arXiv:2302.03400v1 [math.DS] 7 Feb 2023

移动平均

TERRENCE ADAMS 和 JOSEPH ROSENBLATT

ABSTRACT. 我们在遍历理论或平稳遍历过程的一般框架下，研究移动平均的收敛性。我们刻画了基于标准遍历平均完全收敛到零时，移动平均何时普遍收敛。利用 Hsu-Robbins 关于独立同分布过程的定理（1947年），我们给出一个简洁的证明：给定一个紧标准概率空间 $(X, \mathcal{B}, \mu)$、一个连续函数 $f: X \to \mathbb{R}$，以及某个伯努利变换族 T，那么所有移动平均 $M(v_n, L_n)^T f = \frac{1}{L_n}\sum_{i=v_n+1}^{v_n+L_n} f \circ T^i$ 在 L_n 严格递增时，几乎处处逐点收敛于 $x \in X$：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{L_n} \sum_{i=v_n+1}^{v_n+L_n} f(T^i x) = \int_X f d\mu.$$

随机过程 $f \circ T^i$ 可能远非独立同分布（例如，f 是一个一一函数）。这一结果还可推广为：对于任意有界可测函数 f，都存在一个伯努利变换 T，使得所有移动平均 $M(v_n, L_n)^T f$ 逐点收敛。

我们向读者重述 Bellow、Jones、Rosenblatt（1990）建立的锥条件；该条件保证对所有 $f \in L^1(\mu)$ 和遍历保测映射 T，某些移动平均收敛。我们证明，给定 $f \in L^1(\mu)$ 和遍历保测 T，存在一个移动平均 $M(v_n, L_n)^T f$，其中 L_n 严格递增，使得 (v_n, L_n) 不满足锥条件，但仍几乎处处逐点收敛。

我们证明，对任意非零函数 $f \in L^1(\mu)$，存在一个遍历映射的稠密开类 T，使得每个映射都对应一个逐点不收敛的移动平均 $M(v_n, L_n)^T f$。然而，我们已从先前的研究中得知，若 $f \in L^2(\mu)$ 均值为零，则存在解 T 和 $g \in L^1(\mu)$，满足余边界方程：$f = g - g \circ T$。这意味着 f 和 T 会产生普适移动平均。我们通过构造一族函数 $\mathcal{F}_2$，证明这一结论不能推广到 $L^p(\mu)$（$p < 2$），其中 $\mathcal{F}_2 \cap_{p<2} L^p(\mu) \neq \emptyset$；并且对 $f \in \mathcal{F}_2$ 和每个遍历保测 T，都存在一个移动平均 $M(v_n, L_n)^T f$，其中 L_n 严格递增，使得遍历平均不逐点收敛。若干结果推广到了多项式增长的移动平均情形。

1. 引言

假设我们有一个标准无原子概率空间 $(X, \mathcal{B}, \mu)$。我们考虑 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上的保测映射 T，以及 μ 上的函数 $f \in L^p$，其中 $p \geq 1$。给定一个整数对序列 (v_n, L_n)，定义相对于 T 的 f 的移动平均如下：

$$M(v_n, L_n)^T f = \frac{1}{L_n} \sum_{i=0}^{L_n-1} f \circ T^{v_n+i}.$$

对于一个固定的映射 T，我们给出 $f \in L^1(\mu)$ 的一个刻画，使得对于所有满足 L_n 严格递增的移动平均，几乎处处都有收敛。由于我们主要关注 L_n 严格递增时的遍历平均，因此我们将用“递增”表示严格递增。必要且充分条件是通常的遍历

日期：2023年2月。

$_n$ $_\infty$平均 $M(0,n)^T f = \frac{1}{n}\sum f\circ T^k$对所有 $\delta>0$ 都有 $\sum \mu\{|M(0,n)$ $^T f|\geq\delta\}<\infty$。这个级数$_{k=1}$ $_{n=1}$收敛称为 $M(0,n)^T f$ 完全收敛到 0，或简称完全收敛。它对 $L^1(\mu)$ 中函数的一个第一类线性子空间成立；但该子空间总是比由传递函数属于 $L^1(\mu)$ 的 T-余边界构成的线性子空间更大。

此外，如果我们固定 f，就会证明，对于稠密开类映射 T，存在某个关于 T 的移动平均，使得函数无法几乎处处收敛。因此，一个颇具挑战性的问题是，寻找 T，使得 f 的移动平均总是几乎处处收敛。本文探讨了两种主要方法。

首先，我们借助 Hsu-Robbins 关于独立同分布随机过程完全收敛的一个结果。Hsu-Robbins 定理结合我们对普适移动平均的刻画表明：若函数 $f\in L^2(\mu)$ 存在一个变换 T，使得$X_i = f\circ T^i$是独立同分布的，那么所有满足 L_n递增条件的移动平均 $M(v_n,L_n)^T$ 都几乎处处收敛。此外，我们还证明，若 f 在紧空间 X 上连续，那么对于任意伯努利变换T，当 L_n 递增时，所有移动平均都收敛。在这种情况下，$X_i = f\circ T^i$ 不必是独立同分布的。

其次，我们注意到，寻找具有普遍收敛移动平均的变换 T 与余边界存在性问题有关。这个问题是指如何用另一个可测函数 g 和一个保测映射 T来表示可测函数 $f = g - g\circ T$。在这种情况下，我们称 f 是一个以 g为传递函数的 T-余边界。在亚当斯和罗森布拉特 [2], 中，我们证明，对于 $f\in L^p(\mu)$， $1\leq p\leq\infty$，存在一个遍历映射 T和函数 $g\in L^{p-1}(\mu)$，使得函数 $f-\int_X f d\mu$是一个以 g为传递函数的 T-余边界。在 $g\in L^1(\mu)$的情形下，这意味着所有移动平均 $M(v_n,L_n)^T$都几乎处处逐点收敛到 $\int_X f d\mu$，其中 $L_n\geq n$。因此，对于 $f\in L^2(\mu)$，这一余边界结果保证存在一个具有普适移动平均的遍历变换 T。此外，这一联系还推广到了 $g\in L^p(\mu)$，其中 $p<2$。在附录中，我们证明，若$f = g - g\circ T$，其中 $g\in L^p$对 $p>0$成立，那么给定 (v_n,L_n)，其中 $L_n\geq n^{\frac{1}{p}}$，以下极限几乎处处逐点收敛：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{L_n}\sum_{i=0}^{L_n-1} f(T^{v_n+i}x) = 0.$$

这引出了这样一个问题：给定 $f\in L^1(\mu)$，是否存在具有普适移动平均的遍历 T。在最后一节中，我们构造了“坏”函数 $f\in\bigcup_{p<2}L^p(\mu)$，使得对于任意遍历 T，都存在一个“坏”的移动平均 $M(v_n,L_n)^T$其中 $L_n\geq n$。主要结果扩展到了对于 $d\in\mathbb{Z}^+$具有多项式长度 $L_n = n^d$ 的移动平均。

2. 移动平均的背景

考虑一个数对序列 (v_n,L_n)，其中 (v_n) 是 $\mathbb{Z}$ 中的序列，而 (L_n) 是 $\mathbb{Z}^+$中的递增序列。相应的移动平均是作用于 $L^1(\mu)$ 上的连续线性算子，由 $M(v_n,L_n)^T f = \frac{1}{L_n}\sum_{k=v_n+1}^{v_n+L_n} f\circ T^k$给出，其中 $f\in L^1(\mu)$ 是一个函数。注意， $M(0,n)^T(f) = \frac{1}{n}\sum f\circ T^k$是 T和 f的经典遍历平均。
$_{n=1}$ $_{k=1}$

由于我们假设 L_n 是递增的，因此有 $L_n\to\infty$。如果 T 是遍历的，利用 T-余边界不难看出，对于所有 $f\in L^p(\mu)$ $1\leq p<\infty$，这些平均值都在 L^p- 范数下收敛到 $\int_X f\, d\mu$。事实上，假设 $f = g - g\circ T$ 是一个余边界，其传递

函数为 $g \in L^\infty(\mu)$。那么 $\|M(v_n, L_n)^T f\|_\infty \le 2\|g\|_\infty / L_n$。因此，对于这一类 T-余边界，显然 $M(v_n, L_n)^T f$ 在 L^∞-范数下收敛到零，因而对于所有 $p, 1 \le p \le \infty$，它也在 L^p-范数下收敛。对于 $1 \le p < \infty$，这一类 T-余边界在 L^p-范数下稠密于 $L^p(\mu)$ 中 T-不变函数的正交补；若 T 是遍历的，这些不变函数就是常函数。因此，移动平均总是在 L^p-范数下收敛；若 T 是遍历的，则对于所有 $f \in L_p(\mu)$ $1 \le p < \infty$，它们总是在 L^p- 范数下收敛到 $\int_X f \, d\mu$。

