稀疏随机哈密顿量对量子计算而言易于处理

Chi-Fang (Anthony) Chen, [1,2] Alexander M. Dalzell, [2,3] Mario Berta, [4,5] Fernando G.S.L. Brandão, [2,1] 和 Joel A. Tropp[6]*1量子信息与物质研究所，加州理工学院，美国加利福尼亚州帕萨迪纳*2*AWS*量子计算中心，美国加利福尼亚州帕萨迪纳*3*加州理工学院，美国加利福尼亚州帕萨迪纳*4*量子信息研究所，亚琛工业大学，德国亚琛*5*计算系，伦敦帝国理工学院，英国伦敦*6*计算与数学科学系，加州理工学院，美国加利福尼亚州帕萨迪纳

量子计算机的一种潜在应用是模拟量子系统的低温性质。针对这一任务，已有一种经过深入研究的量子算法：对与低能态具有不可忽略重叠的初始试探态执行量子相位估计。然而，要为这种试探态能够高效制备提供理论保证，向来十分困难。此外，目前已有的启发式方案（例如绝热态制备）在实际情况下似乎并不足够。

本文表明，对于大多数随机稀疏哈密顿量，最大混合态是足够好的试探态，而相位估计能够高效地制备能量任意接近基态能量的态。此外，任何低能态都必须具有不可忽略的量子电路复杂度，这表明低能态在经典意义下并不平凡，并且相位估计是制备此类态的最优方法（相差多项式因子以内）。这些论断对两种随机哈密顿量模型成立：(i) 随机带符号泡利串之和；(ii) 随机带符号的 d-稀疏哈密顿量。主要技术论证基于非渐近随机矩阵理论中的一些新结果。特别是，为了获得这些随机哈密顿量的复杂度保证，需要对谱密度使用更精细的集中界。

arXiv:2302.03394v1 [quant-ph] 7 Feb 2023

I. 引言

量子计算机擅长什么？最早（也是迄今最具说服力）的候选任务是因数分解 [52]和量子系统模拟 [24, 39, 40]。Shor 著名的因数分解量子算法 [52]解决了因数分解的量子复杂度问题，但低能量下量子模拟的复杂度尚未得到解决。事实上，根据复杂性理论，我们知道，对于一般的局域哈密顿量，基态能量问题在最坏情形下是 QMA 困难的 [35], 因此我们预计，即使对于量子计算机而言，制备基态通常也是不可行的。这种最坏情形下的困难性在具有额外物理约束的系统中仍然存在，包括一维中的最近邻相互作用 [1] 和平移不变性 [29]。尽管这些结果传递出悲观信号，但它们仅仅表明，任何证明基态能量问题在量子意义下易解的工作，都必须进一步限制哈密顿量的类别，否则只能适用于典型实例。事实上，人们可以构造随机哈密顿量族（章节 IA），希望其平均情形复杂度可能优于最坏情形。

除了复杂性理论之外，制备低能态的问题也出现在将量子计算机应用于计算化学（例如，参见 [44]）和凝聚态物理学的研究中。为了在量子计算机上制备能量足够低的态（例如，可用于理解化学反应路径），一种提议的量子算法只需对初始试探态 [6, 16, 37, 58] 执行相位估计。如果初始态与某个低能态有不可忽略的重叠，这种方法就是高效的。尽管算法中的相位估计部分已得到充分理解，但我们对制备良好初始态所需时间的认识仍不完整。事实上，近期的数值测试 [38] 表明，对于某些化学系统，易于制备的初始态与低能态的重叠可能小到随系统尺寸呈指数级衰减。此外，使用绝热算法制备具有良好重叠的态可能需要指数级时间，从而显著影响所提议量子算法的端到端性能。

寻找量子计算机能够轻松完成的任务，无论是在量子化学领域还是其他领域，往往暗含着对量子优势的追求：如果某项任务在经典计算上也很困难，量子计算机就可能特别有用。遗憾的是，证明经典困难性颇具挑战，而许多曾被看好的经典困难问题候选如今都已被去量子化。例如，在某些经典访问模型下，近期进展排除了低秩线性代数任务中存在指数级量子优势的可能性 [19, 27, 53, 54]。尽管如此，人们仍希望哈密顿量低能问题能够带来量子优势 [26]。基于这些想法，本研究提出的核心问题如下。

“是否存在一种在经典计算上并非易解的哈密顿量，其低能态却能被证明易于制备？”

我们的工作对此给出了肯定的回答。具体而言，我们将证明，教科书中的相位估计方法（上文已讨论）非常适合制备典型随机稀疏哈密顿量的低能态。同时，低能态必须具有很高的量子电路复杂度，因此从合理推断来看，经典计算机对其进行模拟并非易事。

本文的组织结构如下。首先，我们回顾相关的哈密顿量类别（IA章节），然后介绍主要的哈密顿量模型和主要结果（II章节）。我们的证明策略（III章节）运用了非渐近随机矩阵理论中的工具；IV 章节包含更多细节和背景介绍。最后，我们讨论低能问题的经典复杂度，并在探索量子优势的过程中提出未来的研究方向（V章节）。

A. 相关模型

在陈述主要结果之前，我们先讨论一些熟悉的模型为何无法回答我们的问题。我们着重关注那些已有定量结论的随机系综。

- **少体 Pauli 模型** [22]。作为经典自旋玻璃（例如 Sherrington–Kirkpatrick（SK）模型 [51]）的一种自然推广，它用不对易的泡利算符取代经典（对易）约束。一个典型例子是如下哈密顿量系综：

$$\boldsymbol{H} := \sum_{i>j} g_{ij}^x \boldsymbol{\sigma}_i^x \boldsymbol{\sigma}_j^x + g_{ij}^y \boldsymbol{\sigma}_i^y \boldsymbol{\sigma}_j^y + g_{ij}^z \boldsymbol{\sigma}_i^z \boldsymbol{\sigma}_j^z , \quad \text{where} \quad g_{ij}^x, g_{ij}^y, g_{ij}^z \sim \text{i.i.d. Gaussians}, \tag{1}$$

  并且 $\boldsymbol{\sigma}_i^x, \boldsymbol{\sigma}_i^y, \boldsymbol{\sigma}_i^z$表示作用于量子比特 i 上的泡利算符。直观而言，这个模型在低温下表现出自旋玻璃行为 [8]，这表明寻找低能态可能很困难，即使对量子计算机而言也是如此。[1] 在高温区间，该模型在经典意义上 易于求解：存在一种高效算法，能够输出一个乘积态，使其对哈密顿量的算子范数 $\|\boldsymbol{H}\|$ 的近似达到一个常数比例 [31]。我们不知道是否存在这样一个温度范围，使得该状态在量子意义上仍然易于求解、但在经典意义上难以求解；我们也不知道该如何探究这个问题。

- **具有费米自由度的 Sachdev–Ye–Kitaev（SYK）模型** [34, 50] 。以一个代表性模型为例，考虑如下四体哈密顿量

$$\boldsymbol{H}_{SYK} := \sum_{i<j<k<\ell} g_{ijk\ell} \chi_i \chi_j \chi_k \chi_\ell \quad \text{where} \quad \chi_i \chi_j + \chi_j \chi_i = 2\delta_{ij} \quad \text{and} \quad g_{ijk\ell} \sim \text{i.i.d. Gaussians}.$$

  基于物理学的非严格论证表明，该模型在极低温下仍然是混沌的（而非自旋玻璃） [8, 30, 43]。如果这一点成立，就有力地暗示 SYK 模型对我们的问题给出了肯定答案。[2] 遗憾的是，要将物理学论证进一步严谨化并转化为实际证明颇具挑战性。据我们所知，目前唯一已知的严格结论来自 Hastings 和 O'Donnell [32], 的近期工作，他们证明了可以通过高效量子算法制备一个低能见证态，其基态能量近似比为常数。将这一结果推广到任意低能量，也能回答我们的问题。目前，我们尚不知有任何适用于 SYK 模型低温区间的解析方法。

- **Wigner高斯酉系综（GUE）** [59]。如果我们坚持采用低温下可证明的模型，可以考虑维数为 $N = 2^n$ 的 GUE，并将其写在泡利字符串基下：

$$\boldsymbol{H}_{GUE} := \sum_{\boldsymbol{\sigma} \in P} \frac{g_{\boldsymbol{\sigma}}}{N} \boldsymbol{\sigma} \quad \text{where} \quad P := \{\mathbf{I}, \boldsymbol{\sigma}^x, \boldsymbol{\sigma}^y, \boldsymbol{\sigma}^z\}^{\otimes n} \quad \text{and} \quad g_{\boldsymbol{\sigma}} \sim \text{i.i.d. Gaussians}.$$

  这种非局域、非稀疏的哈密顿量似乎不符合物理实际，但它仍曾作为重原子核的数学模型 [45]。高斯酉系综与其他随机矩阵系综（教科书式的介绍见 [3]）凭借其广为确立的性质 [21]，为强相互作用系统和量子信息问题提供了有用的模型。由于哈密顿量本身具有指数多的自由度，根据计数论证，对于量子计算机而言，低能态制备或哈密顿量演化的计算复杂度以高概率呈指数级增长 $\mathrm{e}^{\Omega(n)}$；这至多比精确对角化快多项式倍。

我们在这项工作中研究的系综兼具少体泡利模型和 SYK 模型的优点：它是稀疏的，且其实例可以高效地描述。与此同时，和 GUE 系综一样，我们能够准确近似最低能量和态密度。此外，我们证明，生成低能态需要且只需要多项式规模量子电路，其对基态能量的近似比可以任意接近最优。我们这个系综的主要缺点是，和 GUE 系综一样，它是非局域的，因此与自然界中常见的哈密顿量并不十分相似。

---

[1] 如果我们将自旋玻璃视为 NP 难问题，那么就不应指望量子计算机能高效地求解它们。[2]从快速热化的意义上说，混沌意味着通过与热浴耦合，可以高效制备吉布斯态。关于本征态热化假说与热化之间联系的定量表述，见 [18] 。

II. 主要结果

现在，我们来介绍将用于确立低能态平均情形量子复杂度的模型。考虑由少数随机泡利串及随机符号系数组成的独立和：

$$\boldsymbol{H}_{PS} := \sum_{j=1}^{m} \frac{r_j}{\sqrt{m}} \boldsymbol{\sigma}_j \quad \text{where} \quad \boldsymbol{\sigma}_j \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \{\mathbf{I}, \boldsymbol{\sigma}^x, \boldsymbol{\sigma}^y, \boldsymbol{\sigma}^z\}^{\otimes n} \quad \text{and} \quad r_j \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \text{UNIF}\{+1, -1\}. \tag{2}$$

参数 m将随量子比特数 n呈多项式增长，而非像高斯酉系综模型中那样呈指数增长。我们的主要技术结果表明，其低能态的电路复杂度具有双侧界。

定理 II.1（低能态具有低复杂度）。对于任意精度 $\epsilon \geq 2^{-n/c_1}$，令 $\boldsymbol{H}_{PS}$ 从泡利字符串系综 (2) 中抽取，其包含

$$m = \left\lfloor c_2 \frac{n^5}{\epsilon^4} \right\rfloor$$

项。那么，对于泡利字符串系综中的随机抽样 $\boldsymbol{H}_{PS}$，以下结论以至少 $1 - \mathrm{e}^{-c_3 n^{1/3}}$ 的概率成立。我们可以制备一个低能态 $\boldsymbol{\rho}$，使得

$$\mathrm{Tr}[\boldsymbol{\rho} \boldsymbol{H}_{PS}] \leq (1 - \epsilon) \cdot \lambda_{\min}(\boldsymbol{H}_{PS}) \tag{3}$$

使用大小为 $G = \mathrm{Poly}(n, \epsilon^{-1})$ 的量子电路。量 c_1、c_2 和 c_3 均为绝对常数，而 $\lambda_{\min}(\boldsymbol{H}_{PS})$ 表示 $\boldsymbol{H}_{PS}$ 的最小特征值（通常为负值）。

定理 II.1 的证明见附录 C 2。这里，我们将详细讨论这一问题中有趣的复杂度方面：

- **基态能量可被任意精确地近似**。对于任意多项式级小的误差 $\epsilon \sim \mathrm{Poly}(n^{-1})$，存在一个多项式级大的选择 $m = \mathrm{Poly}(n)$，使得可以高效地制备一个以 ϵ-近似基态能量的状态，其门复杂度为 $G = \mathrm{Poly}(n)$。我们猜想可以交换量词顺序；这将意味着，当 $m = \mathrm{Poly}(n)$ 足够大时，对于任意 $\epsilon = \mathrm{Poly}(n^{-1})$，低能态仍然易于制备。更多讨论请参见第 V 章中的要点 2。

- **相位估计有效**。正如我们将要展示的，生成低能态的量子算法$\boldsymbol{\rho}$ 非常简单。对最大混合态执行相位估计，有相当大的概率（至少为 $\Omega(\epsilon^{3/2})$）返回一个满足（3）的低能态。通过重复相位估计步骤，可以提高成功概率。使用现成的量子模拟算法（例如 Trotter 或 qDRIFT [15]），哈密顿量模拟的开销至多为 $\mathrm{Poly}(m, \epsilon^{-1})$ 个门。

- **端到端复杂度**。这个哈密顿量问题无需预言机，也无需输入态，从而给出了完整图景。此外，模型描述完全是经典的，且生成一个实例仅需$m(2n+1)$位随机性。

- **平均情形**。该结论以高概率 适用于哈密顿量系综。事实上，该模型在最坏情形下可以生成任意局域哈密顿量，而我们无法控制这些实例。

- **非局域、非对易哈密顿量**。大多数泡利串 $\{\mathbf{I}\ \boldsymbol{\sigma}^x, \boldsymbol{\sigma}^y, \boldsymbol{\sigma}^z\}^{\otimes n}$ 在$\Theta(n)$个格点上非平凡地作用，因此该哈密顿量是非局域的。由于随机泡利串彼此反对易的概率为1_2，该哈密顿量具有高度非对易性。直观而言，泡利字符串系综与随机矩阵的相似程度高于与局域哈密顿量的相似程度。

- **稀疏矩阵**。从线性代数的角度看，该模型是一个稀疏的高秩矩阵（尚未实现去量子化；参见第 V 章）。一般而言，稀疏矩阵未必存在简单的泡利分解；尽管如此，同样的结果也适用于带符号的随机 d-稀疏矩阵（参见第 IVB1 节）。然而，此时要实现量子易解性，需要访问哈密顿量的块编码 [28]。

另一方面，我们通过证明制备低能态的复杂度下界，论证这个问题具有“很强的量子性”。需要说明的是，我们并未证明态制备的经典困难性（见第 V 章）；这是一个引人关注的开放问题，我们留待未来研究。

定理 II.2（小型量子电路导致能量较差）。固定一个具有 G 个双量子比特门（例如一维砖墙布局）的电路架构，其初始态为 $|0\rangle$，并考虑所有可达态构成的族 $\mathrm{Circ}(G)$。对于任意 $\epsilon_1 \geq 0$，假设 $m \leq \epsilon_1^2 \cdot 2^n$。那么，对于从泡利字符串系综 (2) 中随机抽取的实例 $\boldsymbol{H}_{PS}$，高概率有：

$$G = \tilde{o}(\epsilon_1 \sqrt{m}) \quad \textit{implies} \quad \inf_{|\phi\rangle \in \mathrm{Circ}(G)} \langle \phi | \boldsymbol{H}_{PS} | \phi \rangle \geq \epsilon_1 \cdot \mathbb{E}\, \lambda_{\min}(\boldsymbol{H}_{PS}).$$

也就是说，由电路架构参数化的所有可能态 $|\psi\rangle \in \mathrm{Circ}(G)$ 都无法产生任何低能态。记号 $\tilde{o}(\cdot)$ 省略了$\log(m)$前因子。

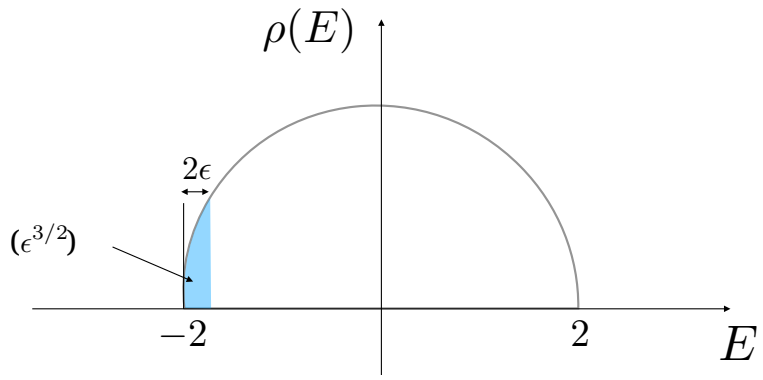

图 1：**低能态的丰富性**。该轮廓展示了半圆分布中密度 ρ 随能级 E 的变化；在大维数极限下，它是高斯酉系综的谱分布。半圆谱密度意味着基态能量附近存在大量态。对最大混合态进行相位估计，以相当大的概率 $\Omega(\epsilon^{3/2})$ 得到一个能量较低 $-2(1-\epsilon)$ 的态。

~定理 II.2 的证明见附录 D。换言之，我们通常需要一个规模很大的量子电路 $G = \Omega(\epsilon_1\sqrt{m})$来描述低能态；这些态高度纠缠，且与乘积态相去甚远。[3] 此外，我们的电路规模下界基于直接计数论证，这表明电路应随不同随机实例而变化。尽管如此，定理 II.1 给出了互补结果：使用最简单的量子算法（哈密顿量模拟和相位估计），即可高效制备适当的依赖于实例的态。

我们的模型的主要局限在于它是非局域的，与大多数物理哈密顿量不同，因此我们的论证并不能直接应用于局域哈密顿量。事实上，这两类模型的谱性质不同。正如我们将要展示的，泡利字符串系综具有一个（紧支撑的）半圆谱，而局域哈密顿量的谱往往带有长尾。[4] 对最大混合态进行相位估计，无法触及低概率尾部中那些低能态。当然，我们希望我们的结果最终能启发人们更深入地理解如何制备局域哈密顿量的低能态。更多讨论请参见第五章第 3 点。

无论如何，从线性代数和算法视角来看，随机稀疏矩阵都是值得研究的自然模型。我们强调，主要目标是提供一个直观易懂的玩具模型，展示量子计算机擅长什么，尤其是考虑到去量子化方面的近期进展。

III. 证明思路

对于一般的强相互作用哈密顿量，要控制其行为似乎十分棘手。然而，在某些随机矩阵系综中，矩阵具有可预测的谱性质，因此我们可以例外处理。例如，众所周知，高斯酉系综矩阵（见附录 B）具有确定的最大特征值和半圆谱密度 $\rho(x)$：

$$\|\boldsymbol{H}_{GUE}\| \approx 2 \quad \text{and} \quad \rho(x) \approx \frac{\sqrt{4-x^2}}{2\pi} \quad \text{(up to negligible fluctuation and with high probability)}.$$

见图 1。事实上，仅凭这一事实就可以看出，低能态具有与系统尺寸无关的 非忽略密度：

$$\int_{-2}^{-2+2\epsilon} \rho(x)\,\mathrm{d}x = \Theta(\epsilon^{3/2}).$$

从复杂度的角度来看，直接对最大混合态运行相位估计，以相当高的概率返回一个低能态：$\Omega(\epsilon^{3/2})$。我们的论证核心在于，泡利串的谱

[3] 这一说法类似于无低能平凡态猜想（NLTS） [25]。需要说明的是，我们的研究与 NLTS 的原始背景相去甚远；在该背景下，哈密顿量是 $\mathcal{O}(1)$-局域、无挫折且具有拓扑序的。我们给出的证明不适用于常数 $\mathcal{O}(1)$-局域随机哈密顿量。事实上，正如我们所提到的，二体随机泡利模型可以通过高效的乘积态，对算子范数实现常数比率近似 [31]。最近，对于由量子纠错码构造的某些电路深度为 $\log(n)$ 的 $\mathcal{O}(1)$-局域哈密顿量，无低能平凡态猜想已得到证明 [5]。[4] 对于晶格哈密顿量 [13] 和随机 k-局域泡利哈密顿量（1），当 $k = o(\sqrt{n})$ [22]时，已知其渐近服从高斯分布。对于非渐近情形，4 局域 SYK 模型中会出现谱尾部 [32]。

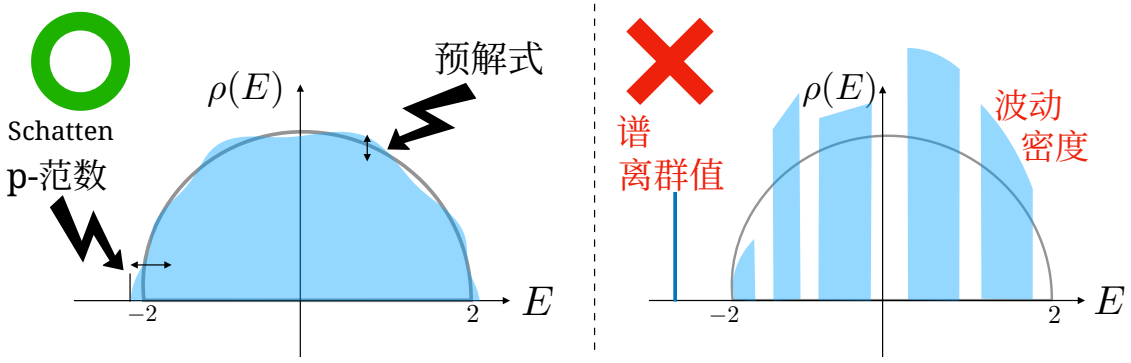

图2：**（右）可能出现的问题**。对于一般矩阵，如果存在谱异常值，或者基态能量附近的谱密度过低，相位估计策略就无法找到低能态。**（左）近似半圆**。对于泡利字符串系综，我们用 Schatten p 范数控制基态能量，并用预解式控制谱密度。这两个量都与 GUE 系综中的相应量相当，而 GUE 系综具有良好的半圆谱。因此，基态能量附近仍有足够多的态，相位估计便能高效地找到它们。

