}\right) \le C\Gamma\left(\frac{d+2}{2}\right) = C\,\frac{d}{2}\,\Gamma\left(\frac{d}{2}\right),$$

我们得到

$$\frac{A(d,\alpha)\omega_{d-1}}{d(2-\alpha)} \le \frac{C\alpha}{2^{3-\alpha}\Gamma\left(2-\frac{\alpha}{2}\right)} \le C,$$

这正是第一个估计。为证明第二个估计，令

$$\rho(x) := x\Gamma\left(\frac{d+x}{2}\right) - d2^{2-x}\Gamma\left(2-\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}\right), \quad 0 \le x \le 2.$$

很容易看出，$\rho(2) = 0$ 并且

$$\begin{aligned}
\rho'(x) &= \Gamma\left(\frac{d+x}{2}\right) + \frac{x}{2}\Gamma'\left(\frac{d+x}{2}\right) \\
&\quad + d\cdot\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\left\{\log 2\cdot 2^{2-x}\Gamma\left(2-\frac{x}{2}\right) + 2^{1-x}\Gamma'\left(2-\frac{x}{2}\right)\right\} \\
&= \Gamma\left(\frac{d+x}{2}\right) + \frac{x}{2}\,\psi\left(\frac{d+x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d+x}{2}\right) \\
&\quad + d\cdot\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\left\{\log 2\cdot 2^{2-x}\Gamma\left(2-\frac{x}{2}\right) + 2^{1-x}\psi\left(2-\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{x}{2}\right)\right\},
\end{aligned}$$

其中 $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ 是双伽马函数。由于 $\lim_{z\to\infty} \psi(z)/\log z = 1$，参见 [1, 6.3.18，第 259] 页，我们对所有 $x \in [0,2]$ 都有，

$$|\rho'(x)| \le Cd\,\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\log(1+d).$$

由此我们得出，对于所有 $\alpha \in (0,2)$

$$\begin{aligned}\left|\frac{A(d,\alpha)\omega_{d-1}}{d(2-\alpha)} - 1\right| &= \frac{|\rho(\alpha)|}{d2^{2-\alpha}\Gamma\left(2-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \\ &= \frac{|\rho(2)-\rho(\alpha)|}{d2^{2-\alpha}\Gamma\left(2-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \\ &\le \frac{C(2-\alpha)\log(1+d)}{2^{2-\alpha}\Gamma\left(2-\frac{\alpha}{2}\right)} \\ &\le C(2-\alpha)\log(1+d). \qquad \square\end{aligned}$$

下一个引理是证明主要结果的关键步骤。注意，在下面的证明中出现的项 J_{11},有一个尖锐估计，它取决于 $d\log(1+d)$。这似乎表明，定理 1.1 (1.6) 中的界无法改进。

引理 2.3。假设 (H2) 成立，并令 $\alpha_0 \in (1,2)$ 为任意一个固定数。那么，对于任意 $\alpha \in [\alpha_0, 2)$ 和 $s \in (0,1]$,

$$\sup_{h\in \mathrm{Lip}(1)} \left\|(\mathscr{A}^Q - \mathscr{A}^P)Q_s h\right\|_\infty \le \frac{C}{\alpha_0 - 1}\left((3-\alpha)s^{-1/2} - \frac{1}{3-\alpha}\,s^{(1-\alpha)/2}\right) d\log(1+d).$$

证明。令 $f := Q_s h$。由于

$$\mathscr{A}^P f(x) = \langle \nabla f(x), b(x)\rangle + \int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} \left[f(x+\sigma z) - f(x) - \langle \nabla f(x), \sigma z\rangle \mathbb{1}_{\{|z|\le 1\}}\right] \frac{A(d,\alpha)}{|z|^{d+\alpha}}\,\mathrm{d}z,$$

and

$$\mathscr{A}^Q f(x) = \langle \nabla f(x), b(x)\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \nabla^2 f(x), \sigma\sigma^\top\right\rangle_{\mathrm{HS}},$$

因此

$$\begin{aligned}&(\mathscr{A}^P - \mathscr{A}^Q)f(x) \\ &= \left\{\int_{|z|\le 1} \left[f(x+\sigma z) - f(x) - \langle \nabla f(x), \sigma z\rangle\right] \frac{A(d,\alpha)}{|z|^{d+\alpha}}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{2}\left\langle \nabla^2 f(x), \sigma\sigma^\top\right\rangle_{\mathrm{HS}}\right\} \\ &\quad + \int_{|z|>1} \left[f(x+\sigma z) - f(x)\right] \frac{A(d,\alpha)}{|z|^{d+\alpha}}\,\mathrm{d}z \\ &=: \mathsf{J}_1 + \mathsf{J}_2.\end{aligned}$$

利用引理 2.2 中的第一个不等式，很容易验证，对于任意 $\alpha \in [\alpha_0, 2)$，以下估计成立：

$$\frac{A(d,\alpha)\omega_{d-1}}{\alpha - 1} \le \frac{C}{\alpha_0 - 1}(2-\alpha)d.$$

由 (2.1) 可知，若 $h \in \mathrm{Lip}(1)$，则 $f = P_s h \in \mathrm{Lip}$，因此对所有 $\alpha \in [\alpha_0, 2)$,

$$\begin{aligned}
|\mathsf{J}_2| &\le \int_{|z|>1} |f(x+\sigma z) - f(x)| \, \frac{A(d,\alpha)}{|z|^{d+\alpha}} \, \mathrm{d}z \\
&\le C \int_{|z|>1} |z| \frac{A(d,\alpha)}{|z|^{d+\alpha}} \, \mathrm{d}z \\
&= C \frac{A(d,\alpha)\omega_{d-1}}{\alpha - 1} \\
&\le \frac{C}{\alpha_0 - 1}(2-\alpha)d.
\end{aligned}$$

我们将 J_1 写成如下形式:

$$\begin{aligned}
\mathsf{J}_1 &= \int_{|z|\le 1} [f(x+\sigma z) - f(x) - \langle \nabla f(x), \sigma z\rangle] \, \frac{A(d,\alpha)}{|z|^{d+\alpha}} \, \mathrm{d}z - \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x), \sigma\sigma^\top \rangle_{\mathrm{HS}} \\
&= \int_{|z|\le 1} \int_0^1 \langle \nabla^2 f(x + r\sigma z), (\sigma z)(\sigma z)^\top \rangle_{\mathrm{HS}} (1-r) \, \mathrm{d}r \frac{A(d,\alpha)}{|z|^{d+\alpha}} \, \mathrm{d}z - \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x), \sigma\sigma^\top \rangle_{\mathrm{HS}} \\
&= \left\{ \int_{|z|\le 1} \int_0^1 \langle \nabla^2 f(x), (\sigma z)(\sigma z)^\top \rangle_{\mathrm{HS}} (1-r) \, \mathrm{d}r \frac{A(d,\alpha)}{|z|^{d+\alpha}} \, \mathrm{d}z - \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x), \sigma\sigma^\top \rangle_{\mathrm{HS}} \right\} \\
&\quad + \int_{|z|\le 1} \int_0^1 \langle \nabla^2 f(x + r\sigma z) - \nabla^2 f(x), (\sigma z)(\sigma z)^\top \rangle_{\mathrm{HS}} (1-r) \, \mathrm{d}r \, \frac{A(d,\alpha)}{|z|^{d+\alpha}} \, \mathrm{d}z \\
&=: \mathsf{J}_{11} + \mathsf{J}_{12}.
\end{aligned}$$

