arXiv:2302.03378v1 [math.DG] 7 Feb 2023

双曲平面中的闭合 $1/2$-弹性曲线

EMILIO MUSSO 和 ´ALVARO P´AMPANO

Abstract. 我们研究双曲平面中满足长度约束的 $1/2$-伯努利弯曲能的临界轨迹。根据其动量的因果性质，将具有周期曲率的临界轨迹分为三种不同类型。我们证明，闭轨迹仅在动量为类时向量时出现。事实上，对于编码变分过程中长度守恒的拉格朗日乘子的适当取值，我们证明存在可数多个具有类时动量的闭轨迹；这些轨迹由一对互质的自然数决定。

Keywords: 伯努利泛函、闭轨迹、 p-弹性曲线。

1. Introduction

本文旨在研究这些泛函的闭临界点的存在性及其整体性质

$$\mathcal{B}_\lambda : \gamma \longmapsto \int_\gamma \left(\sqrt{|\kappa|} + \lambda\right), \tag{1.1}$$

定义在双曲平面的凸曲线 γ 上。常数 λ 是拉格朗日乘子，用于表示变分过程中长度的守恒，而 κ 是曲线的测地曲率。这是对先前一项工作的自然延续 [34], ，该工作研究了平面 $\mathbb{R}^2$ 和球面 $\mathbb{S}^2$中曲线的类似问题。反过来， [34] 将 [2, 3, 4, 5, 29] 中获得的结果从无约束情形（$\lambda = 0$）扩展到了有约束情形（$\lambda \in \mathbb{R}$）。

泛函（1.1）属于伯努利泛函族

$$\mathcal{B}_{p,\lambda} : \gamma \longmapsto \int_\gamma \left(|\kappa|^p + \lambda\right),$$

其临界曲线称为p-弹性曲线。这些泛函最早出现在 D. Bernoulli 于 1738 年寄给 L. Euler 的一封信中（见 [43], 第 172 页）。

此情形 $p = 2$ 自那时起便得到了广泛研究。除了与弹性杆理论相关的最初动机外，2-弹性曲线还在其他领域有若干有趣的应用，例如曲面理论（威尔莫尔曲面 [30, 37, 45], 、受约束的 Willmore 曲面 [9, 22, 41], 以及球面曲率线曲面 [15], 等），以及双脂质膜 [12, 26, 44]的 Canham-Hefrich-Evans 建模[10, 16, 21]。闭合 2-弹性曲线的存在性及其几何

Date：2023年2月8日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 53C50；53C42；53A04；53A10。作者部分获得了 PRIN 2014-2017 “Variet`a reali e complesse: geometria, topo- logia e analisi armonica”项目以及 INDAM 的 GNSAGA 的资助。第二位作者部分获得了 AMS-Simons 2021-2022年度旅行资助计划的资助。

性质已在自 20 世纪 80 年代以来发表的多篇著作中得到探讨（例如参见 [22, 30, 46]）。

在一篇近期论文中， [35]Miura-Yoshizawa 对平面 $\mathbb{R}^2$ 中的 p-弹性曲线进行了完整分类，适用于任意实数 $p > 1$。对于 $p \in (0, 1)$，由于拉格朗日量在原点处仅连续，伯努利泛函定义于凸曲线上。尽管这些情形研究较少，但其中一些特殊情形早已为人熟知。W. Blaschke 研究了 $\mathbb{R}^2$ 中无约束（即 $\lambda = 0$）且满足 $p = 1/2$ 的情形，以及 $p = 1/3$ 的情形（分别见 [5], 卷一，1921 年；卷二，1923 年），并证明临界曲线为悬链线（$p = 1/2$）或抛物线（$p = 1/3$）。情形 $p = 1/3$ 和 $\lambda = 0$ 对应于凸曲线的等仿射长度。自开创性论文 [14], 发表以来，等仿射几何一直被用于近期关于人类二维曲线绘图运动及非刚性平面形状识别的研究（例如分别参见 [17, 40], 及其中所列文献）。

对于 $p > 2$ 的自然数值，无约束的 p-弹性曲线此前已在 [2]中得到研究。它们被用于构造具有黎曼和伪黎曼扭曲积度量的空间中的 Willmore-Chen 子流形 [1, 8] ，并被应用于分析弦理论中的共形张力 [7]。对于光滑球面曲线，唯一的闭合临界轨迹是测地线。令人惊讶的是，除测地线外，光滑闭合球面无约束的 p-弹性曲线要么是 2-弹性曲线，要么是 $p \in (0,1)$ [20]。在 [2, 4, 20, 32, 33], 中，针对 $0 < p < 1$，研究证明了 $\mathbb{S}^2$ 中存在无穷多个闭合无约束的 p-弹性曲线。当 $p = (n-2)/(n+1)$、 $n \in \mathbb{N}$和 $n > 2$时，黎曼二维空间形式中的无约束 p-弹性曲线出现在双保守超曲面理论中，作为旋转超曲面的生成曲线 [32, 33]。特别地，无约束的 $1/2$-弹性曲线也被刻画为黎曼和洛伦兹三维空间形式中不变极小曲面的生成曲线 [3]。

伯努利泛函 $\mathcal{B}_{p,\,\lambda}$ 的情形 $p = 1/2$ 也因以下原因而特殊：经过适当的接触变换后，临界曲线的不变量特征[13, 23, 27, 31] 是奇异椭圆曲线光滑分层的连通分支。因此， $p = 1/2$ 可以视为可能取值 $p \in (0, 1)$中的经典情形 $p = 2$ 。与情形 $p = 2$一样，研究它们可以借助椭圆函数和积分。然而，包含这些不变量特征的椭圆曲线上出现奇点，因此无法像 $p = 2$ [22, 30]时那样用椭圆函数显式表示曲率。

在平面 $\mathbb{R}^2$ 中不存在闭合的 $1/2$弹性曲线 [29, 34], ，而 $\mathbb{S}^2$ 中的所有闭合 $1/2$ 弹性曲线最近已在 [34]（受约束情形）中找到，并且此前已在 [2, 4]中针对无约束情形找到。受 Arroyo、Garay、Menc´ıa、Musso 和 P´ampano 关于 $\mathbb{S}^2$中闭合 $1/2$弹性曲线存在性的这些研究结果启发，本文旨在研究双曲平面 $\mathcal{H}^2$中的受约束 $1/2$弹性曲线。尽管在形式上存在明显的类比，但双曲情形和球面情形由于其等距变换群的拓扑结构不同，分别为 $\mathrm{O}^{\uparrow}_{+}(1,2)$ 和 SO(3)，以及伴随表示的性质不同，而呈现出实质性差异。另一个实质性差异如下：对于每个固定的 λ， $\mathcal{B}_\lambda$ 的临界曲线是半平面 $\mathbb{H} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x > 0\}$上的一个向量场$\vec{X}_\lambda$ 的流线。在球面情形中，$\vec{X}_\lambda$ 具有唯一的稳定平衡点（一个中心）；而在双曲情形中， X_λ 对于 λ的适当取值，可能具有一个稳定平衡点

（一个中心）和一个不稳定平衡点（一个鞍点）。这给那些签名接近不稳定临界点的临界曲线的数值计算带来了困难。

2. 1/2-Elasticae

令 $\mathbb{R}^{1,2}$ 为闵可夫斯基三维空间，其内积为

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=(x^1,x^2,x^3)\cdot(y^1,y^2,y^3)=-x^1y^1+x^2y^2+x^3y^3\,,$$

其定向由体积形式 $\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3$确定，时间定向由因果锥$\mathcal{N}^+=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^{1,2}\,/\,\vec{x}\cdot\vec{x}\le 0,\,x^1>0\}$ 确定，并配备由 $(\vec{x}\times\vec{y})\cdot\vec{w}=\det(\vec{x},\vec{y},\vec{w})$ 定义的向量叉积$\times$，其中 det 表示行列式。

双曲平面是类空曲面

$$\mathcal{H}^2=\{\vec{x}\in\mathcal{N}^+\,/\,\vec{x}\cdot\vec{x}=-1\}\,,$$

其诱导黎曼度量为 $g_{\mathcal{H}^2}=(d\vec{x}\cdot d\vec{x})|_{\mathcal{H}^2}$，截面曲率恒为 -1。我们借助等距变换将 $\mathcal{H}^2$ 与带有庞加莱度量的单位圆盘 $\mathrm{D}^2\subset\mathbb{R}^2$ 对应起来：

$$\phi:\vec{x}=(x^1,x^2,x^3)\in\mathcal{H}^2\longmapsto\frac{1}{1+x^1}(x^2,x^3)\in\mathrm{D}^2.$$

注释 2.1。本文将使用双曲平面的两种模型。特别是，为了便于可视化，将使用庞加莱圆盘。

设 $\gamma:\mathrm{I}\subseteq\mathbb{R}\to\mathcal{H}^2$ 是一条光滑浸入曲线，其中 $\mathrm{I}\subseteq\mathbb{R}$ 是其最大定义区间。沿着 γ 的双曲弗雷内标架定义如下：

$$\mathcal{F}=(\gamma,\dot\gamma,\gamma\times\dot\gamma):\mathrm{I}\subseteq\mathbb{R}\longmapsto\mathrm{O}^{\uparrow}_{+}(1,2)\,,$$

其中 $\mathrm{O}^{\uparrow}_{+}(1,2)$ 是 $\mathbb{R}^{1,2}$ 的限制洛伦兹群，上方的点表示对双曲线元 ds（即 $d\gamma=\dot\gamma ds$）求导。双曲弗雷内标架满足线性系统

$$\mathcal{F}^{-1}\cdot d\mathcal{F}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-\kappa\\0&\kappa&0\end{pmatrix}ds\,,\tag{2.1}$$

其中 κ 是 γ 的测地曲率。如果 $\kappa(t_o)=0$，对某个值 $t_o\in\mathrm{I}\subseteq\mathbb{R}$ 成立，则称 $\gamma(t_o)$ 是一个双曲拐点。没有拐点的曲线具有一种优选定向，使得 $\kappa>0$ 处处成立。如果 $\dot\kappa(t_o)=0$，对某个$t_o\in\mathrm{I}\subseteq\mathbb{R}$ 成立，则称 $\gamma(t_o)$ 是一个双曲顶点。

注释 2.2。我们将区分曲线 $\gamma:\mathrm{I}\subseteq\mathbb{R}\to\mathcal{H}^2$ 及其像，后者记为 $||[\gamma]||\subset\mathcal{H}^2$，并称为 γ 的轨迹。

设 γ 为一条曲线，其曲率 κ 非常数且具有周期性。γ 的波长是 κ 的最小周期 $\omega>0$。该曲线的单值化定义为 $\mathfrak{m}_\gamma=\mathcal{F}|_\omega\cdot\mathcal{F}|_0^{-1}$，并且它属于轨迹 $||[\gamma]||$ 的稳定子。曲线 γ 是闭合的（即具有周期性），当且仅当 $\mathfrak{m}_\gamma$ 具有有限阶$\mathbf{n}_\gamma\in\mathbb{N}$。我们称$\mathbf{n}\gamma$ 为波数。

注2.3。从几何观点来看，波数是 γ的对称群的阶。

若 γ 是闭合的，则 $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ 且 $\omega_\gamma = \mathbf{n}\gamma\omega$ 是 γ的最小周期。一条闭曲线γ 诱导出一个浸入 $\boldsymbol{\gamma}\colon \mathbb{S}^1_{\omega_\gamma} = \mathbb{R}/\omega_\gamma\mathbb{Z} \to \mathcal{H}^2$。若 $\boldsymbol{\gamma}$ 是单射，则称 γ 为简单闭曲线。

为便于后文引用，我们在此回顾由 S. B. Jackson 在 [24] 中证明的经典四顶点定理的双曲类比（凸情形下的另一种证明见 [42] ）：

定理 2.4。 $\mathcal{H}^2$ 中的一条简单闭光滑曲线至少具有四个双曲顶点。

注2.5。双曲四顶点定理所依据的几何事实是：2维空间形式中曲线顶点的概念在莫比乌斯变换伪群的作用下保持不变。因此，如果我们取单位圆盘中的一条曲线，则其欧氏顶点与双曲顶点重合。

现在我们引入所考虑的变分问题和临界曲线类。

定义 2.6。 带乘子 $\lambda \in \mathbb{R}$ 的 $1/2$-弹性曲线是 $\mathcal{H}^2$ 中的一条 $\mathcal{C}^4$ 类凸曲线，并且是泛函的临界点

$$\mathcal{B}_\lambda : \gamma \longmapsto \int_\gamma \left(\sqrt{|\kappa|} + \lambda\right),$$

关于经过凸曲线的紧支变分。

正如这一概念所示，从现在起我们只研究凸曲线，并为其定义以下几何不变量。

定义 2.7. 凸曲线 γ 的布拉施克不变量 为

$$\mu = \sqrt{\kappa},$$

即 γ的测地曲率的正平方根。

在下面的命题中，我们用一个,2向量（即动量）来刻画乘子为 $\lambda \in \mathbb{R}$的 $1/2$ 弹性曲线。

命题 1. 设 γ 为一条以弧长参数化的凸曲线。那么，γ 是乘子为 λ 的 *1/2* 弹性曲线，当且仅当存在一个非零,2向量$\vec{\xi} \in \mathbb{R}^1$，称为动量，使得

$$\frac{1}{2\mu}\gamma + \frac{\dot\mu}{2\mu^2}\dot\gamma - \left(\lambda + \frac{\mu}{2}\right)\gamma \times \dot\gamma = \vec{\xi}, \tag{2.2}$$

其中 $\mu = \sqrt{\kappa}$ 是 γ的布拉施克不变量。

证明。 根据泛函关于 κ [2, 3, 30, 36]的变分导数的标准公式，当且仅当 $\mu = \sqrt{\kappa}$ 是欧拉-拉格朗日方程的解时，凸曲线才是 $\mathcal{B}_\lambda$ 的临界点

$$\frac{\ddot\mu}{2\mu^2} = \frac{\dot\mu^2}{\mu^3} - \frac{1}{2\mu} - \lambda\mu^2 - \frac{\mu^3}{2}\,. \tag{2.3}$$

另一方面，(2.1) 蕴含

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2\mu}\gamma + \frac{\dot\mu}{2\mu^2}\dot\gamma - \left[\lambda + \frac{\mu}{2}\right]\gamma \times \dot\gamma\right) = \left(\frac{\ddot\mu}{2\mu^2} - \frac{\dot\mu^2}{\mu^3} + \frac{1}{2\mu} + \lambda\mu^2 + \frac{\mu^3}{2}\right)\dot\gamma\,,$$

由此得证 □

注 2.8。动量的显式表达式可通过一种更具概念性的方法得到，该方法基于 *Griffith* 相空间的构造，以及对$\mathrm{O}_+^{\uparrow}(1,\ 2)$ 在相空间 [18, 19, 25, 34, 38]上的哈密顿作用的动量映射的分析。

由 (2.2) 我们得到守恒律

$$\dot{\mu}^2 = -\mu^2\left(\mu^4 + 4\lambda\mu^3 + 4\left[\lambda^2 - c\right]\mu^2 - 1\right), \tag{2.4}$$

其中 $c = \vec{\xi}\cdot\vec{\xi}$。注意，常数 c 可以取任意实数值。

为了理解 (2.3) 和 (2.4) 的解，我们将分析其相图的轨道类型。

2.1. 修正不变量特征。我们首先定义双曲曲线的不变量特征和修正不变量特征。设 $\gamma : \mathrm{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathcal{H}^2$ 是一条曲率为 κ 的光滑浸入曲线。

定义 2.9。 γ 的（双曲）不变量特征是由 $(\kappa,\ \dot{\kappa})$ 参数化的集合 $\mathfrak{S}_\gamma \subset \mathbb{R}^2$。凸曲线 γ 的修正不变量特征是由 $(\mu,\ \dot{\mu})$ 参数化的集合 $\widehat{\mathfrak{S}}_\gamma \subset \mathbb{R}^2$，其中 $\mu = \sqrt{\kappa}$ 是布拉施克不变量。

备注 *2.10*。我们对不变量特征的定义，是欧氏、仿射或射影几何中平面曲线相应定义的双曲类比[13, 23, 27, 31]。注意，凸曲线的不变量特征是正半平面 $\mathbb{H} = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x > 0\}$在接触微分同胚 $f : (x, y) \in \mathbb{H} \to (x^2, 2xy) \in \mathbb{H}$下的修正特征的像。如果 γ 是一条具有非恒定曲率且波数为 n_γ的闭凸曲线，则点 $(\mu(s)\ \dot{\mu}(s))$，$s \in [0, \omega_\gamma]$沿不变量特征运行 n_γ次。因此，波数是分歧覆盖 $\gamma(s) \in |[\gamma]| \to (\kappa(s)\ \dot{\kappa}(s)) \in \mathfrak{S}_\gamma$ 的次数；或者在凸情形下，是 $\gamma(s) \in |[\gamma]| \to (\mu(s)\ \dot{\mu}(s)) \in \mathfrak{S}_\gamma$的次数。

令 $\mathbb{H}$ 为半平面 $\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x > 0\}$，并令 $\vec{X}_\lambda \in \mathfrak{X}(\mathbb{H})$ 为向量场（见图1左侧）

$$\vec{X}_\lambda|_{(x,y)} = y\,\partial_x + 2\left(\frac{y^2}{x} - \frac{x}{2} - \lambda x^4 - \frac{x^5}{2}\right)\partial_y\,. \tag{2.5}$$

$\vec{X}_\lambda$ 的积分曲线是乘子为$\lambda \in \mathbb{R}$的 $1/2$-弹性线的修正签名。因此，它们可参数化为

$$\mathbf{m} : s \in \mathrm{I} \subseteq \mathbb{R} \longmapsto (\mu(s), \dot{\mu}(s)),$$

其中 μ 是（2.3）的一个正解，I 是其最大定义区间。由（2.4）可知，动量为$\vec{\xi}$的 $1/2$- 弹性线的修正签名是 $\mathcal{C}^*_{\lambda,\ c} = \mathcal{C}_{\lambda,\ c} \cap \mathbb{H}$ 的一个光滑层，其中 $\mathcal{C}_{\lambda,\ c} \subset \mathbb{R}^2$ 是奇异椭圆曲线 $y^2 + x^2 Q_{\lambda,\ c}(x) = 0$，而 $Q_{\lambda,\ c}(x)$ 是四次多项式

$$Q_{\lambda,c}(x) = x^4 + 4\lambda x^3 + 4(\lambda^2 - c)x^2 - 1\,. \tag{2.6}$$

方程 (2.3) 的非恒定周期解对应于 $\mathcal{C}_{\lambda,c}$ 中包含在 $\mathbb{H}$ 内的光滑紧致连通分支。若 $\lambda \geq -2/\sqrt[4]{27}$ 不存在光滑紧致的一维相曲线 X_λ，则不存在具有非恒定周期曲率的临界曲线，因而更不存在闭合的 $1/2$-弹性曲线。由于我们的最终目标是研究闭合的 $1/2$-弹性曲线，因此舍弃这种情形。从现在起，我们假设 $\lambda < -2/\sqrt[4]{27}$ 成立。那么，$\vec{X}_\lambda$ 的平衡点为

$\mathbf{m}_{\pm}(\lambda) = (\eta_{\pm}(\lambda),0)$，其中 $0 < \eta_{-}(\lambda) < \eta_{+}(\lambda)$ 是四次多项式的两个实根

$$P_\lambda(x) = x^4 + 2\lambda x^3 + 1\,. \tag{2.7}$$

平衡点 $\mathbf{m}_{-}(\lambda)$ 不稳定（鞍点），而 $\mathbf{m}_{+}(\lambda)$ 是稳定的椭圆平衡点（中心）。

注 2.11。这些函数

$$\eta_{\pm} : (-\infty, -2/\sqrt[4]{27}\,) \longmapsto \eta_{\pm}(\lambda) \in \mathbb{R}^{+} \tag{2.8}$$