系综（2）看 与高斯酉系综矩阵的谱非常相似（图2）。因此，它也很“容易” to 找到低能 态的泡利字符串系综。

我们如何证明泡利字符串系综也具有半圆谱密度？这样，整个论证就归结为一个普适性原理：

当 m 适度增大时，泡利字符串系综会呈现出 *GUE* 系综的“平滑”性质，包括最大特征值和粗粒化谱密度。

该数学论证基于非渐近随机矩阵理论（第IV章）的技术。为应对量子信息问题中出现的一些特定挑战，还需要若干新颖的结果。

我们的第一个主要结果表明，泡利字符串系综的迹多项式矩几乎与高斯酉系综的相应矩一致。特别是，通过选取足够大的矩，我们还可以比较这两个矩阵的谱范数。在本文中，我们考虑归一化的 p 范数

$$\|\boldsymbol{O}\|_p := \left(\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{O}|^p\right)^{1/p} \quad \text{and} \quad |||\boldsymbol{O}|||_p := \left(\mathbb{E}\,\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{O}|^p\right)^{1/p} \quad \text{where} \quad \overline{\mathrm{Tr}} := \frac{1}{\mathrm{Tr}[\mathbf{I}]}\,\mathrm{Tr}\,. \tag{4}$$

我们常记 $N := \mathrm{Tr}[\mathbf{I}] = 2^n$。我们约定 $|||\boldsymbol{O}|||_\infty := \text{ess sup}\,\|\boldsymbol{O}\|$。

定理 III.1 (p-范数与算子范数)。 设 $p \in 2\mathbb{N}$ 为偶自然数。随机泡利串系综 (2) 满足如下范数界

$$\left|\,|||\boldsymbol{H}_{PS}|||_p - |||\boldsymbol{H}_{GUE}|||_p\right| \lesssim \left(\frac{p^{3/4}}{m^{1/4}} + \frac{p}{\sqrt{m}}\right)\left(1 + \frac{p^{3/4}}{2^{n/2}}\right). \tag{5}$$

符号 $\lesssim$ 表示忽略常数因子。此外，对于 $0 \le \epsilon \le 1/2$ 和 $m \le 2^{2n}$，存在常数 c_1、$c_2 > 0$，使得

$$m \ge c_1 \frac{n^3}{\epsilon^4} \quad \textit{ensures} \quad \Pr\left(\|\boldsymbol{H}_{PS}\| \ge 2(1+\epsilon)\right) \le \exp(-c_2 n).$$

证明见附录 C1 中的定理 III.1。对于固定的矩 p（它可以依赖于格点数 n），(5) 右侧会随着哈密顿量中项数 m 的增加而衰减。对 $p = \Omega(\log(N)) = \Omega(n)$ 应用马尔可夫不等式，并取 $m = \mathrm{Poly}(n)$，即可得到谱范数的尾界。

比较两个系综的谱密度需要更复杂的论证。理想情况下，我们关注的是哈密顿量本征态 $|\phi\rangle\langle\phi|$ 对应的投影算符。然而，精确的本征态投影算符很难处理。因此，我们考虑预解式，它能够探测能量$\omega \pm \mathcal{O}(\eta)$处“粗粒化”的能量投影算符。我们定义

$$\boldsymbol{R}_{\omega,\eta}(\boldsymbol{H}) := \frac{1}{\boldsymbol{H} - \omega + \mathrm{i}\eta} = \mathrm{i}\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{H}-\omega)t - \eta t}dt \quad \text{as a proxy for} \quad \frac{1}{\eta}\sum_{|\phi\rangle} \mathbb{1}\{|E(\phi)-\omega| \le \eta\} \cdot |\phi\rangle\langle\phi|\,, \tag{6}$$

其中 $\mathbb{1}$ 是示性函数。我们通常通过写成以下形式来省略参数依赖关系：$\boldsymbol{R} := \boldsymbol{R}_{\omega,\,\eta}(\boldsymbol{H})$。直观来说，预解式在哈密顿量基下是对角的，并在能量 ω 处形成尖峰，其宽度为 $\mathcal{O}(\eta)$。见图 3。

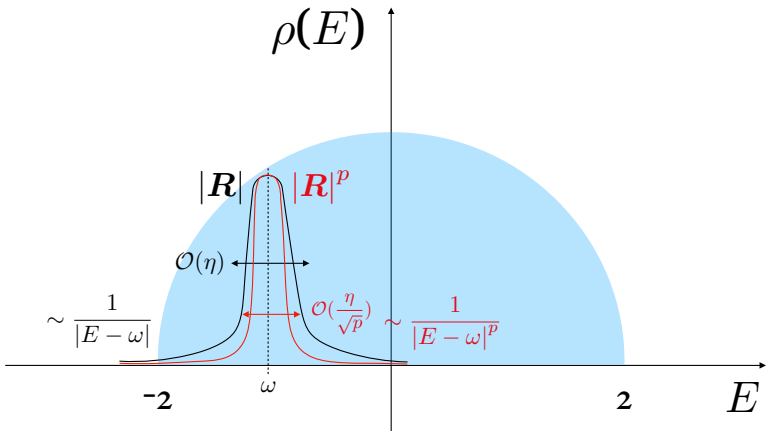

图 3：**通过预解式探测谱**。以能量 ω 为中心、分辨率参数为 η 的预解式（黑色曲线）会滤除远离 ω 的能量。对预解式取幂（红色曲线），则会使滤波器聚焦于 ω 周围更窄的区域。

然而，如果我们尤其关注某个能量 ω 附近的状态，预解式的局域性就不够强，因为滤波器 $E \mapsto 1/|E-\omega|$ 随能量变化衰减得太慢。[5] 相反，我们可以取预解式幂的迹，使尾部以更快的速率 $\sim |E-\omega|^{-p}$ 衰减。也就是说，

$$\frac{\eta^p}{N}\operatorname{Tr}|\boldsymbol{R}|^p = \frac{1}{N}\sum_E \frac{\eta^p}{|E-\omega+\mathrm{i}\eta|^p} \quad \text{as a proxy for} \quad \rho(\omega)\cdot\frac{\eta}{\sqrt{p}}$$

其中，能量 $\frac{\eta}{\sqrt{p}}$ 大致对应于权重 $|\boldsymbol{R}|^p\,\eta^p$ 仍保持较大（$\Omega(1)$）的窗口。

定理 III.2（比较预解式矩）。设 $p \in 2\mathbb{N}$ 为偶自然数。随机泡利串系综（6）的预解式（2），记作 $\boldsymbol{R}_{PS}$，与高斯酉系综的预解式 $\boldsymbol{R}_{GUE}$ 相比：

$$\left|\|\boldsymbol{R}_{PS}\|_p - \|\boldsymbol{R}_{GUE}\|_p\right| \lesssim \left(\frac{p^4}{\eta^5 m^2} + \frac{p^3}{\eta^5 m}\right)\left(1+\frac{p^3}{2^{2n}}\right). \tag{7}$$

符号 $\lesssim$ 表示略去绝对常数。

定理 III.2 在更一般情形下的证明见附录 A 2 。对于中等大小的 m（取决于其与实轴的距离 η 以及幂 p），公式（7）控制经预解式滤波后的期望谱密度：

$$\mathbb{E}\operatorname{Tr}|\boldsymbol{R}_{PS}|^p \approx \mathbb{E}\operatorname{Tr}|\boldsymbol{R}_{GUE}|^p\,.$$

由于我们希望得出一个对泡利字符串系综的实现以高概率成立的结论，因此还需要证明量$\operatorname{Tr}|\boldsymbol{R}|^p$集中在其期望值 $\mathbb{E}\operatorname{Tr}|\boldsymbol{R}|^p$附近（也就是说，谱密度的波动不大）；参见定理 A.1。最后，由于单个预解式探测的是局域态密度，我们可以通过连续放置预解式来探测积分后的 谱密度。低能态的丰富性意味着相位估计有相当大的成功机会。

IV. 非渐近随机矩阵理论的新结果

我们关于泡利字符串系综的结果属于随机矩阵非渐近普适律的范畴。本节将介绍这些结果的背景，并简要说明证明思路。

渐近普适性定律是随机矩阵理论（RMT）中备受赞誉的经典成就之一。例如，Wigner 表明，对于对角线以上元素为独立同分布的拉德马赫元的（标准化）对称矩阵，半圆定律是其极限谱分布。维格纳矩阵的普适性定律指出，只要前四阶矩有界，元素的具体分布就不会影响极限谱分布。随后，研究人员得到了维格纳型矩阵的谱与半圆分布之间的非渐近比较。综述可参见专著 [7, 48]。

[5] 这与相位估计振幅分布密切相关，其中宽度 η 大致对应分辨率（与运行时间成反比）。

我们的方法依赖于泡利字符串系综（2）的谱与高斯酉系综矩阵之间的非渐近比较；后者的谱分布近似服从半圆定律。这类结果不属于经典普适性定律的适用范围，因为泡利字符串系综几乎不具有任何随机性，更不用说独立元素了。为实现我们的方案，我们首先注意到，泡利字符串系综的低阶矩与高斯酉系综矩阵的低阶矩相匹配：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\boldsymbol{H}_{PS}] &= \mathbb{E}[\boldsymbol{H}_{GUE}];\\ \mathbb{E}[\boldsymbol{H}_{PS}\otimes\boldsymbol{H}_{PS}] &= \mathbb{E}[\boldsymbol{H}_{GUE}\otimes\boldsymbol{H}_{GUE}];\\ \mathbb{E}[\boldsymbol{H}_{PS}\otimes\boldsymbol{H}_{PS}\otimes\boldsymbol{H}_{PS}] &= \mathbb{E}[\boldsymbol{H}_{GUE}\otimes\boldsymbol{H}_{GUE}\otimes\boldsymbol{H}_{GUE}].\end{aligned}$$

对于随机矩阵的光滑统计量 f，我们可以利用林德伯格交换原理来发挥这种巧合的优势。每个随机矩阵模型都可以表示为独立同分布随机矩阵之和，并且我们可以通过每次替换一个加项，在两个模型之间进行插值。在每一步中，我们都可以将 f 展开为泰勒级数，以显露多项式矩，从而控制两个模型之间的变化。这些展开式中的项在三阶及以下相互抵消，只留下四阶误差。我们的方法与近期在随机矩阵理论中对林德伯格原理的应用 [17, 36] 截然不同。

更具体地说，我们将考虑独立随机厄米矩阵之和（维数均相同）：

$$\boldsymbol{H} = \sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{A}_i \quad\text{and}\quad \tilde{\boldsymbol{H}} = \sum_{i=1}^{m}\tilde{\boldsymbol{A}}_i. \tag{8}$$

尽管独立和模型不如经典随机矩阵系综广为人知，但它灵活性更强，适用范围也很广；示例见 [55] 。假设加项的低阶多项式矩相匹配。也就是说，

$$\mathbb{E}\,\boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{0} \quad\text{and}\quad \mathbb{E}\,\boldsymbol{A}_i^{\otimes k} = \mathbb{E}\,\tilde{\boldsymbol{A}}_i^{\otimes k} \quad \text{for } k = 1,\dots,t \text{ and } i = 1,\dots,m. \tag{9}$$

例如，随机泡利串的前三阶矩与高斯酉系综矩阵的前三阶矩相匹配。更一般地，量子信息论中的构造性模型可以匹配任意数量 t 的矩，这与酉 t-设计的情况类似。我们的工作展示了如何比较具有许多匹配矩的模型的谱性质。

我们的第一个普适性结果比较了这两个随机矩阵的迹多项式矩。这些结果使我们能够控制随机矩阵的谱范数。

定理 IV.1 (矩的普适性)。 考虑两族 $(\boldsymbol{A}_i)$ 和 $(\boldsymbol{A}_i)$ 相互独立的随机厄米矩阵，其矩匹配至 (9) 中的 $t \geq 2$ 阶，并按照 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 中的 (8)引入这些和。定义统计量

$$\begin{aligned}L_{p,k} &:= \left[\sum_{i=1}^{m}\left(\|\boldsymbol{A}_i\|_p^k + \|\tilde{\boldsymbol{A}}_i\|_p^k\right)\right]^{1/k} \qquad \textit{for } k \geq 1 \textit{ and } p \geq 2;\\ \sigma^2 &:= \sum_{i=1}^{m}\left(\|\mathbb{E}\,\boldsymbol{A}_i^2\| + \|\mathbb{E}\,\tilde{\boldsymbol{A}}_i^2\|\right).\end{aligned}$$

于是，对于每个偶数自然数 $p \in 2\mathbb{N}$，我们有如下界

$$\left|\|\boldsymbol{H}\|_p - \|\tilde{\boldsymbol{H}}\|_p\right| \quad\leq\quad \begin{cases}2p^{t/(t+1)}\cdot L_{p,t+1} + 2p\cdot L_{p,p};\\ 2p^{t/(t+1)}\cdot\left(\sigma^2 L_{\infty,\infty}^{t-1}\right)^{1/(t+1)} + 2p\cdot L_{p,p}.\end{cases} \tag{10}$$

该 p范数定义见 (4)。

定理 IV.1 的证明见章节 A1。定理 III.1 可通过将此结果应用于泡利字符串系综（2）和高斯酉系综而得。

如果对加项采用一致上界$L_{p,\infty} = \max_i\{\|\boldsymbol{A}_i\|_p, \|\boldsymbol{A}_i\|_p\}$，我们可以得到这一结果的更简单版本。例如，

$$\left|\|\boldsymbol{H}\|_p - \|\tilde{\boldsymbol{H}}\|_p\right| \quad\lesssim\quad \left(1 + (m/p)\right)^{1/(t+1)}\cdot pL_{p,\infty}.$$

这里，符号 $\lesssim$ 仅省略了绝对常数。从启发式角度看，我们应考虑 $p \ll m$，因此，匹配更多的矩（即增大 t）可以降低误差。Our 第二个普适性 ne 结果给出了独立和的预解式幂之间的比较。定义

$$\boldsymbol{R} := (\boldsymbol{H} - \omega + \mathrm{i}\eta)^{-1} \quad\text{and}\quad \tilde{\boldsymbol{R}} := (\tilde{\boldsymbol{H}} - \omega + \mathrm{i}\eta)^{-1} \quad \text{where } \omega \in \mathbb{R} \text{ and } \eta > 0. \tag{11}$$

随机矩阵 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 定义于（8）中。

定理 IV.2（预解矩的普适性）。 采用定理 *IV.1*的假设和记号。对于每个偶自然数 $p \in 2\mathbb{N}$，预解式 （11）的多项式矩 满足以下关系

$$\left| |||\boldsymbol{R}|||_p - |||\tilde{\boldsymbol{R}}|||_p \right| \quad \lesssim \quad \frac{1+(m/p)}{\eta} \cdot \left(\frac{pL_{3p,\infty}}{\eta} \right)^{t+1}.$$

符号 $\lesssim$ 省略了仅依赖于 t 的常数。

请参见附录 A2 ，其中给出了定理 IV.2 的证明。通过将该结果应用于泡利字符串系综和高斯酉系综，我们得到定理 III.2 。

预解式矩比较（定理 IV.2）不足以保证泡利字符串系综的某个随机实现$\boldsymbol{H}_{PS}$ 在低能态上具有显著的密度。为实现这一目标，我们还必须证明 $|||\boldsymbol{R}_{PS}|||_p$ 集中在其期望值附近。该主张需要单独的论证（定理 A.1）。关于预解式迹矩集中的结果是新的。

A. 相关工作

随机矩阵理论领域历来主要关注来自经典系综（Wigner、Wishart、Jacobi 等）的矩阵的谱密度的渐近极限律。在这一背景下，关于收敛速率也开展了大量研究，其中一些结果可以解释为非渐近普适律。例如，参见 Bai 与 Silverstein [7, 第 8]章。

近几年，研究人员已经认识到，普适现象的适用范围远远超出了经典矩阵系综。尤其是，我们开始更深入地理解独立和模型。Tropp 得到了这类问题的首个一般性结果 [57]。他的理论涵盖独立高斯随机矩阵之和，并给出了多项式矩逼近半圆分布的矩的条件。在 Tropp 的工作基础上，Bandeira 等人 [9] 提出了一种方法，用于比较独立高斯随机矩阵之和与自由概率模型，后者能够刻画更广泛的谱分布。稍加努力，这两篇论文中的技术很可能可以应用于泡利字符串系综的高斯变体（2），从而得到与我们的主要定理相似的结果。

与我们工作最直接相关的先行研究，是 Brailovskaya 与 van Handel [12] 最近发表的一篇预印本。他们的论文比较了一个随机矩独立和 $\boldsymbol{H}$ 与一个高斯随机矩阵独立和 $\boldsymbol{G}$ ，其中对应的加项具有相同的均值和协方差:

$$\boldsymbol{H} = \sum_{i=1}^m \boldsymbol{A}_i \quad \text{and} \quad \boldsymbol{G} = \sum_{i=1}^m \tilde{\boldsymbol{A}}_i \quad \text{where} \quad \mathbb{E}[\boldsymbol{A}_i] = \mathbb{E}[\tilde{\boldsymbol{A}}_i] \quad \text{and} \quad \mathbb{E}[\boldsymbol{A}_i \otimes \boldsymbol{A}_i] = \mathbb{E}[\tilde{\boldsymbol{A}}_i \otimes \tilde{\boldsymbol{A}}_i]. \tag{12}$$

本文的主要结果 [12] 给出了保证这两个随机矩阵模型具有相近多项式矩和多项式预解矩的条件。

定理 IV.3 (矩与预解矩的普适性 [12])。 考虑两个如 (12) 中所示的随机矩阵模型。定义统计量

$$v := \left\| \sum_{i=1}^m \mathbb{E}\, \boldsymbol{A}_i^2 \right\| \quad \textit{and} \quad L_\infty := \max_i \|\boldsymbol{A}_i\|.$$

那么，对于每个偶自然数 $p \in 2\mathbb{N}$，多项式矩和预解式满足以下界

$$\begin{aligned} \left| |||\boldsymbol{H}|||_p - |||\boldsymbol{G}|||_p \right| \quad &\lesssim \quad \left(p^2 v L_\infty\right)^{1/3} + pL_\infty; \\ \left| |||\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{H}}|||_p - |||\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{G}}|||_p \right| \quad &\lesssim \quad \frac{p^2 v L_\infty + p^3 L_\infty^3}{\eta^4}. \end{aligned} \tag{13}$$

p-范数定义见 (4)，符号 $\lesssim$ 表示绝对常数。

这一结果的证明采用了受 [42] 启发的 Stein 方法的一个变体。其基本技巧是在两个随机矩阵模型之间进行平滑插值，同时沿插值路径保持二阶矩不变。为了控制谱函数沿该路径的导数，作者结合使用累积量展开以及对函数高阶导数的界。

比较界（10）和（13）很有裨益。定理IV.3 中的方差参数 v 从不大于定理 IV.1 中的方差参数 σ^2 ，因为在 v 中，范数位于求和符号之内。对于独立同分布和， σ^2和 v 这两个量相同，但一般而言，它们的差值可能相差一个高达环境维数 N 的因子。尾部参数（$L_{p,\ p}$ 和 $L_{p,\ \infty}$ 和 L_∞）之间的差异并非分析中的本质特征；我们陈述的是最简形式的结果，而非最优形式。

另一方面，定理 IV.3中的方法无法对匹配二阶矩以上的随机矩阵模型进行更精细的比较（除非三阶矩恒为零）。连续插值似乎无法扩展到二阶矩以上，这有其内在原因（附录 F）。相比之下，基于 Lindeberg 交换的方法能够灵活处理任意阶的匹配矩。

正如我们将会看到的（第 IVB 节），在一些自然情形下，高阶矩会相同。由此得到的高阶误差界优于二阶界。在量子信息领域，我们通常需要取矩参数 $p \sim \log N \sim n$，因此这一改进意义重大。

此外，与基于 Stein 方法和累积量展开的方法相比，我们的论证在概念上和技术上都更简单。因此，它或许更容易推广到其他情形，应用范围也可能有所不同。总而言之，我们的工作为非渐近随机矩阵理论这一新兴工具集添砖加瓦。

B. 更多示例

我们的普适性结果适用于许多不同的随机矩阵模型系列，其中包括一些可能与 [12] 中比较所侧重的高斯模型并不相似的示例。对于量子计算应用而言，相较于随机泡利字符串和，这些系列有望更好地刻画现实中的稀疏矩阵。不过，它们通常需要使用额外的块编码，而本文不讨论这一点。

1. 将稀疏矩阵与高斯酉系综进行比较

除了随机泡利串系综外，我们还可以描述另一类稀疏随机矩阵，它们的低阶矩也与高斯酉系综相匹配。因此，普适性结果（定理 IV.1，定理 IV.2）表明，这些模型的分布近似服从半圆分布。

定义 IV.1（带复符号的置换）。 随机复符号置换矩阵是均匀随机置换矩阵 $\boldsymbol{P}$ 与带有复符号的对角矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的乘积：

$$\boldsymbol{Q} := \boldsymbol{D}\boldsymbol{P} \quad \textit{where} \quad \boldsymbol{D}_{ab} = \delta_{ab}\frac{r_a + \mathrm{i}r'_a}{\sqrt{2}} \quad \textit{and} \quad r_a, r'_a \overset{i.i.d.}{\sim} \{1,-1\}.$$

命题 IV.1（复符号置换）。 考虑具有如下形式的随机矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{\tilde{A}}$

$$\boldsymbol{A} := \frac{\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q}^\dagger}{\sqrt{2}} \quad \textit{where } \boldsymbol{Q} \textit{ is a complex signed permutation}$$
$$\boldsymbol{\tilde{A}} \sim \boldsymbol{H}_{GUE}.$$

对于这些模型，前三阶矩相匹配：

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{A}^{\otimes k}] = \mathbb{E}[\boldsymbol{\tilde{A}}^{\otimes k}] \quad \textit{for each} \quad k = 1,2,3.$$

参见附录E1 了解计算过程。还可以考虑随机实符号置换，[6] 它与高斯正交系综（GOE）的前三阶矩相匹配。

2. Higher moments matching

尽管在实际中，高阶矩匹配的例子并不常见，但我们可以描述几对在任意高阶矩上都匹配的模型。第一个例子考虑用随机酉矩阵共轭一个固定矩阵：

$$\tilde{\boldsymbol{A}}_i := \frac{1}{\sqrt{m}}\tilde{\boldsymbol{U}}_i\boldsymbol{\sigma}\tilde{\boldsymbol{U}}_i^\dagger \quad \text{where} \quad \tilde{\boldsymbol{U}}_i \sim \text{haar};$$
$$\boldsymbol{A}_i := \frac{1}{\sqrt{m}}\boldsymbol{U}_i\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{U}_i^\dagger \quad \text{where} \quad \boldsymbol{U}_i \sim \text{unitary } t\text{-design}.$$