然而，尽管范数收敛很容易得到解决，逐点几乎处处（a.e.）行为却复杂得多。Bellow、Jones 和 Rosenblatt 的主要定理 [10]刻画了这些平均对所有 $f \in L^1(\mu)$ 何时几乎处处收敛。其判据是一个称为锥条件的几何计数条件。在 $\mathbb{R}^2$ 中取顶点位于 (v_n, L_n)、顶角为 90 度的垂直锥。对于给定的 $\lambda > 0$，令 $C(\lambda)$ 表示满足 $x \in \mathbb{R}$ 且至少位于这些锥之一中的 (x, λ) 所构成集合的一维勒贝格测度。锥条件指出，存在某个常数 K，使得对所有 $\lambda > 0$，都有 $C(\lambda) \le K\lambda$。基本定理表明，当且仅当锥条件成立时，对所有 $f \in L^1(\mu)$ 和所有 T，移动平均 $M(v_n, L_n)^T f$ 几乎处处收敛。此外，锥条件成立，当且仅当对于某个遍历映射 T，移动平均在最小的勒贝格空间 $L^\infty(\mu)$ 上几乎处处收敛；而当锥条件不成立时，移动平均具有强扫空性质。详情见 [10]。

例如，对于 (n^2, n) 作为这些对 (v_n, L_n)，锥条件不成立。对于其中一个稀疏子序列，它也不成立，例如只取满足 $n \ge 1$ 的对 $(4^n, 2^n)$。然而，一旦取超稀疏子序列，锥条件便成立。事实上，对于 $n \ge 1$，取 $(v_n, L_n) = (2^{2^{n+1}}, 2^{2^n})$，则对所有 $L^1(\mu)$，平均值 $(M(v_n, L_n)^T f)$ 几乎处处收敛。

鉴于此，有趣的情形是锥条件不成立。此时，对于大多数函数，我们无法得到几乎处处收敛。事实上，可以证明，存在一个稠密的 G_δ 函数集合 $f \in L^1(\mu)$，使得 $\limsup_{n\to\infty} |M(v_n, L_n)^T f| = \infty$ 几乎处处成立。这些是坏函数，即对于它们，几乎处处收敛不成立。但对于好函数，也就是坏函数补集中的子集，若其几乎处处收敛到 $\int_X f \, d\mu$，我们能说些什么？如果将这一平均过程视为应用中的过程，那么从经验上看，这是一个重要的问题。此时，任何选取的函数（在某种意义上，它是数据的模板）本质上都只是对坏函数一般情形的粗略近似。事实上，它或许实际上是一个好函数，几乎处处收敛确实成立！确实，如上所述，若 f 是一个 T-余边界 $f = g - g \circ T$，且满足 $g \in L^\infty(\mu)$，那么几乎处处收敛当然成立，而且这一类在 $L^1(\mu)$ 中的零均值函数里稠密。

本文探讨了一系列问题，旨在刻画锥条件不成立时好函数的类别。例如，固定遍历映射 T。在锥条件不成立的移动平均情形下，好函数有哪些（构造性）刻画？也就是说，哪些函数 $f \in L^1(\mu)$ 能使 $(M(v_n, L_n)^T f)$ 几乎处处收敛？它是否总是包含余边界函数以外的函数？这取决于映射 T 的性质吗？此外，在对偶情形下，如果我们不固定 T，而是固定 f 并让 T 变化，会发生什么？

3. 移动平均基础

遍历理论中对移动平均的研究，正式起步于 Akcoglu 和 del Junco 的文章 [3],；该文纠正了 Belley [7] 中关于所有移动平均都几乎处处收敛的说法。Akcoglu 和 del Junco 证明，对于任意遍历变换 T T，都存在某个可测集 E，使得平均值 $M(n^2, n)^T 1_E$ 不几乎处处收敛。

更一般地说，下面列出移动平均的一些基本性质，值得牢记。这些性质对于本文所用的构造很重要。这些结果都可由锥条件推出。其中一些在 [10] 中有明确说明。

命题 3.1. 给定一个移动平均 $M(v_n, L_n)^T$，存在一个满足锥条件的子序列 (v_{n_m}, L_{n_m})。因此，对于每个遍历映射 T 和每个 $f \in L^1(\mu)$，移动平均 $(M(v_{n_m}, L_{n_m})^T(f))$ 几乎处处收敛到 $\int_X f \, d\mu$。

备注 3.2. 这里与其他范数收敛随机过程的对比显而易见。总是存在一个依赖于 f 的子序列，使其几乎处处收敛。但这里存在一个子序列，使得对每个映射 T，每个 $f \in L^1(\mu)$ 都是良好的。作为对比，取一个由非零实数组成的序列 (x_n)，其 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$。考虑对所有 $f \in L^1(\mathbb{R})$ 的算子 $T_n(f)(x) = f(x_n + x)$。它们在 L^1-范数下收敛。但每个子序列都是强扫出的。对于随机过程 (T_n)，强扫出是指存在一个可测集 A，使得 $\limsup_{n\to\infty} T_n(1_A) = 1$ 几乎处处成立，且 $\liminf_{n\to\infty} T_n(1_A) = 0$ 几乎处处成立。如果 T_n 是这些平移的 Ces`aro 平均，结论也同样成立。有关这些结果的历史和信息，参见 Akcoglu 等人 [4]、Bellow [8] 和 Bourgain [11]。□

另一个重要原则如下。

命题 3.3：给定自然数集 $\mathbb{Z}^+$ 中的任意序列 (L_n)，存在某个 (v_n)，使得移动平均 $M(v_n, L_n)^T$ 不满足锥条件。

这是一个核心事实：对于移动平均而言，L^p-空间在某种意义上并不重要。

命题 3.4：给定一个遍历映射 T 以及由 (v_n, L_n) 给出的移动平均，如果存在某个 p_0，$1 \le p_0 \le \infty$ 使得 $L^{p_0}(\mu)$ 中的所有函数都是良好的，那么对于所有其他 p，$1 \le p \le \infty$ 以及所有其他遍历映射，情况也同样如此。

备注 3.5：出于一般原因，一个遍历映射中发生的情况会反映在遍历映射的全集中，这并不令人意外。但就 L^p-空间而言，这一结果与 Bellow [9] 和 Reinhold [23] 中出现的结果大不相同；在后者中，平均取的是某个映射的幂，而良好的 L^p-空间则本质上取决于所使用的是哪些幂。□

此外，当锥条件不成立时，还会出现几乎处处收敛失败的一种极端形式：一般集是强扫出的。

命题3.6. 如果锥条件不成立，那么对于所有遍历映射，一般可测集 $A \in \beta$ 的上极限 $\limsup_{n\to\infty} M(v_n, L_n)^T 1_A = 1$ 几乎处处成立，而下极限 $\liminf_{n\to\infty} M(v_n, L_n)^T 1_A = 0$ 几乎处处成立。

4. 当映射固定时

本节讨论固定遍历映射 T 的相关结果，并试图理解使其表现良好的函数所需满足的条件。如果锥条件成立，那么 T 是什么、f 是什么都无关紧要，因为相应的移动平均总是几乎处处收敛。只有在锥条件不成立这一令人遗憾的情形下，才会出现有趣的结果。

首先，命题 3.3 立即给出以下结果，表明每个 f 对某个不良移动平均都是好的。

命题 4.1. 假设 $f \in L^1(\mu)$ 是均值为零的，且 T 是遍历的。固定 (L_m)。那么存在 (L_{m_n})，使得对于所有 (v_n)，移动平均 $M(v_n, L_{m_n})^T f$ 几乎处处收敛到 0。通过适当选择 (v_n)，可得到 (v_n, L_{m_n})，它不满足锥条件，但 f 对该移动平均是好的。

证明。由于 $M(0, L_m)f$ 在 L^1-范数下收敛到 0，存在 (L_{m_n}) 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|M(0, L_{m_n})^T f\|_1 < \infty.$$

但对于任意 (v_n)，我们有

$$\|M(v_n, L_{m_n})^T f\|_1 = \|M(0, L_{m_n})^T f\|_1.$$

因此，$\sum_{n=1}^{\infty} \|M(v_n, L_{m_n})^T f\|_1 < \infty$ 也成立，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} |M(v_n, L_{m_n})^T f(x)| < \infty$ 对几乎处处的 x 成立。因此 $M(v_n, L_{m_n})^T f(x) \to 0$，正如 $n \to \infty$ 对几乎处处的 x 成立一样。我们利用命题 3.3 完成证明。□