在 $(-\infty, -2/\sqrt[4]{27})$ 上连续且实解析。函数 η_{-} 严格递增，对每个 $\lambda \in (-1, -2/\sqrt[4]{27})$，$\eta_{-}(\lambda) > 1$，且对每个$\lambda \leq -1$，$\eta_{-}(\lambda) \leq 1$。函数 η_{+} 严格递减。利用费拉里公式，可以得到函数 $\eta_{\pm}$的显式表达式。这些表达式相当复杂，因此我们不在此处列出，尽管稍后的一些计算中会用到它们。

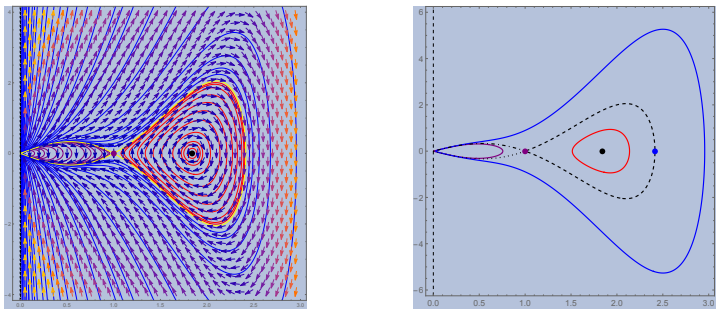

FIGURE 1. 左：向量场 $\vec{X}_{-1}$ 的图像及其相图。右： $\vec{X}_{-1}$的轨道类型。

现在我们描述向量场 $\vec{X}_{\lambda}$ 的相图中的轨道类型（见图1右侧）：

- 不稳定平衡点 $\mathbf{m}_{-}(\lambda)$ 和稳定平衡点$\mathbf{m}_{+}(\lambda)$。它们分别对应于方程 (2.3) 的常值解 $\mu = \eta_{-}(\lambda)$ 和 $\mu = \eta_{+}(\lambda)$（分别是图1中的紫色点和黑色点）。
- 闭轨迹（见图1中的红色曲线）。它们对应于方程 (2.3) 的解，其初始条件为 $\mu(0) \in (\eta_{-}(\lambda)\ \eta_{+}(\lambda))$ 和 $\dot{\mu}(0) = 0$。
- 第一类非闭相曲线（见图1中的蓝色曲线）。它们对应于方程 (2.3) 的解，其初始条件为$\mu(0) \in (m^{*}_{\lambda}, +\infty)$ 和 $\dot{\mu}(0) = 0$（点 $(m^{*}_{\lambda},0)$ 在图1中以蓝色表示）。原点是这些积分曲线的极限点。
- 第二类非闭相曲线（见图1中的紫色曲线）。它们对应于方程 (2.3) 在初始条件$\mu(0) \in (0, \eta_{-}(\lambda))$ 和 $\dot{\mu}(0) = 0$下的解。原点是这些积分曲线的极限点。

- 第一类特殊（非闭）相曲线（图1中重现的黑色虚线）。它对应于方程 (2.3) 在初始条件 $\mu(0) = m_\lambda^*$ 和 $\dot{\mu}(0) = 0$下的解。不稳定平衡点是这条相曲线的极限点。
- 第二类的两条特殊（非闭合）相曲线（图1中重现的黑色点线和点划线）。它们对应于满足以下初始条件的方程 (2.3) 的解

$$\mu(0) = \frac{\eta_-(\lambda)}{2}, \quad \dot{\mu}(0) = \pm\frac{\eta_-(\lambda)}{2}\sqrt{-Q_{\lambda,c_+(\lambda)}\left(\frac{\eta_-(\lambda)}{2}\right)}.$$

它们有两个极限点：原点和不稳定平衡点。

在双曲平面 $\mathcal{H}^2$ 中，根据 $\kappa > 1$ （椭圆型）、 $\kappa = 1$ （抛物型）或 $\kappa < 1$ （双曲型）的不同，正的常曲率 κ 曲线分为三种类型。唯一的闭合曲线，即圆，属于椭圆型（即 $\kappa > 1$）。于是我们得到以下结果。

命题2。 对于乘子为 λ 且 $\kappa > 0$ 为常数的闭合 $1/2$-弹性曲线，以下结论成立：

- 若 $\lambda > -2/\sqrt[4]{27}$ ，则不存在具有正的常曲率且乘子为 λ 的 $1/2$-弹性曲线。
- 若 $\lambda = -2/\sqrt[4]{27}$ ，则具有正的常曲率且乘子为 λ 的闭合 $1/2$-弹性曲线恰有一个等价类。在这种情况下，$\kappa = \sqrt{3}$。
- 若 $-1 < \lambda < -2/\sqrt[4]{27}$ 存在两个不同的闭合$1/2$-弹性曲线等价类，其具有正的常曲率和乘子 λ。它们的曲率分别为 $\eta_-(\lambda)^2$ 和 $\eta_+(\lambda)_2$。
- 若 $\lambda \leq -1$ 存在一个闭合 $1/2$-弹性曲线等价类，其具有正的常曲率 $\eta_+(\lambda)^2$ 和乘子 λ。

证明。若 $\lambda > -2/\sqrt[4]{27}$ 向量场 $\vec{X}_\lambda$ 没有平衡点，则 (2.3) 不存在常值解。这证明了第一个断言。若$\lambda = -2/\sqrt[4]{27}$，向量场 $\vec{X}_\lambda$ 存在唯一的平衡点，即 $\mathrm{m}_+(\lambda) = \mathrm{m}_-(\lambda) = (\sqrt[4]{3}, 0)$。由于$-\sqrt[4]{3} > 1$，这证明了第二个断言。现在假设 $\lambda < -2/\sqrt[4]{27}$。 $\mathcal{B}_\lambda$ 的两条具有常曲率的临界曲线对应于向量场 X_λ的两个平衡点。因此，它们的曲率分别为 $\eta_+(\lambda)^2$ 和 $\eta_-(\lambda)^2$, 。由于对于任意 λ， $\eta_+(\lambda) > 1$ ，任何具有修正符号 $\mathrm{m}_+(\lambda)$ 的曲线都是闭合圆。另一方面，当且仅当 $\lambda \in (-1, -2/\sqrt[4]{27})$ 时， $\eta_-(\lambda) > 1$ 。这证明了第三个和最后一个断言。□

注记 2.12。若 $-1 < \lambda < -2/\sqrt[4]{27}$，则 $\vec{X}_\lambda$ 的不稳定平衡点是椭圆型常曲率曲线（闭圆）的修正符号。若 $\lambda = -1$，则该不稳定平衡点是抛物型常曲率曲线（在庞加莱圆盘中，为去掉一个“理想”点后的圆）的修正符号。若 $\lambda < -1$ ，则该不稳定平衡点是双曲型常曲率曲线（带有两个“理想”点的圆弧）的修正符号。

对具有非恒定曲率的闭合 $1/2$-弹性曲线的研究可分为两部分：分析具有非恒定周期曲率的曲线，以及研究这些曲线的闭合条件。

3. B-Curves

本节研究具有非恒定周期曲率的 $1/2$-弹性曲线。为方便起见，我们引入以下术语。

定义 3.1. 布拉施克不变量 μ 是方程 (2.4) 的非恒定周期解的凸曲线，称为 B曲线。闭 B 曲线是 B 弦。

注 3.2。注意，方程 *(2.4)* 存在周期解，当且仅当四次多项式 $Q_{\lambda,c}$ 有四个互不相同的实根，其中三个为正、一个为负，分别记作 $e_1 > e_2 > e_3 > 0 > e_4$。方程 *(2.3)*、*(2.4)*、乘子λ、常数 c 以及 $Q_{\lambda,c}$ 的根 $e_1 > e_2 > e_3 > 0 > e_4$ 仅取决于 B 曲线的等价类（见下文定义）。

定义 3.3. 若存在 $\mathrm{A} \in \mathrm{O}^{\uparrow}_{+}(1,2)$ 以及光滑严格递增函数 $\psi : \mathrm{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得对所有 $t \in \mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$，$\widetilde{\gamma}(t) = \mathrm{A}\gamma \circ \psi$，则称两条浸入曲线 γ 和 $\widetilde{\gamma}$ 彼此等价。γ 的等价类 记为 $\langle\gamma\rangle$。模空间 是所有等价类构成的集合。

注3.4。如果 γ 和 $\widetilde{\gamma}$ 彼此等价且以弧长为参数，那么参数变换 ψ 就是自变量的平移（即$\psi(s) = s + s_o$，其中 s_o 为常数）。

事实证明，B曲线的模空间可以用乘子 λ 和 $Q_{\lambda,c}$的根 e_2 来描述。

命题 3。设 γ 为一条 B 曲线。映射 $\langle\gamma\rangle \to (\lambda(\langle\gamma\rangle)\ e_2(\langle\gamma\rangle)) \in \mathbb{R}^2$ 是到开域 $\mathfrak{P} = \{(\lambda, e_2) \in \mathbb{R}^2 \,/\, e_2 > 0,\ e_2^4 + 2\lambda e_2^3 + 1 < 0\}$ 的双射。

证明。多项式 $Q_{\lambda,c}$ 有四个互不相同的根 $e_1 > e_2 > e_3 > 0 > e_4$ 当且仅当

$$
\begin{cases}
(i) & 0 < e_2 < e_1\,, \\
(ii) & 0 < e_1^2 e_2^3 - 2e_1 - e_2\,, \\
(iii) & e_3 = \frac{e_1+e_2+\sqrt{4e_1^3e_2^3+(e_1+e_2)^2}}{2e_1^2e_2^2}\,, \\
(iv) & e_4 = \frac{-2e_1e_2}{e_1+e_2+\sqrt{4e_1^3e_2^3+(e_1+e_2)^2}}\,, \\
(v) & \lambda = -\frac{e_1^3e_2^2+e_1^2e_2^3+e_1+e_2}{4e_1^2e_2^2}\,, \\
(vi) & c = \frac{-2e_1^5e_2^5+e_1^6e_2^4+e_1^4e_2^6-2(e_1^4e_2^2+e_1^2e_2^4)+(e_1+e_2)^2}{16e_1^4e_2^4}\,.
\end{cases}
\tag{3.1}
$$

由 (i)、(ii) 和 (v) 可知 $1 + e_2^4 + 2\lambda e_2^3 < 0$ 和 $e_2 > 0$。这意味着，对于每个 B曲线的等价类 $\langle\gamma\rangle$，$(\lambda(\langle\gamma\rangle)\ e_2(\langle\gamma\rangle))$ 都属于 $\mathfrak{P}$。反之，设 $(\lambda,\ e_2)$ 是 $\mathfrak{P}$ 中的一个点。不等式 $e_2 > 0$ 和 $1+e_2^4+2\lambda e_2^3 < 0$ 表明三次多项式

$$
e_2^2 x^3 + \left(e_2^3 + 4e_2^2\lambda\right) x^2 + x + e_2 \tag{3.2}
$$

有唯一实根 e_1 严格大于 e_2。定义 e_3, e_4 和 c，如 (3.1) 中所示。于是，e_1 和 e_2 满足 (3.1) 中的 (ii)，且 $e_1 > e_2 > e_3 > 0 > e_4$ 是 $Q_{\lambda,c}$ 的四个根。令 μ 为 (2.4) 的（周期）解，满足 $\mu(0) = e_2$；令 γ 为一条满足 $\kappa = \mu^2$ 的 B 曲线。于是，$\langle\gamma\rangle \in \mathfrak{P}$ 是满足 $\lambda(\langle\gamma\rangle) = \lambda$ 且 $e_2(\langle\gamma\rangle) = e_2$ 的唯一 B 曲线等价类。□

注释 3.5。由卡尔达诺公式[1], 可得

$$e_1 = \frac{1}{3e_2}\left[(e_2+4\lambda)e_2 + \mathfrak{R}\left(\sqrt[3]{-8\left[\mathtt{a}+3\sqrt{3\mathtt{b}}\right]}\right)\right] \tag{3.3}$$

其中

$$\mathtt{a} = \mathtt{a}(\lambda, e_2) = e_2^6 + 12\lambda e_2^5 + 48\lambda^2 e_2^4 + 64\lambda^3 e_2^3 + 9e_2^2 - 18\lambda e_2\,,$$

$$\mathtt{b} = \mathtt{b}(\lambda, e_2) = e_2^8 + 12\lambda e_2^7 + 48\lambda^2 e_2^6 + 64\lambda^3 e_2^5 + 2e_2^4 - 20\lambda e_2^3 + 4\lambda^2 e_2^2 + 1\,.$$

利用（*3.3*）以及（*3.1*）中的 *(iii)*、*(iv)*、*(vi)*，根 e_3、e_4 和常数 c 可表示为 λ 和 e_2 的实解析函数。通常默认这种依赖关系。如有必要，会明确指出。

从现在起，将 B曲线的模空间与 $\mathfrak{P}$ 等同。对于每个 $\mathfrak{p} = (\lambda,\ e_2) \in \mathfrak{P}$，多项式 $Q_{\lambda,\ c}$，$c = c(\lambda,\ e_2)$ 记作 $Q_{\mathfrak{p}}$。类似地，$\mu_{\mathfrak{p}}$ 表示满足初始条件 $\mu_{\mathfrak{p}}(0) = e_2$、$\dot{\mu}_{\mathfrak{p}}(0) = 0$ 的方程（2.3）的解。根据构造，$\mu_{\mathfrak{p}}$ 满足 $\dot{\mu}_{\mathfrak{p}}^2 + Q_{\mathfrak{p}}(\mu_{\mathfrak{p}}) = 0$。

接下来，我们将讨论一种求得布拉施克不变量 $\mu_{\mathfrak{p}}$ 及其对应 B 曲线 $\gamma_{\mathfrak{p}}$ 的方法。令 $\mathfrak{p} = (\lambda,\ e_2) \in \mathfrak{P}$、$e_1$，$e_3$，$e_4$ 为 $Q_{\mathfrak{p}}$ 的另外三个根，并令 $\omega_{\mathfrak{p}}$ 为 $\mu_{\mathfrak{p}}$ 的最小周期。我们将 $\omega : \mathfrak{p} \in \mathfrak{P} \to \omega_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{R}$ 称为波长函数。由 [6] 的 256.12 和 340.04 可得

$$\omega_{\mathfrak{p}} = 2\int_{e_2}^{e_1} \frac{dx}{x\sqrt{-Q_{\mathfrak{p}}(x)}} = \frac{2\mathtt{g}}{e_1}\left(\frac{\mathtt{a}}{\mathtt{n}}\mathrm{K}(\mathtt{m}) - \frac{\mathtt{a}-\mathtt{n}}{\mathtt{n}}\Pi(\mathtt{n},\mathtt{m})\right), \tag{3.4}$$

其中 K 和 Π分别是第一类和第三类完全椭圆积分，并且

$$\mathtt{a} = \frac{e_2-e_1}{e_2-e_4},\ \mathtt{m} = \frac{(e_1-e_2)(e_3-e_4)}{(e_1-e_3)(e_2-e_4)},\ \mathtt{n} = \frac{e_4\mathtt{a}}{e_1},\ \mathtt{g} = \frac{2}{\sqrt{(e_1-e_3)(e_2-e_4)}}. \tag{3.5}$$

由（3.5）可知，波长关于 $\mathfrak{p}$ 实解析地变化。另一方面，函数 $\mu_{\mathfrak{p}}$ 在 $[0,\omega_{\mathfrak{p}}/2]$上严格递增。令$h_{\mathfrak{p}}$ ： $[e_2,e_1] \to [0,\omega_{\mathfrak{p}}/2]$ 为 $\mu_{\mathfrak{p}}|_{[0,\omega_{\mathfrak{p}}/2]}$的反函数。由 $\dot{\mu}_{\mathfrak{p}}^2 = -\mu_{\mathfrak{p}}^2 Q_{\mathfrak{p}}$（$\mu_{\mathfrak{p}}$）可得

$$h_{\mathfrak{p}}(\mu) = \frac{\omega_{\mathfrak{p}}}{2} - \int_{\mu}^{e_1} \frac{dx}{x\sqrt{-Q_{\mathfrak{p}}(x)}}\,, \qquad \mu \in [e_2, e_1].$$

该积分可用不完全椭圆积分和雅可比函数（[6]，257.12 和 340.04）表示。由此得到

$$h_{\mathfrak{p}}(\mu) = \frac{\omega_{\mathfrak{p}}}{2} - \frac{\mathtt{g}}{e_1}\left(\frac{\mathtt{a}}{\mathtt{n}}\mathtt{u}(\mu) - \frac{\mathtt{a}-\mathtt{n}}{\mathtt{n}}\Pi(\mathtt{n}, \mathrm{am}_{\mathtt{m}}(\mathtt{u}(\mu)), \mathtt{m})\right), \tag{3.6}$$

其中，Π(n −，m) 是参数为 n 和 m 的第三类不完全椭圆积分，$\mathrm{am}_{\mathtt{m}}$ 是参数为 m 的雅可比振幅，并且

$$\mathtt{u}(\mu) = \mathrm{sn}^{-1}\left(\sqrt{\frac{(e_2-e_4)(e_1-\mu)}{(e_1-e_2)(\mu-e_4)}}, \mathtt{m}\right).$$

那么，$\mu_{\mathfrak{p}}|_{[0,\omega_{\mathfrak{p}}/2]} = h_{\mathfrak{p}}^{-1}$。由于 $\mu_{\mathfrak{p}}$ 是偶函数，这足以在整个实轴上重建 $\mu_{\mathfrak{p}}$ 。曲率为 $\kappa_{\mathfrak{p}} = \mu_{\mathfrak{p}}^2$ 的 B 曲线可以通过求解线性系统 (2.1) 并设置适当的初始条件来进行数值计算。

[1] $\sqrt[n]{\zeta}$ 是 $\zeta \in \mathbb{C}$的 n 次根的一种确定方式，其支割线不连续沿负实轴分布，使得如果 ζ 属于负实轴，则 $\Im(\sqrt[n]{\zeta}) > 0$。

注释 3.6。代数曲线 $y^2 + x^2 Q_{\mathfrak{p}}(x) = 0$ 在原点处有一个奇点。这正是布拉施克不变量$\mu_{\mathfrak{p}}$ 无法像双曲平面 [22, 30]中的受约束和无约束弹性曲线那样用椭圆函数表示的几何原因。因此，构造$\mu_{\mathfrak{p}}$ 的一种更实用的方法是，通过设置初始条件 $\mu_{\mathfrak{p}}(0) = e_2$ 和 $\dot{\mu}_{\mathfrak{p}}(0) = 0$，对二阶常微分方程 (2.3) 进行数值求解。

根据动量 ξ 的因果性质，B曲线有三种可能类型： ξ 或为类空、类光，或为类时。这些情形在守恒律 (2.4) 的常数 $c = \vec{\xi} \cdot \vec{\xi}$ 上符号各不相同，相关的 B 曲线也表现出本质不同的行为。因此，我们将对它们加以区分。

定义 3.7。 我们称 B 曲线 γ 为*BS*曲线 （相应地，为*BL*- 或*BT* 曲线），如果其动量 $\vec{\xi}$是类空（相应地，为类光或类时）。

此外，根据与 $\mathfrak{p} =$ （λ、 e_2）相关的 B曲线是 BS曲线、BL曲线还是 BT曲线，将模空间 $\mathfrak{P}$ 划分为三个不同的子域也很方便（见图 2）。

定义 3.8。 开子域 $\mathcal{S} = \{$（λ、 e_2） $\in \mathfrak{P}\,/\,c$（λ、 e_2） $> 0\}$、 $\mathcal{T} = \{$（λ、 e_2） $\in \mathfrak{P}\,/\,c$（λ、 e_2） $< 0\}$ 以及分界曲线 $\mathcal{L} = \{$（λ、 e_2） $\in \mathfrak{P}\,/\,c$（λ、 e_2） $=0\}$ 分别是*BS*曲线、*BT*曲线和*BL*曲线的模空间。