---

[6] 随机符号置换定义如下：$\boldsymbol{Q}' := \boldsymbol{D}'\boldsymbol{P}$ 其中 $\boldsymbol{D}'_{ab} = \delta_{ab}r_a$ 且 $r_a \overset{i.i.d.}{\sim} \{1,-1\}$。

事实上，如果我们取酉矩阵 $\boldsymbol{U}_i$ 为 Clifford 电路（精确 3-设计），并令 $\boldsymbol{\sigma}$ 为一个固定的泡利串，就几乎得到了泡利字符串系综（除了无法通过共轭产生的恒等元素）。然而，除了 Clifford 电路之外，我们不知道还有哪些矩阵 $\boldsymbol{A}_i$ 仍然是稀疏的例子。

如果我们坚持使用稀疏矩阵，这里还有另一个例子。

$$\tilde{\boldsymbol{A}}_i := \frac{\tilde{\boldsymbol{Q}}_i + \tilde{\boldsymbol{Q}}_i^\dagger}{\sqrt{2m}} \quad \text{where} \quad \tilde{\boldsymbol{Q}}_i \sim \quad \text{i.i.d. complex signed permutations;}$$

$$\boldsymbol{A}_i := \frac{\boldsymbol{Q}_i + \boldsymbol{Q}_i^\dagger}{\sqrt{2m}} \quad \text{where} \quad \boldsymbol{Q}_i \sim \quad \text{i.i.d. } t\text{-wise independent complex signed permutations.}$$

在此背景下，t-路独立置换恰好就是 t阶矩匹配条件 $\mathbb{E}\,\boldsymbol{Q}_i^{\otimes t} = \mathbb{E}\,\tilde{\boldsymbol{Q}}_i^{\otimes t}$。关于 近似和 精确的 t-设计 [14, 46] 以及 t-路独立置换 [2]，文献中已有相应构造。我们将对近似情形的细致分析留待未来工作；在该情形下，所需的随机比特非常少。

V. 关于去量子化和量子优势的评论

本章节中，我们讨论低能问题的经典 复杂度。其特点与局域哈密顿量问题不同，因为我们的模型高度非局域，且具有半圆谱。

1. 去量子化能走多远? 正如我们提到的，去量子化领域的最新进展表明，在假设能够以某种经典方式访问量子态的情况下，许多线性代数任务都可以高效求解。具体而言，现有研究针对各种任务考虑了低秩矩阵 [19, 20, 53, 54] 或精度为常数的高秩矩阵 [26]。

在定理 II.1的设定下，当精度 $\epsilon > 0$是任意固定的 常数 （且 m为多项式级大）时，我们给出了一个高效的经典见证来达到最优值。其思路是进行简单的多项式近似。然而，处理该见证的代价为 $\exp(\Omega(1/\sqrt{\epsilon}))$，随着常数 ϵ的增大而迅速恶化。

命题 V.1 （任意常数精度下的高效经典见证）。 对于任意 ϵ 且足够大的$m = \Omega(\mathrm{Poly}(n, \epsilon^{-1}))$，存在一个次数为 $d = \mathcal{O}(1/\sqrt{\epsilon})$ 的多项式 $p_d(x)$，使得相应的试探解态具有较低能量

$$\boldsymbol{\rho} \propto p_d(\boldsymbol{H})^2 \quad \textit{such that} \quad \mathrm{Tr}[\boldsymbol{\rho H}] \le (1-\epsilon)\lambda_{\min}(\boldsymbol{H}).$$

此外，这可以通过经典算法在以下运行时间内高效验证

$$\mathcal{O}((dm)^{2d} nd).$$

命题 *V.1*的证明。 对吉布斯态使用幂级数近似（即泰勒展开），可得到一个次优次数 $d = \mathcal{O}(1/\epsilon)$。借助吉布斯态的切比雪夫多项式近似，可以达到更优的次数 $d = \mathcal{O}(1/\sqrt{\epsilon})$。验证算法只需计算试探解态中的全部 $(dm)^{2d}$ 项 $\boldsymbol{\rho}$。每个 $(dm)^{2d}$ 项都需要进行 $2d$次泡利串乘法，每次的代价为 $\mathcal{O}(n)$。 □

这表明，“远离基态”的本征态具有多项式经典复杂度；这让人联想到在给定良好试探态的基态能量估计问题中，去量子化方法的代价 [26]。不过，上述经典多项式见证的近似比只能达到一个常数，而量子算法则可以不断提高精度[7]。

2. 给我一个判定问题! 要真正讨论量子优势，理想情况下，我们希望有一个具有经典输入和输出的问题，尤其是判定问题。一个候选问题是计算我们模型的基态能量近似值。然而，由于我们的问题具有随机性，我们预计谱会集中在半圆分布附近。如果谱恰好是半圆分布，经典算法只需输出确定性的数值即可。因此，如果存在经典困难性，其根源必定是谱偏离半圆分布密度时实例间的波动</style}，这就是为什么我们需要让精度 $\epsilon = 1/\mathrm{Poly}(n)$足够小，同时项数 $m = \mathrm{Poly}(n)$不能太大（否则波动会变得过小且可预测）。

鉴于上述内容，量子优势的一个候选问题是高精度地判定态密度。通过设定阈值，该问题也可以转化为二元判定问题。

[7] 更准确地说，我们目前的结果要求项数 m 随所需精度的提高而增加。

问题 V.0.1 (任务：态密度判定)。 给定一个从泡利字符串系综中抽样得到的哈密顿量和一个小参数 ϵ，输出一个小能量区间内的态数

$$[-\delta,\delta]\subset[-2,2] \quad up\ to\ multiplicative\ error \quad \epsilon.$$

对于某些 $m=\mathrm{Poly}(n)$、 $\epsilon=\mathrm{Poly}(n)^{-1}$、 $\delta=\mathrm{Poly}(n)^{-1}$ 而言，它在经典计算上是否很难？

存在一种门复杂度为 Poly$(\epsilon^{-1},\delta^{-1},m)$ 的量子算法能够成功：我们关于低能态密度的集中性论证（定理 II.1 的证明中的 (C3)）还表明，对于每个 δ，存在一个多项式规模的 $m=\mathrm{Poly}(\delta^{-1},n)$，使得局域态密度 $[-\delta,\delta]$ 至少是半圆分布态密度的一半。因此，相位估计以 $\Omega(\delta^{-1})$ 的成功概率从该区间进行采样。通过重复试验[8]，可以以高置信度将态密度估计到误差 ϵ，算法成本为 Poly$(1/\epsilon)$。为什么要考虑近似态密度的问题，而不是近似基态能量？目前，我们还无法控制极端特征值附近的谱；对于固定的 m、n，我们目前的结果并不能排除存在一个较小谱隙 $\Omega(m^{-1/4}n^{5/4})$ 的可能性；尽管我们相信谱隙呈指数级小，但证明这一点还需要非渐近随机矩阵理论的进一步发展。

要证明态密度问题具有经典困难性，例如通过从一个已知困难的问题进行归约，仍然较难实现。一般性的证明或许要求过高，因为这将为一个无预言机平均情形判定问题带来计算量子优势，而目前尚无其他已知实例。尽管如此，提出支持这一结论的论据仍然值得探讨。一个具体的步骤是证明，谱相对于半圆分布存在足够大的实例间涨落，使得经典算法无法仅靠始终输出平均值而成功。我们相信这一点成立，也很值得通过数值方法加以检验。然而，要证明这一点，还需要进一步发展非渐近随机矩阵理论。

3. 量子混沌与量子优势。 我们的工作契合一个更广泛的问题：量子混沌是否可能成为量子易解问题的来源，甚至带来量子计算优势。正如我们提到的，Hastings 和 O'Donnell [32] 在 SYK 模型这一著名的量子混沌玩具模型上取得了具体进展，他们给出了一个低能见证态，而已知高斯态无法胜任这一任务。如果能改进经典困难性论证，或者证明该哈密顿量在基态附近仍然易解，他们的结果将更有力地回答眼前的问题。后一种可能从物理角度看似乎合理，因为该模型在基态能量附近仍然是"混沌"的。事实上，如果从形式上假设量子混沌可由本征态热化假说（ETH）来刻画，那么便可以证明，制备低能态在量子意义上是容易的，因为在低温下，量子计算机能够高效地进行吉布斯采样 [18]。

我们的工作通过研究随机矩阵模型，在谱性质的非渐近分析甚至可以延伸至基态能量附近的情形下，推进了对量子混沌及其影响的理解。不过，我们承认该模型是非局域的，在某些方面或许偏离了局域哈密顿量问题：其量子易解性源于半圆谱，并未直接解释为何混沌局域哈密顿量的低能问题（其谱密度呈现的是尾部）也应当易解。尽管如此，我们预计以下发现可以推广到局域混沌哈密顿量：随机矩阵行为可以由极少量的随机比特产生，而且谱平滑且没有离群值（图 2）。

不过，还有大量量子混沌现象学需要经过形式化处理，才能明确其对量子优势的意义。一个方向是证明本征态热化假说（例如针对 SYK 模型），其大致含义是相邻的能量本征态彼此之间具有良好的连通性。我们认为，可以针对高斯酉系综将这一点形式化，并依据普适性原理将其推广到我们的泡利字符串系综。另一个方向是降低泡利字符串系综的局域性。事实上，即使将每个哈密顿量项的局域性 k 从 $k=\Theta(n)$ 降低到 $k=\log(n)$，我们的量子电路复杂度下界论证仍然并非平凡，这至少为经典困难性提供了一些迹象。

致谢

我们感谢 Thomas Vidick、John Preskill、Anand Natarajan、John Wright、Gil Refael、Mehdi Soleimanifar、András Gilyén、Sam McArdle、William Kretschmer、Michael Kastoryano、Hsin-Yuan (Robert) Huang、Leo Zhou 和 Nicola Pancotti 提供的宝贵讨论。CFC 获 Eddlemen Fellowship 资助，并得到 AWS量子计算中心暑期实习项目的支持。在本项目期间，MB 此前还曾兼任

[8] 取 $O(\delta^{-1}\epsilon^{-2})$ 个样本，可以将态数估计到乘法 mples，可以将态数估计到相差一个乘法因子以内。 为 ϵ。

与位于美国帕萨迪纳的 AWS量子计算中心合作。

---

[1] D. Aharonov、D. Gottesman、S. Irani 和 J. Kempe。量子系统在线上的能力。《数学物理通讯》，287(1):41–65，2009。[2] N. Alon 和 S. Lovett。几乎 k 重独立与 k 重独立置换，以及一般群作用下的均匀性。《计算理论》，9(15):559–577，2013。[3] G. W. Anderson、A. Guionnet 和 O. Zeitouni。《随机矩阵导论》。剑桥高等数学研究丛书。剑桥大学出版社，2009。[4] G. W. Anderson、A. Guionnet 和 O. Zeitouni。《随机矩阵导论》，剑桥高等数学研究丛书第 118 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2010。[5] A. Anshu、N. P. Breuckmann 和 C. Nirkhe。由优良量子码构造无低能平凡态哈密顿量。ArXiv，abs/2206 13228，2022。。[6] R. Babbush、N. Wiebe、J. McClean、J. McClain、H. Neven 和 G. K.-L. Chan。材料的低深度量子模拟。《物理评论X》，8:011044，2018。[7] Z. Bai 和 J. W. Silverstein。《大维随机矩阵的谱分析》。施普林格统计学丛书。施普林格，纽约，第二版，2010。[8] C. L. Baldwin 和 B. Swingle。淬火与退火：从 SK 到 SYK 的玻璃态性质。《物理评论X》，10:031026，2020 年 8 月。[9] A. S. Bandeira、M. T. Boedihardjo 和 R. van Handel。矩阵集中不等式与自由概率。2021。[10] R. Bhatia。《矩阵分析》。施普林格，1997。[11] S. Boucheron、G. Lugosi 和 P. Massart。《集中不等式：独立性的非渐近理论》。牛津大学出版社，2013 年 2 月。[12] T. Brailovskaya 和 R. van Handel。普适性与尖锐的矩阵集中不等式，2022。[13] F. G. S. L. Brandão 和 M. Cramer。非临界量子系统统计力学系综的等价性。arXiv：量子物理，2015。[14] F. G. S. L. Brandão、A. W. Harrow 和 M. Horodecki。局域随机量子电路是近似多项式阶设计。《数学物理通讯》，346(2):397–434，2016 年 8 月。[15] E. Campbell。用于快速哈密顿量模拟的随机编译器。《物理评论快报》，123:070503，2019。[16] C. Chamberland、K. Noh、P. Arrangoiz-Arriola、E. T. Campbell、C. T. Hann、J. Iverson、H. Putterman、T. C. Bohdanowicz、S. T. Flammia、A. Keller、G. Refael、J. Preskill、L. Jiang、A. H. Safavi-Naeini、O. Painter 和 F. G. S. L. Brandão。利用级联猫码构建容错量子计算机，2020。[17] S. Chatterjee。一个简单的不变性定理，2005。[18] C.-F. Chen 和 F. G. Brandão。基于本征态热化假说的快速热化。arXiv 预印本 arXiv:2112.07646，2021。[19] N.-H. Chia、A. Gilyén、T. Li、H.-H. Lin、E. Tang 和 C. Wang。基于采样的次线性低秩矩阵运算框架，用于量子机器学习的去量子化。第 52 届 ACM SIGACT计算理论研讨会论文集，2019。[20] N.-H. Chia、H.-H. Lin 和 C. Wang。用于求解低秩线性系统的量子启发次线性经典算法。ArXiv，abs/1811.04852，2018。[21] B. Collins 和 I. Nechita。量子信息论中的随机矩阵技术。《数学物理学杂志》，57(1):015215，2016 年 1 月。[22] L. Erdős 和 D. Schröder。量子自旋玻璃态密度中的相变。《数学物理、分析与几何》，17(3-4):441–464，2014 年 12 月。[23] L. Erdős 和 H.-T. Yau。随机矩阵理论的动力学方法。2017。[24] R. P. Feynman。用计算机模拟物理学。《国际理论物理学杂志》，21 488，1982 6 7 467(/): – 。[25] M. H. Freedman 和 M. B. Hastings。非-k-超有限复形上的量子系统：扩展图上经典统计力学的推广。2013。[26] S. Gharibian 和 F. L. Gall。量子奇异值变换的去量子化：复杂性及其在量子化学和量子PCP猜想中的应用。载于第 54 届 ACM SIGACT计算理论研讨会论文集。ACM，2022 年 6 月。[27] A. Gilyén、S. Lloyd 和 E. Tang。量子启发的低秩随机回归，其对维数的依赖为对数级。ArXiv，abs/1811.04909，2018。[28] A. Gilyén、Y. Su、G. H. Low 和 N. Wiebe。量子奇异值变换及其他：量子矩阵运算的指数级改进。载于第 51 届 ACM SIGACT计算理论研讨会论文集。ACM，2019 年 6 月。[29] D. Gottesman 和 S. Irani。平移不变铺砖与哈密顿量问题的量子和经典复杂度。载于 2009 年第 50 届 IEEE 计算机科学基础研讨会，页 95–104。IEEE，2009。[30] G. Gur-Ari、R. Mahajan 和 A. Vaezi。SYK 模型是否具有自旋玻璃相？《高能物理学杂志》，2018(11)，2018 年 11 月。[31] A. W. Harrow 和 A. Montanaro。局域哈密顿量的极端特征值。Quantum，1:6，2017 年 4 月。[32] M. B. Hastings 和 R. O’Donnell。优化强相互作用费米子哈密顿量，2021。[33] P. Hitczenko。关于鞅解耦不等式中常数的变化规律。《美国数学会会刊》，121(1):253–258，1994。[34] A. Kitaev。量子全息的一个简单模型：KITP 演讲 1 和演讲 2，2015。[35] A. Y. Kitaev、A. Shen、M. N. Vyalyi 和 M. N. Vyalyi。《经典与量子计算》。第 47 号。美国

数学学会，2002年。[36] S. B. Korada 和 A. Montanari。林德伯格原理在通信和统计学习中的应用。《IEEE信息论汇刊》，57(4)：2440–2450，2011年。[37] J. Lee、D. W. Berry、C. Gidney、W. J. Huggins、J. R. McClean、N. Wiebe 和 R. Babbush。通过张量超收缩实现更高效的量子计算化学。《 PRX Quantum 》，2(3)，2021 年 7 月。[38] S. Lee 、 J. Lee、H. Zhai、Y. Tong、A. M. Dalzell、A. Kumar、P. Helms、J. Gray、Z.-H. Cui、W. Liu、M. Kastoryano、R. Babbush、J. Preskill、D. R. Reichman、E. T. Campbell、E. F. Valeev、L. Lin 和 G. K.-L. Chan。量子化学中是否存在指数级量子优势的证据？，2022年。[39] S. Lloyd。通用量子模拟器。《科学》，273(5278)：1073–1078，1996年。[40] G. H. Low 和 I. L. Chuang。通过量子信号处理实现最优哈密顿量模拟。《物理评论快报》，118：010501，2017年。[41] G. H. Low 和 I. L. Chuang。通过量子比特化实现哈密顿量模拟。《Quantum》，3：163，2019年。[42] A. Lytova 和 L. Pastur。具有独立元素的随机矩阵的线性特征值统计量的中心极限定理。《概率年刊》，37(5)：1778–1840，2009年。[43] J. Maldacena 和 D. Stanford。关于Sachdev-Ye-Kitaev模型的评述。《物理评论D》，94(10)，2016年11月。[44] S. McArdle、S. Endo、A. Aspuru-Guzik、S. C. Benjamin 和 X. Yuan。量子计算化学。《现代物理评论》，92：015003，2020年。[45] G. E. Mitchell、A. Richter 和 H. A. Weidenmüller。核物理中的随机矩阵与混沌：核反应。《现代物理评论》，82(4)：2845–2901，2010年10月。[46] Y. Nakata、D. Zhao、T. Okuda、E. Bannai、Y. Suzuki、S. Tamiya、K. Heya、Z. Yan、K. Zuo、S. Tamate、Y. Tabuchi 和 Y. Nakamura。用于精确幺正设计及其高阶随机基准测试应用的量子电路。《PRX Quantum》，2(3)，2021年9月。[47] S. Oymak 和 J. A. Tropp。随机降维的普适性定律及其应用。《信息与推断》，7(3)：337–446，2018年。[48] L. Pastur 和 M. Shcherbina。大型随机矩阵的特征值分布，《数学调查与专著》第171卷。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2011年。[49] G. Pisier。《算子空间理论导论》。《伦敦数学学会讲义丛书》。剑桥大学出版社，2003年。[50] S. Sachdev 和 J. Ye。随机量子海森堡磁体中的无能隙自旋流体基态。《物理评论快报》，70(21)：3339–3342，1993年5月。[51] D. Sherrington 和 S. Kirkpatrick。自旋玻璃的可解模型。《物理评论快报》，35：1792–1796，1975年12月。[52] P. Shor。量子计算算法：离散对数与因数分解。载于《第35届计算机科学基础年度研讨会论文集》，第124–134页，1994年。[53] E. Tang。量子主成分分析仅因其态制备假设而实现指数级加速。《物理评论快报》，127 6：060503，2018年。[54] E. Tang。用于推荐系统的量子启发式经典算法。载于《第51届ACM SIGACT计算理论研讨会论文集》。ACM，2019年6月。[55] J. A. Tropp。矩阵集中不等式导论，2015年。[56] J. A. Tropp。独立随机矩阵之和的期望范数：一种初等方法。载于《高维概率VII》，《概率进展》第71卷，第173–202页。施普林格， [Cham], 2016。[57] J. A. Tropp。二阶矩阵集中不等式。《应用与计算调和分析》，44(3)：700–736，2018年。[58] V. von Burg、G. H. Low、T. Häner、D. S. Steiger、M. Reiher、M. Roetteler 和 M. Troyer。量子计算增强的计算催化。《物理评论研究》，3(3)，2021年7月。[59] E. P. Wigner。关于某些对称矩阵根的分布。《数学年刊》，67 327，1958 2 325( )：–。[60] D. Williams。《鞅概率论》。剑桥大学出版社，1991年。[61] T. J. Yoder、G. H. Low 和 I. L. Chuang。具有最优查询次数的定点量子搜索。《物理评论快报》，113：210501，2014年11月。

工作的剩余部分从比较原理（章节 A）的证明开始，包括矩和预解式。我们在章节 B中实例化高斯酉系综的非渐近性质。比较结果与高斯酉系综的性质结合起来，使我们能够计算泡利字符串系综的性质（章节C）。在章节 D中，我们证明泡利字符串系综的电路规模下界，其论证独立于比较原理。章节 E 包含简要的缺失证明。章节 F论述了为什么插值方法无法直接利用更高阶匹配矩。

附录 A：林德伯格原理的计算

在本章节中，我们将针对 p 阶矩和预解式矩，应用一种林德伯格交换原理。我们采用的主要假设是，两个独立矩阵之和具有相同的低阶矩。主要技术论证可通过矩计算清晰地说明。由于预解式是非凸的，预解式的计算更为复杂。我们还必须证明，预解式矩的随机实现集中于其期望值附近。

1. 矩

我们重述一下关于矩的定理。

˜定理 IV.1 (矩的普适性)。 考虑两个族 $(\boldsymbol{A}_i)$ 和 $(\boldsymbol{A}_i)$ ，它们由相互独立的随机˜厄米矩阵组成，其矩在阶数不超过 (9) 时匹配。引入和 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{H}$ ，如 (8)中所示。定义统计量

$$L_{p,k} := \left[\sum_{i=1}^{m}\left(|||\boldsymbol{A}_i|||_p^k + |||\tilde{\boldsymbol{A}}_i|||_p^k\right)\right]^{1/k} \qquad for\ k \geq 1\ \ and\ p \geq 2;$$
$$\sigma^2 := \sum_{i=1}^{m}\left(\|\mathbb{E}\,\boldsymbol{A}_i^2\| + \|\mathbb{E}\,\tilde{\boldsymbol{A}}_i^2\|\right).$$

那么，对于每个偶自然数 $p \in 2\mathbb{N}$，我们有以下界

$$\left|\,|||\boldsymbol{H}|||_p - |||\tilde{\boldsymbol{H}}|||_p\,\right| \quad \leq \quad \begin{cases} 2p^{t/(t+1)} \cdot L_{p,t+1} + 2p \cdot L_{p,p}; \\ 2p^{t/(t+1)} \cdot \left(\sigma^2 L_{\infty,\infty}^{t-1}\right)^{1/(t+1)} + 2p \cdot L_{p,p}. \end{cases} \tag{10}$$