注记 4.2。这里 (L_{n_m}) 的选取取决于 T。实际上，对于给定的 f 以及任意固定的序列 (L_n)（当然也包括此处选取的子序列），存在一个稠密的 G_δ 集，其中包含遍历映射 σ，使得 $\sum \|M(0, L_{m_n})^\sigma f\|_1 = \infty$。此外，如果我们固定了 $(L_n)_{n=1}$（或者说固定了 (L_{m_n})），那么实际上存在一个稠密的 G_δ 集，其中包含遍历映射 σ，使得对其中每个映射，都存在某个 (v_n)，令函数 f 对于移动平均 $M(v_n, L_n)^T \sigma f$ 而言表现不佳。参见第 6 节。□

此外，对于给定的遍历映射 T，我们已经注意到，对于任意选择的 (v_n, L_n)，T-余边界都构成好函数的稠密类。我们可以使用 $L^\infty(\mu)$ 中的传递函数，也可以使用更大的类 $L^1(\mu)$ 中的传递函数。区别在于，若传递函数有界，则移动平均总是在 L^∞-范数下收敛到 0。然而，如果传递函数仅仅是可积的，我们就需要不同的论证。我们需要有 $\frac{1}{L_n}(f \circ T^{v_n+1} - f \circ T^{v_n+L_n+1}) \to 0$ 几乎处处成立；在对 f 没有更多了解、只知道它可积的情况下，保证这一点最简单的方法是利用以下事实：对于任意 (w_n)，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu\{|f \circ T^{w_n}| \geq L_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\{|f| \geq L_n\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\{|f| \geq n\} < \infty.$$

然而，好函数总是多于 T-余边界。参见 Derriennic 和 Lin 的文章 [14]。特别是，[14] 中的推论 2.15 表明，对于任意 $\alpha, 0 < \alpha < 1$，存在 $f \in L^p(\mu)$ $1 \leq p < \infty$，使得 $\lim_{n\to\infty} n^\alpha \|M(0, n)^T f\|_p = 0$。

命题 4.3. 对于任意遍历映射 T 和 p，存在 $f \in L^p(\mu)$，使得 $\sum_{n=1}^{\infty} \|M(0, n)^T f\|_p^p < \infty$。此外，还存在不是 T-余边界的此类函数。这些函数对于关于 T 的所有移动平均都适用。

证明。我们只需取 α 使得 $\sum(1/n^{p\alpha}) < \infty$。事实上，对于 $p > 1$，如果我们有 $1/p < \alpha < 1$，则此条件得到满足。现在利用 [14], 取 $f \in L^p(\mu)$，使得 $\lim_{n\to\infty} n^\alpha \|M(0, n)^T f\|_p = 0$，从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \|M(0, n)^T f\|_p^p < \infty$。但随后，正如命题 4.1 的证明中一样，这意味着对于任意递增的 (L_n) 和任意 (v_n)，这样的函数 f 对于移动平均 $M(v_n, L_n)^T f$ 都是良好的。在

此外，命题 2.2 表明，在 [14] 中构造出的满足这些条件的函数并非 T-余边界。□

注 4.4。[14] 中的构造唯一的缺点是，在某些方面，这些例子与余边界有关，因为它们是通过研究分数阶余边界这一巧妙思路构造出来的。不过，或许还有其他构造方法，能够为给定的 T 和任意移动平均提供更大的良好函数类。□

事实证明，我们可以用一个级数条件来刻画这里的良好零均值函数。它们恰好是满足 $M(0,n)^T f$ 完全收敛到零的函数。

命题 4.5。假设 T 是遍历的。那么，零均值 $f \in L^1(\mu)$对于所有递增 L_n的移动平均（$M(v_n, L_n)^T f$）都是良好的，当且仅当对于所有 $\delta > 0$，都有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu\{|M(0,n)^T f| \geq \delta\} < \infty.$$

证明这一结果需要一个发散级数引理。该引理最早见于 Sawyer [26]；参见引理 2。我们给出证明，以便清楚地说明，当遍历族由一个遍历映射的各次幂构成时，该引理如何发挥作用。

$_\infty$引理 4.6. 假设 T 是遍历的，且 $\sum \mu(E_n) = \infty$。那么存在一个递增序列 $_{n=1\infty}(m_n)$，属于 $\mathbb{Z}^+$，使得 $\sum 1_{T^{m_n} E_n} = \infty$几乎处处成立。也就是说，对于几乎处处的 x，我们有 $x \in T^{m_n} E_n$无穷多次$_{n=1}$。

证明。为方便起见，假设对所有 n， $\mu(E_n) > 0$ 。利用 T的遍历性，构造一个递增序列 N_j 及其对应的 $m_{j,\,i}$ ，使得

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{N_{j+1}-N_j} T^{m_{j,i}} E_{N_j+i} \Big) > 1 - \frac{1}{j}.$$

假设对于某个 k，已定义了 $N_j, m_{j,\,i}$，且其定义范围为 $1 \leq i < k$。利用 T的遍历性，我们可以选取$m_{j,\,k}$ ，使得

$$\mu\Big(T^{m_{j,k}} E_{N_j+k} \cap \big(\bigcup_{i=1}^{k-1} T^{m_{j,i}} E_{N_j+i} \big)^c \Big) \geq \frac{1}{2} \mu\big(E_{N_j+k}\big) \mu\Big(\big(\bigcup_{i=1}^{k-1} T^{m_{j,i}} E_{N_j+i} \big)^c \Big).$$

因此，

$$\mu\Big(\big(\bigcup_{i=1}^{k} T^{m_{j,i}} E_{N_j+i} \big)^c \Big) \leq \prod_{i=1}^{k} \Big(1 - \frac{1}{2} \mu\big(E_{N_j+i}\big) \Big).$$

相应无穷级数的发散意味着这个无穷乘积收敛于零： $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} \mu(E_{N_j+i}) = \infty$。参考文献见 [19, 第 220] 页。因此，

$$\prod_{i=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{1}{2} \mu\big(E_{N_j+i}\big) \Big) = 0.$$

因此，存在 $N_{j+1} = N_j + k$ 使得

$$\mu\Big(\big(\bigcup_{i=1}^{N_{j+1}-N_j} T^{m_{j,i}} E_{N_j+i} \big)^c \Big) < \frac{1}{j}.$$

定义

$$D_j = \bigcup_{i=1}^{N_{j+1}-N_j} T^{m_{j,i}} E_{N_j+i}.$$

那么，集合 D_j, $D = \cap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} D_j$ 的上极限是一个全测度集；对于 $x \in D$，存在无穷多个 j 使得 $x \in D_j$。这意味着存在无穷多个 j 和 i 使得 $x \in T^{m_{j,\,i}} E_{N_j+i}$。从构造方法显然可知，可以将 (m_n) 选为递增序列。□

命题 4.5 的证明。首先，假设级数条件成立。那么对于任意 (v_n),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu\{|M(v_n, L_n)^T f| \geq \delta\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\{|M(0,n)^T f| \geq \delta\} < \infty.$$

因此，几乎处处的 x 最终都不属于 $\{|M(v_n, L_n)^T f| \geq \delta\}$，于是 $|M(v_n, L_n)^T f(x)| < \delta$。由于 $\delta > 0$ 可以任意小，我们有 $M(v_n, L_n)^T f(x)$ 几乎处处收敛到 0。因此，对于这个固定的T， f 对所有移动平均都是好的。

另一方面，假设对于某个 $\delta > 0$，我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu\{|M(0,n)^T f| \geq \delta\} = \infty.$$

我们证明，对于某个关于 T 的移动平均， f 并不好。首先，将引理 4.6 应用于 T^{-1}，可知存在 v_n，使得对于几乎处处的 x，我们有 $T^{v_n} x \in \{|M(0,n)^T f| \geq \delta\}$ 无限多次。因此，利用这一点（v_n），对于几乎处处的 x，我们有 $|M(v_n, n)^T f(x)| \geq \delta$ 无限多次。然而，由于 f 均值为零，$(M(v_n, n)^T f)$ 在 L^1- 范数下收敛到零，因此这些移动平均中存在一个子序列几乎处处收敛到 0。所以，对于这个移动平均， f 并不好；事实上，它是坏的。□

