arXiv:2302.03373v1 [math.SG] 7 Feb 2023

ADC 接触结构的刚性

SAUVIK MUKHERJEE

1. Introduction

本文受到 [1] 中一个问题的启发。在 [1] Lazarev 证明了以下结果

定理 1.1。（[1]）接触流形（Y， ξ）的所有柔性 Weinstein 填充（c_1（Y， ξ） $=0$）都具有同构的整系数上同调。

证明概要：存在一个长正合列

$$... \to H^{n-k}(W,\mathbb{Z}) \to SH_k(W,\lambda) \to SH_k^+(W,\lambda) \to H^{n-k+1}(W,\mathbb{Z}) \to ...$$

对于柔性 Weinstein W， SH_k（W， λ） $=0$。因此

$$SH_k^+(W,\lambda) \cong H^{n-k+1}(W,\mathbb{Z})$$

现在他介绍了 ADC（渐近动力学凸）接触结构的概念。他证明，如果 W 是柔性 Weinstein 域，那么（Y， ξ）必定是 ADC；此外，他还证明，如果 $\partial W = Y$ 是 ADC，那么 SH_k^+ （W， λ）只取决于 Y，而不取决于 W，从而得出该结论。

现在他提出了以下问题

问题：如果（Y， ξ）是 ADC，那么（Y， ξ）的任意 Liouville 填充是否具有同构的整数上同调群?

在本文中，我们构造了一个反例，表明该结论是错误的。

注 1.2。如上所述，柔性 Weinstein 域的边界必定是 ADC。我们的反例还表明，该结论的逆命题是错误的。

我们以陈述一些关于 ADC 接触结构的事实来结束本节。设 γ 是 (Y,ξ) 的一个 Reeb 轨道，其 γ 的次数为

$$|\gamma| = \mu_{cz}(\gamma) + n - 3$$

其中 $\mu_{cz}(\gamma)$ 是 γ 的 Conley-Zehnder 指数。现在我们定义

$$A(\gamma) = \int_{S^1} \gamma^* \alpha$$

其中 α 是 ξ的接触形式。令 $\mathcal{P}^{<D}(Y, \alpha)$ 表示 (Y, α) 中满足 $A(\gamma) < D$ 的可缩 Reeb 轨道集合。若 $\alpha_1 = f\alpha_2$且 $f \geq 1$, 则称两个接触形式 α_i, $i = 1$满足 $\alpha_1 \geq \alpha_2$, 2。

定义 1.3. ([1]) 若存在 ξ 的接触形式 $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq ....$ 以及趋于无穷大的正数 $D_1 < D_2 < D_3 < ...$, 使得 $\mathcal{P}^{<D_k}(Y, \alpha_k)$ 的所有元素度数均为正，则称 (Y, ξ) 为 ADC（渐近动力学凸）。

定义如下

$$\mathcal{W}^{<D}(\Lambda, Y, \alpha) = \{[w],\ w = c_1 c_2 ..c_k : A(w) = \Sigma A(c_i) < D\}$$

其中 c 是 Legendrian Λ 的 Reeb 弦，且

$$A(c) = \int_c \alpha$$

对于所有 i, 通过在 λ 中插入路径，使其连接 c_1 的一端与基点，并连接 c_i 的终点与c_{i+1} 的终点，从而使 w 在 $\pi_1(Y, \alpha)$ 中为零，其中 w 作为 $\pi_1(Y, \alpha)$ 的一个元素。等价类 $[w]$ 定义为: $c_1 c_2 ..c_n$ 与 $c_2 c_3 ...c_n c_1$等价。

定理 1.4. ([1]) 设 $\Lambda^{n-1} \subset (Y_-^{2n-1}, \alpha_-)$ $n \geq 3$ 是 Legendrian 球面。对任意$D > 0$, 存在 $\epsilon = \epsilon(D) > 0$, 使得若 (Y_+, α_+) 是对$U^\epsilon(\Lambda, \alpha_-)$ 进行接触手术的结果，则 $\mathcal{P}^{<D}(Y_+, \alpha_+)$ 与 $\mathcal{P}^{<D}(Y_- \alpha_-) \cup$之间存在保分次双射$\mathcal{W}^{<D}(\Lambda, Y_-, \alpha_-)$: 若 γ_w 是与弦词 $w = c_1 ...c_k$ 对应的轨道，则

$$|\gamma_w| = |w| + n - 3 = \Sigma |c_i| + n - 3$$

其中 $|c| = \mu_{cz}(c) - 1$。

2. Weinstein Handles

本节针对维数为 $2n = 8$ 的情形，介绍一种构造临界指标魏因斯坦柄粘接的替代性初等方法。该方法不同于 [2]，因为它允许我们给出粘接映射的显式公式，但并不适用于所有 Legendrian 球面。