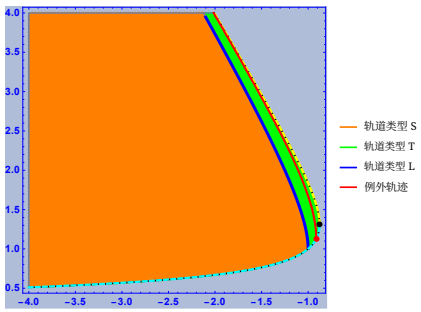

FIGURE 2. 模空间 $\mathfrak{P}$。蓝色曲线是 $\mathcal{L}$，橙色区域是 $\mathcal{S}$，绿色区域是 $\mathcal{T}$。红色曲线是例外轨迹$\mathcal{E}$。

注记 3.9。模空间 $\mathcal{S}$、 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{T}$ 可按如下方式刻画：

- $(\lambda,\ e_2) \in \mathcal{S} \iff (\lambda,\ e_2) \in \mathfrak{P}$ 和 $e_2^2 + 2\lambda e_2 + 1 < 0$，
- $(\lambda,\ e_2) \in \mathcal{L} \iff (\lambda,\ e_2) \in \mathfrak{P}$ 和 $e_2^2 + 2\lambda e_2 + 1 = 0$，
- $(\lambda,\ e_2) \in \mathcal{T} \iff (\lambda,\ e_2) \in \mathfrak{P}$ 和 $e_2^2 + 2\lambda e_2 + 1 > 0$。

曲线 $\mathcal{L}$ 也是函数的图像

$$b_0 : \lambda \in (-\infty, -1) \longmapsto -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}\,. \tag{3.7}$$

边界 $\partial\mathfrak{P}$ 是曲线 $1 + e_2^4 + 2e_2^3\lambda = 0$, $\lambda < -2/\sqrt[4]{27}$。这条曲线是函数 $\eta_{\pm}$ （定义见 *(2.8)*）的图像 $\partial_{\pm}\mathfrak{P}$ 的并集（图 *2* 中以蓝色和黄色标出的虚线曲线）。

现在我们分别研究每一类 B曲线。对于每种情形，我们都将得到显式的求积参数化。B曲线的显式表达式是通过一种更具概念性的方法得到的，该方法基于 Marsden-Weinstein 约化法，并将其应用于变分问题 [18, 19, 25, 34, 38]的 Griffith 相空间上的 $\mathsf{O}_+^{\uparrow}(1,\ 2)$ 哈密顿作用。

3.1. BL曲线。 设 $\mathfrak{p} \in \mathcal{L}$。那么 $\mathfrak{p}$ 具有形式 $\mathfrak{p} = (\lambda,\ e_2(\lambda))$，其中 $e_2(\lambda) = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}$ 且 $\lambda < -1$。与 $\mathfrak{p} \in \mathcal{L}$ 相关联的 B曲线在守恒律 (2.4) 中具有恒定的$c = 0$ 。换言之，它们的动量是类光向量。

定理3.10。 设 $\mathfrak{p} = (\lambda, e_2) \in \mathcal{L}$，且 $\mu_{\mathfrak{p}}$ 是满足初始条件 $\mu_{\mathfrak{p}}(0) = e_2$ 的方程 *(2.4)* 的解，其中 $c = 0$。定义 $\Theta_{\mathfrak{p}}$ 为

$$\Theta_{\mathfrak{p}}(s) = -\int_0^s \mu_{\mathfrak{p}}^2 \left(\mu_{\mathfrak{p}} + 2\lambda\right) ds\,.$$

于是，

$$\gamma_{\mathfrak{p}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\,\mu_{\mathfrak{p}}} \left(2\Theta_{\mathfrak{p}}^2 + 2\mu_{\mathfrak{p}}^2 + 1, 2\sqrt{2}\,\Theta_{\mathfrak{p}}, 2\Theta_{\mathfrak{p}}^2 + 2\mu_{\mathfrak{p}}^2 - 1\right) \tag{3.8}$$

是模数为 $\mathfrak{p}$、动量为 $\vec{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ 0,\ 1)$ 的 *BL*曲线。~~不存在 *BL* 弦。~~

证明。 为简便起见，在整个证明中我们省略下标 $\mathfrak{p}$ 。由 (3.8) 可得 $\gamma \cdot \gamma = -1$，此外还有

$$\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma} = \frac{\dot{\mu}^2 + \mu^6 + 4\lambda\mu^5 + 4\lambda^2\mu^4}{\mu^2}.$$

利用 (2.4)，我们得到 $\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma} = 1$。于是， γ 按弧长参数化。计算$\kappa = \ddot{\gamma} \cdot (\gamma \times \dot{\gamma})$，可得

$$\kappa = -(\mu + 2\lambda)\ddot{\mu} + 2(1 + \lambda\mu^{-1})\dot{\mu}^2 - \mu^6 - 6\lambda\mu^5 - 12\lambda^2\mu^4 - 8\lambda^3\mu^3.$$

于是，由 (2.3) 和 (2.4) 可得 $\kappa = \mu^2$。这意味着 γ 是一条参数为 $(\lambda,\ e_2(\lambda))$ 的 B 曲线。此外，我们有

$$\begin{cases} \gamma|_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} - 3\lambda, 0, 3\sqrt{\lambda^2 - 1} - \lambda\right), \\ \dot{\gamma}|_0 = (0, 1, 0)\,, \\ \gamma|_0 \times \dot{\gamma}|_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(3\sqrt{\lambda^2 - 1} - \lambda, 0, \sqrt{\lambda^2 - 1} - 3\lambda\right). \end{cases}$$

注意到 $\mu(0) = e_2(\lambda)$ 且 $\dot{\mu}(0) = 0$，可得

$$\vec{\xi} = \frac{1}{e_2(\lambda)}\gamma|_0 - \left(\lambda + \frac{e_2(\lambda)}{2}\right)\gamma|_0 \times \dot{\gamma}|_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1).$$

现在我们证明 BL 弦不存在。要使 γ 具有周期性，由 (3.8) 可知， $\Theta(\omega)$需要为零，其中 ω 是 κ的最小周期，即波长。在这种情形下， γ 的最小周期也为 ω。在 $[0, \omega/2]$ 上，由 (2.4) 可得

$$ds = \frac{d\mu}{-\mu\sqrt{-(\mu^4 + 4\lambda\mu^3 + 4\lambda^2\mu^2 - 1)}}\,.$$

于是,

$$\begin{aligned}\Theta(\omega) &= -\int_0^{\omega}\mu^2(\mu+2\lambda)\,ds = -2\int_0^{\omega/2}\mu^2(\mu+2\lambda)\,ds \\ &= 2\int_{e_2}^{e_1}\frac{\mu\,(\mu+2\lambda)}{\sqrt{-\left(\mu^4+4\lambda\mu^3+4\lambda^2\mu^2-1\right)}}\,d\mu\,, \qquad (3.9)\end{aligned}$$

其中

$$e_1=-\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}>e_2=-\lambda+\sqrt{\lambda^2-1}\,.$$

（3.9）右侧是一个标准椭圆积分，可利用 [6] 中的 257.11、336.01、336.02 和 340.02 求解。因此我们得到

$$\Theta(\omega)=2\frac{\sqrt{2}\left(2\lambda^4+2\lambda^2\sqrt{\lambda^2-1}\right)}{\left(\lambda^2+\sqrt{\lambda^4-1}\right)^{3/2}}\left(\mathrm{E}(\mathfrak{m}_\lambda)-\mathrm{K}(\mathfrak{m}_\lambda)\right),$$

其中 E 是第二类完全椭圆积分，且

$$\mathfrak{m}_\lambda=\frac{\lambda^2-\sqrt{\lambda^4-1}}{\lambda^2+\sqrt{\lambda^4-1}}\in(0,1)\,.$$

由于对于每个 $m\in(0,\ 1)$，$\mathrm{E}(m)<\mathrm{K}(m)$，因此可得

$$\Theta(\omega)<0\,,$$

因此不存在 BL 弦。 □

定义 3.11. 由 (3.8) 给出的 BL 曲线 $\gamma_{\mathfrak{p}}$ 称为模数为 $\mathfrak{p}\in\mathcal{L}$的标准 *BL* 曲线。

注3.12。模数为 $\mathfrak{p}\in\mathcal{L}$ 的每条 *BL* 曲线都等价于 $\gamma_{\mathfrak{p}}$，(3.8)。从现在起，我们默认所考虑的 *BL* 曲线均为其标准形式。

令 $\mathfrak{p}=(\lambda,-\lambda+\sqrt{\lambda^2-1})\in\mathcal{L}$ 和 $\gamma_{\mathfrak{p}}$ 为按 (3.8) 定义的模数为$\mathfrak{p}$ 的标准 BL 曲线。采用双曲平面的庞加莱模型，曲线 $\gamma_{\mathfrak{p}}$ 参数化为

$$\gamma_{\mathfrak{p}}=\frac{1}{2\Theta_{\mathfrak{p}}^2+\left(1+\sqrt{2}\,\mu_{\mathfrak{p}}\right)^2}\left(2\sqrt{2}\,\Theta_{\mathfrak{p}},2\Theta_{\mathfrak{p}}^2+2\mu_{\mathfrak{p}}^2-1\right).$$

动量稳定子是抛物子群

$$\mathrm{P}=\left\{\mathrm{HP}(t)=\begin{pmatrix}1+\frac{t^2}{2} & t & -\frac{t^2}{2}\\ t & 1 & -t\\ \frac{t^2}{2} & t & 1-\frac{t^2}{2}\end{pmatrix}/\,t\in\mathbb{R}\right\}.$$

单值化 $\mathfrak{m}$ 是 P 的非平凡元素 $\mathrm{HP}(\sqrt{2}\,\Theta_{\mathfrak{p}}(\omega_{\mathfrak{p}}))$。设 $\Gamma=\overline{\gamma}_{\mathfrak{p}}([0,\omega_{\mathfrak{p}}])$ 为基本弧，则 $||[\gamma_{\mathfrak{p}}]||=\cup_{n\in\mathbb{Z}}\mathfrak{m}^n(\Gamma)$。由于曲率是偶函数，$||[\gamma_{\mathfrak{p}}]||$ 关于 Oy 轴反射不变。线段 $\{(0,\ v)/\,-1<v<1\}$ 是 P 在 D^2上的作用的一个截面。经过 $(0,\ v)$ 的轨道 $\mathcal{O}_v$ 是 D^2 与经过 $(0,\ v)$、$\mathrm{p}=(0,\ 1)$ 且在 p 处与 $\partial\mathrm{D}^2$ 相切的圆的交集。记 $\mathcal{O}^-$ 和 $\mathcal{O}^+$ 分别为 P 经过 $\gamma_{\mathfrak{p}}(0)$ 和 $\gamma_{\mathfrak{p}}(\omega_{\mathfrak{p}}/2)$ 的轨道，它们分别称为$\gamma_{\mathfrak{p}}$的下密切圆和上密切圆 。轨迹 $||[\gamma_{\mathfrak{p}}]||$ 包含在.....的新月形区域内

D^2 由 $\mathcal{O}^+$ 和 $\mathcal{O}^-$围成；在 $\gamma_{\mathfrak{p}}(n\omega_{\mathfrak{p}})$、 $n \in \mathbb{Z}$处与 $\mathcal{O}^-$ 相切，并在$\gamma_{\mathfrak{p}}(\omega_{\mathfrak{p}}/2 + n\omega_{\mathfrak{p}})$、 $n \in \mathbb{Z}$处与 $\mathcal{O}^+$ 相切，其极限点

$$\lim_{s\to+\infty} \gamma_{\mathfrak{p}}(s) = \lim_{s\to-\infty} \gamma_{\mathfrak{p}}(s) = \mathrm{p}\,.$$

当 $\lambda \to -1^-$、 $\mathcal{O}^-$ 和 $||[\gamma_{\mathfrak{p}}]||$ 趋于 $\mathcal{O}_{2-\sqrt{2}}$时。当 λ 减小时， $||[\gamma_{\mathfrak{p}}]||$ 和 $\mathcal{O}^-$发生拐折（即它们的半径缩小），并且当 $\lambda \to -\infty$时，趋于 p。图3分别再现了具有 $\lambda = -1.01$、-1.17、 -1.3 和 -2的 BL曲线的轨迹（所有数值均四舍五入至最多两位小数）。

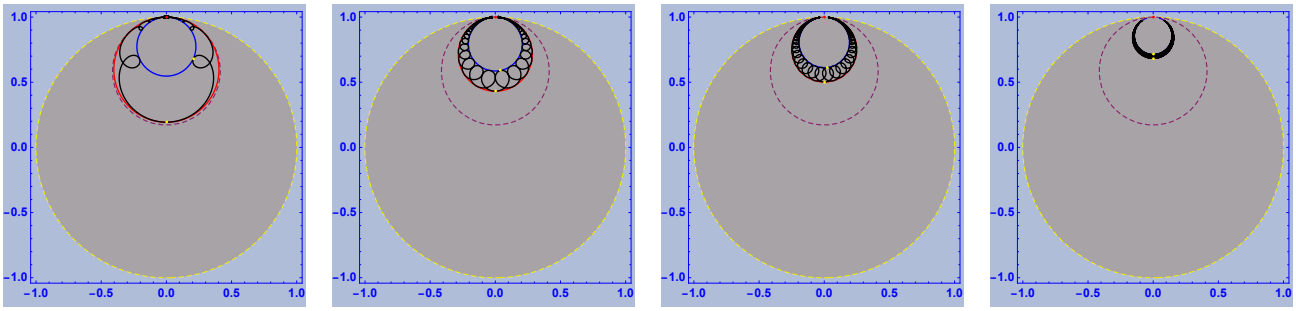

FIGURE 3. 乘子递减的 BL曲线的轨迹 λ。红色和蓝色曲线是密切圆。紫色虚线是极限圆 $\mathcal{O}_{2-\sqrt{2}}$。

3.2. **BS曲线**。 设 $\mathfrak{p} = (\lambda,\ e_2) \in \mathcal{S}$。相应的 B 曲线具有类空动量，并且在守恒律（2.4）中 $c > 0$ 成立。

定理3.13。 设 $\mathfrak{p} = (\lambda,\ e_2) \in \mathcal{S}$，且 $\mu_{\mathfrak{p}}$ 是满足 (2.4) 并具有初始条件 $\mu_{\mathfrak{p}}(0) = e_2$的解，其中 $c > 0$ 如 (*3.1*) 中的 (vi) 所示。定义 $\Theta_{\mathfrak{p}}$ 为

$$\Theta_{\mathfrak{p}}(s) = 2\sqrt{c}\int_0^s \frac{\mu_{\mathfrak{p}}^2(\mu_{\mathfrak{p}} + 2\lambda)}{1 + 4c\mu_{\mathfrak{p}}^2} ds\,.$$

于是，

$$\gamma_{\mathfrak{p}} = \frac{1}{2\sqrt{c}\,\mu_{\mathfrak{p}}}\left(\sqrt{1 + 4c\mu_{\mathfrak{p}}^2}\,\cosh(\Theta_{\mathfrak{p}}), \sqrt{1 + 4c\mu_{\mathfrak{p}}^2}\,\sinh(\Theta_{\mathfrak{p}}), 1\right) \tag{3.10}$$

是模数为 $\mathfrak{p}$、动量为 $\vec{\xi} = (0,\ 0,\ -\sqrt{c})$的*BS*曲线。不存在*BS*字符串。

证明。 证明的第一部分与定理3.10证明的第一部分类似。为简洁起见，此处省略。

我们证明不存在 BS弦。按照证明中的惯例，我们不显式写出对 $\mathfrak{p}$的依赖。反设 γ 是周期的。由 (3.10) 可知， $\Theta(\omega) = 0$，且 ω 是曲率 κ的最小周期，即波长。在这种情形下，这意味着 ω 也是 γ的最小周期。由于

$$f(s) = \frac{\mu^2(\mu + 2\lambda)}{1 + 4c\mu^2}$$

是偶函数，且周期为 ω，函数 Θ是奇函数，周期为 ω，并且满足

$$\Theta(\omega) = 2\sqrt{c}\int_0^{\omega} f(s)ds = 2\sqrt{c}\int_{-\omega/2}^{\omega/2} f(s)ds = 4\sqrt{c}\int_0^{\omega/2} f(s)ds = 2\Theta(\omega/2)\,.$$

于是， $\Theta(\omega/2) = 0$。函数 μ 在 $(0,\omega/2)$ 上严格递增，在 $(\omega/2,\omega)$ 上严格递减。于是， $\Gamma_1 = \gamma([0,\omega/2])$ 和 $\Gamma_2 = \gamma([\omega/2,\omega])$ 是具有不同边界点的简单闭弧

$$\vec{p}_0 = \gamma(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}\,e_2}\left(\sqrt{1+4ce_2^2}, 0, 1\right),$$
$$\vec{p}_2 = \gamma(\omega/2) = \frac{1}{2\sqrt{2}\,e_1}\left(\sqrt{1+4ce_1^2}, 0, 1\right),$$

使得 $\gamma(\mathbb{R}) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$。注意到 $\mu(0) = e_2 < -2\lambda < e_1 = \mu(\omega/2)$，并回忆函数 μ 在 $(0,\omega/2)$ 上严格递增，在 $(\omega/2,\omega)$ 上严格递减，方程 $\mu + 2\lambda = 0$ 在区间 $(0,\omega/2)$ 内恰有一个解 s'，并且在区间 $(\omega/2,\omega)$ 内恰有一个解 s''。因此，

$$\begin{cases} \mu(s) + 2\lambda < 0, & s \in [0, s'), \\ \mu(s) + 2\lambda > 0, & s \in (s', s''), \\ \mu(s) + 2\lambda < 0, & s \in (s'', \omega]\,. \end{cases}$$

这意味着， Θ 在 $(0,s')$ 上严格递减，在 (s',s'') 上严格递增，并在 (s'',ω) 上严格递减。由于 $\Theta(0) = \Theta(\omega/2) = \Theta(\omega) = 0$，我们有

$$\Theta(s) < 0,\ \forall s \in (0,\omega/2), \quad \Theta(s) > 0,\ \forall s \in (\omega/2,\omega).$$

因此，

$$\Gamma_1 \setminus \{\vec{p}_1, \vec{p}_2\} \subset \{\vec{x} \in \mathbb{R}^{1,2} \,/\, x^2 < 0\}, \quad \Gamma_2 \setminus \{\vec{p}_1, \vec{p}_2\} \subset \{\vec{x} \in \mathbb{R}^{1,2} \,/\, x^2 > 0\}.$$

因此， γ 是一条具有两个顶点的简单闭曲线，即 $\gamma(0)$ 和 $\gamma(\omega/2)$。这一结论与四顶点定理（定理 2.4）相矛盾。因此， γ不可能是闭的。□

定义 3.14。由 (3.10) 给出的 BS曲线 $\gamma_{\mathfrak{p}}$ 称为模数为 $\mathfrak{p} \in \mathcal{S}$ 的标准*BS*曲线 。

注 3.15。每一条模数为 $\mathfrak{p} \in \mathcal{S}$ 的 *BS*曲线都等价于 $\gamma_{\mathfrak{p}}$，(3.10)。今后我们默认所考虑的 *BS*曲线均为其标准形式。

令 $\mathfrak{p} = (\lambda, e_2) \in \mathcal{S}$ 和 $\gamma_{\mathfrak{p}}$ 为模数为 $\mathfrak{p}$ 的标准BS曲线。借助庞加莱模型，$\gamma_{\mathfrak{p}}$ 的参数化为

$$\gamma_{\mathfrak{p}} = \frac{1}{2\sqrt{c}\,\mu_{\mathfrak{p}} + \sqrt{1+4c\mu_{\mathfrak{p}}^2}\,\cosh(\Theta_{\mathfrak{p}})}\left(\sqrt{1+4c\mu_{\mathfrak{p}}^2}\,\sinh(\Theta_{\mathfrak{p}}), 1\right).$$