证明过程说明了这一点。

推论 4.7. 假设对于某个关于遍历的 T 的移动平均， $f \in L^1(\mu)$ 并不好。那么，存在一个关于 T 的移动平均，使得该函数实际上是坏的。

注释 4.8。命题 4.5 表明，如果 f 对于相对于 T的某些移动平均而言不是好的，那么对于某个 (v_n) 和 $\delta > 0$， $|M(v_n, n)^T f| \geq \delta$ 几乎处处成立。但我们也知道，$\lim_{n\to\infty} |M(v_n, n)^T f| = 0$ 几乎处处成立，而这正说明了几乎处处收敛的失败。要否定该函数是好的，只需证明 $|M(v_n, n)^T f| \geq \delta_{n\to\infty}$ 在某个正测度集合上成立即可。但由于 $\lim_{n\to\infty} M(v_n, n)^T (f - f \circ T) = 0$ 几乎处处成立，实际上 $M(v_n, n)^T f$ 是 T-不变的。因此它是常数，因为假设 T 是遍历的。所以，$\lim_{n\to\infty}$实际上 $|M(v_n, n)^T f|$ 几乎处处为常数。我们知道它可以 ∞ 几乎处处成立。事实上，当 $\lim_{n\to\infty}$ 的锥条件不成立时，典型函数 f 就会出现这种情况。我们猜想，对于任意 $C, 0 < C \leq \infty$，都存在一个不是好的零均值函数，使得对于某个 (v_n)， $C = \lim_{n\to\infty} |M(v_n, n)^T f|$。事实上，对于 $0 < C \leq 1$，很可能存在一个不是好的特征函数 $f = 1_E$，使得对于某个 (v_n)， $C = |M(v_n, n)^T (1_E - \mu(E))|$。

□

还可以通过子序列来对所有移动平均都好的函数进行分类，其变体是将 $M(v_n, n)^T f$ 替换为 $M(v_n, L_n)^T f$，其中 (L_n) 固定。当然，命题 4.1 也表明，根据 (L_n) 的选择，考虑所有 (L_n) 这种宽泛做法会将所有函数都视为好的。有时我们甚至可以明确确定要使用的 (L_n)，例如 T-分数阶余边界的情形。无论如何，结果如下。

命题 4.9. 设 (L_n) 是 $\mathbb{Z}^+$ 中一个固定的递增序列。对于一个遍历映射 T，零均值函数 $f \in L^1(\mu)$ 对所有移动平均 $(M(v_n, L_n)^T)$ 都是好函数，当且仅当对所有 $\delta > 0$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu\{|M(0, L_n)^T f| \geq \delta\} < \infty.$$

此外，如果 f 对某个这样的移动平均不是好函数，那么存在另一个移动平均$M(v_n, L_n)^T f$，它几乎处处不收敛，因此 f 对某种平均长度属于 (L_n) 的移动平均是坏函数。

5. 移动平均的独立同分布情形

好函数的级数刻画在概率论中广为人知。为保持记号一致，我们取一个独立同分布序列 $(X_k : k \geq 0)$，并用 $M(v_n, L_n)^T X_0$ 表示移动平均 $\frac{1}{L_n} \sum_{k=v_n+1}^{v_n+L_n} X_k$。本节介绍 Hsu-Robbins [18], 的著名结果，以及 Erd˝os [15] 证明的逆命题。我们还将给出这一结果的一些推广及其局限。

5.1. Hsu-Robbins-Erd˝os 结果。

命题 5.1. 假设 $(X_k : k \geq 0)$ 是一个独立同分布序列。那么

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu\{|M(0, n)X_0| \geq \delta\} < \infty$$

对所有 $\delta > 0$，当且仅当 X_0 是均值为零且 $X_0 \in L^2$。

事实上，当 X_0 均值为零时，只有在 $X_0 \in L^2$ 的情况下才有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu\{|M(0, n)X_0| > 1\} < \infty.$$

我们可以用命题 5.1 证明以下推论。

推论 5.2. 任何满足 $X_0 \in L^2$ 的独立同分布序列 (X_k) 都具有如下性质：对所有 (v_n)，移动平均 $M(v_n, n)X_0$ 几乎处处收敛到 X_0 的均值。

5.2. Hsu-Robbins-Erd˝os 结果的推广与局限。

我们首先证明推论 5.2 的以下限制。

命题 5.3。对于任意独立同分布序列 (X_k)，若 $X_0 \in L^1 \backslash L^2$ 和 X_0 均值为零，且 $v_n = n(n+1)/2$，则几乎处处，移动平均 $M(v_n, n)X_0$ 不收敛。

$_\infty$证明。Erd˝os $_{v_n+n}$[15] 指出 $\sum \mu\{|M(0,n)X_0| > 1\} = \infty$。因此很容易看出，移动平均 $M(v_n,n)X_0 = \frac{1}{n} \sum^{n}$ X_k 相互独立，因为 $v_n = n(n+1)/2 = \sum k$。

$_{k=v_n+1}$ $_{k=1}$但同时

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu\{|M(v_n,n)X_0| > 1\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\{|M(0,n)X_0| > 1\} = \infty.$$

$_\infty$因此，Borel-Cantelli 引理表明 $\sum 1_{\{|M(v_n,n)X_0|>1\}} = \infty$ 几乎处处成立。然而，在 L^1-范数下，$_{n=1}M(v_n,n)X_0 \to 0$ 当 $n \to \infty$ 时趋于零，因此存在一个子序列几乎处处收敛到 0。这证明移动平均 $M(v_n,n)X_0$ 几乎处处不收敛。□

有趣的是，这些移动平均的问题实际上在于所收集的数据量。下面是一个简单的观察。

命题 5.4. 对于任意满足 $X_0 \in L^p, 1 < p < 2$ 的均值为零的独立同分布序列 (X_k)，只要$D(p-1) > 1$，那么对所有 (v_n)，移动平均几乎处处满足 $\lim_{n\to\infty} M(v_n, \lfloor n^D \rfloor)X_0 = 0$。

$_n$证明。我们使用 Rosenthal [25], 引理 2 b) 中的 $\| \sum X_k\|_p \le 2n^{1/p}\|X_0\|_p$ L^p-范数估计。$_{k=1}\infty$由此得到 $\sum_{n=1} \|M(v_n, \lfloor n^D \rfloor)X_0\|_p^p < \infty$，因为 $D(p-1) > 1$。这便足以证明每个具有 $\lfloor n^D \rfloor$项的移动平均几乎处处收敛。

□

Asmussen 和 Kurtz 的结果 [5], （另见 Gut [16], ）更精确地探讨了同一问题，尤其是对 L^p、$1 \le p < \infty$而言。例如，我们有以下比命题 5.4 更好的结果。

命题 5.5。对于任意均值为零的独立同分布序列 (X_k)，若 $X_0 \in L^p$、$1 < p < 2$，且当$D(p-1) = 1$时，则对所有 $\delta > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu\{|M(0, \lfloor n^D \rfloor)X_0| \ge \delta\} < \infty.$$

H列，对于所有 (v_n)，移动平均满足 $\lim_{n\to\infty} M(v_n, \lfloor n^D \rfloor)X_0 = 0$ a。 $e.$

此外，对于 L^1，我们还有以下结果。

命题 5.6. 对于任意满足 $X_0 \in L^1$ 的零均值独立同分布序列 (X_k)，以及任意 $\delta > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu\{|M(0, 2^n)X_0| \ge \delta\} < \infty.$$

因此，对于任意满足 $X_0 \in L^1$ 的零均值独立同分布序列 (X_k)，已知对所有 (v_n)，移动平均几乎处处满足 $\lim_{n\to\infty} M(v_n, 2^n)X_0 = 0$。

注 5.7。Gut [16] 中展示的部分内容表明，子序列结果所用的速率是 L^p-类的特征。此外，根据 Borel-Cantelli 引理，所有移动平均的几乎处处收敛将推出 $(M(0, L_n)X_0)$ 的完全收敛，其中 L_n 取适当值，进而迫使 X_0 属于相应的 L^p-类。

此外，像 $L\log L$ 这样的中间空间也有其自身的速率，使所有移动平均收敛：应使用 $L_n = \lfloor \exp(\sqrt{n}) \rfloor$。这正是要使每个 ∞ 零均值函数 $X_0 \in L\log L$ 对所有 $\delta > 0$ 都具有 $\sum_{k=1} \mu\{|M(0, L_n)X_0| \geq \delta\} < \infty$ 所需的条件。因此，同样，要使所有移动平均在几乎处处收敛，(L_n) 上所需的正是这一速率。□

5.3. 随机选取方法。这里还有另一种回答这一猜想的方法，适用于 $L^2(\mu)$ 中的另一类函数。我们使用 Hsu 和 Robbins 定理 [18]。给定一个均值为零的 $f \in L^2(\mu)$，假设存在一个同构 ρ，它从一个标准概率空间 Y 映射到 X，并且存在一个 α 映射 Y，使得 $(f \circ \rho \circ \alpha^k : k \geq 1)$ 是独立同分布的。那么，如果我们取映射 $T = \rho \circ \alpha \circ \rho^{-1}$，就会有 $(f \circ T^k : k \geq 1)$ 独立同分布，因此根据 Hsu-Robbins 定理，f 对于使用 T 的所有移动平均都将表现良好。