考虑以下空间

$$M = \{(p, q) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 : |p|^2 = \epsilon_M\}$$

$$N = \{(p,q) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 : |q|^2 = \epsilon_N\}$$

在 $M \cap \{p_4 > 0\}$ 上取坐标 $(p_1, p_2, p_3, p_4, q_1, q_2, q_3, q_4) \to (p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3, q_4)$，在 $N \cap \{q_4 > 0\}$ 上取坐标 $(p_1, p_2, p_3, p_4, q_1, q_2, q_3, q_4) \to (p_1, p_2, p_3, p_4, q_1, q_2, q_3)$。分别在 $M \cap \{p_4 > 0\}$ 和 $N \cap \{q_4 > 0\}$ 上设

$$p_4' = (\epsilon_M - \Sigma_1^3 p_i^2)^{1/2},\ q_4 = (\epsilon_N - \Sigma_1^3 q_i^2)$$

考虑如下的一形式

$$(\alpha_4)_{|M} = 2\Sigma_1^3(q_i - q_4\frac{p_i}{p_4'})dp_i + \Sigma_1^3 p_i dq_i + p_4' dq_4$$

$$(\alpha_4)_{|N} = \Sigma_1^3(p_i - p_4\frac{q_i}{q_4'})dq_i + 2\Sigma_1^3 q_i dp_i + 2q_4' dp_4$$

现在我们希望构造一个从 M 到 N 的严格接触同胚，即，

$$F : M \to N,\ F(p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3, q_4) = (r_1, r_2, r_3, r_4, \frac{\epsilon_N}{\epsilon_M}p_1, \frac{\epsilon_N}{\epsilon_M}p_2, \frac{\epsilon_N}{\epsilon_M}p_3)$$

使得 $F^*(\alpha_4)_N = (\alpha_4)_M$，条件为

(1) $$F(p_1, p_2, p_3, 0, 0, 0, 0) = (r_1', r_2', r_3', r_4', \frac{\epsilon_N}{\epsilon_M}p_1, \frac{\epsilon_N}{\epsilon_M}p_2, \frac{\epsilon_N}{\epsilon_M}p_3) = Given\ Legendrian$$

因此我们写成

$$(\alpha_4)_N = 2\frac{\epsilon_N}{\epsilon_M}\Sigma_1^3 p_i dr_i + 2\frac{\epsilon_N}{\epsilon_M}p_4' dr_4 + \frac{\epsilon_N}{\epsilon_M}\Sigma_1^3(r_i - r_4\frac{p_i}{p_4'})dp_i = (\alpha_4)_M$$

将 $dr_j = \Sigma_1^3 \frac{\partial r_j}{\partial p_i}dp_i + \Sigma_1^4 \frac{\partial r_j}{\partial q_i}dq_i$ 代入上式可得

下文为记号简便起见，记 $p_4'(p_1, p_2, p_3)$ 为 $= p_4(p_1, p_2, p_3)$。

(2) $$2\frac{\epsilon_N}{\epsilon_M}\Sigma p_i\frac{\partial r_i}{\partial q_j} = p_j,\ j = 1, 2, 3, 4$$

积分可得

(3) $$\frac{\epsilon_N}{\epsilon_M}\Sigma p_i r_i = \frac{1}{2}p_j q_j + A_j,\ j = 1, 2, 3, 4$$

其中，A_j 是一个对于 $j = 1$、2、3、4 不依赖于 q_j 的函数。类似地可得

(4) $$2\frac{\epsilon_N}{\epsilon_M}\Sigma p_i\frac{\partial r_i}{\partial p_j} + \frac{\epsilon_N}{\epsilon_M}(r_j - r_4\frac{p_j}{p_4}) = 2(q_j - q_4\frac{p_j}{p_4}),\ j = 1, 2, 3$$