该 p范数定义见(4)。

我们对定理IV.1 的证明基于林德伯格交换原理。粗略地说，我们通过在每一步替换一个自变量，在两个和之间进行插值。由于加项的低阶矩匹配，每次替换对 p范数的影响都很小，误差量级为$(t+1)$。计算很直接，但它隐含地利用了随机矩阵在矩匹配中的非交换性。误差是一个关于矩阵的非交换多项式，我们通过直接应用霍尔德不等式来处理它们，完全忽略了非交换性。替换完所有加项后，我们通过自界定论证将这些估计整合起来。要完成这一步，我们必须通过转化为连续微分方程来求解一个差分方程。

林德伯格方　法最近已在论文 [17, 36, 47] 中应用于随机矩阵理论。其他一些思路　nd 本文中的方法　这一论证根植于论文 [9, 12, 56, 57]。

基本论证依赖于适用于 Schatten范数的一般形式的霍尔德不等式。正如我们将看到的，我们可以引入更精细的矩不等式来取得一些改进。

事实 A.1 （随机矩阵的多元Hölder不等式）。对于任意一组（$\boldsymbol{X}_1$，……， $\boldsymbol{X}_k$）方形随机矩阵（它们可能在统计上相互依赖），其乘积满足迹不等式

$$\mathbb{E}\,\overline{\mathrm{Tr}}\left|\prod_{i=1}^{k}\boldsymbol{X}_i\right| = \left|\left|\left|\prod_{i=1}^{k}\boldsymbol{X}_i\right|\right|\right|_1 \leq \prod_{i=1}^{k}|||\boldsymbol{X}_i|||_{p_i} \quad whenever \quad \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{p_i} = 1 \quad and \quad p_i \geq 0.$$

证明概要。在确定性情形下，对于两个矩阵，该结果见 [10, 推论 4.26]。使用归纳法将界推广到两个以上的确定性矩阵。要纳入归一化迹，请注意，加权几何平均（p_1、……、 p_ℓ） $\mapsto \prod_{i=1}^{\ell} a_i^{p_i}$对于固定的 $a_j \geq 0$ 是齐次的。要纳入期望，请回忆加权几何平均是凹函数，并应用 Jensen不等式。 □

定理*IV.1*的证明：匹配两个矩。为说明论证背后的概念，我们仔细证明 $t = 2$ 情形下的第一个界。随后，我们将介绍将该界推广到 $t > 2$ 并引入方差参数 σ^2 所需的修改。

取一个偶自然数 $p \in 2\mathbb{N}$。我们的目标是比较两个独立和 $\boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^m \boldsymbol{A}_i$ 和 $\tilde{\boldsymbol{S}} = \sum_{i=1}^m \tilde{\boldsymbol{A}}_i$ 的第 p 阶矩 $|||\cdot|||_p^p$。主要思路是每次将一个加项从 $\boldsymbol{A}_j$ 更新为 $\tilde{\boldsymbol{A}}_j$，并控制每一步中 p-范数的变化。

具体而言，对于每个索引 $j = 0, 1, 2, \dots, m$，我们可以定义混合矩阵

$$\boldsymbol{S}_j := \sum_{i=1}^{j} \tilde{\boldsymbol{A}}_i + \sum_{i=j+1}^{m} \boldsymbol{A}_i \quad \text{where} \quad \boldsymbol{S}_0 = \boldsymbol{S} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{S}_m = \tilde{\boldsymbol{S}}.$$

将 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 的第 p 阶矩之差表示为望远镜求和：

$$\mathbb{E}\,\overline{\mathrm{Tr}}\left(\sum_{i=1}^m \tilde{\boldsymbol{A}}_i\right)^p - \mathbb{E}\,\overline{\mathrm{Tr}}\left(\sum_{i=1}^m \boldsymbol{A}_i\right)^p = \sum_{j=1}^m \left(\mathbb{E}\,\overline{\mathrm{Tr}}\,\boldsymbol{S}_j^p - \mathbb{E}\,\overline{\mathrm{Tr}}\,\boldsymbol{S}_{j-1}^p\right). \tag{A1}$$

对于偶数 p，我们可以用迹的幂表示 p-范数[9]：$|||\boldsymbol{S}|||_p^p = \mathbb{E}\,\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{S}^p$。为了界定望远镜求和 ng，我们首先分 分析单次更新误差，然后求解一个递归。

步骤 I：单次更新误差。固定一个索引 $j = 1, \dots, m$。下面给出更新 $\boldsymbol{A}_j$ 为 $\boldsymbol{A}_j$时， p-范数的变化界。将和式 $\boldsymbol{S}_j$ 中保持不变的部分定义为

$$\boldsymbol{S}_- := \boldsymbol{S}_j - \tilde{\boldsymbol{A}}_j = \boldsymbol{S}_{j-1} - \boldsymbol{A}_j.$$

我们可以通过在未改变的部分 $\boldsymbol{S}_-$处对多项式矩进行泰勒展开，来控制多项式矩的变化。

展开矩阵和的幂时，请记住标量二项式展开：

$$(x + y)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^{p-k} y^k.$$

对于矩阵，展开形式为

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{S}_- + \boldsymbol{A}_j)^p &= \sum_{words} \boldsymbol{S}_- \cdots \boldsymbol{A}_j \boldsymbol{S}_- \cdots \boldsymbol{A}_j \boldsymbol{S}_- \cdots \boldsymbol{A}_j \boldsymbol{S}_- \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{p} \boldsymbol{M}_k \quad \text{where} \quad \left|\mathbb{E}\,\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{M}_k|\right| \le \binom{p}{k} |||\boldsymbol{S}_-|||_p^{p-k} |||\boldsymbol{A}_j|||_p^k. \end{aligned} \tag{A2}$$

同样，$(\boldsymbol{S}_- + \tilde{\boldsymbol{A}}_j)^p = \sum_{i=1}^m \tilde{\boldsymbol{M}}_i$，加项也有类似的界。

（A2）中的界由 Hölder 不等式（事实 A.1）得出，该不等式应用于 $\boldsymbol{S}_-$和 $\boldsymbol{A}_j$ 在所有参数 $p_i = p$下的所有可能相对位置。请注意，这个一般性界忽略了矩阵的非交换性。二项式系数 $\binom{p}{k}$ 恰好等于 k 个 $\boldsymbol{A}_j$ 在$p - k$ 个 $\boldsymbol{S}_-$中的相对位置数。

接下来，由于阶参数为 $t = 2$，随机矩阵 $\boldsymbol{A}_i$ 和 $\boldsymbol{A}_i$的一阶和二阶矩对每个索引 i都相同。因此，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,\overline{\mathrm{Tr}}[\boldsymbol{A}_i \boldsymbol{B}] &= \mathbb{E}\,\overline{\mathrm{Tr}}[\tilde{\boldsymbol{A}}_i \boldsymbol{B}]; \\ \mathbb{E}\,\overline{\mathrm{Tr}}[\boldsymbol{A}_i \boldsymbol{B} \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{C}] &= \mathbb{E}\,\overline{\mathrm{Tr}}[\tilde{\boldsymbol{A}}_i \boldsymbol{B} \tilde{\boldsymbol{A}}_i \boldsymbol{C}] \quad \text{for arbitrary } \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \text{ independent from } \boldsymbol{A}_i, \tilde{\boldsymbol{A}}_i.\end{aligned}$$

关键在于，这意 味着，减去期望矩后，一阶项 会完全抵消 $\boldsymbol{M}_1$ 并 d $\tilde{\boldsymbol{M}}_1$ 以及二阶 阶项 $\boldsymbol{M}_2$ 和 $\boldsymbol{M}_2$。因此，

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\,\overline{\mathrm{Tr}}\,\boldsymbol{S}_j^p - \mathbb{E}\,\overline{\mathrm{Tr}}\,\boldsymbol{S}_{j-1}^p\right| &= \left|\mathbb{E}\,\overline{\mathrm{Tr}}(\boldsymbol{S}_- + \tilde{\boldsymbol{A}}_j)^p - \mathbb{E}\,\overline{\mathrm{Tr}}(\boldsymbol{S}_- + \boldsymbol{A}_j)^p\right| = \left|\sum_{k=3}^{p} (\boldsymbol{M}_k - \tilde{\boldsymbol{M}}_k)\right| \\ &\le \sum_{k=3}^{p} p^k |||\boldsymbol{S}_{j-1}|||_p^{p-k} |||\boldsymbol{A}_j|||_p^k \quad + \quad (\boldsymbol{A}_j \mapsto \tilde{\boldsymbol{A}}_j) \\ &\le \frac{1}{4} |||\boldsymbol{S}_{j-1}|||_p^{p-3} \left(2p |||\boldsymbol{A}_j|||_p\right)^3 + \frac{1}{4} \left(2p |||\boldsymbol{A}_j|||_p\right)^p \quad + \quad (\boldsymbol{A}_j \mapsto \tilde{\boldsymbol{A}}_j). \end{aligned} \tag{A3}$$

---

[9] 奇数阶 p-范数包含绝对值 $|||\boldsymbol{S}|||_p^p = \mathbb{E}\mathrm{Tr}\,|\boldsymbol{S}|^p$，因此不太适合进行泰勒展开。

~ ~记号（$\boldsymbol{A}_j \mapsto \boldsymbol{A}_j$）表示将第一项中的 $\boldsymbol{A}_j$ 替换为 $\boldsymbol{A}_j$后得到的副本。为得到第二行，我们合并高阶项 $\boldsymbol{M}_3, \cdots, \tilde{\boldsymbol{M}}_p$和 $\tilde{\boldsymbol{M}}_3, \cdots, \tilde{\boldsymbol{M}}_p$，对二项式系数 $\binom{p}{k} \le p^k$进行界定，并利用 p-范数 $\|\!|\boldsymbol{S}_-|\!\|_p = \|\!|\boldsymbol{S}_- + \mathbb{E}[\boldsymbol{A}_j]|\!\|_p \le \|\!|\boldsymbol{S}_- + \boldsymbol{A}_j|\!\|_p = \|\!|\boldsymbol{S}_{j-1}|\!\|_p$的凸性。最后一个不等式利用基本数值不等式对几何级数进行界定

$$\sum_{k=3}^{p} x^k = \sum_{k=3}^{p} 2^{-k}(2x)^k \le \frac{1}{4}((2x)^3 + (2x)^p) \quad \text{for } x \ge 0.$$

我们已成功建立了量 $\|\!|\boldsymbol{S}_j|\!\|_p^p$ 与 $\|\!|\boldsymbol{S}_{j-1}|\!\|_p^p$ 之间的比较关系 .

~**步骤 II：求解递归**。我们已将 $\boldsymbol{S}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 的矩之间的差值表示为混合矩阵 $\boldsymbol{S}_j$的矩的望远镜求和（A1）。论证的第一部分给出了每一步矩变化的上界，该上界由混合矩阵的一个较低阶矩表示。我们可以利用这些结果建立耦合差分不等式，并需要对其求解。

定义标量

$$x_j := \mathbb{E}\,\overline{\operatorname{Tr}}\,\boldsymbol{S}_j^p \quad \text{for } j = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

序列 (x_j) 的边界值是我们希望进行比较的原始独立和的矩： $x_m = \mathbb{E}\operatorname{Tr}\,\boldsymbol{S}^p$ 和 $x_0 = \mathbb{E}\operatorname{Tr}\boldsymbol{S}^p$。为了界定该序列的差值，我们引入如下记号

$$a_j := \frac{(2p)^3}{4}\left(\|\!|\boldsymbol{A}_j|\!\|_p^3 + \|\!|\tilde{\boldsymbol{A}}_j|\!\|_p^3\right) \quad \text{and} \quad b_j := \frac{(2p)^p}{4}\left(\|\!|\boldsymbol{A}_j|\!\|_p^p + \|\!|\tilde{\boldsymbol{A}}_j|\!\|_p^p\right) \quad \text{and} \quad a_0 := b_0 := 0.$$

在交换的第 jA3 步应用不等式（）后，我们得到以下耦合差分不等式：

$$|x_j - x_{j-1}| \le a_j \cdot x_{j-1}^{(p-3)/p} + b_j \quad \text{for each} \quad j = 1, \ldots, m. \tag{A4}$$

我们的任务是用初始值 x_0 以及系数 a_j 和 b_j 来给出终值 x_m 的上界。

为此，我们转而考虑一个微分方程。证明见本章节末尾 n.

引理 A.1（从差值到导数）。定义系数函数

$$a(s) := a_{\lceil s \rceil} \quad \textit{and} \quad b(s) := b_{\lceil s \rceil} \quad \textit{for} \quad s \in [0, m].$$

对于固定的整数 $1 \le k \le p$，考虑以下微分不等式

$$\begin{cases} x'(s) \ge a(s) \cdot x(s)^{(p-k)/p} + b(s), & s \in [0, m]; \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{A5}$$

那么，微分不等式的每个解 x（s）都高估了耦合差分不等式（x_j）的解（A4），也就是说

$$x(j) \ge x_j \ge 0 \quad \textit{for each} \quad j = 0, \ldots, m.$$

下面的试探解给出了微分不等式（A5）的一个解。该引理的证明见本章节末尾。

Lem引理 A.2（微分不等式的试探解）。固定一个整数 $1 \le k \le p$。考虑函数 *on*

$$y(s) := \left[x(0)^{k/p} + \frac{k}{p}\int_0^s a(u)\,\mathrm{d}u + \left(\int_0^s b(u)\,\mathrm{d}u\right)^{k/p}\right]^{p/k} \quad \textit{for } s \in [0, m].$$

那么， y 满足微分不等式(A5)。

现在我们可以着手求解耦合差分不等式了。将引理 A.1 和引理 A.2中的参数设为 $s = m$ 和 $k = 3$，即可得到以下单边不等式

$$x_m^{3/p} \le y(m)^{3/p} = x_0^{3/p} + \frac{3}{p}\sum_{j=1}^{m} a_j + \left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right)^{3/p}.$$

该不等式给出了差值 $x_m^{3/p} - x_0^{3/p}$ 的一个上界。回想一下， x_m 和 x_0 分别是两个独立和的p阶矩。取三次方根，并用 ℓ_1 范数界定 ℓ_3 范数，我们还可以得到如下估计

$$x_m^{1/p} - x_0^{1/p} \le \left(\frac{3}{p}\sum_{j=1}^m a_j\right)^{1/3} + \left(\sum_{j=1}^m b_j\right)^{1/p}.$$

这个说法稍弱一些，但可能更容易理解和应用。

我们可以交换 $\boldsymbol{A}_j$ 和 $\tilde{\boldsymbol{A}}_j$ 重复同样的论证，并注意到系数 a_j 和 b_j 保持不变。由此得到所需的双边估计：

$$\left|\left\|\sum_{i=1}^m \boldsymbol{A}_i\right\|_p^3 - \left\|\sum_{i=1}^m \tilde{\boldsymbol{A}}_i\right\|_p^3\right| = \left|x_m^{3/p} - x_0^{3/p}\right| \le \frac{3}{p}\sum_{j=1}^m a_j + \left(\sum_{j=1}^m b_j\right)^{3/p}.$$

同理，

$$\left|\left\|\sum_{i=1}^m \boldsymbol{A}_i\right\|_p - \left\|\sum_{i=1}^m \tilde{\boldsymbol{A}}_i\right\|_p\right| = \left|x_m^{1/p} - x_0^{1/p}\right| \le \left(\frac{3}{p}\sum_{j=1}^m a_j\right)^{1/3} + \left(\sum_{j=1}^m b_j\right)^{1/p}.$$

代入 a_j 和 b_j 的值，并计算数值常数，即可完成关于匹配二阶矩的随机矩阵模型（$t = 2$）的定理证明。

□

定理 *IV.1* 的证明：匹配更多矩。 采用类似的论证，我们可以得到˜比较矩匹配的随机矩阵模型的相关结果。固定 $t \ge 2$。假设每对 $\boldsymbol{A}_i$ 和 $\boldsymbol{A}_i$ 的˜ ˜加项在至 t阶的矩上匹配。在这种情况下，项 $\boldsymbol{M}_1$、.....、 $\boldsymbol{M}_t$ 与 $\boldsymbol{M}_1$、.....、 $\boldsymbol{M}_t$相消，˜ 因此误差仅取决于高阶项 $\boldsymbol{M}_k$ 和 $\boldsymbol{M}_k$，其中 $k \ge t+1$。

基于这一观察，我们得到以下界

$$E := \left|\left\|\sum_{i=1}^m \boldsymbol{A}_i\right\|_p - \left\|\sum_{i=1}^m \tilde{\boldsymbol{A}}_i\right\|_p\right| \le \left(\frac{t+1}{p}\sum_{j=1}^m a_j\right)^{1/(t+1)} + \left(\sum_{j=1}^m b_j\right)^{1/p}.$$

其中

$$a_j := \frac{(2p)^{t+1}}{2^t}\left(|||\boldsymbol{A}_j|||_p^{t+1} + |||\tilde{\boldsymbol{A}}_j|||_p^{t+1}\right) \quad \text{and} \quad b_j := \frac{(2p)^p}{2^t}\left(|||\boldsymbol{A}_j|||_p^p + |||\tilde{\boldsymbol{A}}_j|||_p^p\right).$$

使用定理陈述中的记号，我们得到估计

$$E \le (2(t+1))^{1/(t+1)} \cdot p^{t/(t+1)} \cdot L_{p,t+1} + 2^{1-t/p} \cdot p \cdot L_{p,p}.$$

For ， 每个主导常数都不超过 2。至此，论证完成 t. □

定理的证明 *IV.1*：精细统计量。 最后，我们用随机加项的更精确统计量来证明该结果。为此，我们只需用一个更精细的矩不等式替换霍尔德不等式（事实 A.1）。下面给出我们所需的陈述，它是 [12, 命题 4。1] 的特例。

事实 A.2（随机矩阵迹不等式）。 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 是统计独立的随机厄米矩阵。任意次序排列的乘积中含有 k 个 $\boldsymbol{A}$，以及 $(p-k)$ 个 $\boldsymbol{Y}$，其中$p \ge k \ge 2$。那么

$$\mathbb{E}\,\overline{\mathrm{Tr}}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}^{p_1}\cdots\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}^{p_k}] \le \left[\|\mathbb{E}\,\boldsymbol{A}^2\| \cdot |||\boldsymbol{A}|||_\infty^{k-2}\right] \cdot |||\boldsymbol{Y}|||_p^{p-k}.$$

在这个表达式中， $p_1 + \cdots + p_k = p - k$ 是一个整数分拆。

˜我们在 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{S}_-$ 且 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_j$ 或 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_j$的情况下应用这一结果。我们还可以取这个界与通过霍尔德不等式得到的界中的较小值，从而发现尾部参数$L_{p,\ p}$ 不会变差。证明的其余部分相同。

□

最后，我们完成论证中所需的两个引理的证明。

引理的证明*A.1*。根据假设 $x(0) \geq x_0 = 0$。用归纳法，假设 $x(j-1) \geq x_{j-1}$ 对某个索引$j \geq 1$成立。那么

$$\begin{aligned} x(j) - x(j-1) = \int_{j-1}^{j} x'(s)\,\mathrm{d}s &\geq \int_{j-1}^{j} \left(a(s) \cdot x(s)^{\frac{p-k}{p}} + b(s) \right) \mathrm{d}s \\ &\geq \int_{j-1}^{j} \left(a(j) \cdot x(j-1)^{\frac{p-k}{p}} + b(j) \right) \mathrm{d}s \geq x_j - x_{j-1}. \end{aligned}$$

要得到第二行，注意到函数 $x(s)$ 是递增的，因为微分不等式的右端为正。接着注意，系数 $a(s) = a(\lceil s \rceil)$ 和 $b(s) = b(\lceil s \rceil)$ 在积分区域上为常数。由归纳法可得

$$x(j) \geq x_j \quad \text{for each} \quad j = 0, \ldots, m.$$

这就是所述结果。 □

引理的证明*A.2*。 要验证试探解满足微分不等式，首先注意初始条件$y(0) = x(0)$。利用这一事实，我们求导：

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y(s)}{\mathrm{d}s} &= \frac{p}{k} \left[y(0)^{k/p} + \frac{k}{p} \int_0^s a(u)\,\mathrm{d}u + \left(\int_0^s b(u)\,\mathrm{d}u \right)^{\frac{k}{p}} \right]^{(p/k)-1} \left(\frac{k}{p} a(s) + \left(\int_0^s b(u)\,\mathrm{d}u \right)^{(k/p)-1} \cdot \frac{k}{p} b(s) \right) \\ &\geq a(s) \left[y(0)^{k/p} + \frac{k}{p} \int_0^s a(u)\,\mathrm{d}u + \left(\int_0^s b(u)\,\mathrm{d}u \right)^{k/p} \right]^{(p-k)/k} + b(s) \\ &= a(s) y(s)^{(p-k)/p} + b(s). \end{aligned}$$

该不等式依赖于以下事实：$(k/p) - 1 \leq 0$ 和

$$\left(\int_0^s b(u) du \right)^{(k/p)-1} \geq \left[y(0)^{k/p} + \frac{k}{p} \int_0^s a(u) \mathrm{d}u + \left(\int_0^s b(u) \mathrm{d}u \right)^{k/p} \right]^{1-(p/k)}.$$

这是利用所有项均为正这一事实直接计算得到的。因此，试探解满足微分不等式。

□

2. 预解式

比较原理也适用于多项式矩以外的其他函数。本节研究预解式的矩：

$$\boldsymbol{R} := \frac{1}{\boldsymbol{H} - \omega + \mathrm{i}\eta} \quad \text{and} \quad \tilde{\boldsymbol{R}} := \frac{1}{\tilde{\boldsymbol{H}} - \omega + \mathrm{i}\eta}.$$

˜和往常一样， $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 均在（8）中定义。参数 $\omega \in \mathbb{R}$ 和 $\eta > 0$。

定理 IV.2（预解矩的普适性）。采用定理*IV.1*中的假设和记号。对每个偶自然数 $p \in 2\mathbb{N}$，预解式的多项式矩（11）满足以下关系：

$$\left| \|\boldsymbol{R}\|_p - \|\tilde{\boldsymbol{R}}\|_p \right| \lesssim \frac{1 + (m/p)}{\eta} \cdot \left(\frac{p L_{3p,\infty}}{\eta} \right)^{t+1}.$$