人们可能会通过考虑一个与 f 具有相同分布函数的函数 h，并且该函数存在一个映射 α，使序列 $(h \circ \alpha^k : k \geq 1)$ 独立同分布，从而希望这适用于每个均值为零的函数 $f \in L^2(\mu)$。但这通常不是一种可行的方法，因为具有相同分布的函数不一定是彼此的可逆、保测重排。

然而，对于可测集，这一结论成立。也就是说，若标准概率空间 Y 中的 A_1、A_2 具有相同的测度，则存在一个从 Y 到 Y 的保测可逆映射 ν，使得 $\nu(A_1) = A_2$（除去零测集）。我们可以据此证明，对于 X 中任意可测的 A，函数 $f = 1_A - \mu(A)$ 对于某个定义在 ∞X 上的映射 T 所对应的所有移动平均都是良好的。具体而言，取乘积空间 $Y = \prod_{-\infty} X$，其乘积测度由每个坐标上的 m 给出。令 α 为 Y 上通常的坐标移位映射。取第一坐标投影 $\pi : Y \to X$，并令 $h = f \circ \pi$。取任意同构 $\omega : X \to Y$。集合 $\omega(A)$ 和 $\pi^{-1}A$ 在 Y 中具有相同的测度。因此，存在 Y 上的同构 ν，使得 $\nu \circ \omega(A) = \pi^{-1}A$（除去零测集）。接着取同构 ρ，并考虑由 $T = \rho^{-1} \circ \alpha \circ \rho$ 给出的从 X 到 X 的映射 T。由于集合 $(\alpha^k(\pi^{-1}(A)) : k \in \mathbb{Z})$ 是联合独立的，函数 $(h \circ \alpha^k : k \geq 1)$ 是独立同分布的。因此，函数 $(f \circ T^k : k \geq 1)$ 也是如此。

现在我们应用 Hsu-Robbins 定理来证明，对于所有相对于 T 的移动平均，f 都是好的。我们可以将这一构造推广到均值为零的简单函数 f，而不只限于形如 $1_A - \mu(A)$ 的函数。

我们可以问，这能否推广到其他函数：

问题：给定 $f \in L^p(\mu)$ $1 \leq p \leq \infty$，何时存在一个（遍历的）X 的映射 T，使得 $(f \circ T^k : k \in \mathbb{Z})$ 是独立同分布的?

这并非总是可能的。例如，如果函数 f 具有 $f^{-1}(\beta) = \beta$，那么就不存在这样的映射 σ。例如，取勒贝格测度下的 $X = [0, 1]$，并令对所有 $x \in [0, 1]$ 都有 $f(x) = x$。B. Weiss 指出，我们需要的是类似 σ-代数 $f^{-1}(\beta_{\mathbb{R}})$ 这样的对象，其中 $\beta_{\mathbb{R}}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的博雷尔集；它在 β 中存在一个独立补 $\mathcal{A}$，使得 $(X, \mathcal{A}, m)$ 也同构于一个标准无原子空间。这里我们取 $\mathcal{A}$ 为 β 中的一个子-σ-代数，使得 $\mathcal{A}$ 与 $f^{-1}(\beta_{\mathbb{R}})$ 相互独立。

5.4. 连续函数。我们可以结合 Hsu-Robbins 定理与命题 4.5，证明即使在随机过程不是独立同分布的情况下，也存在能够产生普遍收敛移动平均的伯努利映射。设 (X, d) 是一个带有度量 d 的紧致度量空间。

给定 X 的一个划分 P 和元素 $p \in P$，定义

$$\operatorname{diam}(p) = \sup\{d(x,y) : x,y \in p\}$$

且 $\operatorname{diam}(P) = \sup_{p\in P}\operatorname{diam}(p)$。给定一个有限熵伯努利变换 T，存在一个有限生成划分 P。特别地，对于每个 $n \in \mathbb{Z}^+$，每个划分 $T^{-n}P$和 T^nP都独立于

$$P_n = \bigvee_{i=1-n}^{n-1} T^i P$$

且序列 P_n 生成 σ-代数 $\mathcal{B}$。下面我们证明，对于紧空间上的连续函数f ，存在一大类伯努利变换，使得移动平均逐点几乎处处收敛。

定理 5.8。设 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 是一个标准概率空间，(X,d) 是一个紧致度量空间。令 T 为具有有限生成划分 P 的伯努利变换，满足

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(P_n) = 0.$$

如果 f是 (X,d) 上的连续函数，那么所有移动平均 $M(v_n,L_n)^T f$都逐点几乎处处收敛于 $\int_X f d\mu$ ，其中 $v_n \in \mathbb{Z}$ 和 $L_n \in \mathbb{Z}^+$ 满足 L_n 递增。

证明。尽管随机过程 $X_i = f \circ T^i$ 可能不是独立同分布的，但我们可以用有限个独立同分布的随机过程来近似 X_i。由于 f 在紧空间 X 上连续，因此 f 一致连续。因此，给定有限生成划分 P，使得 $\operatorname{diam}(P_n) \to 0$ 和 $\delta > 0$，存在 $n \in \mathbb{Z}^+$，使得对于 $x \in X$，

$$|\mathcal{E}\big(f|P_n\big)(x) - f(x)| < \frac{\delta}{2},$$

其中 $\mathcal{E}(f|P_n)(x) = \int_p f d\mu$ 对于 $x \in p$， $p \in P_n$（给定 P_n 时 f 的条件期望）。此外，由于 f 有界，我们可以选择 $N \in \mathbb{Z}^+$ 使得

$$\frac{n}{N}||f||_\infty < \frac{\delta}{4}.$$

由于对于 $i \in \mathbb{Z}^+$， $T^{2ni}P_n$ 相互独立，因此随机过程 $Y_{0,i}(x) = \mathcal{E}(f|P_n)(T^{2ni}x)$ 是独立同分布的随机过程。此外，对于每个 k， $0 \le k \le 2n-1$，以下随机过程均为独立同分布的，

$$Y_{k,i}(x) = \mathcal{E}(f|P_n)(T^{2ni+k}x).$$

因此，我们得到

(5.1)

$$\sum_{m=N}^{\infty} \mu\big(\{x : |\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1} f(T^i x)| \ge \delta\}\big) \le \sum_{m=N}^{\infty} \mu\big(\{x : |\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1} \mathcal{E}(f|P_n)(T^i x)| \ge \frac{\delta}{2}\}\big)$$

(5.2)

$$\le \sum_{m=N}^{\infty} \mu\big(\{x : |\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{\lceil \frac{m}{2n}\rceil - 1}\sum_{k=0}^{2n-1} \mathcal{E}(f|P_n)(T^{2ni+k}x)| \ge \frac{\delta}{4}\}\big)$$

(5.3)

$$\le \sum_{k=0}^{2n-1}\sum_{m=N}^{\infty} \mu\big(\{x : |\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{\lceil \frac{m}{2n}\rceil - 1} \mathcal{E}(f|P_n)(T^{2ni+k}x)| \ge \frac{\delta}{8n}\}\big)$$

$$\leq 2n \sum_{k=0}^{2n-1} \sum_{m=N}^{\infty} \mu\big(\{x : |\frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \mathcal{E}(f|P_n)(T^{2ni+k}x)| \geq \frac{\delta}{8n}\}\big) \tag{5.4}$$

根据 Hsu-Robbins-Erd˝os 定理，我们知道对于每个 k， $0 \leq k < 2n$,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu\big(\{x : |\frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \mathcal{E}(f|P_n)(T^{2ni+k}x)| \geq \frac{\delta}{8n}\}\big) < \infty.$$

因此，(5.1) 中的和是有限的，定理由命题 4.5 得证。 □

注意，对于固定的非零函数 f，不可能所有伯努利变换都产生普遍收敛的移动平均。给定任意非零零均值函数 f 和遍历保测变换 T，存在保测同构 ϕ、 v_n 以及递增的 L_n，使得对于几乎处处的 $x \in X$,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{L_n} \sum_{i=1}^{L_n} f(\phi^{-1} \circ T^{v_n+i} \circ \phi(x)) > 0.$$

下面简述 ϕ 的构造。考虑 T 的一列 Rokhlin 塔，并极少地在塔中识别满足如下条件的点 x：对于某个固定的 δ， $f(x) > \delta$。将这些点称为高度为 h_m^2 的塔中的 A_m。定义 ϕ_m，将这些点中的一小部分映射到塔顶端的 h_m 层。因此，对于 $v_{n+i} = ih_m$ 和 $L_{n+i} = h_m + i$，当 $0 \leq i \leq h_m$ 时，我们可以为大多数点 $x \in X$ 得到一个不良的移动平均。如果 h_m 增长得足够快，那么 $\lim_{m\to\infty} \phi_m(x) = \phi(x)$ 对几乎处处的 $x \in X$ 收敛。