利用测度 $\varrho(\mathrm{d}z) = |z|^{-d-\alpha}\mathrm{d}z$ 的对称性，显然有 $\int_{|z|\le 1} z_i z_j \, \varrho(\mathrm{d}z) = \delta_{ij} \frac{1}{d} \int_{|z|\le 1} |z|^2 \, \varrho(\mathrm{d}z)$, 因此得到

$$\begin{aligned}
&\int_{|z|\le 1} \int_0^1 \langle \nabla^2 f(x), (\sigma z)(\sigma z)^\top \rangle_{\mathrm{HS}} (1-r) \, \mathrm{d}r \frac{A(d,\alpha)}{|z|^{d+\alpha}} \, \mathrm{d}z \\
&\quad = \frac{1}{2} \int_{|z|\le 1} \langle \nabla^2 f(x), \sigma(zz^\top)\sigma^\top \rangle_{\mathrm{HS}} \frac{A(d,\alpha)}{|z|^{d+\alpha}} \, \mathrm{d}z \\
&\quad = \frac{1}{2} \frac{1}{d} \int_{|z|\le 1} \langle \nabla^2 f(x), |z|^2 \sigma\sigma^\top \rangle_{\mathrm{HS}} \frac{A(d,\alpha)}{|z|^{d+\alpha}} \, \mathrm{d}z \\
&\quad = \frac{1}{2d} \langle \nabla^2 f(x), \sigma\sigma^\top \rangle_{\mathrm{HS}} \int_{|z|\le 1} \frac{A(d,\alpha)}{|z|^{d+\alpha-2}} \, \mathrm{d}z \\
&\quad = \frac{A(d,\alpha)\omega_{d-1}}{2d(2-\alpha)} \langle \nabla^2 f(x), \sigma\sigma^\top \rangle_{\mathrm{HS}}.
\end{aligned}$$

由此以及引理 2.2 中的第二个不等式 $\|\sigma\sigma^\top\|_{\mathrm{HS}} \le \sqrt{d}\|\sigma\sigma^\top\|_{\mathrm{op}} \le \sqrt{d}\|\sigma\|_{\mathrm{op}}^2$ 和 (2.2), 可得

$$\begin{aligned}
|\mathsf{J}_{11}| &= \left| \int_{|z|\le 1} \int_0^1 \langle \nabla^2 f(x), (\sigma z)(\sigma z)^\top \rangle_{\mathrm{HS}} (1-r)\,\mathrm{d}r \frac{A(d,\alpha)}{|z|^{d+\alpha}}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{2}\langle \nabla^2 f(x), \sigma\sigma^\top\rangle_{\mathrm{HS}} \right| \\
&= \left| \frac{1}{2}\left[\frac{A(d,\alpha)\omega_{d-1}}{d(2-\alpha)} - 1 \right] \langle \nabla^2 f(x), \sigma\sigma^\top\rangle_{\mathrm{HS}} \right| \\
&\le C(2-\alpha)\log(1+d)\cdot \|\nabla^2 f(x)\|_{\mathrm{HS}} \|\sigma\sigma^\top\|_{\mathrm{HS}} \\
&\le C(2-\alpha)\log(1+d)\cdot \sqrt{d}\|\nabla^2 f(x)\|_{\mathrm{op}} \sqrt{d}\|\sigma\|_{\mathrm{op}}^2 \\
&\le C(2-\alpha) d\log(1+d)\cdot \|\nabla^2 f\|_{\mathrm{op},\infty} \\
&\le C(2-\alpha) s^{-1/2} d\log(1+d).
\end{aligned}$$

现在我们来估计 J_{12}。由于 $f = P_s h$ 和 $h \in$Lip(1), 由 (2.2) 和 (2.3) 可知, 对于所有 $x \in \mathrm{R}^d$,

$$\begin{aligned}
\left\|\nabla^2 f(x+r\sigma z) - \nabla^2 f(x)\right\|_{\mathrm{op}} &\le C\left\{ \left(\|\nabla^3 f\|_{\mathrm{op},\infty} r|\sigma z|\right) \wedge \|\nabla^2 f\|_{\mathrm{op},\infty} \right\} \\
&\le C\left\{ \left(s^{-1} r|z|\right) \wedge s^{-1/2} \right\}.
\end{aligned}$$

利用引理 2.2 中的第一个不等式, 可得

$$\frac{A(d,\alpha)\omega_{d-1}}{2-\alpha} \le Cd.$$

因此,

$$\begin{aligned}
|\mathsf{J}_{12}| &\le \int_{|z|\le 1}\int_0^1 \left|\langle \nabla^2 f(x+r\sigma z) - \nabla^2 f(x), (\sigma z)(\sigma z)^\top\rangle_{\mathrm{HS}}\right| (1-r)\,\mathrm{d}r\, \frac{A(d,\alpha)}{|z|^{d+\alpha}}\,\mathrm{d}z \\
&\le \int_{|z|\le 1}\int_0^1 \left\|\nabla^2 f(x+r\sigma z) - \nabla^2 f(x)\right\|_{\mathrm{op}} |\sigma z|^2 (1-r)\,\mathrm{d}r\, \frac{A(d,\alpha)}{|z|^{d+\alpha}}\,\mathrm{d}z \\
&\le C\int_{|z|\le 1}\int_0^1 \left\{ \left(s^{-1} r|z|\right) \wedge s^{-1/2} \right\} |z|^2 (1-r)\,\mathrm{d}r\, \frac{A(d,\alpha)}{|z|^{d+\alpha}}\,\mathrm{d}z \\
&\le C\int_{|z|\le 1} \left\{ \left(s^{-1}|z|\right) \wedge s^{-1/2} \right\} |z|^2 \frac{A(d,\alpha)}{|z|^{d+\alpha}}\,\mathrm{d}z \\
&= C\int_{|z|\le s^{1/2}} s^{-1}|z| \frac{A(d,\alpha)}{|z|^{d+\alpha-2}}\,\mathrm{d}z + C\int_{s^{1/2}<|z|\le 1} s^{-1/2} \frac{A(d,\alpha)}{|z|^{d+\alpha-2}}\,\mathrm{d}z \\
&= CA(d,\alpha)\omega_{d-1}\left(s^{-1}\int_0^{s^{1/2}} r^{2-\alpha}\,\mathrm{d}r + s^{-1/2}\int_{s^{1/2}}^1 r^{1-\alpha}\,\mathrm{d}r \right) \\
&= CA(d,\alpha)\omega_{d-1}\left(\frac{s^{(1-\alpha)/2}}{3-\alpha} + \frac{s^{-1/2} - s^{(1-\alpha)/2}}{2-\alpha} \right) \\
&= C\frac{A(d,\alpha)\omega_{d-1}}{2-\alpha}\left(s^{-1/2} - \frac{1}{3-\alpha}\, s^{(1-\alpha)/2} \right) \\
&\le C\left(s^{-1/2} - \frac{1}{3-\alpha}\, s^{(1-\alpha)/2} \right) d.
\end{aligned}$$

综合所有估计，对于所有 $x \in \mathbf{R}^d$ 以及 $s \in (0,1]$,

$$\begin{aligned}
&\left|(\mathscr{A}^Q - \mathscr{A}^P)f(x)\right| \\
&\le |\mathsf{J}_{11}| + |\mathsf{J}_{12}| + |\mathsf{J}_2| \\
&\le \frac{C}{\alpha_0 - 1}(2-\alpha)s^{-1/2}d\log(1+d) + C\left(s^{-1/2} - \frac{1}{3-\alpha}\, s^{(1-\alpha)/2}\right)d \\
&\le \frac{C}{\alpha_0 - 1}(2-\alpha)s^{-1/2}d\log(1+d) + \frac{C}{\alpha_0 - 1}\left(s^{-1/2} - \frac{1}{3-\alpha}\, s^{(1-\alpha)/2}\right)d\log(1+d),
\end{aligned}$$

这就推出了所声称的估计。 □

引理 2.4. 假设 (H2) 成立，并令 $\alpha_0 \in (1,2)$ 为任意一个固定数。对于所有 $t > 0$ 和 $\alpha \in [\alpha_0, 2)$,

$$\sup_{h \in \mathrm{Lip}(1)} \left| \int_0^{t\wedge 1} P_{t-s}(\mathscr{A}^Q - \mathscr{A}^P) Q_s h \,\mathrm{d}s \right| \le \frac{C}{\alpha_0 - 1}(2-\alpha) d \log(1+d).$$