符号 $\lesssim$ 省略了仅依赖于 t 的常数。

当右侧较小时（$\ll (p\eta)^{-1}$），我们可以取 p 次幂，从而得到预期的态密度（经预解式滤波），误差为乘法误差。对于我们的泡利字符串系综，由于 $L_{3p,\infty} = 1/\sqrt{m}$，且加项数 m 选得足够大，因此能够实现这一结果。

与多项式矩相比，预解式的普适性涉及一些额外的技术挑战。这些挑战源于预解式具有无穷泰勒级数，且它是随机矩阵的非凸函数。为了解决第一个问题，我们遵循 [12]，在经过精心选择的阶数处截断泰勒级数。为此，我们先回顾带积分余项的泰勒定理。

事实 A.3 (带积分余项的泰勒公式)。 若函数 $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ 具有 K 阶连续可微性，则

$$f(1) = \sum_{k=0}^{K-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \frac{1}{(K-1)!} \left[\int_0^1 f^{(K)}(s)(1-s)^{K-1}\,\mathrm{d}s \right].$$

预解式的泰勒展开表达式相当复杂。幸运的是，我们只需要高阶项的界。

命题 A.1（展开预解式）。对于阶数相同的厄米矩阵 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{A}$，考虑矩阵 $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{S} + \mathrm{i}\eta\mathbf{I}$，其中 $\eta \in \mathbb{R}$。那么，对于每个偶自然数 $p \in 2\mathbb{N}$,

$$\frac{1}{|\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{A}|^p} = \sum_{k=0}^{3p} \boldsymbol{M}_k \quad \textit{where} \quad \mathbb{E}\,\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{M}_k| \le \frac{(4p)^k}{\eta^{4k/3}} \cdot \big|\!\big|\!\big|\boldsymbol{Z}^{-1}\big|\!\big|\!\big|_p^{p-k/3} |\!|\!|\boldsymbol{A}|\!|\!|_{3p}^k \quad \textit{for } k = 0, \dots, 3p. \tag{A6}$$

项 $\boldsymbol{M}_k$ 是关于变量 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次非交换多项式，并且是关于变量 $\boldsymbol{Z}^{-1}$ 和 $\boldsymbol{Z}^{-\dagger}$的 $p+k$ 次多项式，其中 $^{-\dagger}$ 表示逆矩阵的共轭转置。

命题 *A.1* 的证明。首先，我们展开

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{A}|^p} &= \frac{1}{(\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{A})^{p/2}} \times \frac{1}{((\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{A})^\dagger)^{p/2}} \\ &= \sum_{\ell_1=0}^{\infty} (-\boldsymbol{Z}^{-1}\boldsymbol{A})^{\ell_1} \boldsymbol{Z}^{-1} \cdots \sum_{\ell_{p/2}=0}^{\infty} (-\boldsymbol{Z}^{-1}\boldsymbol{A})^{\ell_{p/2}} \boldsymbol{Z}^{-1} \\ &\quad \times \sum_{\ell_1'=0}^{\infty} (-\boldsymbol{Z}^{-\dagger}\boldsymbol{A})^{\ell_1'} \boldsymbol{Z}^{-\dagger} \cdots \sum_{\ell_{p/2}'=0}^{\infty} (-\boldsymbol{Z}^{-\dagger}\boldsymbol{A})^{\ell_{p/2}'} \boldsymbol{Z}^{-\dagger}. \end{aligned} \tag{A7}$$

第一行利用了 $\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{Z}^\dagger + \boldsymbol{A}$ 可交换这一事实。第二行使用了展开式 $(\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{A})^{-1} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (-\boldsymbol{Z}^{-1}\boldsymbol{A})^\ell \boldsymbol{Z}^{-1}$。

接下来，我们将关于矩阵 $\boldsymbol{M}_k$ 的总幂次为 k 且关于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的总幂次为 $p+k$ 的所有项，或 $\boldsymbol{Z}^{-\dagger}$，归入矩阵 $\boldsymbol{Z}^{-1}$ 中。对于 $0 \le k < 3p$，这样的项共有 $\binom{p+k-1}{k} \le (4p)^k$ 项。然后，我们对贡献于 $\boldsymbol{M}_k$的每一项应用霍尔德不等式（事实A.1）。这一步得到

$$\mathbb{E}\,\mathrm{Tr}\,|\boldsymbol{M}_k| \le (4p)^k \cdot \big|\!\big|\!\big|\boldsymbol{Z}^{-1}\big|\!\big|\!\big|_{q_1}^{p+k} |\!|\!|\boldsymbol{A}|\!|\!|_{q_2}^k \quad \text{for} \quad q_1 = \frac{3p}{3p-k} \quad \text{and} \quad q_2 = \frac{3p}{k}.$$

为使这些上界形式一致，注意，对于 $q_1 \le p$ 有 $|\!|\!|\boldsymbol{Z}^{-1}|\!|\!|_{q_1} \le |\!|\!|\boldsymbol{Z}^{-1}|\!|\!|_p$，而对于 $q_2 \le 3p$ 有 $|\!|\!|\boldsymbol{A}|\!|\!|_q \le |\!|\!|\boldsymbol{A}|\!|\!|_{3p}$。要处理 $\boldsymbol{Z}^{-1}$ 的更高次幂，可对预解式使用一致上界：$|\!|\!|\boldsymbol{Z}^{-1}|\!|\!|_{q_1}^{4k/3} \le \|\boldsymbol{Z}^{-1}\|^{4k/3} \le \eta^{-4k/3}$。由此得到所述的 $0 \le k < 3p$ 阶项上界。

对于余项（$K = 3p$）的泰勒展开，我们可以利用（计算 K 阶导数，A7），并采用相同的方法得到一个上界。

$$\left| \frac{\mathrm{d}^{3p}}{\mathrm{d}s^{3p}} \mathbb{E}\,\overline{\mathrm{Tr}}\, \frac{1}{|\boldsymbol{Z}+s\boldsymbol{A}|^p} \right| \le (3p)! \cdot (4p)^{3p} \cdot \frac{|\!|\!|\boldsymbol{A}|\!|\!|_{3p}^{3p}}{\eta^{3p}} \quad \text{for } s \in [0,1].$$

我们使用了一致上界 $\|(\boldsymbol{Z}+s\boldsymbol{A})^{-1}\| \le \eta^{-1}$。将上一个显示式代入泰勒展开（A.3）中的积分余项。由此得到 $K = 3p$ 的所需估计。 □

定理证明 *IV.2*。为了比较预解式，我们再次应用林德伯格方法。为使论证清晰，我们假设存在 $t = 2$ 个匹配矩；一般情形的处理类似。定义混合矩阵及其预解式：

$$\boldsymbol{H}_j := \sum_{i=1}^{j} \tilde{\boldsymbol{A}}_i + \sum_{j+1}^{m} \boldsymbol{A}_i \quad \text{and} \quad \boldsymbol{R}_j := \frac{1}{\boldsymbol{H}_j - \omega + \mathrm{i}\eta} \quad \text{for } j = 0, \dots, m.$$

考虑望远镜求和

$$\mathbb{E}\,\overline{\mathrm{Tr}}\,|\tilde{\boldsymbol{R}}|^p - \mathbb{E}\,\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}|^p = \sum_{j=1}^{m} \big(\mathbb{E}\,\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}_j|^p - \mathbb{E}\,\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}_{j-1}|^p \big).$$

我们必须对望远镜求和中的每一项进行估计。

步骤 I：单次更新误差。固定索引 $j = 1, \ldots\ldots, m$. 第 j 次更新将加项 $\boldsymbol{A}_j$ 替换为$\boldsymbol{A}_j$。定义矩阵中未改变的部分及其预解式：

$$\boldsymbol{H}_- := \boldsymbol{H}_j - \tilde{\boldsymbol{A}}_j = \boldsymbol{H}_{j-1} - \boldsymbol{A}_j \quad \text{and} \quad \boldsymbol{R}_- := (\boldsymbol{H}_- - \omega + \mathrm{i}\eta)^{-1}.$$

˜由于 $\boldsymbol{A}_j$ 和 $\boldsymbol{A}_j$ 的矩在二阶以内相匹配，并且这些矩阵彼此独立于 $\boldsymbol{H}_-$，因此，项˜ ˜ ˜$\boldsymbol{M}_0$、$\boldsymbol{M}_1$、$\boldsymbol{M}_2$ 在预解式幂的泰勒展开（命题 A.1）中抵消了项 $\boldsymbol{M}_0$、$\boldsymbol{M}_1$、$\boldsymbol{M}_2$。因此，

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\,\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}_j|^p - \mathbb{E}\,\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}_{j-1}|^p\right| &= \left|\mathbb{E}\,\overline{\mathrm{Tr}}\,|(\boldsymbol{H}_- - \omega + \mathrm{i}\eta) + \boldsymbol{A}_j|^{-p} - \mathbb{E}\,\overline{\mathrm{Tr}}\,|(\boldsymbol{H}_- - \omega + \mathrm{i}\eta) + \tilde{\boldsymbol{A}}_j|^{-p}\right| \\ &\le \frac{1}{4}|||\boldsymbol{R}_-|||_p^{p-1}\frac{(8p)^3|||\tilde{\boldsymbol{A}}_j|||_{3p}^3}{\eta^4} + \frac{1}{4}\frac{(8p)^{3p}|||\tilde{\boldsymbol{A}}_j|||_{3p}^{3p}}{\eta^{4p}} \quad + \quad (\tilde{\boldsymbol{A}}_j \mapsto \boldsymbol{A}_j) \\ &\le \frac{1}{2}|||\boldsymbol{R}_-|||_p^{p-1}\frac{(8pc_j)^3}{\eta^4} + \frac{1}{2}\frac{(8pc_j)^{3p}}{\eta^{4p}} \qquad (\text{setting } c_j := \max\{|||\boldsymbol{A}_j|||_{3p}, |||\tilde{\boldsymbol{A}}_j|||_{3p}\}) \\ &\le |||\boldsymbol{R}_{j-1}|||_p^{p-1}\frac{(8pc_j)^3}{\eta^4} + \frac{3}{2}\frac{(8pc_j)^{3p}}{\eta^{4p}}. \end{aligned} \tag{A8}$$

第一个不等式对误差项的几何级数进行界定（A6）：

$$\sum_{k=3}^{3p} x^k \le \frac{1}{4}((2x)^3 + (2x)^{3p}) \quad \text{for} \quad x := \frac{4p}{\eta^{4/3}} \cdot |||\boldsymbol{R}_-|||_p^{-1/3}|||\tilde{\boldsymbol{A}}_j|||_{3p}.$$

˜第二个不等式结合了两个不同加项 $\boldsymbol{A}_j$ 和 $\boldsymbol{A}_j$的界。

第三个不等式需要作一些说明。通过再次进行泰勒展开，我们可以利用 $\boldsymbol{R}_{j-1}$的矩来控制$\boldsymbol{R}_-$ 的矩:

$$\mathbb{E}\,\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}_-|^p \le \mathbb{E}\,\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}_{j-1}|^p\left(\sum_{k=0}^{3p} y^k\right) \quad \text{where} \quad y := \frac{4p}{\eta^{4/3}} \cdot |||\boldsymbol{R}_{j-1}|||_p^{-1/3}|||\boldsymbol{A}_j|||_{3p}.$$

将几何级数界定为 $\sum_{k=0}^{3p} y^k \le 2(1 + ((2y)^{3p})^{p/(p-1)})$，并注意到 $|||\boldsymbol{A}_j|||_{3p} \le c_j$，可得

$$\mathbb{E}\,\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}_-|^p \le 2\left(\mathbb{E}\,\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}_{j-1}|^p + \frac{(8pc_j)^{3p}}{\eta^{4p}}\right)$$

最后，将两边提升到 $(p-1)/p$次幂，并使用数值不等式 $(a+b)^{(p-1)/p} \le a^{(p-1)/p} + b^{(p-1)/p}$（当 $a,\ b \ge 0$ 时），得到（A8）。当 $t \ge 2$ 的矩相匹配时，也有类似的界。

步骤 II：求解递归。 该递归与定理IV.1的证明类似。我们将针对 $t \ge 2$的一般取值给出这一论证。首先，引入标量变量

$$x_j := \mathbb{E}\,\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}_j|^p \quad \text{for } j = 0, \dots, m.$$

定义系数 $a_0 := b_0 := 0$ 和

$$a_j := \frac{1}{2^{t-2}}\frac{(2(t+2)pc_j)^{t+1}}{\eta^{t+2}} \quad \text{and} \quad b_j := \frac{3}{2^{t-1}}\frac{(2(t+2)pc_j)^{(t+1)p}}{\eta^{(t+2)p}}.$$

更新式（A8）随后可以写成一个标量递推

$$|x_j - x_{j-1}| \le a_j \cdot x_{j-1}^{(p-1)/p} + b_j \quad \text{for each} \quad j = 1, \dots, m.$$

重复之前相同的论证（通过引理 A.1 和引理 A.2），我们可以控制序列的端点:

$$\begin{aligned}\left|x_m^{1/p} - x_0^{1/p}\right| &\le \frac{1}{p}\sum_{j=1}^m a_j + \left(\sum_{j=1}^m b_j\right)^{1/p} \\ &\le 8m\frac{p^t((t+2)L_{3p,\infty})^{t+1}}{\eta^{t+2}} + \left(\frac{3}{2}\right)^{1/p} m^{1/p}\frac{(2(t+2)pL_{3p,\infty})^{t+1}}{2^{(t-2)/p}\eta^{t+2}} \\ &\le (2^{t+2} + 10m/p)\frac{((t+2)pL_{3p,\infty})^{t+1}}{\eta^{t+2}}. \end{aligned}$$

˜第二个不等式使用了一致上界 $c_j = \max\{|||\boldsymbol{A}_j|||_{3p}, |||\boldsymbol{A}_j|||_{3p}\} \le L_{3p,\ \infty}$。要得到最后一行，注意到 $(3/2)^{1/p} \le 2$，去掉分母 $2^{(t-2)/p} \ge 1$，并应用杨氏不等式，得到 $m^{1/p} \le 1 + m/p$。

□

3. 预解迹的集中性

在本章节中，我们研究预解迹的 q 阶矩。根据马尔可夫不等式，这给出了定理II.1所需的局域态密度集中性。这种集中性与期望值的计算有根本区别，并不明确涉及理想的随机矩阵系综（例如高斯酉系综）。利用 q-范数的凸性，只需引入一个独立副本

$$\left|\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}|^p - \mathbb{E}\,\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}|^p\right|_q \le \left|\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}|^p - \overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}'|^p\right|_q \quad \text{where} \quad |x|_q := (\mathbb{E}\,|x|^q)^{1/q}$$

这使我们能够利用强大的鞅集中不等式。该估计取决于期望矩 $\left|\mathrm{Tr}\,|\boldsymbol{R}|^p\right|_q$，我们在第 A3 a 节中对其进行独立界定。

定理 A.1 (预解迹的集中性)。 对于相互独立的中心化矩阵 $\boldsymbol{A}_1$、……、$\boldsymbol{A}_m$，考虑 $\boldsymbol{A}_j$ 的相同副本 $\boldsymbol{A}'_j$。那么，预解迹集中于

$$\left|\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}|^p - \overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}'|^p\right|_q \lesssim \left|\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}|^p\right|_q \left(\frac{\sqrt{q}p^2}{\eta^2}\sqrt{\sum_{j=1}^m |||\boldsymbol{A}_j|||_\infty^4} + \frac{\sqrt{q}p}{\eta^2}\sqrt{\sum_{j=1}^m \sigma_*(\boldsymbol{A}_j)^2} + \frac{qp}{\eta}\left(\sum_{j=1}^m |||\boldsymbol{A}_j|||_\infty^q\right)^{1/q}\right)$$

其中

$$\sigma_*(\boldsymbol{A})^2 := \sup_{|||u\rangle||=|||v\rangle||=1} \mathbb{E}_{\boldsymbol{A}}\,|\langle u|\,\boldsymbol{A}\,|v\rangle|^2 .$$

关键的是，该估计取决于类方差量 $\sigma_*^2(\boldsymbol{A})$，它更全面地反映了随机矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的随机性。对于泡利字符串系综，该量显著小于通常的矩阵方差：$\sigma_*^2(\boldsymbol{A}) = (mN)^{-1} \ll m^{-1} = \mathbb{E}\,|||\boldsymbol{A}_j|||^2$。量 $\sigma_*^2(\boldsymbol{A})$ 源自以下界。

事实 A.4。 设随机矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和固定矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的维数相容，则

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{A}}\,|\mathrm{Tr}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}]|^2 \le \sigma_*^2(\boldsymbol{A})\cdot \mathrm{Tr}[|\boldsymbol{B}|]^2$$

事实 *A.4* 的证明。 考虑奇异值分解 $\boldsymbol{B} = \sum_j |v_j\rangle\, s_j\, \langle u_j|$。于是，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\boldsymbol{A}}\mathrm{Tr}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}]\,\mathrm{Tr}[\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{B}^\dagger] &= \mathbb{E}_{\boldsymbol{A}}\sum_j \langle u_j|\,\boldsymbol{A}\,|v_j\rangle\, s_j \sum_j \langle v_j|\,\boldsymbol{A}^\dagger\,|u_j\rangle\, s_j \\
&\le \sup_{j,i}\mathbb{E}_{\boldsymbol{A}}\,|\langle u_j|\,\boldsymbol{A}\,|v_j\rangle|\,|\langle u_i|\,\boldsymbol{A}\,|v_i\rangle|\cdot \mathrm{Tr}[|\boldsymbol{B}|]\,\mathrm{Tr}[|\boldsymbol{B}|] \\
&\le \sup_{|||u\rangle||=|||v\rangle||=1}\mathbb{E}_{\boldsymbol{A}}\,|\langle u|\,\boldsymbol{A}\,|v\rangle|^2\cdot \mathrm{Tr}[|\boldsymbol{B}|]\,\mathrm{Tr}[|\boldsymbol{B}|].
\end{aligned}$$

第一个不等式将期望移入求和号内，并对求和应用霍尔德不等式。第二个不等式是柯西–施瓦茨不等式。这就是所述结果。 □

此外，定理 A.1 的证明还使用了如下精细的标量鞅不等式。（关于鞅的介绍，请参见 [60]。）

定理 A.2 （[33]）。 对于标量鞅差值序列 d_j（即 $\mathbb{E}_{j-1}\,d_j := \mathbb{E}[d_j|d_{j-1},\cdots,d_1] = 0$），有

$$\left\|\max_{k\le n}\left|\sum_{j=1}^k d_j\right|\right\|_q \lesssim \left(\sqrt{q}\left|\sum_{j=1}^n \mathbb{E}_{j-1}d_j^* d_j\right|_{\frac{q}{2}}^{1/2} + q\left\|\max_{1\le j\le n}|d|_j\right\|_q\right).$$

值得注意的是，条件期望 $\mathbb{E}_{j-1}$ 出现在范数内部，因此我们可以通过事实 $\boldsymbol{A}_i$ A.4 来利用 的二阶矩性质。否则，若应用一致光滑性等粗略的鞅不等式，得到的界会以 $\mathbb{E}\,|||\boldsymbol{A}_j|||^2$ 而非 $\sigma_*^2(\boldsymbol{A})$ 为依据。这个较弱的界无法恰当地反映 $\boldsymbol{A}_j$中的随机性。

定理 *A.1*的证明。 按照惯例，我们将望远镜求和写作

$$\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}'|^p - \overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}|^p = \sum_{j=1}^m (\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}_j|^p - \overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}_{j-1}|^p) \quad \text{with} \quad \boldsymbol{R}_j := \frac{1}{\boldsymbol{H}_j - \omega + \mathrm{i}\eta} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{H}_j := \sum_{i=1}^j \boldsymbol{A}'_i + \sum_{j+1}^m \boldsymbol{A}_i.$$

根据构造，这些更新构成一个鞅差序列：

$$\mathbb{E}\left[\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}_j|^p - \overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}_{j-1}|^p \mid \boldsymbol{A}'_{j-1}, \boldsymbol{A}_{j-1}, \ldots, \boldsymbol{A}'_1, \boldsymbol{A}_1\right] = 0. \tag{A9}$$

这一点显而易见，因为交换随机变量 $\boldsymbol{A}_j$ 和 $\boldsymbol{A}'_j$ 不会改变其分布。为了分析鞅，我们使用幂差的代数恒等式展开差值：

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}_j|^p - \overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}_{j-1}|^p &= \overline{\mathrm{Tr}}\left[\boldsymbol{R}_j^\dagger \boldsymbol{R}_j\,|\boldsymbol{R}_j|^{p-2} - \boldsymbol{R}_{j-1}^\dagger \boldsymbol{R}_{j-1}\,|\boldsymbol{R}_{j-1}|^{p-2}\right] \\
&= \overline{\mathrm{Tr}}\left[(\boldsymbol{R}_j^\dagger - \boldsymbol{R}_{j-1}^\dagger)\cdot \boldsymbol{R}_{j-1}\,|\boldsymbol{R}_{j-1}|^{p-2}\right] + \cdots \\
&= \overline{\mathrm{Tr}}\left[\boldsymbol{R}_j^\dagger(\boldsymbol{H}_{j-1} - \boldsymbol{H}_j)\boldsymbol{R}_{j-1}^\dagger \cdot \boldsymbol{R}_{j-1}\,|\boldsymbol{R}_{j-1}|^{p-2}\right] + \cdots \\
&= \overline{\mathrm{Tr}}\left[\boldsymbol{R}_j^\dagger(\boldsymbol{A}_j - \boldsymbol{A}'_j)\,|\boldsymbol{R}_{j-1}|^{p}\right] + \cdots \\
&= a_j - b_j + c_j.
\end{aligned}$$