Hoeffding 不等式 [17] 可用于证明适用于更一般序列L_n的更强结果。

引理 5.9（Hoeffding 不等式）。设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为独立随机变量，且 $a_i \leq X_i \leq b_i$ 几乎处处成立。若 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$，则对所有 $t > 0$,

$$\mu\big(|S_n - E[S_n]| \geq t\big) \leq 2\exp\Big(\frac{-2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\Big).$$

因此，若 $L_n \geq n^\alpha$ 对于 $\alpha > 1/2$ 且 g 有界、均值为零，并且 $X_i = g \circ T^i$ 独立同分布，则

$$\mu\big(|\frac{1}{L_n} \sum_{i=0}^{L_n-1} g(T^i x)| \geq \delta\big) = \mu\big(|\sum_{i=0}^{L_n-1} g(T^i x)| \geq \delta L_n\big) \tag{5.5}$$

$$\leq 2\exp\Big(\frac{-2(\delta L_n)^2}{4n||g||_\infty^2}\Big) \tag{5.6}$$

$$\leq 2\exp\Big(\frac{-2\delta^2 n^{2\alpha-1}}{4||g||_\infty^2}\Big). \tag{5.7}$$

由于这些项可求和，在定理 5.8 中将这些不等式应用于 $g = \mathcal{E}(f|P_n)$，即可得到适用于 $L_n \geq n^\alpha$ 且满足 $\alpha > 1/2$的更一般结果。

另一点是，定理 5.8 可以推广到这样的函数：它们在某个划分 P_n 中有限个元素上分段一致连续 f。下一节将利用这一点，证明任意有界可测函数 f 的一个一般性结果。

5.5. 有界函数。在本节中，我们将证明任意有界可测函数 f 的存在性结果。

定理 5.10. 设 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 是一个标准概率空间，且 $f\colon X \to$IR 是一个有界可测函数。存在一个伯努利变换 T，使得对于任意 $\alpha > 1/2$，所有移动平均 $M(v_n, L_n)^T f$ 对于 $v_n \in \mathbb{Z}$ 和 $L_n \geq n^\alpha$ 几乎处处逐点收敛到 $\int_X f d\mu$。

证明. 只需证明此定理在 $X = [0,1]$, μ 为勒贝格测度且 $f\colon X \to$IR 是一个有界零均值函数的情形。应用卢津定理，得到闭子集序列 D'_n，其中 $n \geq 1$，使得对于 $n \geq 1$, $D'_n \subseteq D'_{n+1}$，f 在 D'_n 上连续，并且 $E'_n = X \setminus D'_n$ 满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E'_n) < \infty.$$

对于 $n \in \mathbb{Z}^+$，令

$$m_n = \min\{m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} : \frac{m}{2^n} \geq \mu(E_n)\}.$$

选取一个开子集 $E''_n \subset D'_n$，使得 $\mu(E''_n) = \frac{m_n}{2^n} - \mu(E'_n)$。定义 $E_n = E'_n \cup E''_n$ 和 $D_n = X \setminus E_n$。定义 $\phi_1\colon [0,1] \to [0,1]$ 为

$$\phi_1(x) = \begin{cases} \mu\big(E_1 \cap [0,x)\big) & \text{if } x \in E_1, \\ \mu\big(E_1\big) + \mu\big(D_1 \cap [0,x)\big) & \text{if } x \in D_1. \end{cases}$$

函数 ϕ_1 可逆且保持 μ。归纳定义 ϕ_n，使其满足 s

$$\phi_n(x) = \begin{cases} \mu\big(E_n \cap [0,x)\big) & \text{if } x \in E_n, \\ \mu\big(E_n\big) + \mu\big((E_{n-1} \setminus E_n) \cap [0,x)\big) & \text{if } x \in E_{n-1} \\ \phi_{n-1}(x) & \text{if } x \in D_{n-1}. \end{cases}$$

对于几乎处处的 $x \in [0,1]$，$\phi(x) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(x)$ 存在，且映射 $\phi\colon [0,1] \to [0,1]$ 可逆并保测度。

设 $S\colon [0,1] \to [0,1]$ 是一个伯努利移位，其序列为 k_n，使得长度为 $\frac{1}{2^n}$ 的二进区间关于划分可测

$$\bigvee_{i=-k_n-1}^{k_n-1} S^i\big([0,1/2)\big), S^i([1/2,1)\big).$$

将变换 T 定义为

$$T = \phi^{-1} \circ S \circ \phi.$$

为方便起见，假设 f 均值为零，或者类似地令 $f = f - \int f d\mu$。给定 $\delta > 0$，选取 $n \in \mathbb{Z}^+$ 使得

$$\mu(E_n) < \frac{\delta}{4||f||_\infty}.$$

因此，如果 $d_n = \int_{D_n} f d\mu$，那么 $d_n < \frac{\delta}{4}$。所以，

$$\mu\big(\{x : \frac{1}{L_m} \sum_{i=0}^{L_m-1} f(T^i x) \geq \delta\}\big) \tag{5.8}$$

$$\leq \mu\big(\{x : \frac{1}{L_m} \sum_{i=0}^{L_m-1} \mathbb{I}^{E_n}(T^i x) \geq \frac{\delta}{2||f||_\infty}\}\big) + \mu\big(\{x : \frac{1}{L_m} \sum_{i=0}^{L_m-1} \mathbb{I}^{D_n}(T^i x) f(T^i x) \geq \frac{\delta}{2}\}\big) \tag{5.9}$$

$$= \mu\big(\{x : \frac{1}{L_m}\sum_{i=0}^{L_m-1} \mathbb{I}^{\phi(E_n)}(S^i x) \geq \frac{\delta}{2||f||_\infty}\}\big) + \mu\big(\{x : \frac{1}{L_m}\sum_{i=0}^{L_m-1} \mathbb{I}^{D_n}(T^i x) f(T^i x) \geq \frac{\delta}{2}\}\big) \tag{5.10}$$

$$= \mu\big(\{x : \frac{1}{L_m}\sum_{i=0}^{L_m-1} \mathbb{I}^{\phi(E_n)}(S^i x) - \mu(E_n) \geq \frac{\delta}{2||f||_\infty} - \mu(E_n)\}\big) \tag{5.11}$$

$$+ \mu\big(\{x : \frac{1}{L_m}\sum_{i=0}^{L_m-1} \mathbb{I}^{D_n}(T^i x) f(T^i x) - d_n \geq \frac{\delta}{2} - d_n\}\big) \tag{5.12}$$

由于 $X_i(x) = \mathbb{I}^{\phi(E_n)}(S^{2ik_n+k}x)$ 是独立同分布的，因此，(5.11) 中各项所得的和可以分解为 $2k_n$ 个彼此均为有限值的无穷和。因此，对于 $\alpha > 1/2$ 和 $L_m \geq m^\alpha$,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu\big(\{x : \frac{1}{L_m}\sum_{i=0}^{L_m-1} \mathbb{I}^{\phi(E_n)}(S^i x) - \mu(E_n) \geq \frac{\delta}{2||f||_\infty} - \mu(E_n)\}\big) < \infty.$$

由于 f 在紧集 D_n 上连续，因此对 (5.12) 中的各项应用定理 5.10 中的相同技巧，可得

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu\big(\{x : \frac{1}{L_m}\sum_{i=0}^{L_m-1} \mathbb{I}^{D_n}(T^i x) f(T^i x) - d_n \geq \frac{\delta}{2} - d_n\}\big) < \infty.$$

因此，对于 $L_m \geq m^\alpha$,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu\big(\{x : \frac{1}{L_m}\sum_{i=0}^{L_m-1} f(T^i x) \geq \delta\}\big) < \infty.$$

类似的论证表明

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu\big(\{x : \frac{1}{L_m}\sum_{i=0}^{L_m-1} f(T^i x) \leq -\delta\}\big) < \infty.$$

证明至此完成。 □

5.6. 级数方法。若有 $f \in L^p(\mu)$ $1 < p < \infty$，我们可以尝试构造一个映射 T_∞，使其具有性质 $\sum \|M(0,n)^T f\|_p^p < \infty$。这保证该函数适用于关于 T 的所有移动平均，并满足 $_{n=1}$。传递函数属于 $L^p(\mu)$ 的余边界具有这一级数性质，因此在 f 是一个 T-余边界且其传递函数属于 $L^1(\mu)$ 的情形下，这一性质便成立。无论如何，也可以尝试证明：通过根据 f 适当地选择 T，级数条件能够成立。从某种意义上说，若能构造一个映射 T，使得对于 $f \in L^p(\mu)$, $(f \circ T^k : k \geq 1)$ 是独立同分布的，那么所证明的就是这一点；不过，对于该级数中的各项，必须转而考虑一个子序列 $(M(0, \lfloor n^D \rfloor)f)$，使其满足 $D(p-1) > 1$。