动量稳定子是子群

$$\mathrm{O}_+^{\uparrow}(1,1) = \left\{ \mathrm{HR}(t) = \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) & 0 \\ \sinh(t) & \cosh(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,/\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

单值化 $\mathfrak{m}$ 是 $\mathrm{O}_+^{\uparrow}(1,1)$ 中的非平凡元素 $\mathrm{HR}(\Theta_{\mathfrak{p}}(\omega_{\mathfrak{p}}))$。设 $\Gamma = \gamma_{\mathfrak{p}}([0,\omega_{\mathfrak{p}}])$ 为基本弧，则 $|[\gamma_{\mathfrak{p}}]| = \cup_{n\in\mathbb{Z}}\mathfrak{m}^n(\Gamma)$。由于曲率

是偶函数，$||[\gamma_{\mathfrak{p}}]||$ 和 Γ 关于 Oy 轴反射不变。线段 $\{(0,v)\ /\ -1<v<1\}$ 是 $\mathrm{O}_+^{\uparrow}(1,1)$ 在 D^2 上作用的截面。经过 $(0,v)$ 的轨道 $\mathcal{O}_v$ 是 D^2 与经过 $(0,v)$、$\mathrm{p}_+=(1,0)$ 和 $\mathrm{p}_-=(-1,0)$ 的圆的交集。记 $\mathrm{O}_+^{\uparrow}(1,1)$ 分别经过 $\gamma_{\mathfrak{p}}(0)$ 和 $\gamma_{\mathfrak{p}}(\omega_{\mathfrak{p}}/2)$ 的轨道为 $\mathcal{O}^-$ 和 $\mathcal{O}^+$，它们分别称为 $\gamma_{\mathfrak{p}}$的下密切圆弧和上密切圆弧。轨迹 $||[\gamma_{\mathfrak{p}}]||$ 包含在 D^2 中由 $\mathcal{O}^+$ 和 $\mathcal{O}^-$围成的新月形区域内；在 $\gamma_{\mathfrak{p}}(n\omega_{\mathfrak{p}})$、$n\in\mathbb{Z}$处与 $\mathcal{O}^+$ 相切，并在 $\gamma_{\mathfrak{p}}(\omega_{\mathfrak{p}}/2+n\omega_{\mathfrak{p}})$、$n\in\mathbb{Z}$处与$\mathcal{O}^-$ 相切，其极限点

$$\lim_{s\to+\infty}\gamma_{\mathfrak{p}}(s)=\mathrm{p}_+\,,\qquad \lim_{s\to-\infty}\gamma_{\mathfrak{p}}(s)=\mathrm{p}_-\,.$$

选取 $\lambda\in(-\infty,\ -1)$。令 $\mathrm{L}_\lambda=(\eta_-(\lambda)\ b_0(\lambda))$，并考虑乘子为 λ 的 BS曲线 单参数族 $\{\gamma_{\mathfrak{p}}\}_{e_2\in\mathrm{L}_\lambda}$。回顾一下，函数 η_- (2.8) 的图像是模空间 $\mathcal{S}$ 的下边界，而b_0 (3.7) 的图像是上边界。函数

$$v_\lambda^+:e_2\in\mathrm{L}_\lambda\longmapsto\frac{1}{2\sqrt{c}\,e_2+\sqrt{1+4ce_2^2}}\in\mathbb{R}\,,$$

其中 $c=c(\lambda,\ e_2)\ >0$ 与 (3.1) 的 (vi) 中的定义相同，是凸函数，在$e_2=-\lambda$处取得最小值，并且满足

$$\lim_{e_2\to\eta_-(\lambda)^+}v_\lambda(e_2)=v_\lambda^*\,,\qquad \lim_{e_2\to b_0(\lambda)^+}v_\lambda(e_2)=1\,,$$

其中

$$v_\lambda^*=\frac{1}{2\sqrt{c(\lambda,\eta_-(\lambda))}\,\eta_-(\lambda)+\sqrt{1+4c(\lambda,\eta_-(\lambda))\eta_-(\lambda)^2}}<1\,.$$

令 $e_2^*(\lambda)$ 为 L_λ 中满足 $v_\lambda^+(e_2^*(\lambda))=v_\lambda^*$ 的唯一元素。

现在我们可以描述单参数族 $\{\gamma_{\mathfrak{p}}\}_{e_2\in\mathrm{L}_\lambda}$ 的运动学的主要特征。当 e_2 在区间 L_λ 内变化时，该族中的曲线趋向两个渐近位置，并经历五个中间阶段，其中包含收缩阶段和扩张阶段：

- 当 $e_2\to\eta_-(\lambda)^+$时，密切圆弧 $\mathcal{O}^+$ 和 $||[\gamma_{\mathfrak{p}}]||$ 趋近于渐近位置$\mathcal{O}_{v_\lambda^*}$。
- 当 $e_2\in(\eta_-(\lambda)\ -\lambda)$时，圆弧 $\mathcal{O}^+$ 的半径增大（即 $\mathcal{O}^+$和 $||[\gamma_{\mathfrak{p}}]||$ 发生偏转）。曲线的演化处于收缩阶段。
- 当 $e_2=-\lambda$ 时，密切圆弧的半径$\mathcal{O}^+$ 达到最大值。
- 当 $e_2\in(-\lambda,e_2^*(\lambda))$时，$\mathcal{O}^+$ 的半径减小（即 $\mathcal{O}^+$ 和 $||[\gamma_{\mathfrak{p}}]||$发生拐曲）。曲线的演化处于扩张阶段。
- 当 $e_2=e_2^*(\lambda)$时，密切圆弧 $\mathcal{O}^+$ 回到极限位置 $\mathcal{O}_{v_\lambda^*}$。
- 当 $e_2\in(e_2^*(\lambda)\ \eta_-(\lambda))$时，$\mathcal{O}^+$ 的半径减小（即 $\mathcal{O}^+$ 和 $||[\gamma_{\mathfrak{p}}]||$发生拐曲）。曲线的演化处于扩张阶段。
- 当 $e_2\to b_0(\lambda)^-$、$||[\gamma_{\mathfrak{p}}]||$ 及其密切圆弧 $\mathcal{O}^+$ 趋近于理想边界的上半圆 $\partial\mathrm{D}^2\cap\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\,/\,v>0\}$时。

图4表示乘子为 $\lambda=-1.1$时，族$\{\gamma_{\mathfrak{p}}\}_{e_2\in\mathrm{L}_\lambda}$的 BS曲线演化的所有阶段。BS曲线的轨迹以黑色表示，上方密切圆弧 $\mathcal{O}^+$ 以红色表示，下方密切圆弧 $\mathcal{O}^-$ 以蓝色表示。渐近极限位置 $\mathcal{O}_{v_\lambda^*}$ 是紫色虚线圆弧，而当 $e_2\to b_0(\lambda)^-$ 时的渐近极限位置则是理想边界的深红色虚线上半圆

。前两幅图（分别为 $e_2 = 0.92$ 和 $e_2 = 1$）展示了处于收缩阶段的两条 BS曲线。第三幅图展示了 BS曲线达到其最大收缩位置时的状态，此时上方密切圆弧的半径 $\mathcal{O}^+$ 达到最大值（$e_2 = -\lambda = 1.1$）。第四幅图（$e_2 = 1.2$）展示了随后处于扩张阶段的一条 BS曲线。第二行第一幅图（$e_2 = e_2^*(\lambda) \approx 1.28$）展示了上方密切圆弧 $\mathcal{O}^+$ 返回渐近位置 $\mathcal{O}_{v_\lambda^*}$时的 BS曲线。最后三幅图（$e_2 = 1.54$，1。55 和 1。56）描绘了处于扩张阶段的 BS曲线，它们逐渐演化至最大扩张的渐近极限（理想边界的上半圆）。

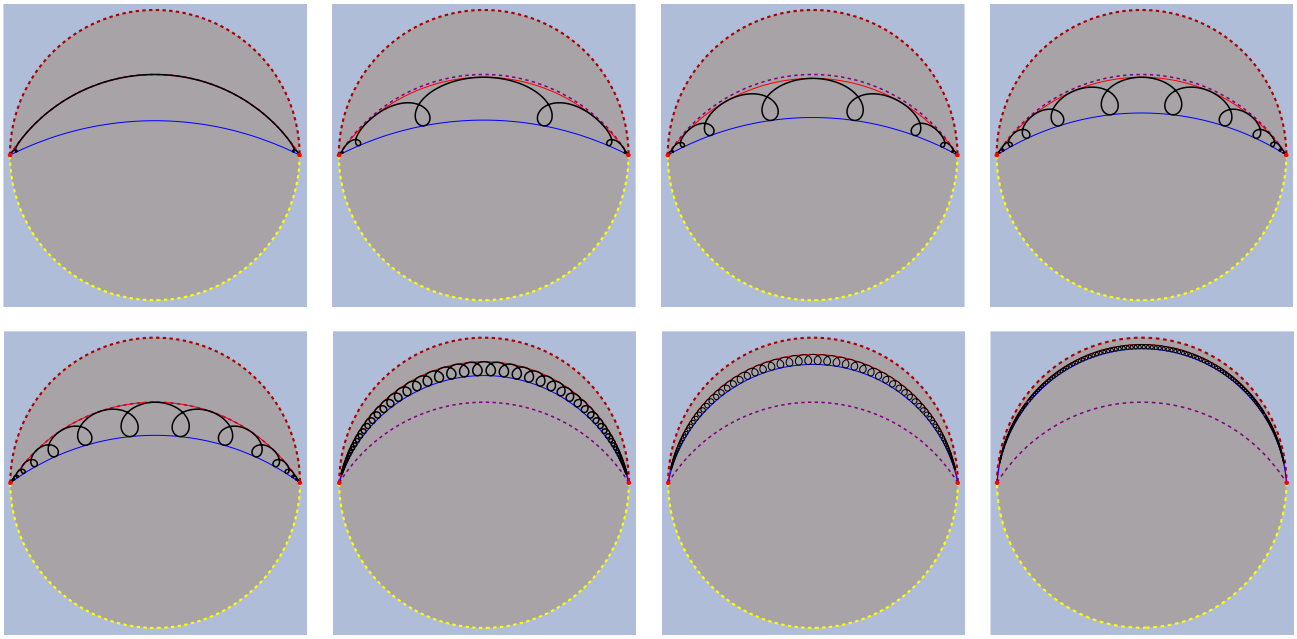

FIGURE 4. 乘子为 $\lambda = -1.1$ 且 $e_2 \in$L$_\lambda$取值递增的 BS曲线的轨迹。

3.3. BT曲线。 令 $\mathfrak{p} = (\lambda, e_2) \in \mathcal{T}$。与 $\mathfrak{p} \in \mathcal{T}$相关联的 B 曲线具有类时动量。其布拉施克不变量 $\mu_\mathfrak{p}$ 是方程 (2.4) 在 $c < 0$且 $\mu_\mathfrak{p}(0) = e_2$条件下的解。这种情形类似于球面的情形。因此，我们按照 [34] 中的方法，通过引入例外轨迹并定义径向函数和角函数来继续讨论；这些函数的性质对于描述 BT曲线至关重要。

定义 3.16。 包含于模空间 $\mathfrak{P}$ 中的曲线 $\mathcal{E} = \{(\lambda, e_2) \in \mathfrak{P} \,/\, 1 + 4ce_1^2 = 0\}$ 称为例外轨迹。

注记 3.17。例外轨迹 $\mathcal{E}$ 由以下任一方程刻画：

$$\begin{cases} (i) & e_1 + 2\lambda = 0\,, \\ (ii) & 1 + 16c\lambda^2 = 0\,, \\ (iii) & e_1^2 e_2^3 - e_1^3 e_2^2 + e_1 + e_2 = 0\,, \end{cases} \tag{3.11}$$

或者作为函数 $c:(-\infty,-\sqrt[4]{\varphi^5}/2)\to(\sqrt[4]{\varphi},+\infty)$ 的图像，其中该函数定义为

$$c(\lambda)=-\frac{2}{3}\lambda+\frac{1}{3\lambda^2}\Re\left(\sqrt[3]{-69\lambda^9+72\lambda^5-3i\lambda^3\sqrt{768\lambda^8+528\lambda^4+3}}\right), \tag{3.12}$$

其中 $\varphi=(1+\sqrt{5})/2$ 是黄金比例。参见图 *2* 和图 *5*。

设 $\eta_\pm$ 和 c 分别如 (2.8) 和 (3.12) 中所定义。定义 $a:(-\infty,-2/\sqrt[4]{27})\to\mathbb{R}$ 为

$$a(\lambda)=\begin{cases}\sqrt{\lambda^2-1}-\lambda\,, & \lambda\le-1\,,\\ \eta_-(\lambda)\,, & -1<\lambda<-2/\sqrt[4]{27}\,.\end{cases}$$

于是，对所有 $\lambda<-2/\sqrt[4]{27}$，$a(\lambda)<\eta_+(\lambda)$，且对所有$\lambda<-\sqrt[4]{\varphi^5}/2$，$a(\lambda)<c(\lambda)<\eta_+(\lambda)$。我们将 $\mathcal{T}$分解为不相交并集 $\mathcal{T}=\mathcal{T}_-\cup\mathcal{E}\cup\mathcal{T}_+$，其中包括例外轨迹 $\mathcal{E}$ 和下域（图 5 中的绿色区域），

$$\mathcal{T}_-=\{(\lambda,e_2)\in\mathcal{T}\,/\,\lambda<-\sqrt[4]{\varphi^5}/2,\ a(\lambda)<e_2<c(\lambda)\}\,,$$

以及上域（图 5 中的棕色区域），

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_+=&\{(\lambda,e_2)\in\mathcal{T}\,/\,\lambda<-\sqrt[4]{\varphi^5}/2,c(\lambda)\le e_2<\eta_+(\lambda)\}\cup\\ &\{(\lambda,e_2)\in\mathcal{T}\,/\,-\sqrt[4]{\varphi^5}/2\le\lambda<-2/\sqrt[4]{27},\ a(\lambda)<e_2<\eta_+(\lambda)\}\,.\end{aligned}$$

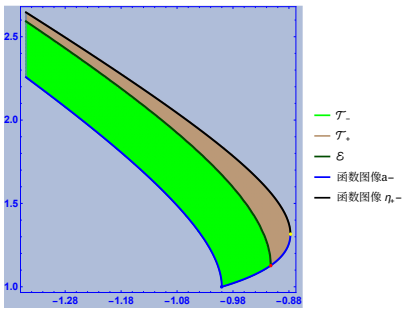

FIGURE 5. 模空间 $\mathcal{T}$的分解为 $\mathcal{T}=\mathcal{T}_-\cup\mathcal{E}\cup\mathcal{T}_+$。

定义 3.18. 令 $\mathfrak{p}=(\lambda,\ e_2)\in\mathcal{T}$，且 $\mu_\mathfrak{p}$ 为满足初始条件 $\mu_\mathfrak{p}(0)=e_2$ 的方程 (2.4) 的解，其中 $c<0$ 如 (3.1) 的 (vi) 所述。径向函数 定义为:

- 若 $\mathfrak{p}\notin\mathcal{E}$,
$$\varrho_\mathfrak{p}=\frac{\sqrt{1+4c\mu_\mathfrak{p}^2}}{2\sqrt{|c|}\,\mu_\mathfrak{p}}\,.$$
- 若 $\mathfrak{p}\in\mathcal{E}$,
$$\varrho_\mathfrak{p}=\begin{cases}\frac{\sqrt{1+4c\mu_\mathfrak{p}^2}}{2\sqrt{|c|}\mu_\mathfrak{p}}\,, & \text{on }\ [-\frac{\omega_\mathfrak{p}}{2}\,,\frac{\omega_\mathfrak{p}}{2}],\\ -\frac{\sqrt{1+4c\mu_\mathfrak{p}^2}}{2\sqrt{|c|}\mu_\mathfrak{p}}\,, & \text{on }\ [\frac{\omega_\mathfrak{p}}{2},\frac{3\omega_\mathfrak{p}}{2}]\,.\end{cases}$$

现在我们描述径向函数的主要特征（见图6）：

- 径向函数 $\varrho_\mathfrak{p}$ 对每个 $\mathfrak{p}\in\mathcal{T}$ 都是实解析、偶且周期性的。

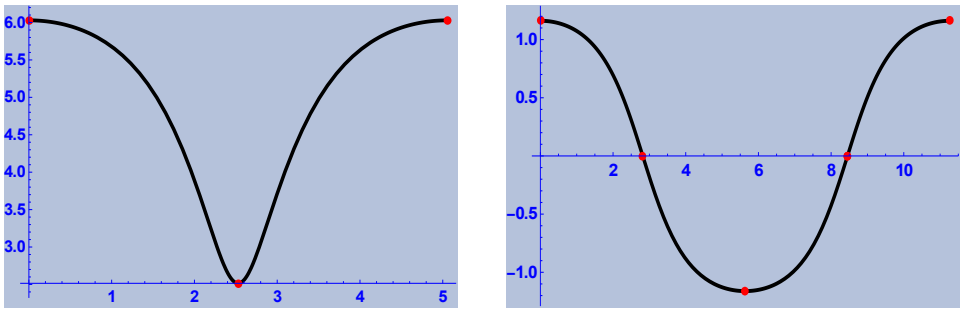

FIGURE 6. 径向函数 $\varrho_{\mathfrak{p}}$ 的图像 $\mathfrak{p} =$ 与 λ, $e_2 \in \mathcal{T}$。左：非例外情形 $\lambda = -0.99$, $e_2 = 1.05$ 表示的区间从 0 到最小周期 $\omega_{\mathfrak{p}}$。右：例外情形 $\lambda = -0.91$, $e_2 = 1.19$ 表示的区间从 0 到最小周期 $2\omega_{\mathfrak{p}}$。

- 若 $\mathfrak{p} \notin \mathcal{E}$，则 $\varrho_{\mathfrak{p}} > 0$ 的最小周期为 $\omega_{\mathfrak{p}}$。它在 $h\omega_{\mathfrak{p}}$ 处取得最大值，在 $\omega_{\mathfrak{p}}/2+h\omega_{\mathfrak{p}}$ 处取得最小值， $h \in \mathbb{Z}$。它在 $[h\omega_{\mathfrak{p}}, \omega_{\mathfrak{p}}/2+h\omega_{\mathfrak{p}}]$ 上严格递减，在 $[\omega_{\mathfrak{p}}/2 + h\omega_{\mathfrak{p}}, (h+1)\omega_{\mathfrak{p}}]$ 上严格递增， $h \in \mathbb{Z}$。
- 若 $\mathfrak{p} \in \mathcal{E}$，则 $\varrho_{\mathfrak{p}}$ 是周期函数，最小周期为 $2\omega_{\mathfrak{p}}$。它在区间 $(\omega_{\mathfrak{p}}/2 + h\omega_{\mathfrak{p}}, \omega_{\mathfrak{p}}/2 + (h+1)\omega_{\mathfrak{p}})$ 上严格为正， $h \in \mathbb{Z}$ 且 $\mathrm{mod}(h, 2) = 1$；在区间 $(\omega_{\mathfrak{p}}/2 + h\omega_{\mathfrak{p}}, \omega_{\mathfrak{p}}/2 + (h+1)\omega_{\mathfrak{p}})$ 上严格为负， $h \in \mathbb{Z}$ 且 $\mathrm{mod}(h, 2) = 0$。它在 $[h\omega_{\mathfrak{p}}, (h+1)\omega_{\mathfrak{p}}]$ 上严格递减， $\mathrm{mod}(h, 2) = 0$；在 $[h\omega_{\mathfrak{p}}, (h+1)\omega_{\mathfrak{p}}]$ 上严格递增， $\mathrm{mod}(h, 2) = 1$。