证明。根据引理 2.3，对于所有 $h \in \mathrm{Lip}(1)$ 和 $\alpha \in [\alpha_0, 2)$,

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^{t\wedge 1} P_{t-s}(\mathscr{A}^Q - \mathscr{A}^P) Q_s h \,\mathrm{d}s \right| \\
&\quad \le \int_0^{t\wedge 1} \left| P_{t-s}(\mathscr{A}^Q - \mathscr{A}^P) Q_s h \right| \mathrm{d}s \\
&\quad \le \int_0^1 \left\| (\mathscr{A}^Q - \mathscr{A}^P) Q_s h \right\|_\infty \mathrm{d}s \\
&\quad \le \frac{C}{\alpha_0 - 1}\left((3-\alpha)\int_0^1 s^{-1/2}\,\mathrm{d}s - \frac{1}{3-\alpha}\int_0^1 s^{(1-\alpha)/2}\,\mathrm{d}s \right) d\log(1+d) \\
&\quad = \frac{C}{\alpha_0 - 1}\,\frac{2(\alpha^2 - 7\alpha + 13)(2-\alpha)}{(3-\alpha)^2}\, d\log(1+d) \\
&\quad \le \frac{C}{\alpha_0 - 1}(2-\alpha) d\log(1+d).
\end{aligned}$$

□

经过这些准备，现在我们可以开始证明定理 1.1。定理 1.1 的证明。(1) 注意到

$$W_1\left(\mathrm{law}(X_t^x), \mathrm{law}(Y_t^y)\right) \le W_1\left(\mathrm{law}(X_t^x), \mathrm{law}(Y_t^x)\right) + W_1\left(\mathrm{law}(Y_t^x), \mathrm{law}(Y_t^y)\right).$$

根据 [10, 推论 2], , 对于任意 $t > 0$ 和 x, $y \in \mathbf{R}^d$,

$$W_1\left(\mathrm{law}(Y_t^x), \mathrm{law}(Y_t^y)\right) \le C_1 e^{-C_2 t}|x - y|. \tag{2.4}$$

因此，只需证明对于任意 $t > 0$, $x \in \mathbf{R}^d$ 和 $\alpha \in [\alpha_0, 2)$,

$$W_1\left(\mathrm{law}(X_t^x), \mathrm{law}(Y_t^x)\right) \le \frac{C}{\alpha_0 - 1}(2-\alpha) d\log(1+d). \tag{2.5}$$

回忆

$$W_1\left(\mathrm{law}(X_t^x), \mathrm{law}(Y_t^x)\right) = \sup_{h \in \mathrm{Lip}(1)} |Q_t h(x) - P_t h(x)|$$

并利用这一点

$$Q_t h - P_t h = \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} P_{t-s} Q_s h \,\mathrm{d}s = \int_0^t P_{t-s}(\mathscr{A}^Q - \mathscr{A}^P) Q_s h \,\mathrm{d}s,$$

来得到

$$W_1\left(\mathrm{law}(X_t^x),\mathrm{law}(Y_t^x)\right)=\sup_{h\in\mathrm{Lip}(1)}\left|\int_0^t P_{t-s}(\mathscr{A}^Q-\mathscr{A}^P)Q_sh(x)\,\mathrm{d}s\right|. \tag{2.6}$$

若 $t\in(0,1]$, , 则所需估计式 (2.5) 立即由 (2.6) 和引理 2.4 得出。现在考虑 $t>1$ 的情形。由 (2.6) 可得,

$$\begin{aligned}W_1\left(\mathrm{law}(X_t^x),\mathrm{law}(Y_t^x)\right)\le&\sup_{h\in\mathrm{Lip}(1)}\left|\int_0^1 P_{t-s}(\mathscr{A}^Q-\mathscr{A}^P)Q_sh(x)\,\mathrm{d}s\right|\\&+\sup_{h\in\mathrm{Lip}(1)}\left|\int_1^t P_{t-s}(\mathscr{A}^Q-\mathscr{A}^P)Q_sh(x)\,\mathrm{d}s\right|\\=:&\ \mathsf{I}_1+\mathsf{I}_2.\end{aligned}$$

引理 2.4 表明, 对于所有 $\alpha\in[\alpha_0,2)$,

$$\mathsf{I}_1\le\frac{C}{\alpha_0-1}(2-\alpha)d\log(1+d).$$

由 (2.4), 对于 $h\in\mathrm{Lip}(1)$ 和 $s>1$,

$$|Q_{s-1}h(x)-Q_{s-1}h(y)|\le C_1\mathrm{e}^{-C_2(s-1)}|x-y|,\quad x,y\in\mathbb{R}^d.$$

将其与半群性质以及取 $s=1$ 时的引理 2.3 结合, 可得对于所有 $x\in\mathbf{R}^d$ 和 $\alpha\in[\alpha_0,2)$,

$$\begin{aligned}\mathsf{I}_2&=\sup_{h\in\mathrm{Lip}(1)}\left|\int_1^t P_{t-s}(\mathscr{A}^Q-\mathscr{A}^P)Q_1(Q_{s-1}h)(x)\,\mathrm{d}s\right|\\&\le\sup_{g\in\mathrm{Lip}(1)}\left|\int_1^t C_1\mathrm{e}^{-C_2(s-1)}P_{t-s}(\mathscr{A}^Q-\mathscr{A}^P)Q_1g(x)\,\mathrm{d}s\right|\\&\le\sup_{g\in\mathrm{Lip}(1)}\left\|(\mathscr{A}^Q-\mathscr{A}^P)Q_1g\right\|_\infty\cdot\int_1^t C_1\mathrm{e}^{-C_2(s-1)}\,\mathrm{d}s\\&\le\frac{C}{\alpha_0-1}\,\frac{(4-\alpha)(2-\alpha)}{3-\alpha}\,d\log(1+d)\cdot\int_0^\infty C_1\mathrm{e}^{-C_2s}\,\mathrm{d}s\\&\le\frac{C}{\alpha_0-1}(2-\alpha)d\log(1+d).\end{aligned}$$

Co结合这两个估计可得, 对于 $t>1$, (2.5) 成立。这就证明了第一个断言 .

(2) 根据马尔可夫过程的经典遍历理论, 例如参见 [20], , 可知对于所有 $x\in\mathbf{R}^d$

$$\lim_{t\to\infty}W_1\left(\mathrm{law}(X_t^x),\mu_\alpha\right)=0,$$

详情参见例如 [2, (1.10)] 。运用类似的论证, 不难验证

$$\lim_{t\to\infty}W_1\left(\mathrm{law}(Y_t^y),\mu_2\right)=0,\quad y\in\mathbb{R}^d.$$

由于

$$W_1\left(\mu_\alpha,\mu_2\right)\le W_1\left(\mu_\alpha,\mathrm{law}(X_t^x)\right)+W_1\left(\mathrm{law}(X_t^x),\mathrm{law}(Y_t^y)\right)+W_1\left(\mathrm{law}(Y_t^y),\mu_2\right),$$

第二个断言由第一个断言和 $t\to\infty$ 立即推出。 □

3. Proof of Lemma 2.1

3.1. 随机微分方程 (1.2) 的梯度估计。我们考虑 Y_t^y 关于初始值 $y \in \mathbf{R}^d$ 的导数。对于 $v \in \mathbf{R}^d$，沿方向 v 的方向导数 $\nabla_v Y_t^y$ 定义为

$$\nabla_v Y_t^y = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{Y_t^{y+\epsilon v} - Y_t^y}{\epsilon}, \quad t \geq 0.$$

上述极限存在，并满足形式上求导后的随机微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \nabla_v Y_t^y = \nabla b(Y_t^y) \nabla_v Y_t^y, \quad \nabla_v Y_0^y = v. \tag{3.1}$$

类似地，我们可以定义 $v_i \in \mathbf{R}^d$, $i = 1,2,3$ 的方向导数$\nabla_{v_2} \nabla_{v_1} Y_t^y$和 $\nabla_{v_3} \nabla_{v_2} \nabla_{v_1} Y_t^y$，它们满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \nabla_{v_2} \nabla_{v_1} Y_t^y = \nabla b(Y_t^y) \nabla_{v_2} \nabla_{v_1} Y_t^y + \nabla^2 b(Y_t^y) \nabla_{v_2} Y_t^y \nabla_{v_1} Y_t^y$$