有人可能会问，是否存在更强的性质：对于每个非零的、均值为零的$_\infty$函数 $f \in L^1(\mu)$, 是否都能找到一个遍历映射 T使得 $\sum \|M(0,n)^T f\|_1 < \infty$? 但这$_{n=1}$绝不会发生。事实上，显然,

$$\sum_{n=1}^{N} \|M(0,n)^T f - M(0,n+1)^T f\|_1 \leq \sum_{n=1}^{N} \|M(0,n)^T f\|_1 + \sum_{n=1}^{N} \|M(0,n+1)^T f\|_1.$$

此外，

$$\sum_{n=1}^{N} \|M(0,n)^T f - M(0,n+1)^T f\|_1 = \sum_{n=1}^{N} \|\frac{M(0,n)^T f}{n+1} - \frac{f \circ T^{n+1}}{n+1}\|_1.$$

因此，

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\|f\|_1}{n+1} \leq 3 \sum_{n=1}^{N+1} \|M(0,n)^T f\|_1.$$

∞因此，调和级数的发散性证明了 $\sum \|M(0,n)^T(f)\|_1 = \infty$ 对所有$_{n=1}$非零 f均成立。

备注 5.11。总结本节关于独立同分布序列的内容，以下是这些结果对独立同分布数据的统计平均所说明的情况。如果你正在对越来越大的项块进行平均，却无法控制它们从何处开始，那么最好的做法是确保每次平均所使用的数据量至少是上一次的两倍。也就是说，在计算移动平均时，应使用类似于 $L_n = 2^n$项的数据量。这样，只要大数定律成立所需的必要条件得到满足，你就无需担心矩不有限：$X_0 \in L^1$。

6. 当函数固定时

现在我们考虑第 4 节的对偶情形：固定零均值函数 $f \in L^1(\mu)$，并在改变映射和移动平均的结构时，寻求能够说明 f 是好是坏的结果。

命题 6.1。固定一个递增的 (L_n)，其中 $\mathbb{Z}^+$，并固定一个非零、均值为零的 $f \in L^1(\mu)$。那么存在某个 $\delta > 0$ 以及一个稠密的 G_δ 遍历映射 $\mathcal{B}$ 集合，使得对于 $T \in \mathcal{B}$，我们有∞ $\sum \mu\{|M(0,L_n)^T f| \geq \delta\} = \infty$。 $_{n=1}$

证明。像往常一样，我们在弱拓扑下考虑映射 $\mathcal{T}$。因此，赋予对称伪度量后，这个群是一个完备的度量群。固定 $\delta > 0$。考虑所有使级数 T ∞$\sum$

$_{n=1}$ $\mu\{|M(0,L_n)^T f| \geq \delta\}$收敛的情形。也就是说，考虑

$$\mathcal{B} = \bigcup_{K=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \{T : \sum_{n=1}^{N} \mu\{|M(0,L_n)^T f| \geq \delta\} \leq K\}.$$

$_N$容易证明，在弱拓扑下，$\{T\colon \sum \mu\{|M(0,L_n)^T f| \geq \delta\} \leq K\}$是一个闭$_{n=1}$$_N$集。因此，交集 $\mathcal{B}_K = \bigcap_{N=1}^{\infty}\{T\colon \sum \mu\{|M(0,L_n)^T f| \geq \delta\} \leq K\}$也是$_{n=1}$弱拓扑下的闭集。因此，$\mathcal{B}$ 是弱拓扑下的一个 F_σ 集。

我们断言，对于适当的 δ，交集 $\mathcal{B}_K$ 没有内点，因此 $\mathcal{B}$ 的补集是一个稠密的 G_δ，其中的映射都具有我们所需的性质。由于遍历映射在 $\mathcal{T}$ 中也是一个稠密的 G_δ 集合，因此它与 $\mathcal{B}$ 的交集给出了本结果中的稠密 G_δ 集合。

下面给出一个论证，说明对于适当的 $\delta > 0$，这个交集不可能具有内点。取 $\delta > 0$使得 $\mu\{|f| \geq \delta\} > 0$。令 $E = \{|f| \geq \delta\}$。任取映射 T和 T的一个弱邻域 N。对于 E 的一个子集 E_0，只要其测度充分小但为正，我们可以

构造一个 N中的映射 T_0，使其在 E_0上为恒等映射。于是，对于任意 n， $\mu\{|M(0,L_n)^{T_0}f| \geq \delta\} \geq \mu(E_0) > 0$。因此，在选择该 δ时， T_0 不属于交集。□

推论 6.2. 设 $1 \leq p < \infty$。固定一个非零、均值为零的 $f \in L^p(\mu)$。那么，对于稠密的 G_δ 遍历映射集 T，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|M(0,n)^T f\|_p^p = \infty.$$

证明。我们只需使用不等式 $\delta^p \mu\{|M(0,n)^T f| \geq \delta\} \leq \|M(0,n)^T f\|_p^p$， 以及命题 6.1。□

注 6.3. 这一结果与 Derriennic 和 Lin [14] 给出的命题 4.3 中的例子形成对照。□

命题 6.4. 固定一个 $\mathbb{Z}^+$ 中递增的 (L_n) 和一个非零、均值为零的 $f \in L^1(\mu)$。那么存在一个稠密的 G_δ 遍历映射集 T，使得对每个 T，都存在某个长度为 (L_n) 的移动平均，使得 f 是坏的。

证明。我们使用与命题 6.1 中相同的论证来固定 δ，并构造一类映射，其中每个映射都具有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu\{|M(0,n)^T f| \geq \delta\} = \infty.$$

然后应用引理 4.6，得到移动平均，使得 $\limsup |M(v_n, L_n)^T f| \geq \delta$ 几乎处处成立。但与此同时，范数收敛表明 $\liminf_{n\to\infty} |M(v_n, L_n)^T f| = 0$ 几乎处处成立。因此，对于这个移动平均， f 是不好的。□

如果函数无界，还可以得到更强的结论。

命题 6.5。固定 $\mathbb{Z}^+$ 中的一个递增 (L_n)。若 $f \in L^1(\mu) \backslash L^\infty(\mu)$，则存在一个稠密的 G_δ 集合$_\infty$ $\mathcal{G}$，由映射构成；对于任意 K，若 $T \in \mathcal{G}$，则有 $\sum \mu\{|M(0,L_n)^T f| \geq K\} = \infty$。因此，对于任意映射 $T \in \mathcal{G}$，都存在一个移动平均，使得 $\limsup |M(v_n, L_n)^T f| = \infty$ 几乎处处成立；而如常，$\liminf_{n\to\infty} |M(v_n, L_n)^T f| = 0$ 几乎处处成立。

证明。对于每个 K，都存在一个正测度集合 E_K，在该集合上 $|f| \geq K$。我们像命题 6.1 的证明中那样使用这些集合，证明对于每个 K，都存在一个稠密的 G_δ 集合 $\mathcal{G}_K$，其中包含
∞ $_\infty$映射，满足 $\sum \mu\{|M(0,L_n)^T f| \geq K\} = \infty$。设 $\mathcal{G} = \bigcap \mathcal{G}_K$。现在，如果 $T \in \mathcal{G}$，我们可以在互不相交的整数组块 B_K 上构造
$n=1$ $K=1$移动平均，并为 $n \in B_K$ 取平移量 v_n，使得在测度至少为 $1 - \frac{1}{2^n}$的集合上，$\sup_{n\in B_K} |M(v_n, L_n)^T f| \geq K$。这将得到具有所需发散性质的移动平均。□

注 6.6. 无论如何，上述结果说明了关于好函数的什么结论。固定一个遍历映射，并考虑所有不满足锥条件的移动平均。每个这样的坏移动平均所对应的好函数仅构成一个第一纲集，但仍存在一个稠密函数类，其中的函数对所有这些移动平均都是好的。然而，如果同时改变映射和移动平均，就不存在一个非零的零均值函数，能够在所有这些情形下都作为好函数。□

7. 由余边界逼近

我们还可以根据函数被余边界逼近的程度，为关于 T 的所有移动平均构造好函数。首先，我们通常知道，每个函数都是余边界级数，尽管这种表示远非唯一。

命题 7.1。固定 r 和 s，使得 $1 \le r \le s < \infty$。对于任意零均值函数 $f \in L^r(\mu)$，∞存在一个属于 $L^s(\mu)$ 的序列 (h_k)，使级数 $\sum h_k - h_k \circ T$ 在 L^r-范数下收敛，并且 $k=1$