第二个等号是望远镜求和。目前，我们省略了其他望远镜项，例如 $\mathrm{Tr}\left[\boldsymbol{R}_j^\dagger\,(\boldsymbol{R}_j - \boldsymbol{R}_{j-1})\cdot|\boldsymbol{R}_{j-1}|^{p-2}\right]$。第三个等号使用了矩阵恒等式 $\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}$。最后一行将各项重新归为三类

$$\begin{aligned}
a_j &:= \overline{\mathrm{Tr}}\left[\boldsymbol{R}_j^\dagger \boldsymbol{A}_j\,|\boldsymbol{R}_j|^p\right] + \overline{\mathrm{Tr}}\left[|\boldsymbol{R}|_j^2\,\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{R}_j\,|\boldsymbol{R}_j|^{p-2}\right] + \cdots =: \sum_{\substack{r+s=p+1,\\ r,s\geq 1}} \overline{\mathrm{Tr}}\left[\boldsymbol{R}_j^{(r)}\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{R}_j^{(s)}\right] \\
b_j &:= \overline{\mathrm{Tr}}\left[\boldsymbol{R}_{j-1}^\dagger \boldsymbol{A}'_j\,|\boldsymbol{R}_{j-1}|^p\right] + \overline{\mathrm{Tr}}\left[|\boldsymbol{R}|_{j-1}^2\,\boldsymbol{A}'_j\boldsymbol{R}_{j-1}\,|\boldsymbol{R}_{j-1}|^{p-2}\right] + \cdots =: \sum_{\substack{r+s=p+1,\\ r,s\geq 1}} \overline{\mathrm{Tr}}\left[\boldsymbol{R}_{j-1}^{(r)}\boldsymbol{A}'_j\boldsymbol{R}_{j-1}^{(s)}\right] \\
c_j &:= \overline{\mathrm{Tr}}\left[\boldsymbol{R}_j^\dagger \boldsymbol{A}_j(|\boldsymbol{R}_{j-1}|^p - |\boldsymbol{R}_j|^p)\right] - \overline{\mathrm{Tr}}\left[(\boldsymbol{R}_j^\dagger - \boldsymbol{R}_{j-1}^\dagger)\boldsymbol{A}'_j\,|\boldsymbol{R}_{j-1}|^p\right] + \cdots \\
&=: \sum_{\substack{r+s=p+1,\\ r,s\geq 1}} \overline{\mathrm{Tr}}\left[\boldsymbol{R}_j^{(r)}\boldsymbol{A}_j(\boldsymbol{R}_{j-1}^{(s)} - \boldsymbol{R}_j^{(s)})\right] - \overline{\mathrm{Tr}}\left[(\boldsymbol{R}_j^{(r)} - \boldsymbol{R}_{j-1}^{(r)})\boldsymbol{A}'_j\boldsymbol{R}_{j-1}^{(s)}\right]
\end{aligned}$$

使用 r 和 s 各自的恒等式

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{Tr}}\left[\boldsymbol{R}_j^{(r)}\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{R}_{j-1}^{(s)}\right] &= \overline{\mathrm{Tr}}\left[\boldsymbol{R}_j^{(r)}\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{R}_j^{(s)}\right] + \overline{\mathrm{Tr}}\left[\boldsymbol{R}_j^{(r)}\boldsymbol{A}_j(\boldsymbol{R}_{j-1}^{(s)} - \boldsymbol{R}_j^{(s)})\right] \\
\overline{\mathrm{Tr}}\left[\boldsymbol{R}_j^{(r)}\boldsymbol{A}'_j\boldsymbol{R}_{j-1}^{(s)}\right] &= \overline{\mathrm{Tr}}\left[\boldsymbol{R}_{j-1}^{(r)}\boldsymbol{A}'_j\boldsymbol{R}_{j-1}^{(s)}\right] + \overline{\mathrm{Tr}}\left[(\boldsymbol{R}_j^{(r)} - \boldsymbol{R}_{j-1}^{(r)})\boldsymbol{A}'_j\boldsymbol{R}_{j-1}^{(s)}\right].
\end{aligned}$$

为了简化上面的表达式，我们定义

$$\boldsymbol{R}_j^{(r)} := \begin{cases} \boldsymbol{R}_j^\dagger\,|\boldsymbol{R}_j|^{r-1} \quad \text{or} \quad \boldsymbol{R}_j\,|\boldsymbol{R}_j|^{r-1} & \text{if} \quad r \quad \text{is odd} \\ |\boldsymbol{R}|_j^r & \text{if} \quad r \quad \text{is even.} \end{cases}$$

当 r 为奇数时，我们对上面两种可能的表达式使用同一个符号。由于我们最终会对所有项取范数，这两种表达式都适用于同一论证。注意，$|\boldsymbol{R}|_j^{r-1}\,\boldsymbol{R}_j^\dagger = \boldsymbol{R}_j^\dagger\,|\boldsymbol{R}|_j^{r-1}$，因为它们可以在 $\boldsymbol{H}_j$ 的特征基下同时对角化。

我们还需要研究每个序列 a_j、b_j、c_j 的集中性。关键观察是，每个序列都是一个鞅差序列

$$\mathbb{E}\left[a_j, b_j, c_j \mid \boldsymbol{A}'_{j-1}, \boldsymbol{A}_{j-1}, \ldots, \boldsymbol{A}'_1, \boldsymbol{A}_1\right] = 0.$$

事实上，序列 a_j 构成鞅差序列，因为 $\boldsymbol{A}_j$ 与 $\boldsymbol{R}_j$ 相互独立（序列 b_j也类似）。尽管较为复杂，序列 c_j 也构成鞅差序列，因为$c_j = (\mathrm{Tr}\,|\boldsymbol{R}_j|^p - \mathrm{Tr}\,|\boldsymbol{R}_{j-1}|^p) - a_j - b_j$和（A9）。直观地说，序列 a_j、b_j具有由二阶矩控制的集中性，充分利用了随机矩阵 $\boldsymbol{A}_j$ 中的随机性，见事实A.4。序列c_j 在 $\boldsymbol{A}_j$ 和 $\boldsymbol{A}'_j$中是高阶的，因此我们只使用粗略不等式。

由一致光滑性可知，鞅差序列 c_j 满足

$$\left|\sum_{j=1}^m c_j\right|_q^2 \leq \sum_{j=1}^m (q-1)\,|c_j|_q^2.$$

我们分别评估 q-范数

$$
\begin{aligned}
|c_j|_q &\le \sum_{\substack{r+s=p+1,\\ r,s\ge 1}} \left(\left| \overline{\mathrm{Tr}} \left[\boldsymbol{R}_j^{(r)} \boldsymbol{A}_j (\boldsymbol{R}_{j-1}^{(s)} - \boldsymbol{R}_j^{(s)}) \right] \right|_q + \left| \overline{\mathrm{Tr}} \left[(\boldsymbol{R}_j^{(r)} - \boldsymbol{R}_{j-1}^{(r)}) \boldsymbol{A}_j' \boldsymbol{R}_{j-1}^{(s)} \right] \right|_q \right) \\
&\le \sum_{\substack{r+s+t=p+2,\\ r,s,t\ge 1}} \left(\left| \overline{\mathrm{Tr}} \left[\boldsymbol{R}_j^{(r)} \boldsymbol{A}_j \boldsymbol{R}_j^{(s)} (\boldsymbol{A}_j' - \boldsymbol{A}_j) \boldsymbol{R}_{j-1}^{(t)} \right] \right|_q + \left| \overline{\mathrm{Tr}} \left[\boldsymbol{R}_j^{(r)} (\boldsymbol{A}_j - \boldsymbol{A}_j') \boldsymbol{R}_{j-1}^{(s)} \boldsymbol{A}_j' \boldsymbol{R}_{j-1}^{(t)} \right] \right|_q \right) \\
&\le \sum_{\substack{r+s+t=p+2,\\ r,s,t\ge 1}} \left(\left| \|\boldsymbol{A}_j\| \|\boldsymbol{A}_j' - \boldsymbol{A}_j\| \|\boldsymbol{R}_j\|_q^{r/q} \|\boldsymbol{R}_j\|_q^{s/q} \|\boldsymbol{R}_{j-1}\|_q^{t/q} \right|_q \right. \\
&\qquad \left. + \left| \|\boldsymbol{A}_j'\| \|\boldsymbol{A}_j' - \boldsymbol{A}_j\| \|\boldsymbol{R}_j\|_q^{r/q} \|\boldsymbol{R}_{j-1}\|_q^{s/q} \|\boldsymbol{R}_{j-1}\|_q^{t/q} \right|_q \right) \\
&\le 4 \cdot \frac{p(p+1)}{2} \frac{\|\|\boldsymbol{A}_j\|\|_\infty^2}{\eta^2} \left| \overline{\mathrm{Tr}} \, |\boldsymbol{R}|^p \right|_q .
\end{aligned}
$$

第二个不等式进一步展开了预解式之差。第三个不等式对迹使用了 Hölder 不等式。最后一个不等式使用了 Hölder 不等式，按 $\binom{p+1}{2}$ 计算 r，s，t 的组合，并利用了 $\boldsymbol{A}$和 $\boldsymbol{A}'$ 具有相同的分布，以及 $\boldsymbol{R}_j$、$\boldsymbol{R}_{j-1}$ 与 $\boldsymbol{R}$具有相同的分布。

对于序列 b_j，我们应用标量鞅不等式（定理 A.2）。我们计算可预测二次变差

$$
\begin{aligned}
\left| \sum_{j=1}^m \mathbb{E}_{j-1} b_j^* b_j \right|_{\frac{q}{2}} &\le \sum_{\substack{r+s=p+1,\\ r,s\ge 1}} \left| \sum_{j=1}^m \overline{\mathrm{Tr}} \left[\boldsymbol{R}_{j-1}^{(r)} \boldsymbol{A}_j' \boldsymbol{R}_{j-1}^{(s)} \right]^2 \right|_q \\
&\le p^2 \left| \sum_{j=1}^m \sup_{\||u\rangle\|=\||v\rangle\|=1} \mathbb{E}_{\boldsymbol{A}_j} |\langle u| \boldsymbol{A}_j |v\rangle|^2 \cdot \overline{\mathrm{Tr}} \left[|\boldsymbol{R}_{j-1}|^{p+1} \right]^2 \right|_{\frac{q}{2}} \\
&\le \frac{p^2}{\eta^2} \left| \overline{\mathrm{Tr}} \left[|\boldsymbol{R}|^p \right] \right|_q^2 \cdot \sum_{j=1}^m \sigma_*(\boldsymbol{A}_j)^2
\end{aligned}
$$

us事实 A.4 以及预解式 $\|\boldsymbol{R}\| \le \eta^{-1}$的一致上界。我们计算最大值 b y

$$
\left| \max_{1\le j\le m} |b_j| \right|_q \le \left(\sum_{j=1}^m |b_j|_q^q \right)^{1/q} \le p \frac{\left(\sum_{j=1}^m \|\|\boldsymbol{A}_j\|\|_\infty^q \right)^{1/q}}{\eta} \left| \overline{\mathrm{Tr}} \, |\boldsymbol{R}|^p \right|_q .
$$

a_j 的上界完全类似。结合上述估计即可得到所述结果。 □

a. *Expected moments*

为了使用定理 A.1，我们还需要通过比较论证来估计期望矩。

定理 A.3（预解式期望矩）。 对于相互独立的中心化矩阵 $\boldsymbol{A}_i$，假设其矩˜与理想化矩阵 $\boldsymbol{A}_i$的矩相匹配

$$
\mathbb{E}\, \boldsymbol{A}_i = 0 \quad \textit{and} \quad \mathbb{E}\, \boldsymbol{A}_i^{\otimes k} = \mathbb{E}\, \tilde{\boldsymbol{A}}_i^{\otimes k} \quad \textit{for each} \quad k = 1, \dots, t \quad \textit{and} \quad i = 1, \dots, m.
$$

那么，

$$
\left| \left| \overline{\mathrm{Tr}} \, |\boldsymbol{R}|^p \right|_q^{1/p} - \left| \overline{\mathrm{Tr}} \, |\tilde{\boldsymbol{R}}|^p \right|_q^{1/p} \right| \lesssim \frac{1 + m/pq}{\eta} \left(\frac{pqL}{\eta} \right)^{t+1} \quad \textit{where} \quad L := \max_i \left(\|\|\boldsymbol{A}_i\|\|_{3pq}, \|\|\tilde{\boldsymbol{A}}_i\|\|_{3pq} \right).
$$

符号 $\lesssim$ 抑制了仅取决于 t 的常数。

证明。 我们从一个望远镜求和开始

$$
\overline{\mathrm{Tr}} \, |\tilde{\boldsymbol{R}}|^p - \overline{\mathrm{Tr}} \, |\boldsymbol{R}|^p = \sum_{j=1}^m (\overline{\mathrm{Tr}} \, |\boldsymbol{R}_j|^p - \overline{\mathrm{Tr}} \, |\boldsymbol{R}_{j-1}|^p) =: d_j \quad \text{with} \quad \boldsymbol{R}_j := \frac{1}{\boldsymbol{H}_j - \omega + \mathrm{i}\eta} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{H}_j := \sum_{i=1}^j \tilde{\boldsymbol{A}}_i + \sum_{j+1}^m \boldsymbol{A}_i .
$$

接下来我们控制迹的矩 $\left|\mathrm{Tr}\,|\boldsymbol{R}|^p\right|_q^q$，所使用的论证与定理 IV.1 和定理 IV.2类似。我们给出 $t=2$的计算，但一般情形是类似的。

步骤 I：单次更新误差。我们再次从望远镜求和开始

$$\mathbb{E}\left(\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}|^p\right)^q-\mathbb{E}\left(\overline{\mathrm{Tr}}\,|\tilde{\boldsymbol{R}}|^p\right)^q=\sum_{j=0}^{m}\mathbb{E}\left(\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}|_j^p\right)^q-\mathbb{E}\left(\overline{\mathrm{Tr}}\,|\tilde{\boldsymbol{R}}|_{j-1}^p\right)^q.$$

泰勒展开满足事实A.1中的界：

$$\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}_j|^p=\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}_-|^p+\sum_{k=1}^{3p}\overline{\mathrm{Tr}}\,\boldsymbol{M}_k\quad\text{where}\quad\left|\overline{\mathrm{Tr}}\,\boldsymbol{M}_k\right|\le(4p)^k\|\boldsymbol{R}_-\|_p^{p-k/3}\frac{\|\boldsymbol{A}_j\|_{3p}^k}{\eta^{4k/3}}$$

$$\left(\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}_j|^p\right)^q=\left(\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}_-|^p\right)^q+\sum_{k=1}^{3qp}f_k\quad\text{where}\quad|f_k|\le(4qp)^k\left(\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}_-|^p\right)^q\left(\|\boldsymbol{R}_-\|_p^{-1/3}\frac{\|\boldsymbol{A}_j\|_{3p}}{\eta^{4/3}}\right)^k.$$

第一个不等式与计算（A6）类似。回顾一下，p-范数经过归一化 $\|\boldsymbol{O}\|_p=(\mathrm{Tr}\,|\boldsymbol{O}|^p)^{1/p}$。第二个不等式还多出一个 $\overline{q^k}$ 因子。随后，我们通过消去一阶项和二阶项来界定期望增量 f_1 和 f_2

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\left(\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}|_j^p\right)^q-\mathbb{E}\left(\overline{\mathrm{Tr}}\,|\tilde{\boldsymbol{R}}|_{j-1}^p\right)^q\right|&\le\mathbb{E}\sum_{k=3}^{3qp}(4qp)^k\left|\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}_-|^p\right|^q\left(\|\boldsymbol{R}_-\|_p^{-1/3}\frac{\|\boldsymbol{A}_j\|_{3p}}{\eta^{4/3}}\right)^k+\left(\boldsymbol{A}_j\mapsto\tilde{\boldsymbol{A}}_j\right)\\&\le\frac14\left|\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}_-|^p\right|_q^{q-1/p}\left(\frac{8qp|||\boldsymbol{A}_j|||_{3pq}}{\eta^{4/3}}\right)^3+\frac14\left(\frac{8qp|||\boldsymbol{A}_j|||_{3pq}}{\eta^{4/3}}\right)^{3qp}+\left(\boldsymbol{A}_j\mapsto\tilde{\boldsymbol{A}}_j\right)\\&\le\frac12\left|\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}_-|^p\right|_q^{q-1/p}\left(\frac{8qp\ell_j}{\eta^{4/3}}\right)^3+\frac12\left(\frac{8qp\ell_j}{\eta^{4/3}}\right)^{3qp}\\&\le\left|\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}_j|^p\right|_q^{q-1/p}\left(\frac{8qp\ell_j}{\eta^{4/3}}\right)^3+\frac32\left(\frac{8qp\ell_j}{\eta^{4/3}}\right)^{3qp}.\end{aligned}$$

第二个不等式对期望应用 Holder 不等式，对几何级数求和，并使用方便的˜估计 $|||\boldsymbol{A}_j\|_{3p}|_{3pq}\le|||\boldsymbol{A}_j|||_{3pq}$。第三个不等式令 $\ell_j:=\max(|||\boldsymbol{A}_j|||_{3pq},|||\boldsymbol{A}_j|||_{3pq})$。最后一个不等式通过以下方式建立自界定论证

$$\mathbb{E}\left(\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}_-|^p\right)^q\le2\left(\mathbb{E}\left(\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}_j|^p\right)^q+\left(\frac{8qp|||\boldsymbol{A}_j|||_{3pq}}{\eta^{4/3}}\right)^{3qp}\right)$$

与（A8）类似。

步骤 II：求解递归。同样，我们通过定义标量变量来简化递归（并考虑匹配到 t 阶的矩）。

$$x_j:=\mathbb{E}(\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}_j|^p)^q,\quad a_j:=\frac{1}{2^{t-2}}\frac{(2(t+2)qp\ell_j)^{t+1}}{\eta^{t+2}}\quad\text{and}\quad b_j:=\frac{3}{2^{t-1}}\frac{(2(t+2)qp\ell_j)^{(t+1)qp}}{\eta^{(t+2)qp}}$$

并且 $a_0:=b_0:=0$。随后，更新式（A8）可写成标量递推

$$|x_j-x_{j-1}|\le a_j\cdot x_{j-1}^{\frac{qp-1}{qp}}+b_j\quad\text{for each}\quad j=1,\dots,m$$

事实上，除了 IV.2 中的定理 $p\to qp$，其形式完全相同。无论如何，为求完整起见，我们写出剩余的计算。沿用之前的论证（引理 A.1、引理 A.2）可得端点的界

$$\begin{aligned}\left|x_m^{1/pq}-x_0^{1/pq}\right|&\le\frac{1}{qp}\sum_{j=1}^m a_j+(\sum_{j=1}^m b_j)^{\frac{1}{qp}}\\&\le8m\frac{(qp)^t((t+2)L)^{t+1}}{\eta^{t+2}}+(\frac32)^{1/qp}(1+m/qp)\frac{(2(t+2)qpL)^{t+1}}{2^{(t-1)/qp}\eta^{t+2}}\\&\le(2^{t+2}+10m/qp)\frac{((t+2)qpL)^{t+1}}{\eta^{t+2}}.\end{aligned}$$

˜第二个不等式使用了一致上界 $\ell_j=\max(|||\boldsymbol{A}_j|||_{3p},|||\boldsymbol{A}_j|||_{3p})\le L$。最后一个不等式去掉了分母 $2^{(t-1)/qp}\ge1$，并对 $m^{1/qp}\le1+m/qp$ 使用杨氏不等式。这就是前面所说的第二个结果。

□

附录 B：高斯酉系综的性质

在本章节中，我们将高斯酉系综矩阵的性质具体化到非渐近区间。就我们的目的而言，大多数相关量都高度集中（偏差至多为 $\mathcal{O}(1/\mathrm{Poly}(N))$），因此在实际应用中可将其视为常数。

定义 B.1 (GUE 系综)。 N 阶高斯酉系综是由以下方式指定的一族复厄米随机矩阵：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_{ij} &= \frac{g_{ij} + \mathrm{i}g'_{ij}}{\sqrt{2N}} \quad if\ j > i \\ \boldsymbol{H}_{ii} &= \frac{g_{ii}}{\sqrt{N}}.\end{aligned}$$

其中， g_{ii}、 g_{ij}、 g'_{ij} 是相互独立的标准高斯变量。

1. p-th moments

首先，我们给出 GUE 系综矩的显式界。这类结果可由 GUE 矩的经典显式公式推出；例如，参见 [4, 引理 3.3。1]它也可由非渐近随机矩阵理论的近期研究推出，例如论文 [57]。对我们的目的而言，将此结论作为主要结果 [9, 定理 27], 应用于高斯酉系综矩阵的推论来推导会更加方便。

Th定理 B.1 (矩界)。 对于偶数 p 以及维数为 N,

$$\left\|\left\|\boldsymbol{H}_{GUE}\right\|\right\|_p \leq 2\left(1 + \frac{(p/2)^{3/4}}{\sqrt{N}}\right)$$

该 nu 数 2 恰好是单位方差半圆分布的最大特征值。

证明。 我们可以比较以下随机矩阵

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_{GUE} = \boldsymbol{X} &= \sum_{j\geq i}\left(g_{ij}\frac{|i\rangle\langle j| + |j\rangle\langle i|}{\sqrt{2N}} + g'_{ij}\frac{\mathrm{i}(|i\rangle\langle j| - |j\rangle\langle i|)}{\sqrt{2N}}\right) \sim \sum_k g_k \boldsymbol{A}_k \\ \boldsymbol{X}_{\mathrm{free}} &:= \sum_k \boldsymbol{A}_k \otimes s_k\end{aligned}$$

其中（g_{ij}、 g'_{ij}、 g_k）是相互独立的标准正态变量，而（s_k）构成一个自由半圆族。 [9, 定理 2.7] 的结果表明

$$\begin{aligned}\left|\left\|\boldsymbol{X}\right\|\right\|_p - \left\|\boldsymbol{X}_{\mathrm{free}}\right\|_p\right| &\leq 2(p/2)^{3/4}\sqrt{\sup_{\mathrm{Tr}|\boldsymbol{M}|^2=1}\sum_k |\mathrm{Tr}[\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{M}]|^2} \\ &= 2(p/2)^{3/4}\sqrt{\frac{1}{N}\sup_{\mathrm{Tr}|\boldsymbol{M}|^2=1}\sum_{i,j}|M_{ij}|^2} = \frac{2^{1/4}p^{3/4}}{\sqrt{N}}.\end{aligned}$$

回忆无条件界 $\|\boldsymbol{X}_{\mathrm{free}}\| \leq 2\|\mathbb{E}\boldsymbol{X}^2\| = 2$， 即可完成证明 [49, p.208]。 □

2. 预解式矩

我们计算高斯酉系综矩阵的预解式矩。回忆

$$\boldsymbol{R} := \frac{1}{\boldsymbol{H} - \omega + \mathrm{i}\eta}$$

事实 B.1 (推论 [23, 11。4]的结果。 对于维数为 N 的高斯酉系综的一个随机实例 $\boldsymbol{H}_{GUE}$， 定义经验谱密度

$$\rho(E) := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta(E - \lambda_i(\boldsymbol{H}_{GUE})).$$