定义3.19。令 $\mathfrak{p} = (\lambda, e_2) \in \mathcal{T}$ 和 $\mu_{\mathfrak{p}}$ 为满足初始条件 $\mu_{\mathfrak{p}}(0) = e_2$ 的方程 (2.4) 的解，其中 $c < 0$ 如 (3.1) 的 (vi) 所示。角函数 定义为:

- 若 $\mathfrak{p} \notin \mathcal{E}$,

$$\Theta_{\mathfrak{p}}(s) = 2\sqrt{|c|} \int_0^s \frac{\mu_{\mathfrak{p}}^2 (\mu_{\mathfrak{p}} + 2\lambda)}{1 + 4c\mu_{\mathfrak{p}}^2}\, ds\,.$$

- 若 $\mathfrak{p} \in \mathcal{E}$,

$$\Theta_{\mathfrak{p}}(s) = -8\sqrt{|c|}\, \lambda^2 \int_0^s \frac{\mu_{\mathfrak{p}}^2}{\mu_{\mathfrak{p}} - 2\lambda}\, ds\,.$$

现在描述角函数的主要特征（见图 7）：

- 角函数 $\Theta_{\mathfrak{p}}$ 是一个最小拟周期为 $\omega_{\mathfrak{p}}$的奇拟周期函数。

- 当 $s \to +\infty$ 时，函数 $\Theta_{\mathfrak{p}}$ 趋于 $-\infty$；当 $s \to -\infty$时，趋于 $+\infty$。
- 若 $\mathfrak{p} \in \mathcal{E} \cup \mathcal{T}_+$， $\Theta_{\mathfrak{p}}$ 严格递减，在$\omega_{\mathfrak{p}}/2 + h\omega_{\mathfrak{p}}$, $h \in \mathbb{Z}$ 处有上升拐点，在 $\omega_{\mathfrak{p}} + h\omega_{\mathfrak{p}}$, $h \in \mathbb{Z}$处有下降拐点。
- 若 $\mathfrak{p} \in \mathcal{T}_-$， $\Theta_{\mathfrak{p}}$ 在 $s_{\mathfrak{p}}^* \in (0, \omega_{\mathfrak{p}}/2)$ 处有相对极小值，在 $s_{\mathfrak{p}}^{**} = \omega_{\mathfrak{p}} - s_{\mathfrak{p}}^*$ 处有相对极大值。区间 $[0, \omega_{\mathfrak{p}}]$ 内没有其他临界点。 $\Theta_{\mathfrak{p}}$ 在 $\omega_{\mathfrak{p}}/2 + h\omega_{\mathfrak{p}}$, $h \in \mathbb{Z}$ 处有下降拐点，在 $\omega_{\mathfrak{p}} + h\omega_{\mathfrak{p}}$, $h \in \mathbb{Z}$ 处有上升拐点。

在介绍了径向函数和角函数并描述了它们的行为之后，我们可以继续进行 BT 曲线的参数化。

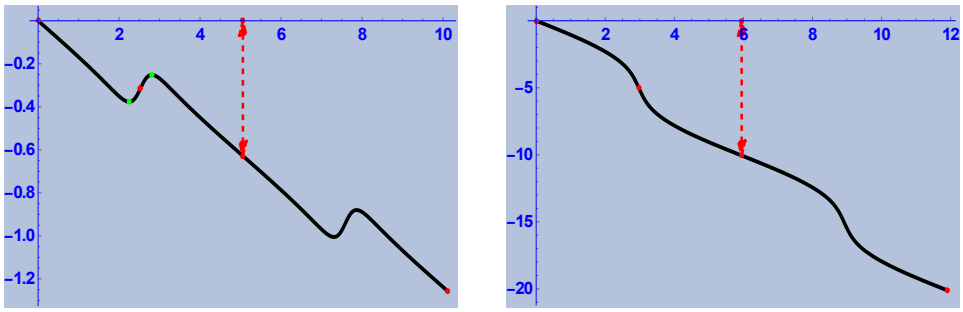

FIGURE 7. $\Theta_{\mathfrak{p}}$ $\mathfrak{p} = \lambda\ e_2\ \in$ 角函数 $\mathcal{T}$ 0 $2\omega_{\mathfrak{p}}$ $\mathfrak{p} \in \mathcal{T}_-$ 的图像（,），绘制了两个最小周期，从到。左：情形 $\lambda = -0.99$ 和 $e_2 = 1.05$。右：情形 $\mathfrak{p} \in \mathcal{T}_+$，其中 $\lambda = -0.9$ 和 $e_2 = 1.24$。虚线箭头表示值 $\Theta_{\mathfrak{p}}(\omega_{\mathfrak{p}})$。如果该箭头的长度是 2π 的有理数倍，则 BT 曲线 $\gamma_{\mathfrak{p}}$ 将是闭合的（见第 4 节）。

定理 3.20。 设 $\mathfrak{p} = (\lambda、\ e_2)\ \in \mathcal{T}$ 和 $\mu_{\mathfrak{p}}$ 是满足 (2.4) 且初始条件为 $\mu_{\mathfrak{p}}(0) = e_2$ 的解，其中 $c < 0$ 如 ***(3.1)*** 中的 (vi) 所示。设 $\varrho_{\mathfrak{p}}$ 和 $\Theta_{\mathfrak{p}}$ 分别为上文定义的径向函数和角函数。那么，

$$\gamma_{\mathfrak{p}} = \left(\frac{1}{2\sqrt{|c|}\,\mu_{\mathfrak{p}}}, -\varrho_{\mathfrak{p}} \cos(\Theta_{\mathfrak{p}}), \varrho_{\mathfrak{p}} \sin(\Theta_{\mathfrak{p}}) \right) \tag{3.13}$$

是模数为 $\mathfrak{p}$、动量为 $\vec{\xi} = (\sqrt{|c|}, 0, 0)$ 的 *BT* 曲线。

证明。 </style}该定理的证明与前述情形类似（见定理3.10）。□

定义 3.21。 由 (3.13) 给出的 BT 曲线 $\gamma_{\mathfrak{p}}$ 称为模数为 $\mathfrak{p} \in \mathcal{T}$ 的标准 *BT* 曲线。

注3.22。每条模数为 $\mathfrak{p} \in \mathcal{T}$ 的 *BT* 曲线都等价于 $\gamma_{\mathfrak{p}}$，(3.13)。从现在起，我们默认所讨论的 *BT* 曲线均为标准形式。

设 $\mathfrak{p} = (\lambda, e_2) \in \mathcal{T}$ 和 $\gamma_{\mathfrak{p}}$ 为模数为 $\mathfrak{p}$的标准 BT 曲线。在庞加莱 ´模型中，$\gamma_{\mathfrak{p}}$ 可写为

$$\gamma_{\mathfrak{p}} = \frac{2\sqrt{|c|}\,\varrho_{\mathfrak{p}}\mu_{\mathfrak{p}}}{1 + 2\sqrt{|c|}\,\mu_{\mathfrak{p}}}(-\cos(\Theta_{\mathfrak{p}}), \sin(\Theta_{\mathfrak{p}})). \tag{3.14}$$

因此，$|[\gamma_{\mathfrak{p}}]|$ 包含于区域

$$\mathrm{D}^2_{\mathfrak{p}} = \{\zeta \in \mathrm{D}^2 / \mathrm{r}'_{\mathfrak{p}} \le |\zeta| \le \mathrm{r}''_{\mathfrak{p}}\},$$

其中

$$\begin{cases} r'_{\mathfrak{p}} = \min\left|\frac{2\sqrt{|c|}\,\varrho_{\mathfrak{p}}\mu_{\mathfrak{p}}}{1+2\sqrt{|c|}\mu_{\mathfrak{p}}}\right| = \frac{\sqrt{1+4ce_1^2}}{1+2\sqrt{|c|}e_1}, \\ r''_{\mathfrak{p}} = \max\left|\frac{2\sqrt{|c|}\,\varrho_{\mathfrak{p}}\mu_{\mathfrak{p}}}{1+2\sqrt{|c|}\mu_{\mathfrak{p}}}\right| = \frac{\sqrt{1+4ce_2^2}}{1+2\sqrt{|c|}e_2}. \end{cases}$$

由此可知，$r'_{\mathfrak{p}} = 0$ 当且仅当 $1 + 4ce_1^2 = 0$，换句话说，根据例外轨迹的定义，当且仅当 $\mathfrak{p} \in \mathcal{E}$。因此，

轨迹 $||[\gamma_{\mathfrak{p}}]||$ 经过原点，当且仅当 $\mathfrak{p} \in \mathcal{E}$。在这种情形下，$\mathrm{D}^2_{\mathfrak{p}}$ 是一个圆盘。否则，$\mathrm{D}^2_{\mathfrak{p}}$ 是一个环域，围成 $\mathrm{D}^2_{\mathfrak{p}}$的外圆和内圆（记作 $\mathcal{O}^{\pm}$）称为外密切圆和内密切圆。轨迹 $||[\gamma_{\mathfrak{p}}]||$在 $\gamma_{\mathfrak{p}}(h\omega_{\mathfrak{p}})$ 处与 $\mathcal{O}^{+}$ 相切，$h \in \mathbb{Z}$；并在 $\gamma_{\mathfrak{p}}(\omega_{\mathfrak{p}}/2 + h\omega_{\mathfrak{p}})$ 处与 $\mathcal{O}^{-}$ 相切，$h \in \mathbb{Z}$。由 (3.13) 可知，$\gamma_{\mathfrak{p}}$ 是闭合的，当且仅当 $\Theta_{\mathfrak{p}}(\omega_{\mathfrak{p}})/2\pi \in \mathbb{Q}$。否则，$||[\gamma_{\mathfrak{p}}]||$ 是 $\mathrm{D}^2_{\mathfrak{p}}$的稠密子集。图 11 和图 12 将展示几个闭合的例子。

4. BT-Strings

本节将研究 BT 弦的存在性及其对应等单值族的运动学。如上所述，当且仅当 BT 曲线 $\gamma_{\mathfrak{p}}$ 在波长 $\omega_{\mathfrak{p}}$ 处取值的角函数 $\Theta_{\mathfrak{p}}$ 是 2π 的有理倍数时，该曲线才是闭合的（量 $\Theta_{\mathfrak{p}}(\omega_{\mathfrak{p}})$ 在图 7 中用虚线箭头表示）。为分析这一闭合条件，我们将定义两个至关重要的函数。

定义 4.1. 设 $\mathfrak{p} \in \mathcal{T}$和 $\gamma_{\mathfrak{p}}$ 为模数为 $\mathfrak{p}$的 BT 曲线。周期映射 $\mathcal{P} : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ 定义为

$$\mathcal{P}(\mathfrak{p}) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\Theta_{\mathfrak{p}}(\omega_{\mathfrak{p}}) + 1\,, & \text{if } \mathfrak{p} \in \mathcal{T}_{-}\,, \\ -\frac{1}{2\pi}\Theta_{\mathfrak{p}}(\omega_{\mathfrak{p}}) + \frac{1}{2}\,, & \text{if } \mathfrak{p} \in \mathcal{E}\,, \\ -\frac{1}{2\pi}\Theta_{\mathfrak{p}}(\omega_{\mathfrak{p}})\,, & \text{if } \mathfrak{p} \in \mathcal{T}_{+}\,, \end{cases}$$

其中 $\Theta_{\mathfrak{p}}$ 是角函数，$\omega_{\mathfrak{p}}$ 是波长，即 $\gamma_{\mathfrak{p}}$的布拉施克不变量的最小周期。

注 4.2。由于 $\mathcal{P}(\mathfrak{p}) \cong -\Theta_{\mathfrak{p}}(\omega_{\mathfrak{p}})/2\pi \bmod(\mathbb{Q})$，我们得出结论：$\gamma_{\mathfrak{p}}$ 闭合（即为 *BT* 弦）当且仅当 $\mathcal{P}(\mathfrak{p}) \in \mathbb{Q}$。因此，要证明 *BT* 弦的存在性，只需验证：对于固定的乘子 λ，$\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}_{\lambda}$ 的像不是常数，即当 e_2 在 $\mathrm{I}_{\lambda} = (a(\lambda)\ \eta_{+}(\lambda))$ 中变化时，$\mathcal{P}_{\lambda}(e_2)$ 会取不同的值。回想一下，函数 a 的图像是模空间 $\mathcal{T}$的下边界，而函数 η_{+} 的图像是上边界。

定义 4.3。设 $\mathfrak{p} \in \mathcal{T}$和 $\gamma_{\mathfrak{p}}$ 是模数为 $\mathfrak{p}$的 BT 曲线。函数$\chi : (-\infty, -2/\sqrt[4]{27}) \to \mathbb{R}$ 定义为

$$\chi(\lambda) = \frac{\eta_{+}(\lambda)^4 - 1}{\sqrt{\eta_{+}(\lambda)^8 - 4\eta_{+}(\lambda)^4 + 3}} \in \mathbb{R}\,,$$

其中 $\eta_{+}(\lambda)$ 是在 (2.8) 中定义的函数。

注4.4。函数 χ 严格递增；当 $\lambda \to -\infty$时趋于1，当 $\lambda \to -2/\sqrt[4]{27}^{-}$时趋于 $+\infty$。

我们用 J_{λ} 表示开区间

$$\mathrm{J}_{\lambda} = \begin{cases} (1, \chi(\lambda))\,, & \lambda \le -1\,, \\ (\chi(\lambda), +\infty)\,, & -1 < \lambda < -2/\sqrt[4]{27}\,. \end{cases}$$

下面的结果表明，对每个乘子 $\lambda < -2/\sqrt[4]{27}$，都存在无穷多个 BT 弦。

定理 4.5。对于每个 $\lambda < -2/\sqrt[4]{27}$ 和每个 $q = m/n \in \mathrm{J}_{\lambda} \cap \mathbb{Q}$，都存在 $\mathfrak{p} = (\lambda、\ e_2) \in \mathcal{T}$，使得 $\gamma_{\mathfrak{p}}$ 是一个 *BT* 串，并且具有 $\mathcal{P}(\mathfrak{p}) = q$。

证明。 这一结果的证明直接来自以下涉及周期映射极限的断言：

命题。 设 $\mathrm{I}_\lambda = (a(\lambda)\ \eta_+(\lambda))$。由 $\mathcal{P}_\lambda(e_2)$ 定义的周期映射 $\mathcal{P}_\lambda : \mathrm{I}_\lambda \to \mathbb{R}$ 连续。此外：

- *If* $\lambda \le -1$,
$$\lim_{e_2 \to a(\lambda)^+} \mathcal{P}_\lambda(e_2) = 1\,, \qquad \lim_{e_2 \to \eta_+(\lambda)^-} \mathcal{P}_\lambda(e_2) = \chi(\lambda)\,.$$
- *If* $-1 < \lambda < -2/\sqrt[4]{27}$,
$$\lim_{e_2 \to a(\lambda)^+} \mathcal{P}_\lambda(e_2) = +\infty\,, \qquad \lim_{e_2 \to \eta_+(\lambda)^-} \mathcal{P}_\lambda(e_2) = \chi(\lambda)\,.$$

为清晰起见，该命题的证明将推迟至附录。□

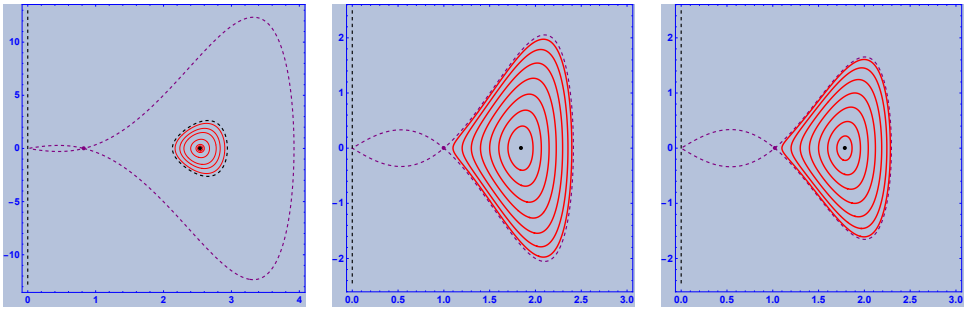

FIGURE 8.左：修正不变量特征 $\mathfrak{S}_{\lambda,e_2},\ e_2 \in (a(\lambda)\ \eta_+(\lambda))$（红色）和签名 $\mathfrak{S}_{\lambda,a(\lambda)}$（黑色虚线），其中 $\lambda = -1.3$。中：修正不变量特征 $\mathfrak{S}_{-1,e_2},\ e_2 \in (1, \eta_+(\lambda))$（红色）和签名 $\mathfrak{S}_{-1,1}$（黑色虚线）。右：修正不变量特征 $\mathfrak{S}_{\lambda,e_2},\ e_2 \in (a(\lambda)\ \eta_+(\lambda))$（红色）和签名 $\mathfrak{S}_{\lambda,a(\lambda)}$（黑色虚线），其中 $\lambda = -0.98$。

我们预期函数 $\mathcal{P}_\lambda :\ e_2 \to \mathcal{P}(\lambda,\ e_2)$ 的一些性质，这些性质将在附录中作为 BT 弦存在性证明的一部分加以证明。此处旨在突出函数 $\mathcal{P}_\lambda$ 的行为与乘子为 λ 的临界曲线的修正不变量特征的几何之间的相互关系。记 $\mathfrak{S}_{\lambda,\ e_2}$ 为模数为 $\mathfrak{p} = (\lambda,\ e_2) \in \mathfrak{P}$ 的 B 曲线的修正不变量特征。需要考虑三种情形：

(1) 情形 $\lambda < -1$。那么，$(\lambda, a(\lambda)) \in \mathcal{L}$ 是某条 BL 曲线的模数，其修正不变量特征 $\mathfrak{S}_{\lambda,a(\lambda)}$ 是闭合的。修正不变量特征 $\mathfrak{S}_{\lambda,e_2},\ e_2 \in \mathrm{I}_\lambda$ 位于由 $\mathfrak{S}_{\lambda,a(\lambda)}$围成的内部区域内。当 $e_2 \to a(\lambda)^+$ 时，签名 $\mathfrak{S}_{\lambda,e_2}$ 趋向于 $\mathfrak{S}_{\lambda,a(\lambda)}$；当 $e_2 \to \eta_+(\lambda)^-$，$\mathfrak{S}_{\lambda,e_2}$ 收缩时，则趋向于稳定平衡点 $(\eta_+(\lambda), 0)$（见图 8 左图）。函数 $\mathcal{P}_\lambda$ 严格递增（这一结论仅有实验依据支持）。当 $e_2 \to a(\lambda)^+$，$\mathcal{P}_\lambda$ 趋向于 1，且当 $e_2 \to \eta_+(\lambda)^-$，$\mathcal{P}_\lambda$趋向于 $\chi(\lambda)$。

(2) 情形 $\lambda = -1$。那么， $a(-1) = 1$ ，且签名 $\mathfrak{S}_{-1}$,1 是不稳定平衡点 $(1, 0)$。令 $\mathfrak{S}^*_{-1}$ 为第一类例外修正不变量特征。那么， $\mathfrak{S}^*_{-1} \cup \{(1, 0)\}$ 是一条简单的（奇异）闭曲线。由 $\mathfrak{S}^*_{-1} \cup \{(1, 0)\}$ 围成的区域包含稳定平衡点 $(\eta_+($ $-1), 0)$。签名 $\mathfrak{S}_{-1,e_2}$, $e_2 \in \mathrm{I}_{-1}$ 位于由 $\mathfrak{S}^*_{-1} \cup \{(1, 0)\}$围成的内部区域内。当 $e_2 \to 1^+$, $\mathfrak{S}_{\lambda,e_2}$ 趋向于 $\mathfrak{S}^*_{-1} \cup \{(1, 0)\}$ ，并且当 $e_2 \to \eta_+(\lambda)^-$, $\mathfrak{S}_{\lambda,e_2}$ 收缩至稳定平衡点时（见图 8 中图），函数 $\mathcal{P}_\lambda$ 严格递增（同样，这一结论有实验依据支持）。当 $e_2 \to 1^+$, $\mathcal{P}_\lambda$ 趋向于 1，且当 $e_2 \to \eta_+(-1)^-$, $\mathcal{P}_\lambda$趋向于 $\chi(-1)$。