其中 $\nabla_{v_2} \nabla_{v_1} Y_0^y = 0$，且

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \nabla_{v_3} \nabla_{v_2} \nabla_{v_1} Y_t^y &= \nabla b(Y_t^y) \nabla_{v_3} \nabla_{v_2} \nabla_{v_1} Y_t^y + \nabla^3 b(Y_t^y) \nabla_{v_3} Y_t^y \nabla_{v_2} Y_t^y \nabla_{v_1} Y_t^y \\ &\quad + \nabla^2 b(Y_t^y) \left(\nabla_{v_3} Y_t^y \nabla_{v_2} \nabla_{v_1} Y_t^y + \nabla_{v_2} Y_t^y \nabla_{v_3} \nabla_{v_1} Y_t^y + \nabla_{v_1} Y_t^y \nabla_{v_3} \nabla_{v_2} Y_t^y \right), \end{aligned} \tag{3.2}$$

其中 $\nabla_{v_3} \nabla_{v_2} \nabla_{v_1} Y_0^y = 0$。

引理 3.1。假设 (H2)。那么对于所有 $v_i \in \mathbf{R}^d$, $i = 1, 2, 3$, $y \in \mathbf{R}^d$ 和 $t \in [0, 1]$,

$$|\nabla_{v_1} Y_t^y| \leq C|v_1|, \tag{3.3}$$

$$|\nabla_{v_2} \nabla_{v_1} Y_t^y| \leq C|v_1||v_2|, \tag{3.4}$$

$$|\nabla_{v_3} \nabla_{v_2} \nabla_{v_1} Y_t^y| \leq C|v_1||v_2||v_3|. \tag{3.5}$$

证明。(3.3) 和 (3.4) 的估计可按照 [2, 引理 3.1] 中的方法证明。这里我们用类似的方法证明 (3.5)。令 $\zeta(t) := \nabla_{v_3} \nabla_{v_2} \nabla_{v_1} Y_t^y$。由 (3.2)、(1.3)–(1.5) 以及 (3.3)、(3.4)，得到

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\zeta(t)|^2 \\ &= 2 \left\langle \zeta(t), \nabla b(Y_t^y) \zeta(t) \right\rangle + 2 \left\langle \zeta(t), \nabla^3 b(Y_t^y) \nabla_{v_3} Y_t^y \nabla_{v_2} Y_t^y \nabla_{v_1} Y_t^y \right\rangle \\ &\quad + 2 \left\langle \zeta(t), \nabla^2 b(Y_t^y) \left(\nabla_{v_3} Y_t^y \nabla_{v_2} \nabla_{v_1} Y_t^y + \nabla_{v_2} Y_t^y \nabla_{v_3} \nabla_{v_1} Y_t^y + \nabla_{v_1} Y_t^y \nabla_{v_3} \nabla_{v_2} Y_t^y \right) \right\rangle \\ &\leq 2\theta_1 |\zeta(t)|^2 + 2\theta_3 |\zeta(t)| |\nabla_{v_1} Y_t^y| |\nabla_{v_2} Y_t^y| |\nabla_{v_3} Y_t^y| \\ &\quad + 2\theta_2 |\zeta(t)| \left(|\nabla_{v_3} Y_t^y| |\nabla_{v_2} \nabla_{v_1} Y_t^y| + |\nabla_{v_2} Y_t^y| |\nabla_{v_3} \nabla_{v_1} Y_t^y| + |\nabla_{v_1} Y_t^y| |\nabla_{v_3} \nabla_{v_2} Y_t^y| \right) \\ &\leq 2\theta_1 |\zeta(t)|^2 + C|\zeta(t)||v_1||v_2||v_3| \\ &\leq C|\zeta(t)|^2 + C|v_1|^2 |v_2|^2 |v_3|^2. \end{aligned}$$

在最后一行中，我们使用初等不等式 $\pm 2z_1 z_2 \leq z_1^2 + z_2^2$。注意到 $\zeta(0) = 0$，对于 $t > 0$，我们得到

$$|\zeta(t)|^2 \leq C|v_1|^2 |v_2|^2 |v_3|^2 \int_0^t \mathrm{e}^{C(t-r)} \, \mathrm{d}r = \left(\mathrm{e}^{Ct} - 1 \right) |v_1|^2 |v_2|^2 |v_3|^2.$$

这就证明了对所有 $t \in [0, 1]$，(3.5) 成立。 □

3.2. Bismut公式。设 $u \in L^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty) \times (\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P}); \mathrm{R}^d)$，即对所有 $t > 0$，$\mathrm{E}\int_0^t |u(s)|^2 \,\mathrm{d}s < \infty$。令 $(B_t)_{t\geq 0}$ 为 R^d 上的标准布朗运动，并假设 u 关于滤子 $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ 适应，其中 $\mathscr{F}_t := \sigma(B_s : 0 \leq s \leq t)$，并定义$U : [0,\infty) \to \mathrm{R}^d$ 为

$$U_t := \int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \geq 0.$$

对于 $t > 0$，设 $F_t : C([0,t], \mathrm{R}^d) \to \mathrm{R}^m$是一个 $\mathscr{F}_t$可测映射，其中 $m \in \mathbf{N}$。若以下极限存在

$$D_U F_t(B) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{F_t(B + \epsilon U) - F_t(B)}{\epsilon}$$

在 $L^2((\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P}); \mathrm{R}^m)$ 中，则称 $F_t(B)$ 为 Malliavin可微，称 $D_U F_t(B)$ 为 $F_t(B)$ 在方向 U 上的 Malliavin 导数。

设 $F_t(B)$ 和 $G_t(B)$ 均为 Malliavin可微。则有以下乘积法则：

$$D_U\left(F_t(B)G_t(B)\right) = D_U F_t(B) G_t(B) + F_t(B) D_U G_t(B).$$

若 $F_t(B)$ 具有以下结构，

$$F_t(B) = \int_0^t a_s \,\mathrm{d}B_s,$$

其中 $a_s \in \mathrm{R}^d$ 是一个 $\mathscr{F}_s$-适应随机过程，满足对所有 $t > 0$，$\mathrm{E}\int_0^t |a_s|^2 \,\mathrm{d}s < \infty$，则

$$D_U F_t(B) = \int_0^t \langle a_s, u(s)\rangle \,\mathrm{d}s + \int_0^t D_U a_s \,\mathrm{d}B_s. \tag{3.6}$$

注意，a_s 是布朗运动 $(B_r)_{0\leq r\leq s}$的 d 维泛函，此处为简便起见记 $D_U a_s = D_U a_s(B)$。

我们将使用以下分部积分公式，该公式也称为 Bis- mut 公式。对于任意 Malliavin可微的 $F_t(B)$，若满足 $F_t(B)\ D_U F_t(B) \in L^2((\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P}); \mathrm{R})$，则有

$$\mathbb{E}[D_U F_t(B)] = \mathbb{E}\left[F_t(B)\int_0^t u(s)\,\mathrm{d}B_s\right]. \tag{3.7}$$

设 $\varphi \in \mathrm{Lip}(1)$，且 $F_t(B)$ 是一个 d 维的 Malliavin可微泛函。则有以下链式法则：

$$D_U \varphi(F_t(B)) = \langle \nabla\varphi(F_t(B)), D_U F_t(B)\rangle.$$

若 $F_t = (F_t^{(1)}, \ldots, F_{(d)\,t})$: $C([0,t], \mathrm{R}^d) \to \mathrm{R}^{d\times d}$，其中 $F_{(i)\,t} \in \mathrm{R}^d$是 $\mathscr{F}_t$可测的，则可定义 $D_U F_t(B) = (D_U F_{(1)\,t}(B) \ldots, D_U F_{(d)\,t}(B))$。

3.3. 随机微分方程 (1.2) 的 Malliavin导数估计。对于 $t > 0$ 和 $v_1, v_2, v_3, y \in \mathrm{R}^d$，定义 $u_{t,i}$, $U_{t,i} : [0,t] \to \mathrm{R}^d$ 为

$$u_{t,i}(s) := \frac{1}{t}\nabla_{v_i} Y_s^y \quad \text{and} \quad U_{t,i;s} := \int_0^s u_{t,i}(r)\,\mathrm{d}r$$

对于 $i = 1$、2、3 和 $s \in [0,t]$。显然，

$$D_{U_{t,\,i}} Y_s^y = \frac{s}{t}\nabla_{v_i} Y_s^y, \quad 0 \leq s \leq t. \tag{3.8}$$