那么，存在一个绝对常数 c，使得

$$\sup_{E\in\mathbb{R}}\left|\int_{-\infty}^{E}(\rho(E')-\rho_{sc}(E'))\,\mathrm{d}E'\right|\le\frac{c}{\sqrt{N}} \tag{B1}$$

以至少 $1-\frac{1}{N}$ 的概率。 —

证明。在 [23, 推论 11.4] 中，令 $D=1$ 且 $\epsilon=1/2$。范围 $|E|\le 10$ 延伸至无穷，因为半圆分布密度 ρ_{sc} 的支集为 $[-2,2]$，且误差必须随 $|E|\ge 2$ 递减。 □

推论 B.1（高斯酉系综的预解式矩）。存在一个绝对常数 c，使得对于每个 ω、η，都有

$$\left|\mathbb{E}\,\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}_{\omega,\eta}(\boldsymbol{H}_{GUE})|^p-S_{\omega,\eta,p}\right|\le\frac{c}{\eta^p\sqrt{N}}\quad where\quad S_{\omega,\eta,p}:=\int_{-2}^{2}\frac{\sqrt{4-x^2}}{2\pi}\frac{1}{|x-\omega+\mathrm{i}\eta|^p}\,\mathrm{d}x.$$

证明。令 $f(E)=|E-\omega+\mathrm{i}\eta|^{-p}$，则

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\,\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}_{GUE}|^p-S_p^p\right|&\le\mathbb{E}\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(E)(\rho_{GUE}(E)-\rho_{sc}(E))\,\mathrm{d}E\right|\\&=\mathbb{E}\left|\int_{-\infty}^{\infty}f'(E)\int_{-\infty}^{E}(\rho_{GUE}(E')-\rho_{sc}(E'))\,\mathrm{d}E'\,\mathrm{d}E\right|\\&\le\left(1-\frac{1}{N}\right)\cdot\frac{c}{\sqrt{N}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f'(E)|\,\mathrm{d}E\right)+\frac{1}{N}\cdot 2\max_{E\in\mathbb{R}}|f(E)|\\&\le\frac{2c}{\eta^p\sqrt{N}}+\frac{2}{\eta^pN}.\end{aligned}$$

第一个不等式使用了分部积分以及边界值 $\int_{-\infty}^{\infty}(\rho_{GUE}(E')-\rho_{sc}(E'))\mathrm{d}E'=0$。第三行使用事实 B.1 来处理高概率事件 (B1)。为得到最后一行，我们利用预解式幂 $f(E)=|E-\omega+\mathrm{i}\eta|^{-p}$ 在 $E<\omega$ 时递增、在 $E>\omega$ 时递减这一事实计算积分，因此该积分等于 $2f(\omega)=2\eta^{-p}$。为界定最大值，注意到 $0\le f(E)\le\eta^{-p}$。最后，根据需要增大常数 c，以合并各项。 □

命题 B.1（高斯酉系综：预解式矩的集中）。对于条目联合高斯的矩阵

$$\boldsymbol{H}:=\sum_i g_i\boldsymbol{A}_i\quad where\quad g_i\sim\mathcal{N}(0,1)$$

且 p 为偶数时，由预解式幂探测的谱密度具有集中性

$$\left|\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}|^p-\mathbb{E}\,\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}|^p\right|_q\lesssim\sqrt{q}\frac{p}{\eta^{p+1}}\sigma_*\quad where\quad\sigma_*:=\sqrt{\sup_{\|\boldsymbol{w}\|=\|\boldsymbol{v}\|=1}\sum_i|\langle\boldsymbol{v}|\,\boldsymbol{A}_i\,|\boldsymbol{w}\rangle|^2}.$$

对于高斯酉系综矩阵，有 $\sigma_*=N^{-1/2}$。

命题 *B.1* 的证明。这是高斯集中不等式的一个标准应用。我们无法在其他地方找到所关注的特定函数，因此纳入一份改编自 [12] 的推导。一般而言，其中一些估计可能较为宽松，但足以满足我们的目的。考虑函数

$$f(\boldsymbol{x}):=\overline{\mathrm{Tr}}\left|\sum_i x_i\boldsymbol{A}_i-\omega+\mathrm{i}\eta\right|^{-p}.$$

我们对利普希茨常数进行界定

$$\begin{aligned}|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})|&=\left|\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{x}}|^p-\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{y}}|^p\right|\\&=\left|\overline{\mathrm{Tr}}\left[\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{x}}^\dagger\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{x}}\,|\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{x}}|^{p-2}-\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{y}}^\dagger\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{x}}\,|\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{x}}|^{p-2}\right]+\cdots\right|\\&\le\left|\overline{\mathrm{Tr}}\left[\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{x}}^\dagger(\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{y}}-\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{y}}^\dagger\boldsymbol{R}^x\,|\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{x}}|^{p-2}\right]+\cdots\right|\le\frac{p}{\eta^{p+1}}\|\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{y}}\|.\end{aligned}$$

第二个等式是望远镜求和。第一个不等式使用恒等式 $\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}$。最后一个不等式使用三角不等式、一致上界 $\|\boldsymbol{R}\|\le\eta^{-1}$，以及粗略上界

$\|\boldsymbol{A}\|_1 \le \|\boldsymbol{A}\|$，这是因为我们使用的是归一化 Schatten 范数。最后，我们将算子范数与系数的欧几里得范数联系起来

$$\|\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{y}}\| = \left\|\sum_i (x_i - y_i)\boldsymbol{A}_i\right\| = \sup_{\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}} \sum_i \langle \boldsymbol{v}| (x_i - y_i)\boldsymbol{A}_i |\boldsymbol{w}\rangle$$
$$\le \left(\sup_{\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}} \sum_i |\langle \boldsymbol{v}| \boldsymbol{A}_i |\boldsymbol{w}\rangle|^2\right)^{1/2} \cdot \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_{\ell_2} = \sigma_* \cdot \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_{\ell_2}.$$

该不等式就是柯西–施瓦茨不等式。回忆一下，一个 L-Lipschitz 函数作用于标准高斯向量时是L^2-次高斯的 [11, 定理 5。6] 从而得出证明。 □

前面的集中性论证还允许我们对其进行界定

$$\left|\overline{\mathrm{Tr}}\,|\tilde{\boldsymbol{R}}|^p\right|_q \le \mathbb{E}\,\overline{\mathrm{Tr}}\,|\tilde{\boldsymbol{R}}|^p + \left|\overline{\mathrm{Tr}}\,|\tilde{\boldsymbol{R}}|^p - \mathbb{E}\,\overline{\mathrm{Tr}}\,|\tilde{\boldsymbol{R}}|^p\right|_q.$$

GUE 矩阵具有很强的集中性，因此在我们的应用中，前一个公式右侧总是由期望项支配。

附录 C：泡利字符串系综的性质

在本章节中，我们将随机泡利字符串和的性质与我们已经充分了解的高斯酉系综（GUE）进行比较。回忆一下

$$\boldsymbol{H}_{PS} = \sum_{j=1}^m \boldsymbol{A}_j \quad \text{where} \quad \boldsymbol{A}_j \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \pm\{\mathbf{I}, \boldsymbol{\sigma}^x, \boldsymbol{\sigma}^y, \boldsymbol{\sigma}^z\}^{\otimes n}.$$

我们将把泡利字符串系综与 GUE 哈密顿量进行比较

$$\boldsymbol{H}_{GUE} = \sum_{j=1}^m \tilde{\boldsymbol{A}}_j \quad \text{where} \quad \tilde{\boldsymbol{A}}_j \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \frac{1}{\sqrt{m}} \boldsymbol{H}_{GUE}.$$

比较 p 阶矩可以控制谱范数，而预解式矩可以控制谱密度。

1. 矩与谱范数

我们使用 p 阶矩来界定谱范数。

定理 III.1 (p-范数与算子范数)。 设 $p \in 2\mathbb{N}$ 为一个偶自然数。随机泡利串系综 (2) 满足范数界

$$\left|\|\boldsymbol{H}_{PS}\|_p - \|\boldsymbol{H}_{GUE}\|_p\right| \lesssim \left(\frac{p^{3/4}}{m^{1/4}} + \frac{p}{\sqrt{m}}\right)\left(1 + \frac{p^{3/4}}{2^{n/2}}\right). \tag{5}$$

符号 $\lesssim$ 表示省略常数因子。此外，对于 $0 \le \epsilon \le 1/2$ 和 $m \le 2^{2n}$，存在常数 c_1、$c_2 > 0$，使得

$$m \ge c_1 \frac{n^3}{\epsilon^4} \quad \textit{ensures} \quad \Pr\left(\|\boldsymbol{H}_{PS}\| \ge 2(1+\epsilon)\right) \le \exp(-c_2 n).$$

为了获得更小的乘法误差 ϵ，注意到参数 p 和 m 只需按多项式速率增长（关于格点数 n 和参数 ϵ）。

定理*III.1*的证明。 p-范数估计使用定理IV.1。为得到所述尾部界，回顾高斯酉系综矩阵的 p-范数

$$\|\boldsymbol{H}_{GUE}\|_p \le 2 \cdot \left(1 + \frac{(p/2)^{3/4}}{\sqrt{N}}\right).$$

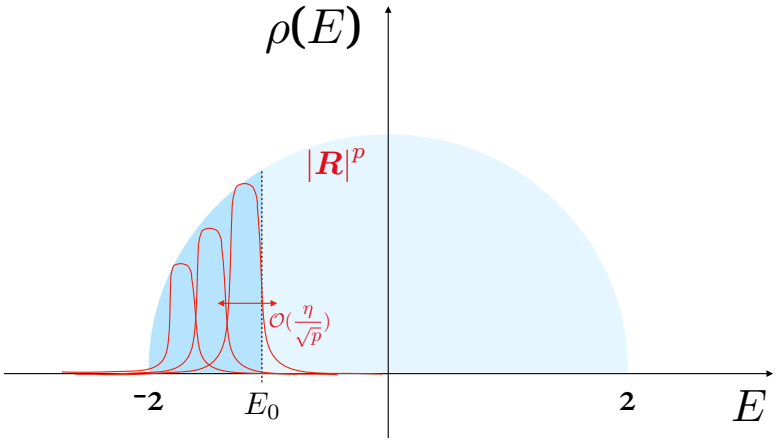

图4：通过连续的预解式幂探测低能态 $E \le E_0$ 。

根据马尔可夫不等式，

$$\begin{aligned}\Pr\left(\|\boldsymbol{H}_{PS}\| \ge t\right) \le \frac{\mathbb{E}\,\|\boldsymbol{H}_{PS}\|^p}{t^p} &\le N\frac{\|\!|\boldsymbol{H}_{PS}|\!\|_p^p}{t^p} \\ &\le \left(\frac{\mathrm{e}^{\log(N)/p}}{t}\left(2+\mathcal{O}(\frac{p^{3/4}}{\sqrt{N}}+\frac{p^{3/4}}{m^{1/4}}+\frac{p}{\sqrt{m}})\right)\right)^p \\ &\le (\frac{1+\epsilon/2}{1+\epsilon})^p \le \mathrm{e}^{-c_1\log(N)/4} \quad \text{, setting} \quad t=2(1+\epsilon).\end{aligned}$$

第二个不等式利用 $\|\boldsymbol{H}\|^p \le \mathrm{Tr}\,\boldsymbol{H}^p$ 将算子范数转化为 p 阶矩，第三个不等式则用记号 $\mathcal{O}(\cdot)$ 保留首阶项。第三行使用 $m \le N^2$ ，并选择合适的参数 $p = c\log(N)/\epsilon$ 和 $m = c_1\ ^{p^4\log(N)}$，使分子不超过 $2(1+\epsilon/2)$。最后一个不等式使用了针对 $\epsilon \le 1/2$ 的初等估计 $\frac{1+\epsilon/2}{1+\epsilon} \le \mathrm{e}^{-\epsilon/4}$ 。注意 $N = 2^n$ ，即可得到所述结果。

□

2. 低能态的丰富性与相位估计的成功

在本章节中，我们结合最小特征值（定理 III.1）和态密度（定理 A.1）的界，得到低能态密度。这立即意味着，在最大混合态上应用相位估计，以非忽略的成功概率返回一个低能见证态。

定理 II.1 （低能态具有低复杂度）。 对于任意精度 $\epsilon \ge 2^{-n/c_1}$，令 $\boldsymbol{H}_{PS}$ 从泡利字符串系综 (2) 中抽取，且

$$m = \left\lfloor c_2\frac{n^5}{\epsilon^4}\right\rfloor$$

项成立。则以下结论以至少 $1-\mathrm{e}^{-c_3 n^{1/3}}$ 的概率成立，其中随机抽取 $\boldsymbol{H}_{PS}$ 自泡利字符串系综。我们可以制备一个低能态 $\boldsymbol{\rho}$ ，使得

$$\mathrm{Tr}[\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{H}_{PS}] \le (1-\epsilon)\cdot\lambda_{\min}(\boldsymbol{H}_{PS}) \tag{3}$$

使用大小为 $G = \mathrm{Poly}(n,\epsilon^{-1})$ 的量子电路。量 c_1、c_2 和 c_3 均为绝对常数，而 $\lambda_{\min}(\boldsymbol{H}_{PS})$ 表示 $\boldsymbol{H}_{PS}$ 的最小特征值（通常为负值）。

定理 *II.1* 的证明。 预解式探测局域态密度，而我们关注的是如何控制能量窗口内的积分态密度。我们的思路是通过连续的局域预解式构造低能投影算符的近似（图 4）。考虑

$$\begin{aligned}\eta^p \sum_{2\le\ell\bar{\omega}\le E_0} |\boldsymbol{R}_{\ell\bar{\omega},\eta}|^p &=: \sum_E |E\rangle\langle E|\, q_{E_0}(E). \\ &=: \boldsymbol{Q}(E_0) \quad \text{as a proxy for the projector} \quad \sum_E |E\rangle\langle E|\,\mathbb{1}(E\le E_0)\end{aligned}$$

在低能量下 $E_0 := -(1-\epsilon/3)\cdot 2$。预解式之间的间隔恰当

$$|\boldsymbol{R}_{\ell\bar{\omega},\eta}|^p := \frac{1}{|\boldsymbol{H}-\ell\bar{\omega}+i\eta|^p} \quad \text{for} \quad \ell\in\mathbb{Z}, \quad \bar{\omega} := \frac{\epsilon}{\sqrt{p}}\cdot 2, \quad \eta = \frac{\epsilon}{3}\cdot 2, \quad \text{and} \quad p = \lfloor c_1 \log(N)\rfloor.$$

~我们将计算 GUE 的 $\mathbb{E}\,\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{Q}(E_0)$，证明泡利字符串系综的 $\mathrm{Tr}\;\boldsymbol{Q}(E_0)$ 取值相近，然后提取低能态密度。

GUE 的取值。 回顾 GUE 预解式的取值（推论 B.1）

$$\mathbb{E}\,\overline{\mathrm{Tr}}\,|\tilde{\boldsymbol{R}}_{\ell\bar{\omega},\eta}|^p \geq S_p^p/2 \gtrsim \frac{1}{\eta^p}\sqrt{2-(\ell-1)\bar{\omega}}\cdot\frac{\epsilon}{\sqrt{p}}$$

其中 $S_{\ell\bar{\omega},\,\eta,\,p}$ 是对推论 B.1 中定义的半圆分布所作的积分。第二个不等式使用 GUE 估计（推论 B.1），并施加简化约束 $N \geq const/\epsilon^4$，使得 $S_{\ell\bar{\omega},\,\eta,\,p}/2 \geq const.N^{-1/2}$即使在谱边缘附近也成立。第三个不等式计算 $S_{\ell\bar{\omega},\,\eta,\,p}$。A

用一个粗略的 对边缘附近的半圆密度作黎曼和，并略去常数以得到界 ds
关于预期的 值

$$\mathbb{E}\,\overline{\mathrm{Tr}}\,\tilde{\boldsymbol{Q}}(E_0) := \sum_{2\leq\ell\bar{\omega}\leq E_0}\eta^p\,\mathbb{E}\,\overline{\mathrm{Tr}}\,|\tilde{\boldsymbol{R}}_{\ell\bar{\omega},\eta}|^p = \Omega\left(\epsilon\sqrt{\epsilon}\right) \quad \text{using} \quad \int\sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}. \tag{C1}$$

Paulis 字符串系综的取值。对局域预解式使用粗略的并集界，可确保它们全部以高概率至少达到高斯酉系综期望值的一半

$$\begin{aligned}\Pr\left(\overline{\mathrm{Tr}}\,\boldsymbol{Q}(E_0) \leq \frac{1}{2}\,\mathbb{E}\,\overline{\mathrm{Tr}}\,\tilde{\boldsymbol{Q}}(E_0)\right) &\leq \sum_{\ell\bar{\omega}\leq E_0}\Pr\left(\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}_{\ell\bar{\omega},\eta}|^p \leq \frac{1}{2}\,\mathbb{E}\,\overline{\mathrm{Tr}}\,|\tilde{\boldsymbol{R}}_{\ell\bar{\omega},\eta}|^p\right)\\ &\lesssim \sqrt{p}\mathrm{e}^{-\Omega(\log(N)^{1/3})} \ll 1 \quad \text{(Claim)}.\end{aligned} \tag{C2}$$

提取态密度。假设该主张成立，接下来只需从低能子空间近似量 $\boldsymbol{Q}(E_0)$ 中提取谱密度。我们通过用一个阶跃函数划分谱，对函数 $q_{E_0}(E)$ 进行粗略估计

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{Tr}}\,\boldsymbol{Q}(E_0) &= \frac{1}{N}\sum_E q_{E_0}(E)\mathbb{1}(E\leq E_0+\eta) + q_{E_0}(E)\mathbb{1}(E\geq E_0+\eta)\\ &\lesssim \frac{1}{N}\sum_E \mathbb{1}(E\leq E_0+\eta) + \mathrm{e}^{-\Omega(p)}\mathbb{1}(E\geq E_0+\eta).\end{aligned}$$

第二个不等式利用了 $q_{E_0}(E) \lesssim 1$ 以及 $q_{E_0}(E) = \mathrm{e}^{-\Omega(p)}$ 对于 $E \geq E_0+\eta$。重新整理以界定低能态的数量

$$\begin{aligned}\frac{\#\{|E\rangle : E\leq -(1-2\epsilon/3)\cdot 2\}}{N} = \sum_E\frac{\mathbb{1}(E\leq E_0+\eta)}{N} &\gtrsim \eta^p\,\overline{\mathrm{Tr}}\,\boldsymbol{Q}(E_0) - \mathrm{e}^{-\Omega(p)}\\ &\gtrsim \epsilon\sqrt{\epsilon} - \mathrm{e}^{-\Omega(\log(N))} \quad \text{(with high probability (C2))}\\ &\gtrsim \epsilon\sqrt{\epsilon} \quad \text{(setting } \log(N)\geq const.\log(1/\epsilon)\text{)}.\end{aligned}$$

~第二个不等式利用了集中性 (C2)，并代入高斯酉系综的值 $\mathbb{E}\,\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{Q}(E_0)$ (C1)，该值近似于半圆积分。第三个不等式施加了额外约束 $\log(N) \geq const.\log(1/\epsilon)$，对于某个常数 c_1，这些约束可通过 $N \geq \epsilon^{-c_1}$ 与 $N \geq const/\epsilon^4$ 结合。再结合算子范数 $\|\boldsymbol{H}_{PS}\|$ 的尾界（定理 III.1），对于 $\epsilon' = \epsilon/6$（利用 $\lambda_{\min}(\boldsymbol{H}_{PS}) \geq -\|\boldsymbol{H}_{PS}\|$ 且 $\frac{1-2/3\epsilon}{1+\epsilon/6} \geq 1-5\epsilon/6$），可得低能态的数量很多

$$\frac{\#\{|E\rangle : E\leq(1-5\epsilon/6)\lambda_{\min}(\boldsymbol{H}_{PS})\}}{N} \geq \Omega(\epsilon^{3/2}) \quad \text{with high probability} \quad 1-\mathrm{e}^{-\Omega(\log(N)^{1/3})}$$

从哈密顿量系综中抽取。因此，在最大混合态上以能量分辨率 $\mathcal{O}(\epsilon)$ 进行相位估计，即可制备一个低能见证态 $\boldsymbol{\rho}$，使得

$$\mathrm{Tr}[\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{H}_{PS}] \leq (1-5\epsilon/6)\lambda_{\min}(\boldsymbol{H}_{PS}) \quad \text{with success probability} \quad \Omega(\epsilon^{3/2}).$$

使用任意现成的量子模拟算法（例如 Trotter [39], 量子比特化 [41], 或 qDrift [15]）在相位估计中进行哈密顿量模拟，所需成本为 $\mathrm{Poly}(m, 1/\epsilon)$。我们可以通过重复 $\mathcal{O}(\epsilon^{-3/2}\log(\sqrt{m}/\epsilon))$ 次，将成功概率提升至 $1-\epsilon/(6\sqrt{m})$。若所有重复均失败，则输出最大混合态

；即使在最坏情形下，其能量也有 $\sqrt{m}$ 的上界。由此得到的输出态所需门复杂度为

$$G = (\text{number of repeats}) \cdot (\text{QPE cost}) = \Omega(\text{Poly}(m, \frac{1}{\epsilon}))$$

且输出态[10] 的能量至多为 $(1-\epsilon)\lambda_{\min}(\boldsymbol{H}_{PS})$，这正是所声称的结果。

命题证明。 剩下的任务是证明该命题（C2）；为此我们将用到预解式的集中性（定理 A.1）。再强调一次，对于每个 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_{\ell\bar{\omega},\eta}$，我们要证明

$$\text{(WTS)} \quad \Pr\left(\overline{\text{Tr}}\,|\boldsymbol{R}_{\ell\omega,\eta}|^p \le \frac{1}{2}\,\mathbb{E}\,\overline{\text{Tr}}\,|\tilde{\boldsymbol{R}}_{\ell\omega,\eta}|^p\right) \le \mathrm{e}^{-\Omega(\log(N)^{1/3})} \quad \text{for each} \quad \ell,\bar{\omega} \tag{C3}$$