（3）情形 $-1 < \lambda < -2/\sqrt[4]{27}$。则 $a(\lambda) > 1$ ，且签名 $\hat{}\mathfrak{S}_{\lambda,a(\lambda)}$ 是不稳定平衡点 $(a(\lambda), 0)$。令 $\mathfrak{S}^*_\lambda$ 为第一类特殊修正不变量特征。则 $\mathfrak{S}^*_\lambda \cup \{(a(\lambda), 0)\}$ 是一条简单的（奇异）闭曲线。与前一种情形一样，由 $\hat{}\mathfrak{S}^*_\lambda \cup \{(a(\lambda), 0)\}$ 围成的区域包含稳定平衡点和签名 $\hat{}\mathfrak{S}_{\lambda,e_2}$, $e_2 \in \mathrm{I}_\lambda$。当 $e_2 \to a(\lambda)^+$ 时， $\hat{}\mathfrak{S}_{\lambda,e_2}$ 趋于 $\hat{}\,\mathfrak{S}^*_\lambda \cup \{(1, 0)\}$ ；当 $\hat{}e_2 \to \eta_+(\lambda)^-$ 时， $\mathfrak{S}_{\lambda,e_2}$ 收缩至稳定平衡点（见图 8 右侧的图）。当 $e_2 \to \eta_+(\lambda)^-$ 时， $\mathcal{P}_\lambda$ 趋于 $\chi(\lambda)$，并且当 $e_2 \to a(\lambda)^+$ 时， $\mathcal{P}_\lambda = O\left(\log(4/\sqrt{e_2 - a(\lambda)})\right)$。

注记 4.6。与其他情形不同，当 $\lambda > -1$时，函数 $\mathcal{P}_\lambda$ 不一定单调。实验依据表明，存在一个λ $(\lambda_* \approx -0.98147772)$ 的值，使得对于每个 $\lambda \in (-1, \lambda_*)$， $\mathcal{P}_\lambda$ 在区间 $(a(\lambda)$ $\eta_+(\lambda))$内有唯一的最小值点，并且对于每个 $\lambda \in]\lambda_*, -2/\sqrt[4]{27})$ ，它严格递减（见图9）—这与球面情形有很大不同；实验表明，在球面情形下， $\mathcal{P}_\lambda$ 始终单调 [34]。

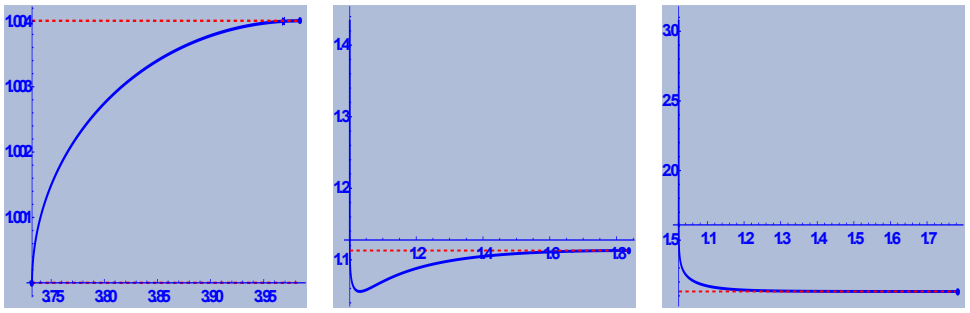

FIGURE 9. $\mathcal{P}_\lambda$ $\lambda =$ 函数的图像。从左到右: -1.3, -0.999, 和 -0.98。

4.1. 周期映射的纤维。 考虑向量场 $\vec{P}$: $\mathfrak{p} = (\lambda,\ e_2) \in \mathcal{T} \to (\partial_{e_2}\mathcal{P},\ -\partial_\lambda \mathcal{P})$，其中 $\mathcal{P}$ 是周期映射（图示见图10左图）。根据实验依据，该向量场始终不为零，且其第二个分量为负，即周期映射 $\mathcal{P}$ 随 λ递增。然而，

正如前一条注释所强调的， $\mathcal{P}$ 关于e_2可能并非单调。因此可以得出以下结论：

- 映射 $\mathcal{P}: \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ 的纤维是 P 的积分曲线。
- 对于每个 $q > 1$，纤维 $\mathcal{T}_q = \mathcal{P}^{-1}(q)$ 都是一个简单开弧，其边界点为 $\mathfrak{p}_0 = (-1,\ 1)$ 和 $\mathfrak{p}_q = (\lambda_q^*,\ e_{q,\,2}^*)$，其中

$$\lambda_q^* = -\frac{1+(e_{q,2}^*)^4}{2(e_{q,2}^*)^3}, \qquad \frac{(e_{q,2}^*)^4-1}{\sqrt{(e_{q,2}^*)^8-4(e_{q,2}^*)^4+3}} = q\,.$$

  更确切地说，存在一个光滑函数 $\lambda_q : \mathrm{J}_q \to \mathbb{R}$，定义在开区间 $\mathrm{J}_q = (1,\ e_{q,\,2}^*)$ 上，使得 $\mathfrak{p}_q : e_2 \in \mathrm{J}_q \to (\lambda_q(e_2),\ e_2)$ 是 $\mathcal{T}_q$ 的参数化。此外，$\lambda_q(1) = -1$且 $\lambda_q(e_{q,\,2}^*) = -\lambda_q^*$（见图10）。

- 纤维 $\mathcal{T}_q$ 与例外轨迹横截地相交于唯一一点 $\hat{}\mathfrak{p}_q = (\hat{}\lambda_2,\ \hat{}e_{q,\,2})$（见图10右侧）。

- 当 $q \to 1^+$ 时，纤维 $\mathcal{T}_q$ 趋于 $\mathcal{L}$。若 $q \to +\infty$，纤维 $\mathcal{T}_q$ 趋于弧段 $\eta_-[(-1,\ -2/\sqrt[4]{27})]$（图10右侧所示的绿色弧段）。

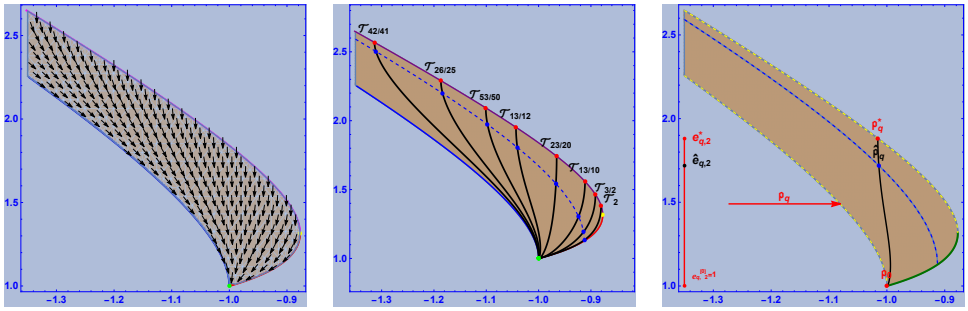

FIGURE 10. 左：向量场 $\vec{P} = (\partial_{e_2}\mathcal{P},\ -\partial_\lambda\mathcal{P})$ 的图示。中：若干个 q 取值下的纤维 $\mathcal{T}_q$。右：纤维 $\mathcal{T}_{11/10}$。

4.2.等单值族。 </style}设 为有理数。那么，是一个 BT 弦单参数族，即特征数为 的等单值族。下面列出等单值族的一些重要几何性质：

(1) 若 $e_2 \to 1^+$, $|[\gamma_{\mathfrak{p}_q(e_2)}]|$ 趋于 D 的理想边界[2]（见图 11 的第一幅图）。(2) 若 $e_2 \to e_{q,\,2}^{*\,-}$, $|[\gamma_{\mathfrak{p}_q(e_2)}]|$ 趋于以原点为中心、半径为 $\mathcal{C}_q$ 的圆，

$$r_q = \frac{1}{e_{q,2}^* + \sqrt{(e_{q,2}^*)^4-1}}\,.$$

（见图 11 的最后一张图像。）

（3）轨迹 $|[\gamma_{\mathfrak{p}_q(e_2)}]|$ 经过原点，当且仅当 $e_2 = \hat{}e_{q,2}$（见图 11 第四幅图所示的曲线）。

（4）BT 弦从来都不是简单的，不过其多重点是可接受的，也就是说，这些点处的切向量并不相等（详见图 12）。

(5) 等单值族 $\mathcal{G}_q$ 的 BT 弦具有相同的稳定子，即由绕原点旋转角度 $2\pi m/n$ 生成的、阶为 n 的群 R_n。由于 κ 为偶数，这些弦也关于水平轴反射保持不变。若 $n=1$，则该反射是唯一的剩余对称性。特别地，n 是该等单值族中弦的波数。

(6) 数值 m 是属于 $\mathcal{G}_q$ 的弦的双曲转数。换言之，m 是 Frenet标架在 $\mathrm{O}^{\uparrow}_{+}(1,2)$ 中的同伦类，其中 $\mathrm{O}^{\uparrow}_{+}(1,2)$ 被识别为 $\mathrm{D}^2\times\mathbb{S}^1$ [11, 39]。若 $e_2\in(1,\hat{}e_{q,2})$，则 $m-n$ 是 $\gamma_{\mathfrak{p}_q(e_2)}$ 在穿孔圆盘 $\dot{\mathrm{D}}^2=\mathrm{D}^2\setminus\{(0,0)\}$ 中的同伦类（采用显然的识别 $\pi_1(\dot{\mathrm{D}}^2)\cong\mathbb{Z}$）。若 $e_2\in(\hat{}e_{q,2},e^*_{q,2})$，则 m 是 $\gamma_{\mathfrak{p}_q(e_2)}$ 在 $\dot{\mathrm{D}}^2$ 中的同伦类。

˜(7) 函数 $\omega_q:e_2\in\mathrm{J}_q\to\omega_{\gamma_{\mathfrak{p}_q(e_2)}}\in\mathbb{R}$ 严格递减，并且满足

$$\lim_{e_2\to 1^+}\omega_q(e_2)=+\infty\,,\qquad \lim_{e_2\to e^{*}_{q,2}{}^-}\omega_q(e_2)=\frac{4q\pi r_q}{1-r_q^2}\,.$$

注释 4.7。由 *(5)*、*(6)* 和 *(7)* 可知，*BT* 弦由三个全局几何不变量刻画：波数（即对称群的阶）、双曲转数和长度。

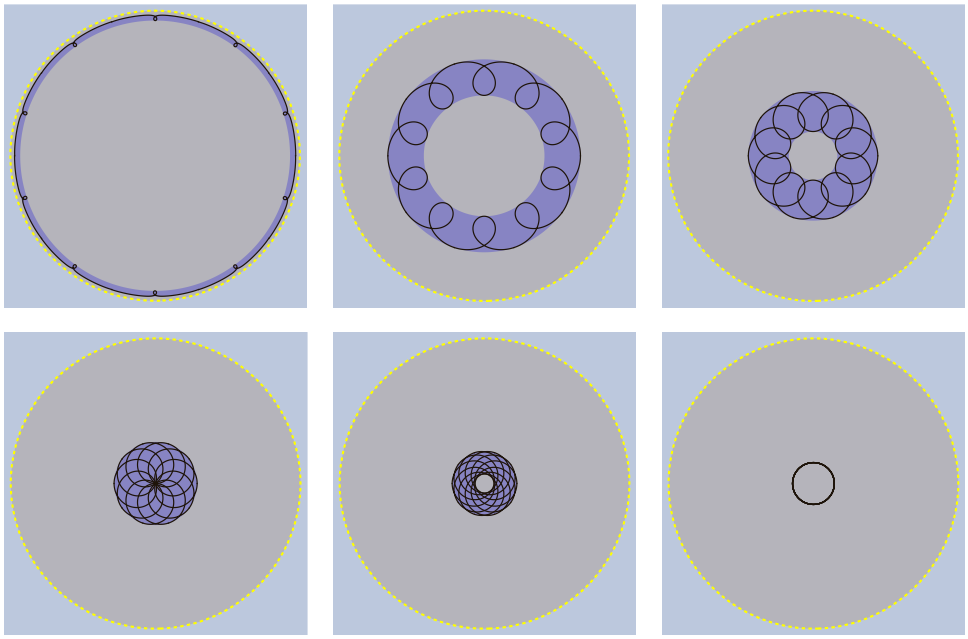

FIGURE 11. BT 弦 $|[\gamma_{\mathfrak{p}_q(e_2)}]|$ 的轨迹，其中 $q=11/10$ 和 e_2 在 ˜$\mathrm{J}^{11/10}$ 中递增。

图 11 展示了特征数为$q = 11/10$的 BT 弦轨迹。参数 e_2 在区间 $J^{11/10} = (1, e^*_{11/10,\,2})$ 内变化，其中$e^*_{11/10,\,2} \approx 1.8812$。例外值 $\hat{e}_{11/10,\,2}$ 约为 1.71966。图 11 中的曲线分别对应于 $e_2 \approx 1$, $e_2 = 1.26$, $e_2 = 1.53$, $e_2 = \hat{e}_{11/10,\,2}$, $e_2 = 1.79$，而最后一条曲线是圆 $\mathcal{C}_{11/10}$。该族中的 BT 弦具有十重旋转对称性。若 $e_2 < \hat{e}_{11/10,\,2}$，则穿孔圆盘中的同伦类为 1；若 $e_2 > \hat{e}_{11/10,\,2}$，则同伦类为 11。

注释 4.8。随着 e_2 在区间 J_q 内增加，等单值族 $\mathcal{G}_q$ 中的曲线会经过不同的同痕类。更确切地说，令 $j[q]$, $q = m/n$ 定义如下：

$$j[q] = (n + \mathrm{mod}(n, 2))/2 - \delta_{1,n}\,,$$

其中 $\delta_{1,\,n}$ 是克罗内克 δ。等单值族 $\mathcal{G}_q$ 中的 *BT* 弦有 $2j[q] + 1$ 个不同的同痕类。

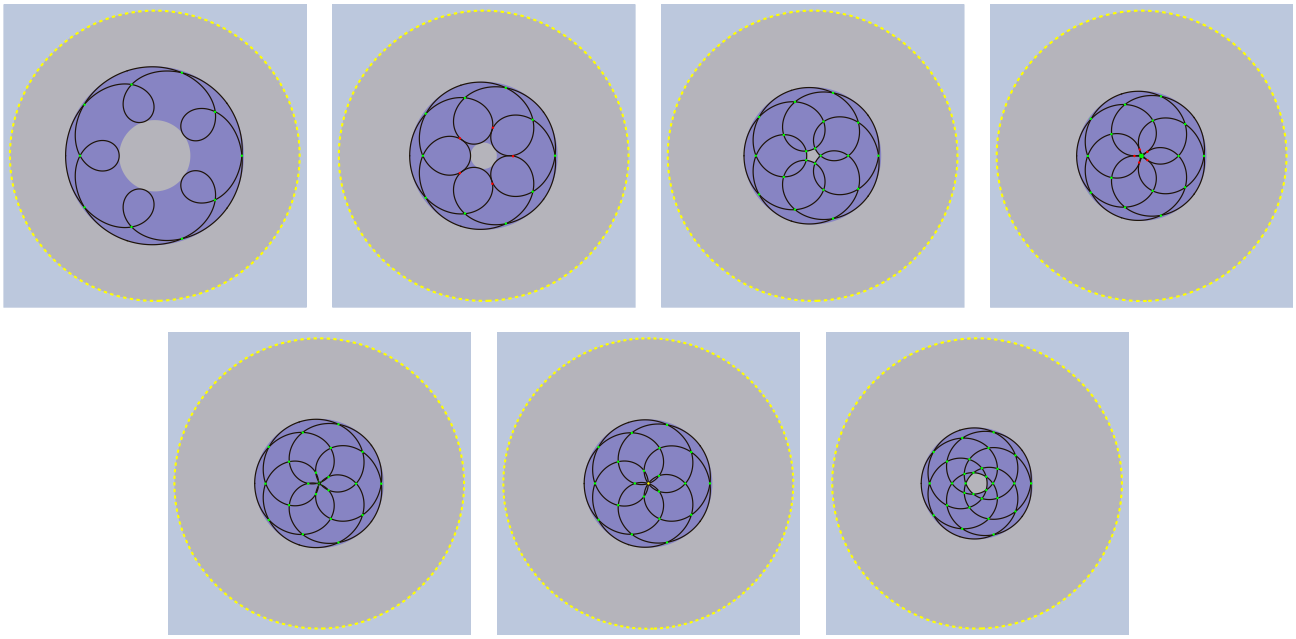

FIGURE 12. BT 弦$|[\gamma_{\mathfrak{p}_q(e_2)}]|$ 在 $q = 7/5$ 和 e_2 随 $J^{7/5}$ 增大时的轨迹。普通双点以绿色圆点表示，相切容许双点以红色圆点表示，重数大于二的多重点以黄色表示。

图 12 所示的曲线是等单值族 $\mathcal{G}_{7/5}$ 中七个弦同痕类的代表。同一图中也展示了 BT 弦的多重点。

5. Appendix. Proof of Theorem 4.5

在本附录中，我们将证明定理 4.5。如第 4 节所述，该证明源于关于周期映射 $\mathcal{P}_\lambda$的极限的断言。反过来，该断言又由以下五个引理得出：

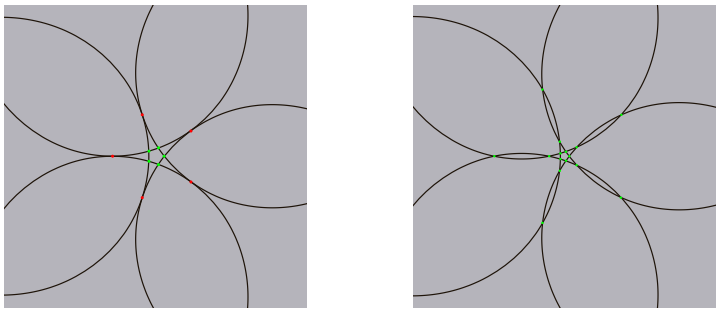

FIGURE 13. 图 12 中第四幅和第五幅图的放大图。

引理5.1。 如果 $\lambda \in [-\sqrt[4]{\varphi^5}/2, -2/\sqrt[4]{27})$ 其中 $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ 为黄金比例，则周期映射 $\mathcal{P}_\lambda$ 是实解析的。

证明。 令 g 和 m 如 (3.5) 中所定义。设

$$
(5.1)\qquad \begin{cases} (i) & \mathtt{n}_1 = \dfrac{\left(1-2\sqrt{|c|}\,e_4\right)(e_2-e_1)}{\left(1-2\sqrt{|c|}\,e_1\right)(e_2-e_4)}, \\ (ii) & \mathtt{n}_2 = \dfrac{\left(1+2\sqrt{|c|}\,e_4\right)(e_2-e_1)}{\left(1+2\sqrt{|c|}\,e_1\right)(e_2-e_4)}, \\ (iii) & \mathtt{A} = -\frac{\mathtt{g}e_4(e_4+2\lambda)}{1+4ce_4^2} \\ (iv) & \mathtt{B} = -\dfrac{\mathtt{g}\left(1+4\sqrt{|c|}\,\lambda\right)(e_1-e_4)}{4\sqrt{|c|}\left(1-2\sqrt{|c|}\,e_4\right)\left(1-2\sqrt{|c|}\,e_1\right)}, \\ (v) & \mathtt{C} = \dfrac{\mathtt{g}\left(1-4\sqrt{|c|}\,\lambda\right)(e_1-e_4)}{4\sqrt{|c|}\left(1+2\sqrt{|c|}\,e_4\right)\left(1+2\sqrt{|c|}\,e_1\right)}. \end{cases}
$$