对方程 3 关于 p_j 求导，其中 $j = 1$=2、3，可得

(5) $$\frac{\epsilon_N}{\epsilon_M}\Sigma p_i\frac{\partial r_i}{\partial p_j} + \frac{\epsilon_N}{\epsilon_M}(r_j - r_4\frac{p_j}{p_4}) = \frac{q_j}{2} + \frac{\partial A_j}{\partial p_j}$$

比较方程 4 和 5，可得

$$\frac{\epsilon_N}{\epsilon_M}(r_j - r_4\frac{p_j}{p_4}) = q_j - 2(q_j - q_4\frac{p_j}{p_4}) + 2\frac{\partial A_j}{\partial p_j} \tag{6}$$

现在由条件 1 和方程 3 可得 $\frac{\epsilon_N}{\epsilon_M}\Sigma p_i r_i' = A_j(p_1, p_2, p_3, 0, 0, 0, 0) = A_j'(say)$。因此，$A_j = A_j' + B_j$ 使得 B_j 不依赖于 q_j，并且

$$B_j(p_1, p_2, p_3, 0, 0, 0) = 0$$

因此 $A_1' = A_2' = A_3' = A_4'$。于是我们有

$$\frac{\epsilon_N}{\epsilon_M}\Sigma p_i r_i = \frac{1}{2}p_j q_j + A_j' + B_j$$

这给出方程组

$$B_k - B_l = \frac{1}{2}(p_l q_l - p_k q_k) + A_l' - A_k' = \frac{1}{2}(p_l q_l - p_k q_k) \tag{7}$$

其系数矩阵的行列式为零。解为

$$B_j = B_4 + \frac{1}{2}(p_4 q_4 - p_j q_j),\ j \neq 4$$

我们选择 B_4 使得 B_j 不依赖于 q_j。因此取

$$B_4 = \frac{1}{2}\Sigma_{i\neq 4} p_i q_i$$

现在只需利用上述代入 B_j（从而也代入 A_j）的结果，求解由关于 $j = 4$ 的方程 3 和方程 6 组成的方程组。这给出

$$\frac{\epsilon_N}{\epsilon_M}r_4 = \frac{p_4}{\epsilon_M}[\frac{1}{2}\Sigma p_i q_i + \Sigma_{i\neq 4} p_i q_i - 2\frac{q_4}{p_4}\Sigma_{i\neq 4} p_i^2 + A_4' - 2\Sigma_{i\neq 4} p_i \frac{\partial A_i'}{\partial p_j}]$$

现在利用方程 6 求出其余的 r_i。

注 2.1. 上述构造中给出的 Legendrian 不可能是松的。为说明这一点，首先注意到 $N \cap \{q_4 > 0\}$ 和 $N \cap \{q_4 < 0\}$ 覆盖了除 $\{q_4 = 0\}$ 之外的 N。不失一般性，考虑 $N \cap \{q_4 > 0\}$ 上的达布图，如下所示：

$$\phi(p_1, p_2, p_3, p_4, q_1, q_2, q_3) = (p_4 + \Sigma_1^3 \frac{q_i}{q'_4} p_i, e_1, e_2, e_3, q_1, q_2, q_3)$$

其中 $e_j = -(\frac{p_j}{2q'_4} + \frac{q_j}{q'^3_4}\Sigma_1^3 p_i q_i + p_4\frac{q_j}{2q'^2_4})$。由 1 可得

$$\phi(F(p_1, p_2, p_3, 0, 0, 0, 0)) = \phi(r_1', r_2', r_3', r_4', \frac{\epsilon_N}{\epsilon_M}p_1, \frac{\epsilon_N}{\epsilon_M}p_2, \frac{\epsilon_N}{\epsilon_M}p_3)$$