这与 (3.1) 一起意味着，对于 $s \in [0,t]$

$$D_{U_{t,2}} \nabla_{v_1} Y_s^y = \int_0^s \left[\nabla^2 b\left(Y_r^y\right) D_{U_{t,2}} Y_r^y \nabla_{v_1} Y_r^y + \nabla b\left(Y_r^y\right) D_{U_{t,2}} \nabla_{v_1} Y_r^y \right] \mathrm{d}r. \tag{3.9}$$

我们在引理 3.1 的证明中使用的论证，给出了 Malliavin 导数的以下上界。

引理 3.2. 假设 (H2)。对于所有 $v_i \in \mathbf{R}^d$, $i = 1, 2, 3$, $y \in \mathbf{R}^d$ 和 $t \in [0,1]$,

$$|D_{U_{t,2}} \nabla_{v_1} Y_t^y| \le C|v_1||v_2|, \tag{3.10}$$

$$|D_{U_{t,3}} \nabla_{v_2} \nabla_{v_1} Y_t^y| \le C|v_1||v_2||v_3|, \tag{3.11}$$

$$|D_{U_{t,1}} D_{U_{t,3}} \nabla_{v_2} Y_t^y| \le C|v_1||v_2||v_3|. \tag{3.12}$$

证明。由 (3.9) 和 (3.8) 可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} D_{U_{t,2}} \nabla_{v_1} Y_t^y = \nabla b(Y_t^y) D_{U_{t,2}} \nabla_{v_1} Y_t^y + \nabla^2 b(Y_t^y) \nabla_{v_2} Y_t^y \nabla_{v_1} Y_t^y.$$

重复引理 3.1 证明中的论证，可得对所有$t \in [0,t]$，(3.10) 成立。(3.11) 和 (3.12) 的估计也可用类似的方法证明。□

3.4. 引理 2.1 的证明。我们将经常用到以下磨光子：设 g_δ为 d维正态分布 N(0, $\delta^2 I_d$)的密度函数， $\delta > 0$。对每个 $h \in$Lip(1)，定义

$$h_\delta(x) := \int_{\mathbb{R}^d} g_\delta(y) h(x-y)\, \mathrm{d}y.$$

容易看出， h_δ 是光滑的，且对所有 $x \in \mathbf{R}^d$，$\lim_{\delta \downarrow 0} h_\delta(x) = h(x)$，并且

$$\|\nabla h_\delta\|_\infty \le \|\nabla h\|_\infty \le 1.$$

3.4.1. （2.1）的证明。由控制收敛定理和（3.3）可知，对任意$v \in \mathbf{R}^d$ 和 $t \in [0,1]$

$$|\nabla_v Q_t h_\delta(y)| = |\mathbb{E}[\nabla h_\delta(Y_t^y) \nabla_v Y_t^y]| \le \|\nabla h_\delta\|_\infty \mathbb{E}|\nabla_v Y_t^y| \le C|v|.$$

由控制收敛定理可知

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \nabla_v Q_t h_\delta(y) = \nabla_v Q_t h(y),$$

令 $\delta \downarrow 0$，即可得到所需的估计。

3.4.2. （2.2）的证明。利用控制收敛定理可知，对所有v_1、 v_2、 $y \in \mathbf{R}^d$

$$\nabla_{v_2} \nabla_{v_1} \mathbb{E}\left[h_\delta(Y_t^y)\right] = \mathbb{E}\left[\nabla h_\delta(Y_t^y) \nabla_{v_2} \nabla_{v_1} Y_t^y\right] + \mathbb{E}\left[\nabla^2 h_\delta(Y_t^y) \nabla_{v_2} Y_t^y \nabla_{v_1} Y_t^y\right]. \tag{3.13}$$

现在我们利用 (3.4) 得到 $t \in [0,1]$,

$$|\mathbb{E}\left[\nabla h_\delta(Y_t^y) \nabla_{v_2} \nabla_{v_1} Y_t^y\right]| \le \|\nabla h_\delta\|_\infty \mathbb{E}\left[|\nabla_{v_2} \nabla_{v_1} Y_t^y|\right] \le C|v_1||v_2|. \tag{3.14}$$

由 (3.8) 和 (3.7) 可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\nabla^2 h_\delta(Y_t^y)\nabla_{v_2}Y_t^y\nabla_{v_1}Y_t^y\right]\\
&\quad=\mathbb{E}\left[\nabla^2 h_\delta(Y_t^y)D_{U_{t,2}}Y_t^y\nabla_{v_1}Y_t^y\right]\\
&\quad=\mathbb{E}\left[D_{U_{t,2}}\left(\nabla h_\delta(Y_t^y)\right)\nabla_{v_1}Y_t^y\right]\\
&\quad=\mathbb{E}\left[D_{U_{t,2}}\left(\nabla h_\delta(Y_t^y)\nabla_{v_1}Y_t^y\right)\right]-\mathbb{E}\left[\nabla h_\delta(Y_t^y)D_{U_{t,2}}\nabla_{v_1}Y_t^y\right]\\
&\quad=\frac{1}{t}\,\mathbb{E}\left[\nabla h_\delta(Y_t^y)\nabla_{v_1}Y_t^y\int_0^t\nabla_{v_2}Y_s^y\,\mathrm{d}B_s\right]-\mathbb{E}\left[\nabla h_\delta(Y_t^y)D_{U_{t,2}}\nabla_{v_1}Y_t^y\right].
\end{aligned}$$

将其与（3.3）和（3.10）结合，伊藤等距式表明，对于 $t\in(0,1]$

$$\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}\left[\nabla^2 h_\delta(Y_t^y)\nabla_{v_2}Y_t^y\nabla_{v_1}Y_t^y\right]\right|\\
&\le\frac{1}{t}\,\|\nabla h_\delta\|_\infty\mathbb{E}\left[|\nabla_{v_1}Y_t^y|\left|\int_0^t\nabla_{v_2}Y_s^y\,\mathrm{d}B_s\right|\right]+\|\nabla h_\delta\|_\infty\mathbb{E}\left[\left|D_{U_{t,2}}\nabla_{v_1}Y_t^y\right|\right]\\
&\le\frac{C}{t}\,|v_1|\left[\mathbb{E}\left|\int_0^t\nabla_{v_2}Y_s^y\,\mathrm{d}B_s\right|^2\right]^{1/2}+C|v_1||v_2|\\
&\le\frac{C}{t}\,|v_1||v_2|\sqrt{t}+C|v_1||v_2|\\
&\le C|v_1||v_2|t^{-1/2}.
\end{aligned}$$

将其与（3.14）代入（3.13），可得对于 $t\in(0,1]$），

$$\begin{aligned}
|\nabla_{v_2}\nabla_{v_1}\mathbb{E}[h_\delta(Y_t^y)]|&\le|\mathbb{E}[\nabla h_\delta(Y_t^y)\nabla_{v_2}\nabla_{v_1}Y_t^y]|+\left|\mathbb{E}\left[\nabla^2 h_\delta(Y_t^y)\nabla_{v_2}Y_t^y\nabla_{v_1}Y_t^y\right]\right|\\
&\le C|v_1||v_2|t^{-1/2}.
\end{aligned}$$

现在令 $\delta\downarrow 0$，借助控制收敛定理可得

$$\lim_{\delta\downarrow0}\nabla_{v_2}\nabla_{v_1}\mathbb{E}[h_\delta(Y_t^y)]=\nabla_{v_2}\nabla_{v_1}\mathbb{E}[h(Y_t^y)]=\nabla_{v_2}\nabla_{v_1}Q_t h(y).$$