若固定 λ，则它们是 $e_2 \in \mathrm{I}_\lambda = (a(\lambda)\ \eta_+(\lambda))$ 的函数（见注4.2），分别记为 $\mathtt{g}_\lambda$、$\mathtt{m}_\lambda$、$\mathtt{n1},_\lambda$、$\mathtt{n2},_\lambda$、$\mathtt{A}_\lambda$、$\mathtt{B}_\lambda$ 和 $\mathtt{C}_\lambda$。根据 (3.11)，$\mathtt{B}_\lambda$ 和 $\mathtt{n1},_\lambda$定义在 $\mathcal{T}\setminus\mathcal{E}$ 上。函数 $\mathtt{g}_\lambda$、$\mathtt{m}_\lambda$、$\mathtt{n2},_\lambda$、$\mathtt{A}_\lambda$和 $\mathtt{C}_\lambda$均为实解析函数。若$\lambda \in [-\sqrt[4]{\varphi^5}/2, -2/\sqrt[4]{27})$，则 $\mathtt{n1},_\lambda$ 和 $\mathtt{B}_\lambda$ 也为实解析函数。相反，若 $\lambda < -\sqrt[4]{\varphi^5}/2$，则 $\mathtt{n1},_\lambda$ 和 $\mathtt{B}_\lambda$ 在 $\mathrm{I}_\lambda \setminus \{c(\lambda)\}$ 上为实解析函数，且

$$
\lim_{e_2 \to c(\lambda)^\pm} \mathtt{n}_{1,\lambda}(e_2) = -\infty, \qquad \lim_{e_2 \to c(\lambda)^\pm} \mathtt{B}_\lambda(e_2) = \pm\infty.
$$

回顾一下， $c(\lambda)$在 (3.12) 中定义，其图像表示例外轨迹$\mathcal{E}$。

若 $\mathfrak{p} = (\{\mathtt{v2},\ e_2) \notin \mathcal{E}$，则

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2\pi}\Theta_\mathfrak{p}(\omega_\mathfrak{p}) &= -\frac{\sqrt{|c|}}{\pi}\int_0^{\omega_\mathfrak{p}} \frac{\mu_\mathfrak{p}^2(\mu_\mathfrak{p}+2\lambda)}{1+4c\mu_\mathfrak{p}^2}\,ds = \\
&= -\frac{2\sqrt{|c|}}{\pi}\int_{e_2}^{e1} \frac{\mu\,(\mu+2\lambda)}{(1+4c\mu^2)\sqrt{-(\mu-e_1)(\mu-e_2)(\mu-e_3)(\mu-e_4)}}\,d\mu\,.
\end{aligned}
$$

最后一个积分记作 $\mathfrak{I}_\mathfrak{p}$，可写为

$$
(5.2)\qquad \mathfrak{I}_\mathfrak{p} = \frac{2\sqrt{|c|}}{\pi}\left(\mathtt{AK}(\mathtt{m}) + \mathtt{B}\Pi(\mathtt{n}_1,\mathtt{m}) + \mathtt{C}\Pi(\mathtt{n}_2,\mathtt{m})\right).
$$

映射 $\mathfrak{I}\colon\ \mathfrak{p} = (\lambda, e_2) \in \mathcal{T}\setminus\mathcal{E} \to \mathfrak{I}_\mathfrak{p}$ 是实解析的。

设 $\mathfrak{p}=(\lambda,e_2)\in\mathcal{E}$（即 $e_2=c(\lambda)$），则

$$-\frac{1}{2\pi}\Theta_{\mathfrak{p}}(\omega_{\mathfrak{p}})=\frac{4\sqrt{|c|}\,\lambda^2}{\pi}\int_0^{\omega_{\mathfrak{p}}}\frac{\mu_{\mathfrak{p}}^2}{\mu_{\mathfrak{p}}-2\lambda}\,ds=$$
$$=\frac{8\sqrt{|c|}\,\lambda^2}{\pi}\int_{e_2}^{e_1}\frac{\mu}{(\mu-2\lambda)\sqrt{-(\mu-e_1)(\mu-e_2)(\mu-e_3)(\mu-e_4)}}\,d\mu\,.$$

这个最后的积分，记作 $\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}}$，可以写成

$$\widehat{\mathfrak{I}}_{\mathfrak{p}}=\frac{2\sqrt{|c|}}{\pi}\left(\mathtt{AK}(\mathtt{m})+\mathtt{C\Pi}(\mathtt{n}_2,\mathtt{m})\right). \tag{5.3}$$

如果 $\lambda\in\overline{[-\sqrt[4]{\varphi^5}/2,-\overline{2}/\sqrt[4]{27})}$，那么 $\mathrm{I}_\lambda\cap\mathcal{E}=\emptyset$ 且 $\mathcal{P}_\lambda=\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}}+1$。这证明了对于每个 $\lambda\in[-\sqrt[4]{\varphi^5}/2,-2/\sqrt[4]{27})$，$\overline{\mathcal{P}_\lambda}$ 都是实解析的。□

引理 5.2。如果 $\lambda<-\sqrt[4]{\overline{\varphi^5}}/2$，周期映射 $\mathcal{P}_\lambda$ 在 $\mathrm{I}_\lambda=(a(\lambda)\ \eta_+(\lambda))$上连续，并且在 $\mathrm{I}_\lambda\setminus\{c(\lambda)\}$上实解析。

证明。沿用前一个引理中的记号，对于每个 $\lambda<-\sqrt[4]{\varphi^5}/2$，我们有 $\mathrm{I}_\lambda\cap\mathcal{E}=\{(\lambda,\overline{c(\lambda)})\}$ 且

$$\begin{cases}\mathcal{P}_\lambda(e_2)=\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}}+1\,, & e_2\in(a(\lambda),c(\lambda))\\ \mathcal{P}_\lambda(e_2)=\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}}, & e_2\in(c(\lambda),\eta_+(\lambda))\end{cases}.$$

于是，$\mathcal{P}_\lambda$ 在 $\mathrm{I}_\lambda\setminus\{c(\lambda)\}$上实解析。引理中的连续性部分由以下极限得出

$$\lim_{e_2\to c(\lambda)^-}\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}}=\widehat{\mathfrak{I}}_{\mathfrak{p}}-1/2\,,\qquad\lim_{e_2\to c(\lambda)^+}\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}}=\widehat{\mathfrak{I}}_{\mathfrak{p}}+1/2\,. \tag{5.4}$$

或者等价地，由

$$\lim_{e_2\to c(\lambda)^\pm}\frac{2\sqrt{|c|}}{\pi}\mathtt{B}_\lambda\Pi(\mathtt{n}_{1,\lambda},\mathtt{m}_\lambda)=\pm\frac{1}{2}\,. \tag{5.5}$$

（5.5）的证明分为两个步骤:
步骤 I。在第一步中，我们证明

$$\lim_{e_2\to c(\lambda)^\pm}\frac{1+4\lambda\sqrt{|c|}}{\sqrt{1-2e_{\lambda,1}\sqrt{|c|}}}=\mp\frac{\sqrt{2}}{e_{\lambda,1}(c(\lambda))^2}\,, \tag{5.6}$$

其中 $e_{\lambda,j}(e_2)=e_j(\lambda,e_2)$，$j=1,3,4$。利用（3.1）中的（$v$）和（$vi$），可得

$$\frac{1+4\lambda\sqrt{|c|}}{\sqrt{1-2e_{\lambda,1}\sqrt{|c|}}}=\frac{2e_{\lambda,1}^3e_2^2-\mathtt{q}_\lambda(e_2)\sqrt{1-\mathtt{p}_\lambda(e_2)^2}}{2e_{\lambda,1}^3e_2^2\sqrt{1-\sqrt{1-\mathtt{p}_\lambda(e_2)^2}}}\,,$$

其中

$$\mathtt{p}_\lambda(e_2)=\frac{e_{\lambda,1}^2e_2^3-e_{\lambda,1}^3e_2^2+e_{\lambda,1}+e_2}{2e_{\lambda,1}e_2^2}\,,\qquad\mathtt{q}_\lambda(e_2)=(e_{\lambda,1}+e_2)(1+e_{\lambda,1}^2e_2^2)\,.$$

根据注3.17的（iii），当 $e_2 \to c\,(\lambda)$ 时，$\mathtt{p}_\lambda\,(e_2)$ 趋于0；当 $e_2 < c\,(\lambda)$ 时，它为负；当 $e_2 > c\,(\lambda)$ 时，它为正。于是，

$$\lim_{e_2\to c(\lambda)^\pm} \frac{1+4\lambda\sqrt{|c|}}{\sqrt{1-2e_{\lambda,1}\sqrt{|c|}}} = \lim_{e_2\to c(\lambda)^\pm} \frac{2e_{\lambda,1}^3 e_2^2 - \mathtt{q}_\lambda(e_2)\sqrt{1-\mathtt{p}_\lambda(e_2)^2}}{2e_{\lambda,1}^3 e_2^2\sqrt{1-\sqrt{1-\mathtt{p}_\lambda(e_2)^2}}} =$$

$$= \lim_{e_2\to c(\lambda)^\pm} -\frac{\mathtt{p}_\lambda(e_2)}{e_{\lambda,1}^2\sqrt{1-\sqrt{1-\mathtt{p}_\lambda(e_2)^2}}} = \mp\frac{\sqrt{2}}{e_{\lambda,1}(c(\lambda))^2}\,.$$

步骤 *II*。现在我们将证明 (5.5)。为此，回忆标准极限（见[6], 906.00，第 302 页）

$$\Pi(n,m) \sim \frac{\pi}{2\sqrt{1-n}}\,, \qquad \text{as} \quad n\to-\infty\,, \qquad \forall m\in(0,1)\,.$$

由于

$$\lim_{e_2\to c(\lambda)^\pm} \mathtt{n}_{1,\lambda}(e_2) = -\infty\,, \qquad 0<\mathtt{m}_\lambda(e_2)<1\,, \qquad \forall\lambda<-\sqrt[4]{\varphi^5}/2\,,$$

我们有

$$\lim_{e_2\to c(\lambda)^\pm} \frac{2\sqrt{|c|}}{\pi}\mathtt{B}_\lambda\Pi(\mathtt{n}_{1,\lambda},\mathtt{m}_\lambda) = \lim_{e_2\to c(\lambda)^\pm} \frac{\sqrt{|c|}\,\mathtt{B}_\lambda}{\sqrt{1-\mathtt{n}_{1,\lambda}}}\,.$$

利用 (5.1)，我们得到

$$\frac{\sqrt{|c|}\,\mathtt{B}_\lambda}{\sqrt{1-\mathtt{n}_{1,\lambda}}} = \frac{\widehat{\mathtt{p}}_\lambda}{\widehat{\mathtt{q}}_\lambda}\,,$$

其中 $\widehat{\ }\mathtt{p}_\lambda$ 由下式给出

$$\widehat{\mathtt{p}}_\lambda = -\frac{1}{4}\mathtt{g}_\lambda(1+4\sqrt{|c|}\,\lambda)(e_{\lambda,1}-e_{\lambda,4})\sqrt{e_2-e_{\lambda,4}}(1-2\sqrt{|c|}\,e_{\lambda,4})^{-1}$$

且 $\widehat{\ }\mathtt{q}_\lambda$ 是.....的平方根

$$\widehat{\mathtt{q}}_\lambda^2 = (1-2\sqrt{|c|}\,e_{\lambda,1})\Big((1-2\sqrt{|c|}\,e_{\lambda,4})(e_{\lambda,1}-e_2)+(e_2-e_{\lambda,4})(1-2\sqrt{|c|}\,e_{\lambda,1})\Big)\,.$$

利用 (5.6)，我们得到

$$\lim_{e_2\to c(\lambda)^\pm} \frac{\sqrt{|c|}\,\mathtt{B}_\lambda}{\sqrt{1-\mathtt{n}_{\lambda,1}}} = \pm\mathtt{h}_\lambda(c(\lambda))\,,$$

其中

$$\mathtt{h}_\lambda(e_2) = \frac{\mathtt{g}_\lambda(e_{\lambda,1}-e_{\lambda,4})\sqrt{e_2-e_{\lambda,4}}(1-2\sqrt{|c|}\,e_{\lambda,4})^{-1}}{2\sqrt{2}e_{\lambda,1}^2\sqrt{(e_{\lambda,1}-e_2)(1-2\sqrt{|c|}\,e_{\lambda,4})+(e_2-e_{\lambda,4})(1-2\sqrt{|c|}\,e_{\lambda,1})}}\,.$$

由 (3.5)，利用 (3.1) 中的 (iv)、(vi) 以及 (3.11) 中的 (iii)，可得 $\mathtt{h}_\lambda(c(\lambda)) = 1/2$，从而证明了结论。□

在继续之前，我们先列出八条性质，它们将用于证明其余引理:

(1) 对于每个 $\lambda<-2/\sqrt[4]{27}, \overline{0}<\mathtt{m}_\lambda<1$，以及

$$\lim_{e_2\to a(\lambda)^+} \mathtt{m}_\lambda(e_2) = 1\,, \qquad \forall\lambda\in[-1,-2/\sqrt[4]{27})\,,$$
$$\lim_{e_2\to a(\lambda)^+} \mathtt{m}_\lambda(e_2) < 1\,, \qquad \forall\lambda\in(-\infty,-1)\,.$$

回顾一下，对于固定的 λ，$\mathtt{m}_\lambda$ 是 m (3.5) 的记法。

(2) 对每个 $\lambda<-2/\sqrt[4]{27}$，函数 $\mathtt{n}_{j,\lambda}(e_2)$ 在 $e_2\to a(\lambda)^+$ 时为负，且极限 $\lim_{e_2\to a(\lambda)^+}\mathtt{n}_{2,\lambda}(e_2)$ 有限。对于每个 $\lambda<-2/\sqrt[4]{27},\lambda\neq-\sqrt[4]{\varphi^5}/2$，极限 $\lim_{e_2\to a(\lambda)^+}\mathtt{n}_{1,\lambda}(e_2)$ 有限，且当 $\lambda=-\sqrt[4]{\varphi^5/2}$ 时为 $-\infty$。此外，如果 $\lambda\le-1$

$$\lim_{e_2\to a(\lambda)^+}\mathtt{n}_{1,\lambda}(e_2)=\lim_{e_2\to a(\lambda)^+}\mathtt{n}_{2,\lambda}(e_2)\,.$$

(3) 对每个 $\lambda\in(-1,-2/\sqrt[4]{27})$ 和 $\lambda\neq-\sqrt[4]{\varphi^5}/2$，极限 $\lim_{e_2\to a(\lambda)^+}\mathtt{B}_\lambda(e_2)$ 都是有限的；而对每个 $\lambda\le-1$，它是 $-\infty$。(4) 对每个 $\lambda\in(-1,-2/\sqrt[4]{27})$，极限 $\lim_{e_2\to a(\lambda)^+}\mathtt{C}_\lambda(e_2)$ 都是有限的；而对每个 $\lambda\le-1$，它是 $+\infty$。(5) 对每个 $\lambda<-2/\sqrt[4]{27}$，极限 $\lim_{e_2\to a(\lambda)^+}c\ (c=c(\lambda,e_2))$ 都是有限的。当 $\lambda>-1$ 时它为负，当 $\lambda\le-1$ 时它为零。(6) 对每个 $\lambda<-2/\sqrt[4]{27}$，极限 $\lim_{e_2\to a(\lambda)^+}c\,\mathtt{C}_\lambda(e_2)$ 都是有限的。当 $\lambda\le-1$ 时它为 0，当 $\lambda>-1$ 时它为负。(7) 对每个 $\lambda<-2/\sqrt[4]{27}$，极限 $\lim_{e_2\to a(\lambda)^+}\mathtt{A}_\lambda(e_2)$ 都是有限的。(8) 令 $\mathtt{Q}_\lambda$ 定义为

$$\mathtt{Q}_\lambda=\mathtt{A}_\lambda+\frac{\mathtt{B}_\lambda}{1-\mathtt{n}_{1,\lambda}}+\frac{\mathtt{C}_\lambda}{1-\mathtt{n}_{2,\lambda}}\,. \tag{5.7}$$

利用（iii）–（vi）中的（3.1），并考虑（3.5）和（5.1），可得

$$\mathtt{Q}_\lambda=-\frac{\mathtt{g}_\lambda e_2(e_2+2\lambda)}{1+4ce_2^2}\,.$$

因此，$\mathtt{Q}_\lambda$ 是实解析的，且为正；当$e_2\to a$（λ）$^+$ 以及对每个 $\lambda<-2/\sqrt[4]{27}$，当 $e_2\to\eta_+$（λ）$^-$ 时，它趋于一个有限极限。

现在我们继续证明其余引理，这些引理将给出周期映射 $\mathcal{P}_\lambda$ 的极限。

引理 5.3。设 $\lambda\in(-1,-2/\sqrt[4]{27})$。则，

$$\lim_{e_2\to a(\lambda)^+}\mathcal{P}_\lambda(e_2)=+\infty\,.$$

证明。我们先回顾椭圆积分的一些渐近行为。根据 [6] 第 302 页的 906.03 式，有如下渐近展开

$$\Pi(n,m)\sim\frac{1}{1-n}\left(\log(\frac{4}{\sqrt{1-m}})+\sqrt{-n}\arctan(\sqrt{-n})\right),\qquad\text{as } m\to1^-\,, \tag{5.8}$$

而根据 [6] 第 11 页的 112.01 式，有标准的渐近展开

$$\mathrm{K}(m)\sim\log\left(\frac{4}{\sqrt{1-m}}\right),\qquad\text{as } m\to1^-\,. \tag{5.9}$$

于是，由性质 (1)、(5.2)、(5.8) 和 (5.9)，可得

$$\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}}\sim\frac{\sqrt{|c|}}{\pi}\left(\mathtt{R}_\lambda+\log\left(\frac{4}{\sqrt{1-\mathtt{m}_\lambda}}\right)\mathtt{Q}_\lambda\right),\qquad\text{as }\ e_2\to a(\lambda)^+\,, \tag{5.10}$$

其中

$$\mathtt{R}_\lambda=\frac{\sqrt{-\mathtt{n}_{1,\lambda}}\arctan(\sqrt{-\mathtt{n}_{1,\lambda}})}{1-\mathtt{n}_{1,\lambda}}\mathtt{B}_\lambda+\frac{\sqrt{-\mathtt{n}_{2,\lambda}}\arctan(\sqrt{-\mathtt{n}_{2,\lambda}})}{1-\mathtt{n}_{2,\lambda}}\mathtt{C}_\lambda\,. \tag{5.11}$$

接下来，利用性质 (2)-(6)，我们得出这些极限

$$\lim_{e_2\to a(\lambda)^+}\sqrt{|c|}\,\mathtt{R}_\lambda(e_2)\,,\qquad\qquad \lim_{e_2\to a(\lambda)^+}\sqrt{|c|}\,\mathtt{Q}_\lambda$$

对每个 $\lambda\in(-1,-2/\sqrt[4]{27})$ 和 $\lambda\neq-\sqrt[4]{\varphi^5/2}$，它们都是有限的。由性质 (1) 和 (5.10) 可知

$$\lim_{e_2\to a(\lambda)^+}\mathcal{P}_\lambda(e_2)=\lim_{e_2\to a(\lambda)^+}\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}}=+\infty\,,$$