对于参数 $\eta = \frac{\epsilon}{3}\cdot 2$, $p = \lfloor c_1 \log(N)\rfloor$，以及

$$q = \theta(\log(N))$$
$$m = \Omega(\frac{\log(N)^5}{\epsilon^4}).$$

对于每个 $\ell,\bar{\omega}$，记 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_{\ell\bar{\omega},\eta}$，并重新排列

$$\begin{aligned}\Pr\left(\overline{\text{Tr}}\,|\boldsymbol{R}|^p \le \frac{1}{2}\,\mathbb{E}\,\overline{\text{Tr}}\,|\tilde{\boldsymbol{R}}|^p\right) &\le \Pr\left(\left|\overline{\text{Tr}}\,|\boldsymbol{R}|^p - \mathbb{E}\,\overline{\text{Tr}}\,|\boldsymbol{R}|^p\right| \ge \frac{1}{2}\,\mathbb{E}\,\overline{\text{Tr}}\,|\tilde{\boldsymbol{R}}|^p - \left|\mathbb{E}\,\overline{\text{Tr}}\,|\tilde{\boldsymbol{R}}|^p - \mathbb{E}\,\overline{\text{Tr}}\,|\boldsymbol{R}|^p\right|\right)\\ &\le \left(\frac{\left|\overline{\text{Tr}}[|\boldsymbol{R}|^p - |\boldsymbol{R}'|^p]\right|_q}{\frac{1}{2}\,\mathbb{E}\,\overline{\text{Tr}}\,|\tilde{\boldsymbol{R}}|^p - \left|\mathbb{E}\,\overline{\text{Tr}}\,|\tilde{\boldsymbol{R}}|^p - \mathbb{E}\,\overline{\text{Tr}}\,|\boldsymbol{R}|^p\right|}\right)^q.\end{aligned}$$

最后一个不等式来自马尔可夫不等式。接下来我们对分母进行界定

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\,\mathbb{E}\,\overline{\text{Tr}}\,|\tilde{\boldsymbol{R}}|^p - \left|\mathbb{E}\,\overline{\text{Tr}}\,|\tilde{\boldsymbol{R}}|^p - \mathbb{E}\,\overline{\text{Tr}}\,|\boldsymbol{R}|^p\right| &= \frac{1}{2}|||\tilde{\boldsymbol{R}}|||_p^p\left(1 - 2\left|1 - \frac{|||\boldsymbol{R}|||_p^p}{|||\tilde{\boldsymbol{R}}|||_p^p}\right|\right)\\ &\ge \frac{1}{2}|||\tilde{\boldsymbol{R}}|||_p^p\left(1 - \mathcal{O}(\mathrm{e}^{\mathcal{O}(1/\log(N))} - 1)\right).\end{aligned}$$

该不等式使用 $|1-(1+x)^p| \le \left|1-\mathrm{e}^{|x|p}\right|$，适用于

$$x := \left|\frac{|||\boldsymbol{R}|||_p}{|||\tilde{\boldsymbol{R}}|||_p} - 1\right| = \frac{\left||||\boldsymbol{R}|||_p - |||\tilde{\boldsymbol{R}}|||_p\right|}{|||\tilde{\boldsymbol{R}}|||_p} \lesssim \frac{p^3 + p^4/m}{m\eta^4}(1 + \frac{p^{3/4}}{N^{1/2}}) = \mathcal{O}(\frac{1}{p\log(N)}),$$

它使用预解式矩的比较（定理 IV.1），其中 $|||\boldsymbol{H}_{GUE}|||_p \le 2\cdot(1+(p/2)_{\sqrt{N}}^{3/4})$，其中 $|||\tilde{\boldsymbol{R}}|||_p \ge 1/2\eta$，以及参数 q, p, m, η 的取值。

对于分子，我们应用定理 A.1

$$\begin{aligned}|\overline{\text{Tr}}\,|\boldsymbol{R}|^p - \overline{\text{Tr}}\,|\boldsymbol{R}'|^p|_q &\le \left|\overline{\text{Tr}}\,|\boldsymbol{R}|^p\right|_q\left(\frac{\sqrt{q}p^2}{m\eta^2} + \frac{\sqrt{q}p}{\eta\sqrt{N}} + \frac{qpm^{1/q-1}}{\eta}\right)\\ &\le \left(\left|\overline{\text{Tr}}\,|\tilde{\boldsymbol{R}}|^p\right|_q^{1/p} + \mathcal{O}\left(\frac{p^3q^3 + p^4q^4/m}{m\eta^5}(1 + \frac{(2qp)^{3/4}}{\sqrt{N}})^4\right)\right)^p \cdot \left(\frac{\sqrt{q}p^2}{m\eta^2} + \frac{\sqrt{q}p}{\eta\sqrt{N}} + \frac{qpm^{1/q-1}}{\eta}\right)\\ &\lesssim \left(\mathbb{E}\,\overline{\text{Tr}}\,|\tilde{\boldsymbol{R}}|^p + \mathcal{O}(\frac{\log(N)^{1+1/6}}{\eta^{p+1}\sqrt{N}})\right)\frac{\epsilon^2}{\log(N)^{3-1/6}}.\end{aligned}$$

第一个不等式计算二阶矩。

$$\sigma_*(\boldsymbol{A}_i)^2 = \frac{1}{m}\sup_{|||u\rangle\|=\||v\rangle\|=1}\mathbb{E}_{\boldsymbol{A}_i}|\langle u|\,\boldsymbol{A}_i\,|v\rangle|^2 = \frac{1}{m}\sup_{|||u\rangle\|=\||v\rangle\|=1}\langle u|\,\overline{\text{Tr}}[|v\rangle\langle v|]\,|u\rangle = \frac{1}{mN}.$$

---

[10] 严格来说，我们所展示的过程是一种量子信道，涉及量子门和经典随机性（即重复操作，直到观察到成功为止）。我们可以通过对一个最大纠缠输入态的一半进行相位估计（此时约化密度矩阵为最大混合态），并进行定点振幅放大，来构造一个固定的确定性电路，从而相干地提高成功概率。 [61]

第二个不等式比较 $\left|\mathrm{Tr}\,|\boldsymbol{R}|^p\right|_q^{1/p}$ 与 $\left|\mathrm{Tr}\left|\tilde{\boldsymbol{R}}\right|^p\right|_q^{1/p}$（定理 A.3）。最后一个不等式代入以 N、ϵ 表示的 q、p、η 的取值，并利用高斯预解式 $\left|\mathrm{Tr}\,|\tilde{\boldsymbol{R}}|^p\right|_q \le \mathbb{E}\,\mathrm{Tr}\,|\tilde{\boldsymbol{R}}|^p + \left|\mathrm{Tr}\,|\tilde{\boldsymbol{R}}|^p - \mathbb{E}\,\mathrm{Tr}\,|\tilde{\boldsymbol{R}}|^p\right|_q \le \mathbb{E}\,\mathrm{Tr}\,|\tilde{\boldsymbol{R}}|^p + \mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{qp}}{\eta^{p+1}\sqrt{N}}\right)$ 的集中性（命题 B.1）。由此得到所述断言 (C3)。

$$\Pr\left(\overline{\mathrm{Tr}}\,|\boldsymbol{R}|^p \le \frac{1}{2}\,\mathbb{E}\,\overline{\mathrm{Tr}}\,|\tilde{\boldsymbol{R}}|^p\right) \le \left(\frac{\left(\mathbb{E}\,\overline{\mathrm{Tr}}\,|\tilde{\boldsymbol{R}}|^p + \mathcal{O}(\frac{\log(N)^{1+1/6}}{\eta^{p+1}\sqrt{N}})\right)\frac{\epsilon^2}{\log(N)^{3-1/6}}}{\frac{1}{2}\|\tilde{\boldsymbol{R}}\|_p^p(1-\mathcal{O}(\mathrm{e}^{\mathcal{O}(1/\log(N))}-1))}\right)^q \le \mathrm{e}^{-\Omega(\log(N)^{1/3})} \le \mathrm{e}^{-c_3 n^{1/3}}.$$

第二个不等式利用了 $\mathbb{E}\,\mathrm{Tr}\,|\tilde{\boldsymbol{R}}|^p = \mathbb{E}\,\mathrm{Tr}|\tilde{\boldsymbol{R}}_{\ell\bar{\omega},\,\eta}|^p \gtrsim \sqrt{\epsilon}/\sqrt{p}^3 \gtrsim \sqrt{\epsilon}/\sqrt{\log(N)^3}$ 因此，当 N 足够大时，底数小于 1。最后一个不等式引入了一个显式常数。由此完成了命题（C2）的证明。

□

附录 D：低能见证态的量子电路规模下界

高斯酉系综具有酉不变性，因此任何低能本征向量子空间都是 Haar 随机的。因此，制备高斯酉系综的低能态必然需要很高的电路复杂度。这种随机性是否有足够多的部分能够延续到稀疏哈密顿量系综中，从而得到类似的结论？在本章节中，我们证明，以高概率，对该系综中的任意量子电路而言，制备低能见证态都必然需要很大的电路规模。为证明定理 II.2，我们将证明分解为以下两个命题。首先，我们计算期望范数。

命题 D.1。对于式 (2) 中给出的泡利字符串系综，$\mathbb{E}\,\lambda_{\min}(\boldsymbol{H}_{PS}) \le -1/2.$

证明。由系综的对称性，

$$2\,\mathbb{E}\,|\lambda_{\min}(\boldsymbol{H}_{PS})| = \mathbb{E}\,|\lambda_{\min}(\boldsymbol{H}_{PS})| + \mathbb{E}\,|\lambda_{\max}(\boldsymbol{H}_{PS})| \ge \mathbb{E}\,\|\boldsymbol{H}_{PS}\| \ge \mathbb{E}\,\|\boldsymbol{H}_{PS}\|_2 = 1.$$

最后一个不等式对于归一化的 Schatten p-范数成立，其定义见式（4）。 □

引理 D.1（小型量子电路无法产生低能态）。固定一个由双量子比特门组成的电路架构，其大小为G，初始态为 $|0\rangle$，并考虑所有可达态的族 $\mathrm{Circ}(G)$。假设 $m \le \epsilon^2 N^2$，则存在常数 c_1、c_2，使得

$$G \le c_1\epsilon\sqrt{m}\log^{-1}(m) \quad implies \quad \Pr\left[\inf_{|\psi\rangle\in\mathrm{Circ}(G)}\langle\psi|\,\boldsymbol{H}_{PS}\,|\psi\rangle \le -\epsilon\right] \le \exp\left(-c_2\epsilon\sqrt{m}\right).$$

证明。证明方法是：对任意非随机态使用集中不等式，并通过并集界对 ε-网进行引导。考虑与一个固定纯态相关联的随机变量

$$\langle\boldsymbol{H}_{PS}\rangle_\psi = \sum_{i=1}^m a_i \quad \text{where} \quad \langle\boldsymbol{H}_{PS}\rangle_\psi := \langle\psi|\,\boldsymbol{H}_{PS}\,|\psi\rangle \quad \text{and} \quad a_i := \frac{1}{\sqrt{m}}\langle\boldsymbol{A}_i\rangle_\psi.$$

我们使用对称性 泡利字符串系综的对称性 $\boldsymbol{H}_{PS} \sim -\boldsymbol{H}_{PS}$，以考察更直观的最大化 on 问题。我们还 为简洁起见，省略下标 $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_{PS}$。

泡利串的方差。首先，我们计算具有任意固定输入态的随机泡利串的方差

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{A}_i}\left|\langle\boldsymbol{A}_i\rangle_\psi\right|^2 = \mathbb{E}_{\boldsymbol{A}_i}\langle\psi|\,\boldsymbol{A}_i\,|\psi\rangle\langle\psi|\,\boldsymbol{A}_i\,|\psi\rangle = \frac{1}{N}\langle\psi|\,\mathrm{Tr}[|\psi\rangle\langle\psi|]\,|\psi\rangle = \frac{1}{N} \ll 1.$$

第二个等号计算了泡利字符串系综的二阶矩。注意，方差比随机变量的最大值小了指数级。换言之，固定输入态几乎不可能与随机泡利串 $\boldsymbol{A}_i$“对齐”。直观而言，随机泡利串具有非对易性，因此无法在某个优选基下同时对角化。

方差的总能量。根据各个项的方差，我们可以通过伯恩斯坦不等式为总和得到一个尾界

伯恩斯坦不等式

$$\Pr[\langle\boldsymbol{H}\rangle_\psi \ge t] \le \exp\left(\frac{-t^2/2}{v + Lt/3}\right) \quad \text{where} \quad v := \sum_i^m \mathbb{E}[a_i^2] = \frac{1}{N} \quad \text{and} \quad a_i \le L := 1/\sqrt{m}. \tag{D1}$$

换句话说，任何确定性输入态（与哈密顿量不相关）都很可能具有较低的能量。

对 ε-网应用并集界。通过并集界，良好的集中性意味着，对于一个大的确定性输入态族，能量必须同时很小；具体而言，这些输入态取自一个小型量子电路上的 ε-网。对于由 G 个门组成的量子电路，存在一个

$$\left(\frac{\epsilon}{2\sqrt{m}}\right)\text{-net} \quad \{|\psi_i\rangle\} \quad \text{for} \quad \mathrm{Circ}(G) \quad \text{with cardinality} \quad \#\{|\psi_i\rangle\} \leq \exp\left(\mathcal{O}(G\log(G\sqrt{m}/\epsilon))\right).$$

理由如下。任何包含 G 个双量子比特门的量子电路，都等价于由固定的 CNOT 门与 KG 个单参数单量子比特旋转门交错构成的乘积，这些旋转门的角度满足 $K=\mathcal{O}(1)$。如果我们针对每个旋转角度，在区间 $[0,2\pi]$ 上取一个 $(\epsilon/(2\sqrt{m}KG))$-网，那么所生成的电路集合将在 $\mathrm{Circ}(G)$ 中的态上形成一个 $\epsilon/(2\sqrt{m})$-网，并且该集合的基数至多为 $(4\pi\sqrt{m}KG/\epsilon)^{KG}$。该网中的某个元素必然能够以 $\epsilon/(2\sqrt{m})$ 的误差逼近在 $\mathrm{Circ}(G)$ 中使 $\langle \boldsymbol{H}\rangle_\psi$ 达到上确界的态 $|\psi\rangle\in$，由于 $\|\boldsymbol{H}\|\leq\sqrt{m}$ 成立，我们有 $\sup_{|\psi\rangle}\langle \boldsymbol{H}\rangle_\psi \leq \max_i \langle \boldsymbol{H}\rangle_{\psi_i}+\epsilon/2$。因此，我们将对规模为 G 的量子电路上的态取上确界，化为了对 $(\epsilon/(2\sqrt{m}))$-网取最大值，而并集界适用（D1）

$$\begin{aligned}\Pr\left[\sup_{|\psi\rangle\in\mathrm{Circ}(G)}\langle \boldsymbol{H}\rangle_\psi \geq \epsilon\right] &\leq \Pr\left[\max_i \langle \boldsymbol{H}\rangle_{\psi_i}\geq\frac{\epsilon}{2}\right]\\ &\leq \#\{|\psi_i\rangle\}\cdot\exp\left(\frac{-\epsilon^2/8}{1/N+\epsilon/6\sqrt{m}}\right)\leq \#\{|\psi_i\rangle\}\cdot\exp\left(-\min(8\epsilon\sqrt{m}/8,\epsilon^2N/8)\right).\end{aligned}$$

因此，存在常数 c_1，c_2 使得

$$G\leq c_1\min(\epsilon\sqrt{m},\epsilon^2N)\cdot\log^{-1}(m) \quad \text{implies} \quad \Pr\left[\sup_{|\psi\rangle\in\mathrm{Circ}(G)}\langle \boldsymbol{H}\rangle_\psi\geq\epsilon\right]\leq\exp\left(-c_2\min(\epsilon\sqrt{m},\epsilon^2N)\right).$$

代入假设 $m\leq\epsilon^2N^2$ 即可得到所述结果。 □

我们猜测真正的电路复杂度为 Ω(m)，但当前的并合界论证只能给出˜Ω($\sqrt{m}$)。集中不等式需要处理同一个泡利串出现 Ω($\sqrt{m}$) 次的事件。尽管如此，通过一个初等论证，我们仍然得到了不断增长的电路规模下界 Ω($\sqrt{m}$)。回顾来看，这一结果关键取决于泡利串的非交换性：方差会因维数而受到抑制。相比之下，对于固定的 k，该论证对于随机完全 k-局域哈密顿量只能给出 Ω(n) 的电路规模下界（这是没有用的）。具体而言，令 P_k 为权重为 k 的泡利串集合，并考虑系综 $\boldsymbol{H}=\sum_{\boldsymbol{\sigma}\in P_k} r_{\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{\sigma}$，其中 $r_{\boldsymbol{\sigma}}$ 为均匀随机符号。然后，如引理 D.1 的证明中那样，定义 $a_{\boldsymbol{\sigma}}=r_{\boldsymbol{\sigma}}\langle \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\sigma}}\rangle_\psi$，并计算（将 $k=\mathcal{O}$视为 (1)）

$$v=\sum_{\boldsymbol{\sigma}\in P_k}\mathbb{E}[a_{\boldsymbol{\sigma}}^2]=\Theta(|P_k|)=\Theta(n^k),\quad \text{and}\quad a_{\boldsymbol{\sigma}}\leq L=1.$$

在那里，方差要大得多，而最优值约为 $\|\boldsymbol{H}\|=\Theta(\sqrt{vn})$。代入并集界可得

$$\Pr\left[\sup_i\langle \boldsymbol{H}\rangle_{\psi_i}\geq\frac{\epsilon}{2}\sqrt{vn}\right]\leq\#\{|\psi_i\rangle\}\cdot\exp\left(\Theta(\frac{-\epsilon^2vn/8}{v+\epsilon\sqrt{vn}/6})\right)\sim\#\{|\psi_i\rangle\}\mathrm{e}^{-\Theta(\epsilon^2n)}.$$

T并集界仅适用于规模为 $\mathcal{O}(n)$ 的量子电路，这大致相当于乘积态的量子电路规模。

Appendix E: Missing proofs

本章节中，我们汇总了缺失的证明。

1. 事实IV.1 的证明

˜证明。 </style}两组矩阵 $\boldsymbol{A}_i$ 和 $\boldsymbol{A}_i$的第一矩和第三矩均为零。我们计算二阶矩

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\boldsymbol{A}_i\otimes\boldsymbol{A}_i]&=\frac{1}{2m}\mathbb{E}(\boldsymbol{DP}+\boldsymbol{P}^\dagger\boldsymbol{D}^\dagger)\otimes(\boldsymbol{DP}+\boldsymbol{P}^\dagger\boldsymbol{D}^\dagger).\\ &=\frac{1}{2m}\mathbb{E}\,\boldsymbol{DP}\otimes\boldsymbol{P}^\dagger\boldsymbol{D}^\dagger+\boldsymbol{P}^\dagger\boldsymbol{D}^\dagger\otimes\boldsymbol{DP}=\mathbb{E}[\boldsymbol{H}_{GUE}\otimes\boldsymbol{H}_{GUE}].\end{aligned}$$

第一个等式利用了 $\mathbb{E}[\boldsymbol{D}\otimes\boldsymbol{D}^\dagger]=0$。第二个不等式是

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{P}^\dagger\boldsymbol{D}^\dagger]=\sum_i \mathbb{E}\,|i\rangle\langle i|\,\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{P}^\dagger\,|i\rangle\langle i| = \frac{1}{N}\sum_i\sum_j |i\rangle\langle j|\otimes|j\rangle\langle i|\,,$$

它与高斯酉系综的值成正比。这就是所宣称的结果。 □

附录 F：通过插值消去高阶矩的难点

在本节中，我们给出一个启发式理由，说明为何基于插值的方法似乎难以用于高阶矩匹配。同样，考虑一组独立矩阵 $\boldsymbol{A}_i$，其低阶矩与某些理想化矩阵 $\boldsymbol{A}_i$ 的低阶矩匹配 ~

$$\mathbb{E}\,\boldsymbol{A}_i=0 \quad\text{and}\quad \mathbb{E}\,\boldsymbol{A}_i^{\otimes k}=\mathbb{E}\,\tilde{\boldsymbol{A}}_i^{\otimes k} \quad\text{for each}\quad k=1,\dots,t \quad\text{and}\quad i=1,\dots,m.$$

假设我们构造一条插值路径

$$\boldsymbol{S}(t):=f(t)\sum_i \boldsymbol{A}_i+g(t)\sum_i\tilde{\boldsymbol{A}}_i \tag{F1}$$

接着，考虑 p 阶矩的期望，并按 $\boldsymbol{A}_1$ 的幂展开

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,\boldsymbol{S}(t)^p=&\,\mathbb{E}(f(t)\boldsymbol{A}_1+g(t)\tilde{\boldsymbol{A}}_1)\cdots(f(t)\boldsymbol{A}_1+g(t)\tilde{\boldsymbol{A}}_1)\cdots\\&+\mathbb{E}(f(t)\boldsymbol{A}_1+g(t)\tilde{\boldsymbol{A}}_1)\cdots(f(t)\boldsymbol{A}_1+g(t)\tilde{\boldsymbol{A}}_1)\cdots(f(t)\boldsymbol{A}_1+g(t)\tilde{\boldsymbol{A}}_1)+\cdots.\end{aligned}$$

假设二阶矩和三阶矩不为零。若希望时间导数为零，那么通常需要

$$\begin{aligned}f(t)^2\,\mathbb{E}\,\boldsymbol{A}_1\otimes\boldsymbol{A}_1+g(t)^2\,\mathbb{E}\,\tilde{\boldsymbol{A}}_1\otimes\tilde{\boldsymbol{A}}_1=Const.&\implies f(t)^2+g(t)^2=1\\ f(t)^3\,\mathbb{E}\,\boldsymbol{A}_1\otimes\boldsymbol{A}_1\otimes\boldsymbol{A}_1+g(t)^3\,\mathbb{E}\,\tilde{\boldsymbol{A}}_1\otimes\tilde{\boldsymbol{A}}_1\otimes\tilde{\boldsymbol{A}}_1=Const.&\implies f(t)^3+g(t)^3=1.\end{aligned}$$

这两个代数方程都只有离散解，因此无法在$f=0$与 $f=1$之间建立连续路径。事实上，标准插值函数 $f(t)=\sqrt{1-t}$，$g(t)=\sqrt{t}$只能消去二阶矩。因此，如果我们希望插值方法能够捕捉高阶矩匹配条件，就需要超越（F1）的形式。相反，林德伯格原理似乎更适合这项任务。