因此，对于所有 v_1、v_2、$y\in\mathbf{R}^d$ 以及 $t\in(0,1]$,

$$|\nabla_{v_2}\nabla_{v_1}Q_t h(y)|\le C|v_1||v_2|t^{-1/2},$$

这就推出了（2.2）。

3.4.3. （2.3）的证明。利用控制收敛定理可知，对于所有 v_1、v_2、$v_3\in\mathbf{R}^d$,

$$\begin{aligned}
&\nabla_{v_3}\nabla_{v_2}\nabla_{v_1}\mathbb{E}\left[h_\delta(Y_t^y)\right]\\
&\quad=\mathbb{E}\left[\nabla h_\delta(Y_t^y)\nabla_{v_3}\nabla_{v_2}\nabla_{v_1}Y_t^y\right]+\mathbb{E}\left[\nabla^2 h_\delta(Y_t^y)\nabla_{v_3}Y_t^y\nabla_{v_2}\nabla_{v_1}Y_t^y\right]\\
&\qquad+\mathbb{E}\left[\nabla^2 h_\delta(Y_t^y)\nabla_{v_2}Y_t^y\nabla_{v_3}\nabla_{v_1}Y_t^y\right]+\mathbb{E}\left[\nabla^2 h_\delta(Y_t^y)\nabla_{v_1}Y_t^y\nabla_{v_3}\nabla_{v_2}Y_t^y\right]\\
&\qquad+\mathbb{E}\left[\nabla^3 h_\delta(Y_t^y)\nabla_{v_3}Y_t^y\nabla_{v_2}Y_t^y\nabla_{v_1}Y_t^y\right]\\
&\quad=:\mathsf{I}_1+\mathsf{I}_2+\mathsf{I}_3+\mathsf{I}_4+\mathsf{I}_5.
\end{aligned}$$

我们将分别估计各项 I_k, $k=1,\ldots,5$。由 (3.5) 可得，对于 $t\in(0,1]$,

$$|\mathsf{I}_1|\le\|\nabla h_\delta\|_\infty\mathbb{E}\left[|\nabla_{v_3}\nabla_{v_2}\nabla_{v_1}Y_t^y|\right]\le C|v_1||v_2||v_3|.$$

现在我们转向 $\mathsf{I}_{2\circ}$ 由 (3.8)（其中 $s=t$）、链式法则和 (3.7),

$$\begin{aligned}\mathsf{I}_2 &= \mathbb{E}\left[\nabla^2 h_\delta(Y_t^y) D_{U_{t,3}} Y_t^y \nabla_{v_2}\nabla_{v_1} Y_t^y\right]\\ &= \mathbb{E}\left[D_{U_{t,3}}\left(\nabla h_\delta(Y_t^y)\right)\nabla_{v_2}\nabla_{v_1} Y_t^y\right]\\ &= \mathbb{E}\left[D_{U_{t,3}}\left(\nabla h_\delta(Y_t^y)\nabla_{v_2}\nabla_{v_1} Y_t^y\right)\right] - \mathbb{E}\left[\nabla h_\delta(Y_t^y) D_{U_{t,3}}\nabla_{v_2}\nabla_{v_1} Y_t^y\right]\\ &= \frac{1}{t}\,\mathbb{E}\left[\nabla h_\delta(Y_t^y)\nabla_{v_2}\nabla_{v_1} Y_t^y \int_0^t \nabla_{v_3} Y_s^y \,\mathrm{d}B_s\right] - \mathbb{E}\left[\nabla h_\delta(Y_t^y) D_{U_{t,3}}\nabla_{v_2}\nabla_{v_1} Y_t^y\right].\end{aligned}$$

C将此与 (3.3)、(3.4)、(3.11) 以及 Itˆo 等距性结合，我们得到 $t\in(0,1]$,

$$\begin{aligned}|\mathsf{I}_2| &\le \frac{C}{t}\,\|\nabla h_\delta\|_\infty |v_1||v_2|\left[\mathbb{E}\left|\int_0^t \nabla_{v_3} Y_t^y \,\mathrm{d}B_s\right|^2\right]^{1/2} + \|\nabla h_\delta\|_\infty \mathbb{E}\left[\left|D_{U_{t,3}}\nabla_{v_2}\nabla_{v_1} Y_t^y\right|\right]\\ &\le \frac{C}{t}\,|v_1||v_2||v_3|\sqrt{t} + C|v_1||v_2||v_3|\\ &\le C|v_1||v_2||v_3| t^{-1/2}.\end{aligned}$$

用类似的方法可以证明

$$|\mathsf{I}_3| + |\mathsf{I}_4| \le C|v_1||v_2||v_3| t^{-1/2}, \quad t\in(0,1].$$

我们还需要估计 $|\mathsf{I}_5|_\circ$ 由 (3.8)（其中 $s=t$）、链式法则和 (3.7),

$$\begin{aligned}\mathsf{I}_5 &= \mathbb{E}\left[\nabla^3 h_\delta(Y_t^y) D_{U_{t,3}} Y_t^y \nabla_{v_2} Y_t^y \nabla_{v_1} Y_t^y\right]\\ &= \mathbb{E}\left[D_{U_{t,3}}\left(\nabla^2 h_\delta(Y_t^y)\right)\nabla_{v_2} Y_t^y \nabla_{v_1} Y_t^y\right]\\ &= \mathbb{E}\left[D_{U_{t,3}}\left(\nabla^2 h_\delta(Y_t^y)\nabla_{v_2} Y_t^y \nabla_{v_1} Y_t^y\right)\right]\\ &\quad - \mathbb{E}\left[\nabla^2 h_\delta(Y_t^y)\nabla_{v_1} Y_t^y D_{U_{t,3}}\nabla_{v_2} Y_t^y\right] - \mathbb{E}\left[\nabla^2 h_\delta(Y_t^y)\nabla_{v_2} Y_t^y D_{U_{t,3}}\nabla_{v_1} Y_t^y\right]\\ &= \frac{1}{t}\,\mathbb{E}\left[\nabla^2 h_\delta(Y_t^y)\nabla_{v_2} Y_t^y \nabla_{v_1} Y_t^y \int_0^t \nabla_{v_3} Y_s^y \,\mathrm{d}B_s\right]\\ &\quad - \mathbb{E}\left[\nabla^2 h_\delta(Y_t^y)\nabla_{v_1} Y_t^y D_{U_{t,3}}\nabla_{v_2} Y_t^y\right] - \mathbb{E}\left[\nabla^2 h_\delta(Y_t^y)\nabla_{v_2} Y_t^y D_{U_{t,3}}\nabla_{v_1} Y_t^y\right]\\ &=: \mathsf{I}_{51} + \mathsf{I}_{52} + \mathsf{I}_{53}.\end{aligned}$$

对于 $\mathsf{I}_{51},$ ，由 (3.8) 和 (3.6) 可得

$$\begin{aligned}\mathsf{I}_{51} &= \frac{1}{t}\,\mathbb{E}\left[D_{U_{t,2}}\left(\nabla h_\delta(Y_t^y)\right)\nabla_{v_1} Y_t^y \int_0^t \nabla_{v_3} Y_t^y \,\mathrm{d}B_s\right]\\ &= \frac{1}{t}\,\mathbb{E}\left[D_{U_{t,2}}\left(\nabla h_\delta(Y_t^y)\nabla_{v_1} Y_t^y \int_0^t \nabla_{v_3} Y_s^y \,\mathrm{d}B_s\right)\right]\\ &\quad - \frac{1}{t}\,\mathbb{E}\left[\nabla h_\delta(Y_t^y) D_{U_{t,2}}\nabla_{v_1} Y_t^y \int_0^t \nabla_{v_3} Y_s^y \,\mathrm{d}B_s\right]\\ &\quad - \frac{1}{t}\,\mathbb{E}\left[\nabla h_\delta(Y_t^y)\nabla_{v_1} Y_t^y \int_0^t D_{U_{t,2}}\nabla_{v_3} Y_s^y \,\mathrm{d}B_s\right]\\ &\quad - \frac{1}{t^2}\,\mathbb{E}\left[\nabla h_\delta(Y_t^y)\nabla_{v_1} Y_t^y \int_0^t \nabla_{v_3} Y_s^y \nabla_{v_2} Y_s^y \,\mathrm{d}s\right]\\ &=: \mathsf{I}_{511} + \mathsf{I}_{512} + \mathsf{I}_{513} + \mathsf{I}_{514}.\end{aligned}$$

由 (3.7)、(3.3) 和 Itô 等距性可得，对于 $t \in (0,1]$,

$$\begin{aligned}
|\mathsf{I}_{511}| &= \left| \frac{1}{t^2} \mathbb{E}\left[\nabla h_\delta(Y_t^y) \nabla_{v_1} Y_t^y \int_0^t \nabla_{v_3} Y_s^y \, \mathrm{d}B_s \int_0^t \nabla_{v_2} Y_s^y \, \mathrm{d}B_s \right] \right| \\
&\le \frac{C}{t^2} \|\nabla h_\delta\|_\infty |v_1| \left(\mathbb{E}\left| \int_0^t \nabla_{v_3} Y_s^y \, \mathrm{d}B_s \right|^2 \right)^{1/2} \left(\mathbb{E}\left| \int_0^t \nabla_{v_2} Y_s^y \, \mathrm{d}B_s \right|^2 \right)^{1/2} \\
&\le C|v_1||v_2||v_3| t^{-1}.
\end{aligned}$$