对每个 $\lambda\in(-1,-2/\sqrt[4]{27})$ 和 $\lambda\neq-\sqrt[4]{\varphi^5/2}$，

现在考虑 $\lambda=-\sqrt[4]{\varphi^5/2}$ 那么 $a(\lambda)=\varphi^{1/4}$，且极限

$$\lim_{e_2\to a(\lambda)^+}\sqrt{|c|}\,\mathtt{Q}_\lambda\,,\qquad\qquad \lim_{e_2\to a(\lambda)}\frac{\sqrt{-\mathtt{n}_{2,\lambda}}\arctan(\sqrt{-\mathtt{n}_{2,\lambda}})}{1-\mathtt{n}_{2,\lambda}}\mathtt{C}_\lambda$$

存在且为正。函数 $\mathtt{B}_\lambda$ 和 $\sqrt{-\mathtt{n}_{1,\lambda}}\arctan(\sqrt{-\mathtt{n}_{1,\lambda}})(1-\mathtt{n}_{1,\lambda})^{-1}$在 $(a(\lambda)\ a(\lambda)+\epsilon)$ 上为正，对某个 $\epsilon>0$ 成立。因此，$\sqrt{|c|}\mathtt{R}_\lambda$ 在 $(a(\lambda)\ a(\lambda)+\epsilon)$ 上为正。因此，在此情形下也有

$$\lim_{e_2\to a(\lambda)^+}\mathcal{P}_\lambda(e_2)=\lim_{e_2\to a(\lambda)^+}\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}}=+\infty\,,$$

如上所述。 □

引理 5.4。设 $\lambda\in(-\infty,\ -1]$。则

$$\lim_{e_2\to a(\lambda)^+}\mathcal{P}_\lambda(e_2)=1\,.$$

证明。由（5.1）中的（v）和（vi）可得

$$\mathtt{B}_\lambda+\mathtt{C}_\lambda=\frac{\mathtt{g}_\lambda(e_{\lambda,1}-e_{\lambda,4})(e_{\lambda,4}(8c\lambda e_{\lambda,1}-1)-e_{\lambda,1}-2\lambda)}{(1+4ce_{\lambda,1}^2)(1+4ce_{\lambda,4}^2)}\,.\tag{5.12}$$

利用（3.1）和注 3.9 的刻画，我们得到

$$\lim_{e_2\to a(\lambda)^+}e_{\lambda,4}(e_2)+e_{\lambda,1}(e_2)+2\lambda=0\,,\qquad\qquad\forall\lambda\le-1\,.$$

这意味着

$$\lim_{e_2\to a(\lambda)^+}(\mathtt{B}_\lambda(e_2)+\mathtt{C}_\lambda(e_2))=0\,,\qquad\qquad\forall\lambda\le-1\,.\tag{5.13}$$

首先假设 $\lambda=-1$。由（5.13）可得

$$\mathtt{R}_\lambda\sim\left(\frac{\sqrt{-\mathtt{n}_{2,\lambda}}\arctan(\sqrt{-\mathtt{n}_{2,\lambda}})}{1-\mathtt{n}_{2,\lambda}}-\frac{\sqrt{-\mathtt{n}_{1,\lambda}}\arctan(\sqrt{-\mathtt{n}_{1,\lambda}})}{1-\mathtt{n}_{1,\lambda}}\right)\mathtt{C}_\lambda,$$

当 $e_2\to a(-1)^+$, $a(-1)=1$ 时。由（5.1）的（v）可知，$\lim_{e_2\to1^+}\sqrt{|c|}\mathtt{C}_{-1}$ 是有限的。性质（2）意味着

$$\lim_{e_2\to a(\lambda)^+}\left(\frac{\sqrt{-\mathtt{n}_{2,\lambda}}\arctan(\sqrt{-\mathtt{n}_{2,\lambda}})}{1-\mathtt{n}_{2,\lambda}}-\frac{\sqrt{-\mathtt{n}_{1,\lambda}}\arctan(\sqrt{-\mathtt{n}_{1,\lambda}})}{1-\mathtt{n}_{1,\lambda}}\right)=0\,,$$

对每个 $\lambda\le-1$ 都成立。然后，

$$\lim_{e_2\to1^+}\sqrt{|c|}\,\mathtt{R}_{-1}=0\,.\tag{5.14}$$

另一方面[2]

$$\lim_{e_2\to 1^+}\frac{c}{1-\mathtt{m}_{-1}(e_2)}=0\,. \tag{5.15}$$

结合 (5.10)、(5.14) 和 (5.15)，我们得到

$$\lim_{e_2\to 1^+}\mathcal{P}_{-1}(e_2)=\lim_{e_2\to 1^+}\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}}+1=1\,.$$

现在考虑情形 $\lambda<-1$。利用性质（2），我们有

$$\lim_{e_2\to a(\lambda)^+}\mathtt{n}_{1,\lambda}(e_2)=\lim_{e_2\to a(\lambda)^+}\mathtt{n}_{2,\lambda}(e_2)<0\,,\qquad \lim_{e_2\to a(\lambda)^+}\mathtt{m}_{\lambda}(e_2)\in(0,1)\,. \tag{5.16}$$

Then

$$\lim_{e_2\to a(\lambda)^+}\Pi\left(\mathtt{n}_{1,\lambda}(e_2),\mathtt{m}_{\lambda}(e_2)\right)=\lim_{e_2\to a(\lambda)^+}\Pi\left(\mathtt{n}_{2,\lambda}(e_2),\mathtt{m}_{\lambda}(e_2)\right).$$

此外，(5.16) 意味着这些极限

$$\lim_{e_2\to a(\lambda)^+}\Pi(\mathtt{n}_{1,\lambda}(e_2),\mathtt{m}_{\lambda}(e_2))\,,\qquad \lim_{e_2\to a(\lambda)^+}\mathrm{K}(\mathtt{m}_{\lambda}(e_2))$$

对每个 $\lambda<-1$ 都是有限的。由 (5.1) 的 (v) 可知，对每个 $\lambda<-1$，$\lim_{e_2\to\overline{a(\lambda)}^+}\sqrt{|c|}\mathtt{C}_{\lambda}$ 都是有限的。性质 (5) 和 (7) 意味着 $\lim_{e_2\to a(\lambda)^+}\mathtt{A}_{\lambda}$ 也是有限的，并且对每个 $\lambda<-1$，$\lim_{e_2\to a(\lambda)^+}\sqrt{|c|}=0$ 都是有限的。然后，利用 (5.13)，我们有

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}}&=\frac{2\sqrt{|c|}}{\pi}\left(\mathtt{A}_{\lambda}\mathrm{K}(\mathtt{m}_{\lambda})+\mathtt{B}_{\lambda}\Pi(\mathtt{n}_{1,\lambda},\mathtt{m}_{\lambda})+\mathtt{C}_{\lambda}\Pi(\mathtt{n}_{2,\lambda},\mathtt{m}_{\lambda})\right)\\&\sim_{e_2\to a(\lambda)^+}\frac{2\sqrt{|c|}}{\pi}\left(\Pi(\mathtt{n}_{2,\lambda},\mathtt{m}_{\lambda})-\Pi(\mathtt{n}_{1,\lambda},\mathtt{m}_{\lambda})\right)\mathtt{C}_{\lambda}\,,\end{aligned}$$

对每个 $\lambda<-1$ 都成立。这意味着

$$\lim_{e_2\to a(\lambda)^+}\mathcal{P}_{\lambda}(e_2)=\lim_{e_2\to 1^+}\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}}+1=1\,,\qquad \forall\lambda<-1\,,$$

证毕。 □

引理 5.5。设 $\lambda<-2/\sqrt[4]{27}$。那么，

$$\lim_{e_2\to\eta_+(\lambda)^-}\mathcal{P}_{\lambda}(e_2)=\chi(\lambda)\,,$$

其中 $chi(\lambda)$ 是定义 *4.3* 中定义的函数。

证明。由

$$\lim_{e_2\to\eta_+(\lambda)^-}\mathtt{m}_{\lambda}(e_2)=\lim_{e_2\to\eta_+(\lambda)^-}\mathtt{n}_{1,\lambda}(e_2)=\lim_{e_2\to\eta_+(\lambda)^-}\mathtt{n}_{2,\lambda}(e_2)=0\,,$$

可得

$$\begin{aligned}&\lim_{e_2\to\eta_+(\lambda)^-}\mathrm{K}(\mathtt{m}_{\lambda}(e_2))=\lim_{e_2\to\eta_+(\lambda)^-}\Pi(\mathtt{n}_{1,\lambda}(e_2),\mathtt{m}_{\lambda}(e_2))=\\&=\lim_{e_2\to\eta_+(\lambda)^-}\Pi(\mathtt{n}_{2,\lambda}(e_2),\mathtt{m}_{\lambda}(e_2))=\frac{\pi}{2}\,.\end{aligned}$$

那么，

$$\lim_{e_2\to\eta_+(\lambda)^-}\mathcal{P}_{\lambda}=\lim_{e_2\to\eta_+(\lambda)^-}\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}}=\lim_{e_2\to\eta_+(\lambda)^-}\sqrt{|c|}\left(\mathtt{A}_{\lambda}+\mathtt{B}_{\lambda}+\mathtt{C}_{\lambda}\right). \tag{5.17}$$

[2]该极限是使用 Mathematica 13.1 计算得出的。

由（3.1）和（5.1）可得以下极限：

$$(i)\ \lim_{e_2\to\eta_+(\lambda)^-} c=\frac{\eta_+(\lambda)^4-1}{\eta_+(\lambda)^6}\,,$$

$$(ii)\ \lim_{e_2\to\eta_+(\lambda)^-} \mathtt{A}_\lambda=\frac{2\eta_+(\lambda)^3(1+\sqrt{1+\eta_+(\lambda)^4}(1-\eta_+(\lambda)^4))}{\sqrt{\eta_+(\lambda)^4-3}(\eta_+(\lambda)^8-\eta_+(\lambda)^4-1)},$$

$$(iii)\ \lim_{e_2\to\eta_+(\lambda)^-} \mathtt{B}_\lambda=\frac{\eta_+(\lambda)^3(\sqrt{\eta_+(\lambda)^4-1}(1+\eta_+(\lambda)^4)-\eta_+(\lambda)^6)(2+\sqrt{1+\eta_+(\lambda)^4})}{\sqrt{3+\eta_+(\lambda)^8-4\eta_+(\lambda)^4}(1+\eta_+(\lambda)^4\sqrt{1+\eta_+(\lambda)^4}-\eta_+(\lambda)^2\sqrt{\eta_+(\lambda)^8-1}},$$

$$(iv)\ \lim_{e_2\to\eta_+(\lambda)^-} \mathtt{C}_\lambda=\frac{\eta_+(\lambda)^3(\sqrt{\eta_+(\lambda)^4-1}(1+\eta_+(\lambda)^4)+\eta_+(\lambda)^6)(2+\sqrt{1+\eta_+(\lambda)^4})}{\sqrt{3+\eta_+(\lambda)^8-4\eta_+(\lambda)^4}(1+\eta_+(\lambda)^4\sqrt{1+\eta_+(\lambda)^4}-\eta_+(\lambda)^2\sqrt{\eta_+(\lambda)^8-1}}$$

将 (i)-(iv) 代入 (5.17)，我们得到

$$\lim_{e_2\to\eta_+(\lambda)^-} \mathcal{P}_\lambda(e_2)=\chi(\lambda)\,,$$

如上所述。 □

最后，结合前述引理中所示的极限与周期映射 $\mathcal{P}_\lambda$ 的连续性，即可得出定理 4.5。

References

[1] J. Arroyo、M. Barros 和 O. J. Garay，《齐性空间中的 Willmore-Chen 管及翘曲积空间》，*Pac. J. Math.* **188**-2 (1999), 201–207。[2] J. Arroyo、O. J. Garay 和 J. J. Menc

´ 2 1 *J.* ıa, *Geom. Phys.* **48 2** 2003 339 353

《S ( ) 中的闭广义弹性曲线》，- ( ), – 。[3] J. Arroyo、O. J. Garay 和 A. P´ampano，《常平均曲率不变曲面与曲率能量的极值》，*J. Math. Anal. App.* **462** (2018), 1644–1668。[4] J. Arroyo、O. J. Garay 和 A. P´ampano，《 $\mathbb{S}^3(\rho)$ 中的德洛内曲面》，*Filomat* **33**-4 (2019), 1191–1200。[5] W. Blaschke，《 *Vorlesungen über Differentialgeometrie und Geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie* 1929 》，

B. 3，由 G. Thomsen 编，J. Springer，柏林，( )。[6] P. F. Byrd 和 M. D. Friedman，《 *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists*》，Springer-Verlag，柏林、哥廷根、海德堡，(1954)。[7] M. Barros、A. Ferr´andez 和 P. Lucas，《弦理论与 M 理论中的共形张力》，*Nuclear Phys. B* **584** (2000), 719–748。[8] M. Barros、A. Ferr´andez、P. Lucas 和 M. A. Mero˜no，《伪黎曼空间中的 Willmore 环面与 Willmore-Chen 子流形》，*J. Geom. Phys.* **28** (1998), 45–66。[9] C. Bohle、G. P. Peters 和 U. Pinkall，《受约束的 Willmore 曲面》，

Calc. Var. Partial ( ), – *Differential Equations* **32** 2008 263 277

。[10] P. B. Canham，《弯曲的最小能量或可解释人类红细胞的双凹形状》，*J. Theor. Biol.* **26**-1 (1970), 61–76。[11] D. R. J. Chillingworth，《曲面上的绕数 I》，*Math. Ann.* **196** (1972) 218–249。[12] R. Capovilla、J. Guven 和 E. Rojas，《流体膜的哈密顿方程：轴对称性》，*J. Phys. A: Math. Gen.* **38** (2005), 8201–10。[13] E. Calabi、P. J. Olver、C. Shakiban、A. Tannenbaum 和 S. Haker，《应用于目标识别的微分不变特征曲线与数值不变特征曲线》，*Int. J. Comput. Vis.* **26**(1998), 107—135。[14] E. Calabi、P. J. Olver 和 A. Tannenbaum，《仿射几何、曲线流与不变数值近似》，*Adv. Math.* **124** (1996), 154–196。[15] J. Cho、M. Pember 和 G. Szewieczek，《具有球面曲率线的受约束弹性曲线与曲面》，*arXiv: 2104.11058 [math.DG]*, (2021)。[16] E. Evans，《膜双层中的弯曲阻力与化学诱导力矩》，*Biophys. J.* **14** (1974), 923–931。

[17] T. Flash 和 A. A. Handzel, 《人类手臂运动的仿射微分几何分析》, *Biol. Cybern.* **96**-6 (2007), 577–601。[18] J. D. E. Grant 和 E. Musso, 《余各向同性变分问题》, *J. Geom. Phys.* **50** (2004), 303–338。[19] P. A. Griffiths, 《 *Exterior Differential Systems and the Calculus of Variations*》, 数学进展, 第 25 卷, 波士顿, Birkhauser, (1982)。[20] A. Gruber、A. P
´ p $\mathbb{S}^2$ *arXiv:* ampano 和 *2209.11597 [math.DG]* 2022
M. Toda, 《闭-弹性曲线在 , 中的不稳定性》, , ( )。[21] W. Helfrich, 《脂质双层的弹性性质：理论与可能的实验》, *Z.* ( ), – 。
Natur. C **28** 1973 693 703
[22] L. Heller, 《二维空间形式中的受约束 Willmore 环面与弹性曲线》, *Comm. Anal. Geom.* **22**-2 (2014), 343–369。[23] D. J. Hoff 和 P. Olver, 《目标识别不变量特征的扩展》,
Int. J. ( ), — 。[24] S.
Comput. Vis. **45** 2013 176 185
B. Jackson, 《常曲率曲面的四顶点定理》,
Am. J. of - ( ), – 。[25]
Math. **67 4** 1945 563 582
B. Jovanovic, 《接触几何中的非交换可积性与作用角变量》, *J. Symplectic Geom.* **10**-4 (2012), 535–561。[26] G. Jensen、E. Musso 和 L. Nicolodi, 《膜形状方程的几何柯西问题》, *J. Phys. A: Math. Theor.* **47** (2014), 495201。[27] I. A. Kogan、M. Ruddy 和 C. Vinzant, 《代数曲线的微分特征》, *SIAM J. Appl. Algebra Geom.* **4 1** 2020 185 226 - ( ), – 。[28]
A. Kneser, Adolf, 《"关于闭曲线上曲率极值个数的评注及非欧几何中的相关问题"》, Heinrich Weber 纪念文集, Teubner, 第 170–180 页, (1912年)。[29] R. L
´ ´ *Nonlinear Anal.* opez 和 A.
215 2022 112661
Pampano, 《具有竖直势的静止肥皂膜》, ( ), 。[30] J. Langer 和 D. A. Singer, 《闭曲线的总平方曲率》,
J. Diff. Geom. ( ), – 。[31] E.
20 1984 1 22
Musso、L. Nicolodi, 《闭平面曲线的不变量特征》,
J. Math. Imaging Vis. ( ), – 。[32] S.
35 2009 68 85
Montaldo、C. Oniciuc 和 A. P´ampano, 《球面中的闭双保守超曲面》, *J. Math. Anal. Appl.* **518**-1 (2023), 126697。[33] S. Montaldo 和 A. P´ampano, 《空间形式中闭双保守曲面的存在性》,
to appear in Comm. Anal. Geom. arXiv: 2009.03233 [math.DG], (2020)。[34] E. Musso、A. P´ampano, 《二维球面中的闭 1/2-弹性曲线》, *J. Nonlinear Sci.* **33** (2023), 3。[35] T. Miura 和 K. Yoshizawa, 《平面 p-弹性曲线的完整分类》, *arXiv:*
2203.08535 [math.AP] 2022 , ( )。[36] A. P
´ *Nonlinear* ampano, 《
Anal. **200** 2020 112092
Killing 下沉映射中平均曲率能量的临界环面》, ( ), 。[37] U. Pinkall, 《S^3 中的 Hopf 环面》,
Invent. Math. **81** (1985), 379–386。[38] P. Ortega 和 T. Ratiu, 《
Moment Maps and Hamiltonian Reductions》, 数学进展, 第 222 卷, 波士顿, Birkhauser, (2004)。[39] L. Reinhart, 《二维流形上的绕数》, *Ann. Inst. Fourier* **10** (1960年), 271–283。[40] D. Raviv 和 R. Kimmel, 《非刚性形状的仿射不变几何》,
Int. J. Comput. - ( ), – 。[41] Y.
Vis. **111 1** 2015 1 11
Soliman、A. Chern、O. Diamanti、F. Knoppel、U. Pinkall 和 P. Schroeder, 《受约束的 Willmore 曲面》, *ACM Trans. Graph.* **40**-4 (2021), 112。[42] D. Singer, 《圆周微分同胚与双曲曲率》,
Conform. Geom. Dyn. ( ), – 。[43] C.
5 2001 1 5
Truesdell, 《 *The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies: 1638–1788*》, 莱昂哈德·欧拉, 《欧拉全集》, Birkhauser, (1960年)。[44] Z. C. Tu 和 Z. C. Ou-Yang, 《生物膜弹性的几何理论》,
J. ( ), 。[45] V.
Phys. A: Math. Gen. **37** 2004 11407
M. Vassilev、P. A. Djondjorov 和 I. M. Mladenov, 《流体膜的圆柱形平衡形状》,
J. Phys. A: Math. Theor. **41** (2008), 435201。

[46] H. Yanamoto，关于弹性闭平面曲线， *Kodai Math. J.* **8** (1985)，224–235.

(E. Musso) Dipartimento di Matematica, Politecnico di Torino, Corso Duca degli Abruzzi 24, I-10129 Torino, Italy*Email address*: emilio.musso@polito.it
(A. Pámpano) Department of Mathematics and Statistics, Texas Techu University, Lubbock, TX, 79409, USA*Email address*: alvaro.pampano@ttu.edu