这等于 $(r'_4+\Sigma_1^3 \frac{p_i}{p'_4} r'_i, E_1, E_2, E_3, \frac{\epsilon_N}{\epsilon_M} p_1, \frac{\epsilon_N}{\epsilon_M} p_2, \frac{\epsilon_N}{\epsilon_M} p_3)$，其中 $E_j = e_j(r'_1, r'_2, r'_3, r'_4, \frac{\epsilon_N}{\epsilon_M} p_1, \frac{\epsilon_N}{\epsilon_M} p_2, \frac{\epsilon_N}{\epsilon_M} p_3)$。因此，$\phi(F(p_1, p_2, p_3, 0, 0, 0, 0))$ 的前投影中不可能有尖点。由于松弛勒让德子流形具有双尖点，其中一个尖点必定位于 $N \cap \{q_4 > 0\}$，这就产生了矛盾。

3. The Counter Example

在本节中，我们构造所需的反例，即魏因斯坦域 W_1 和W_2，使得 W_i的边界相同，且边界上的接触结构是 ADC（渐近动力凸）的。首先，我们令 W_1 为通过沿着 $\partial D^8 = S^7$中的某个平凡结，将标准魏因斯坦柄 H_W 附加到 D^8（八维圆盘）上所得到的空间。注意，H_W 的边界为

$$\{(p,q) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 : |p|^2 = 2 : |q| \leq \epsilon_N\} \cup \{(p,q) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 : |q|^2 = \epsilon_N : |p| \leq 2\}$$

令 $N' = \{(p,q) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 : |q|^2 = \epsilon_N : |p| \leq 2\} \subset \partial H_W$。现在我们构造 W_2。为此，先考虑第 2 节中的 F：$M \to N'$，其中 $r'_i = 0$。注意，$\{(0, 0, 0, 0, q_1, q_2, q_3) \subset N'\}$是 N'中的一个 Legendrian。

我们考虑一个 8 维魏因斯坦柄 H，其边界为

$$\partial H = M \cup \bar{N}$$

其中，N 稍后将予以说明。因此，F 以 H_W 粘接 H，从而与 W_1粘接。现在我们考虑另一个魏因斯坦柄 $\bar{H} \subset \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$，其边界为

$$\partial \bar{H} = \bar{M} \cup F(M)$$

其中，M 也将在稍后说明。

我们将定义 M 和 N，以帮助我们构造一个从 M 到 N 的粘接映射，从而能够粘接 H 和 H。这就是所需的 W_2。注意，W_i 的边界相同。

首先定义 N。设 $\epsilon_M = \epsilon_N$ 为我们选定的把手 H。接下来

$$\bar{N} = \{(P,Q) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4\}$$

¯使得在角点 $P_i(p,q) = r_i(p,q)$ $Q_i(p,q) = p_i$，并且 P和 Q满足 N与李乌维尔向量场¯横截。现在我们以类似的方式定义 M

$$\bar{M} = \{(P,Q) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4\}$$

¯使得在角点附近， $P_i(p,q) = r_i(p,q)$ $Q_i(p,q) = p_i$，并且 P和 Q满足： N与李乌维尔向量场横截。这里的拉回条件不涉及导数，因为我们只需要匹配 dp_i和 dq_i的系数，它们分别是$2Q_i$和 P_i。

现在我们证明 ∂W_i是ADC。我们只需证明 ∂W_1是ADC，因为 $\partial W_2 = \partial W_1$。由于我们沿着一个平凡结附加了 H_W，因此只需考虑1.4中的 $\mathcal{W}^{<D}(\Lambda, Y_-, \alpha_-)$内的 a^k，其中 Y_-是 S^7， Λ是平凡结，而 a是平凡结中的Reeb弦。若 γ_w是与 a^k对应的Reeb轨道，则 $|\gamma_w| = 3k + 1 > 0$。

备注 3.1. 根据上面的注 2.1，与我们类似的构造无法给出 1.1 的反例。

References

[1] Lazarev, O. 具有柔性填充的接触流形。《几何与泛函分析》30, 188–254[2] Weinstein, Alan. 接触手术与辛把手体，《北海道数学杂志》20(1991), n0.2, 241- 251. MR 1114405 (92g:53028) 20, 24[3] Cieliebak, Kai; Eliashberg, Yakov. *From Stein to Weinstein and back*, 美国数学会丛书，第59卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2012，仿射复流形的辛几何。MR 3012475 1,4,19,20,24,25