根据 (3.10)、伊藤等距关系和 (3.3)，对于 $t \in (0,1]$，可得

$$\begin{aligned}
|\mathsf{I}_{512}| &\le \frac{1}{t} \|\nabla h_\delta\|_\infty |v_1||v_2| \left(\mathbb{E}\left| \int_0^t \nabla_{v_3} Y_s^y \, \mathrm{d}B_s \right|^2 \right)^{1/2} \\
&\le C|v_1||v_2||v_3| t^{-1/2}
\end{aligned}$$

类似地计算可得,

$$|\mathsf{I}_{513}| \le C|v_1||v_2||v_3| t^{-1/2}.$$

利用 (3.3)，我们看到对于 $t \in (0,1]$ 有

$$|\mathsf{I}_{514}| \le \frac{C}{t^2} \|\nabla h_\delta\|_\infty |v_1||v_2||v_3| t \le C|v_1||v_2||v_3| t^{-1}.$$

如果将对于 $|\mathsf{I}_{511}|$、.....、$|\mathsf{I}_{514}|$ 的估计结合起来，则对于 $t \in (0,1]$，可得

$$|\mathsf{I}_{51}| \le C|v_1||v_2||v_3| \left(t^{-1} + t^{-1/2} \right) \le C|v_1||v_2||v_3| t^{-1}.$$

再次利用 (3.8) 和 (3.7)，我们看到

$$\begin{aligned}
\mathsf{I}_{52} &= -\mathbb{E}\left[\nabla^2 h_\delta(Y_t^y) D_{U_{t,1}} Y_t^y D_{U_{t,3}} \nabla_{v_2} Y_t^y \right] \\
&= -\mathbb{E}\left[D_{U_{t,1}} \left(\nabla h_\delta(Y_t^y) \right) D_{U_{t,3}} \nabla_{v_2} Y_t^y \right] \\
&= -\mathbb{E}\left[D_{U_{t,1}} \left(\nabla h_\delta(Y_t^y) D_{U_{t,3}} \nabla_{v_2} Y_t^y \right) \right] + \mathbb{E}\left[\nabla h_\delta(Y_t^y) D_{U_{t,1}} D_{U_{t,3}} \nabla_{v_2} Y_t^y \right] \\
&= -\frac{1}{t} \mathbb{E}\left[\nabla h_\delta(Y_t^y) D_{U_{t,3}} \nabla_{v_2} Y_t^y \int_0^t \nabla_{v_1} Y_s^y \, \mathrm{d}B_s \right] + \mathbb{E}\left[\nabla h_\delta(Y_t^y) D_{U_{t,1}} D_{U_{t,3}} \nabla_{v_2} Y_t^y \right].
\end{aligned}$$

现在可以利用 (3.10)、伊藤等距关系、(3.3) 和 (3.12)，对于 $t \in (0,1]$，得到

$$\begin{aligned}
|\mathsf{I}_{52}| &\le \frac{C}{t} \|\nabla h_\delta\|_\infty |v_2||v_3| \left(\mathbb{E}\left| \int_0^t \nabla_{v_1} Y_s^y \, \mathrm{d}B_s \right|^2 \right)^{1/2} \\
&\quad + \|\nabla h_\delta\|_\infty \mathbb{E}\left[\left| D_{U_{t,1}} D_{U_{t,3}} \nabla_{v_2} Y_t^y \right| \right] \\
&\le \frac{C}{t} |v_1||v_2||v_3| \sqrt{t} + C|v_1||v_2||v_3| \\
&\le C|v_1||v_2||v_3| t^{-1/2}.
\end{aligned}$$

同样的论证可得

$$|\mathsf{I}_{53}| \le C|v_1||v_2||v_3| t^{-1/2}, \quad t \in (0,1].$$

结合 $|\mathsf{I}_{51}|, |\mathsf{I}_{52}|, |\mathsf{I}_{53}|$ 的估计，我们对所有 $t \in (0,1]$

$$|\mathsf{I}_5| \le C|v_1||v_2||v_3| \left(t^{-1} + t^{-1/2} \right) \le C|v_1||v_2||v_3| t^{-1}.$$

最后，我们可以结合 $|\mathsf{I}_i|$, $i=1,2,3,4,5$ 的界，得到 $t\in(0,1]$,

$$\begin{aligned}|\nabla_{v_3}\nabla_{v_2}\nabla_{v_1}\mathbb{E}\left[h_\delta(Y_t^y)\right]| &\le |\mathsf{I}_1|+\cdots+|\mathsf{I}_5|\\ &\le C|v_1||v_2||v_3|\left(1+t^{-1/2}+t^{-1}\right)\\ &\le C|v_1||v_2||v_3|t^{-1}.\end{aligned}$$

现在令 $\delta\downarrow 0$，并利用控制收敛可知，对所有 $v_1,v_2,v_3,y\in\mathbf{R}^d$ 和 $t\in(0,1]$,

$$|\nabla_{v_3}\nabla_{v_2}\nabla_{v_1}Q_th(y)|=\lim_{\delta\downarrow0}|\nabla_{v_3}\nabla_{v_2}\nabla_{v_1}\mathbb{E}\left[h_\delta(Y_t^y)\right]|\le C|v_1||v_2||v_3|t^{-1},$$

由此得到 (2.3)。证明完毕。

4. A lower bound for the Ornstein–Uhlenbeck case

本节将为 Ornstein–Uhlenbeck情形建立一个下界，即对于 $b(x)=-x$ 和 $\sigma=I_{d\times d}$。在此情形下，(H1) 中的 $\theta_0=1$ 和 $K=0$ 成立，而 (H2) 中的 $\theta_1=1$ 和 $\theta_2=\theta_3=0$ 成立。本节中，μ_α 和 μ_2 是随机微分方程解的遍历测度

一行

$$\mathrm{d}X_t=-X_t\,\mathrm{d}t+\mathrm{d}L_t\quad\text{resp.}\quad \mathrm{d}Y_t=-Y_t\,\mathrm{d}t+\mathrm{d}B_t.$$

命题 4.1。存在一个仅依赖于 d 的常数 $C_d>0$，使得对于任意 $\alpha\in(1,2)$,

$$W_1(\mu_\alpha,\mu_2)\ge C_d(2-\alpha).$$

证明。由于 $X_t=\mathrm{e}^{-t}x+\mathrm{e}^{-t}\int_0^t\mathrm{e}^s\,\mathrm{d}L_s$，我们得到对于 $\xi\in\mathbf{R}^d$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\xi X_t}\right]&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\xi\mathrm{e}^{-t}x}\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int_0^t\xi\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^s\,\mathrm{d}L_s}\right]=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\xi\mathrm{e}^{-t}x}\mathrm{e}^{-2^{-1}\int_0^t|\xi\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^s|^\alpha\,\mathrm{d}s}\\ &=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\xi\mathrm{e}^{-t}x}\mathrm{e}^{-(2\alpha)^{-1}|\xi|^\alpha(1-\mathrm{e}^{-\alpha t})}\xrightarrow{t\to\infty}\mathrm{e}^{-(2\alpha)^{-1}|\xi|^\alpha}=\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\xi\alpha^{-1/\alpha}L_1}\right].\end{aligned}$$

因此，遍历测度 μ_α 由 $\alpha^{-1/\alpha}L_1$的分布律给出。同理，遍历测度 μ_2 由 $2^{-1/2}B_1$的分布律给出。由 [6, 引理 4.2] 可知

$$\mathbb{E}\,|L_1|=\frac{2\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}2^{-1/\alpha}\Gamma\left(1-\tfrac{1}{\alpha}\right)\quad\text{and}\quad\mathbb{E}\,|B_1|=\frac{2\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}2^{-1/2}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right).$$

注意

$$W_1(\mu_\alpha,\mu_2)=\inf_{\Pi\in\mathscr{C}(\mu_\alpha,\mu_2)}\iint|x-y|\,\Pi(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y),$$

其中 $\mathscr{C}(\mu_\alpha,\mu_2)$ 表示 μ_α和 μ_2的所有耦合集合。于是我们得到

$$\begin{aligned}W_1(\mu_\alpha,\mu_2)&\ge\inf_{\Pi\in\mathscr{C}(\mu_\alpha,\mu_2)}\left|\iint|x|\,\Pi(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)-\iint|y|\,\Pi(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)\right|\\ &=\left|\int|x|\,\mu_\alpha(\mathrm{d}x)-\int|y|\,\mu_2(\mathrm{d}y)\right|\\ &=\left|\mathbb{E}\left|\alpha^{-1/\alpha}L_1\right|-\mathbb{E}\left|2^{-1/2}B_1\right|\right|\\ &=\frac{2\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}\left|(2\alpha)^{-1/\alpha}\Gamma\left(1-\tfrac{1}{\alpha}\right)-2^{-1}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\right|.\end{aligned}$$

将其与下文的引理 4.2 结合，我们便完成了证明。 □

引理 4.2. 对任意 $\alpha \in (1,2)$,

$$\left|(2\alpha)^{-1/\alpha}\Gamma\left(1-\tfrac{1}{\alpha}\right)-2^{-1}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\right| \geq C(2-\alpha).$$

证明。设

$$\phi(x) := (2x)^{-1/x}\Gamma\left(1-\frac{1}{x}\right), \quad 1 < x \leq 2.$$

不难验证，对于所有 $x \in (1,2)$, $\phi'(x) < \phi'(2-) < 0$，因此

$$\begin{aligned}|\phi(\alpha)-\phi(2)| &= (2-\alpha)\left|\int_0^1 \phi'\left(\alpha+r(2-\alpha)\right)\mathrm{d}r\right| \\ &= (2-\alpha)\int_0^1 \left[-\phi'\left(\alpha+r(2-\alpha)\right)\right]\mathrm{d}r \\ &\geq -\phi'(2-)(2-\alpha).\end{aligned}$$

□

致谢。C.-S. Deng 得到中国国家自然科学基金（12371149）和中国湖北省自然科学基金（2022CFB129）的资助。R. Schilling 获得 DFG-NCN Beethoven Classic 3 项目 SCHI419/11-1 & NCN 2018/31/G/ST1/02252、6G-life 项目（BMBF 计划“Souver¨an. Digital. Vernetzt.” 16KISK001K）以及 SCADS.AI 中心的支持。L. Xu 获得中国国家自然科学基金（编号：12071499）、澳门特别行政区科学技术发展基金（FDCT）FDCT 0074/2023/RIA2，以及澳门大学项目 MYRG2020-00039-FST、MYRG-GRG2023-00088-FST 的资助。

References

[1] M. Abramowitz 和 I.A. Stegun（1972）：《数学公式手册》。纽约 Dover（第10版重印本）。[2] P. Chen、C.-S. Deng、R.L. Schilling 和 L. Xu（2023）：用 Euler–Maruyama 格式近似稳定随机微分方程的不变测度。Stochastic Processes and Their Applications 163，136–167。[3] P. Chen、Q.-M. Shao 和 L. Xu（2023）：概率测度近似框架：马尔可夫过程方法。Annals of Applied Probability 33，1619–1659。[4] Z.-Q. Chen、Z. Hao 和 X. Zhang（2020）：由柱状 α-稳定过程驱动的随机微分方程的 H¨older 正则性与梯度估计。Electronic Journal of Probability 25，第137号。[5] Z.-Q. Chen、X. Zhang 和 G. Zhao（2021）：由乘性稳定型 L´evy 过程驱动的超临界随机微分方程。Transactions of the American Mathematical Society 374，7621–7655。[6] C.-S. Deng 和 R.L. Schilling（2019）：时空分数阶方程热核的精确渐近公式。Fractional Calculus & Applied Analysis 22，968–989。[7] C.-S. Deng、R.L. Schilling 和 L. Xu（2022）：从属过程的奇异积分及其在随机偏微分方程结构性质中的应用。Transactions of the American Mathematical Society 375，6043–6073。[8] Z. Dong、L. Xu 和 X. Zhang（2014）：由 α-稳定过程驱动的随机 Burgers 方程的指数遍历性。Journal of Statistical Physics 154，929–949。[9] R. Durrett（2019）：《概率论：理论与例子》（第5版）。剑桥大学出版社，剑桥。[10] A. Eberle（2016）：扩散过程的反射耦合与收缩率。Probability Theory and Related Fields 166，851–886。[11] K. Grobys（2021）：我们对金融市场二阶矩的了解有哪些？International Review of Financial Analysis 78，101891。[12]M. Hairer（2021）：马尔可夫过程的收敛性。https://www.hairer.org/notes/Convergence.pdf（访问于2023年1月13日）。

[13] A. Janicki、Z. Michna 和 A. Weron（1996）：由 α-稳定 Lévy 运动驱动的随机微分方程的近似。Applicationes Mathematicae 24，149–168。[14] F. K¨ühn 和 R.L. Schilling（2019）：一类 Lévy 驱动随机微分方程的 Euler-Maruyama 近似的强收敛性。Stochastic Processes and Their Applications 129，2654–2680。[15] M. Liang 和 J. Wang（2020）：通过耦合研究乘性 Lévy 噪声驱动的随机微分方程的梯度估计与遍历性。Stochastic Processes and Their Applications 130，3053–3094。[16] W. Liu、R. Song 和 L. Xie（2020）：Lévy 型算子基本解的梯度估计。Advances in Nonlinear Analysis 9，1453–1462。[17] X. Liu（2022）：具有 Hölder 漂移且由 α-稳定 Lévy 过程驱动的随机微分方程的 α-依赖性。Journal of Mathematical Analysis and Applications 506，125642。[18] X. Liu（2022）：由两类 α-稳定过程驱动的随机 Burgers 方程不变测度的极限。Stochastic Processes and Their Applications 146，1–21。[19] X. Liu（2022）：由 α-稳定 Lévy 过程驱动的随机实 Ginzburg-Landau 方程不变测度的 α-依赖性。Journal of Differential Equations 314，418–445。[20] S.P. Meyn 和 R.L. Tweedie（1993）：马尔可夫过程的稳定性 III：连续时间过程的 Foster-Lyapunov 判据。Advances in Applied Probability 25，518–548。[21] S.P. Meyn 和 R.L. Tweedie（2009）：《马尔可夫链与随机稳定性》（第2版）。剑[21] 桥大学出版社，剑桥。[22] M. Peligrad、H. Sang、Y. Xiao 和 G. Yang（2022）：创新项属于稳定分布吸引域的线性随机场的极限定理。Stochastic Processes and Their Applications 150，596–621。[23] E. Priola、A. Shirikyan、L. Xu 和 J. Zabczyk（2012）：带 Lévy 噪声方程的指数遍历性与正则性。Stochastic Processes and their Applications 122，106–133。[24] E. Priola 和 J. Zabczyk（2011）：由柱状稳定过程驱动的半线性随机偏微分方程的结构性质。Probability Theory and Related Fields 149，97–137。[25] J. Wang（2016）：Lévy 过程驱动的随机微分方程的 L^p-Wasserstein 距离。Bernoulli 22，1598–1616。[26] R. Wang、J. Xiong 和 L. Xu（2017）：由 α-稳定噪声驱动的随机实 Ginzburg-Landau 方程的不可约性及其应用。Bernoulli 23，1179–1201。[27] L. Xu（2013）：由 α-稳定噪声驱动的随机实 Ginzburg-Landau 方程的遍历性。Stochastic Processes and their Applications 123，3710–3736。[28] X. Zhang（2013）：α-稳定过程驱动的随机微分方程的导数公式与梯度估计。Stochastic Processes and their Applications 123，1213–1228。
（C.-S. Deng） School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan430072, China电子邮箱：dengcs@whu.edu.cn（R.L. Schilling） TU Dresden, Fakultät Mathematik, Institut für Mathematische Stochastik, 01062 Dresden, Germany电子邮箱：rene.schilling@tu-dresden.de（L. Xu） Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, University of Macau, Macau S.A.R., China电子邮箱：lihuxu@um.edu.mo