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} h_k - h_k \circ T.$$

证明。这直接源于 T 的遍历性：对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $h \in L^s(\mu)$，使得 $\|f - (h - h \circ T)\|_r \le \epsilon$。
□

然而，如果 f 不是一个 T-余边界，并且用余边界 $h - h \circ T$ 在 L^1-范数下逼近 f，其中 $h \in L^1(\mu)$，那么逼近得越好，就必须允许范数 $\|h\|_1$ 变得越大。不过，我们可以给出一些例子，在这些例子中，我们能够控制用余边界逼近 f 的速度，同时传递函数的范数增长不会太快，从而得到适用于移动平均的所有 T 的良好函数。在 $L^p(\mu)$ $1 < p < \infty$ 中，这比较容易；而在 $L^1(\mu)$ 中则较难。

我们可以将这种由余边界逼近与传递函数范数之间的平衡形式化，并将其与遍历平均趋于零的收敛速率联系起来。以下是两个相关结果，它们想必广为人知。我们有如下收敛速率上界。

命题 7.2. 取 $f \in L^r(\mu)$ 和 $H \in L^r(\mu)$。则

$$\|A_n^T f\|_r \le \|A_n^T (f - (H - H \circ T))\|_r + 2\|H\|_r / n.$$

So

$$\|A_n^T f\|_r \le \inf_{\|H\|_r \le L} \|f - (H - H \circ T)\|_r + 2L/n.$$

因此，当 T 遍历时，通过余边界逼近均值为零的 f，可以给出 $\|A_n^T f\|_r$趋于零的速率上界。此外，还有如下收敛速率下界。

命题 7.3. 给定 $f \in L^r(\mu)$，我们可以将 $f - A_n^T f$写成余边界 $H - H \circ T$，其中n
$H = \frac{1}{n} \sum S_{k-1}^T f$。因此 $\|H\|_r \le n\|f\|_r$ 以及$k=1$

$$\|A_n^T f\|_r \ge \inf_{\|H\|_r \le n\|f\|_r} \|f - (H - H \circ T)\|_r.$$

因此，当 T遍历时， $\|A_n^T f\|_r$趋于零的速率给出了 f由余边界逼近的速率上界。

注 7.4. 众所周知的基本定理是，对于任意 $\epsilon_n \to 0$，无论其增长多么缓慢，以及任意序列 (m_n)和任意 $r, 1 \le r \le \infty$，都存在一个稠密的 G_δ 函数集 $f \in L^r(\mu)$，使得

$$\limsup_{n \to \infty} (1/\epsilon_n) \|A_{m_n}^T f\|_r = \infty.$$

确实值得问一问，究竟哪些函数实际上具有

$$\lim_{n \to \infty} (1/\epsilon_n) \|A_{m_n}^T f\|_r = \infty.$$

当然，也可以询问函数 f 的性质，即这些函数满足

$$\liminf_{n\to\infty}(1/\epsilon_n)\|A^T_{m_n}f\|_r = 0 \quad \text{or} \quad \lim_{n\to\infty}(1/\epsilon_n)\|A^T_{m_n}f\|_r = 0.$$

如果 f 是一个余边界，且其传递函数属于 $L^1(\mu)$ 和 $1/\epsilon_n = o(m_n)$，那么这两个条件都成立。关于范数收敛（最优）速度的许多结果，参见 Rosenblatt [24] 。□

7.1. 一些构造。假设有 $f \in L^1(\mu)$，以及一个由属于$L^2(\mu)$的函数组成的序列 (g_n)。假设满足两个条件：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f - (g_n - g_n \circ T)\|_1 < \infty. \tag{7.1}$$

并且

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_2^2/n^2 < \infty. \tag{7.2}$$

至少从形式上看，我们希望方程 7.2 能使范数 $\|g_n\|_1$充分增长，从而实现方程 7.1 中的近似精度。下面将给出一些例子，展示这两个方程可以同时成立的可行性。

命题 7.5. 如果 $f \in L^1(\mu)$，且存在一个由属于 $L^2(\mu)$的函数组成的序列 (g_n)，使得方程 7.1 和方程 7.2 成立，那么对于关于 T的所有移动平均， f 都是良好的。

∞证明。我们需要证明，对所有 $\delta > 0$，级数 $\sum \mu(\{|A_n^T f| \geq \delta\}) < \infty$。只需$n=1$证明以下两个级数收敛：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{|A_n^T(f - (g_n - g_n \circ T)| \geq \delta/2\})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{|A_n^T(g_n - g_n \circ T)| \geq \delta/2\})$$

∞第一个级数由 $\sum(2/\delta)\|f-(g_n-g_n\circ T)\|_1$ 控制，根据等式 7.1，该级数收敛。$n=1$第二个级数也收敛。首先， $A_n^T(g_n - g_n \circ T) = \frac{1}{n}(g_n \circ T - g_n \circ T^{n+1})$。因此，由通常的切比雪夫不等式， $\mu(\{|A_n^T(g_n - g_n \circ T)| \geq \delta/2\}) \leq (16/\delta)\|g_n\|_2^2$。于是，等式 7.2 表明$\infty\sum \mu(\{|A_n^T($
$g_n - g_n \circ T)| \geq \delta/2\})$ 收敛。$n=1$

□

通过对某个 $r \geq 1$，将 $L^1(\mu)$ 替换为 $L^r(\mu)$，并将带有 $s \geq r$ 的 $L^2(\mu)$ 替换为 $L^s(\mu)$，我们可以得到这一结果的许多变体。例如，利用这个方程，我们有如下结果：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f - (g_n - g_n \circ T)\|_2^2 < \infty. \tag{7.3}$$

命题 7.6. 若 $f \in L^1(\mu)$，且存在一个由 $L^2(\mu)$ 中的函数组成的序列 (g_n)，使得等式 7.2 和等式 7.3 成立，则 f 对所有平均值都良好。

$_\infty$证明。论证类似，只是我们通过用 $\sum (4/\delta^2)\|A_n^T(f-(g_n-g_n\circ T)\|_2^2{}_{n=1}$ 对 $\sum \mu(\{|A_n^T(f-(g_n-g_n\circ T)|\geq \delta/2\})_{n=1\infty}$ 进行高估，来证明它收敛。

□

通过取余边界级数，我们可以构造满足命题 7.5 或命题 7.6 中条件的函数 f。我们至少假设 (h_k) 是 $_\infty L^1(\mu)$ 中的一个序列，并且 $f=\sum h_k-h_k\circ T$ 在 L^1-范数下收敛。于是我们写作 $f=g_n-g_n\circ T+t_n{}_{k=1n}$ $_\infty$，其中 $g_n=\sum h_k$ 且 $t_n=\sum h_k-h_k\circ T$。如果我们假设对所有 k 都有 $h_k\in L^2(\mu)$，那么命题 7.5 和命题 7.6 可以给出一些结果，下面只是其中一个简单版本。

命题 7.7。设 (h_k) 是 $L^2(\mu)$ 中的一个序列，满足

$$\|h_k\|_2=O(1/k^{3/4})$$

and

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\|h_k-h_k\circ T\|_1<\infty.$$

$_\infty$那么级数 $f=\sum h_k-h_k\circ T$ 给出了一个在 L^1-范数下收敛的级数，使得 f 对于关于 T 的所有移动平均都是好的。

$_n$证明。由 $g_n=\sum h_k$，我们有 $\|g_n\|_2=O(n^{1/4})$，因此等式 7.2 成立。但我们还有$_{k=1}$ $_\infty$ $_\infty$ $_\infty$ $_\infty\sum \|f-(g_n-g_n\circ T)$ $\|_1\leq\sum\|t_n\|_1=\sum\|\sum h_k-h_k\circ T\|_1$。因此等式 7.1 成立。也 $_{n=1}$ $_{n=1}$ $_{n=1}$ $_{k=n+1\infty}$就是说，$\sum\|f-(g_n-g_n\circ T)\|_1<\infty$。这是因为$_{n=1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|\sum_{k=n+1}^{\infty}h_k-h_k\circ T\|_1\leq\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)\|h_k-h_k\circ T\|_1$$

$_\infty$并且我们假设 $\sum k\|h_k-h_k\circ T\|_1<\infty$。

□

$_{k=1}$

显然，命题 7.7 中的估计还有许多改进版本，可以$_\infty$给出更广泛的一类级数 $f=\sum h_k-h_k\circ T$，这些级数收敛，并且能给出$_{k=1}$对于所有相对于 T 的移动平均都适用的良好函数 f。

要使这种构造真正有用，我们还希望能$_\infty$安排使级数 $f=\sum h_k-h_k\circ T$本身不是一个 T-余边界。不过，如何根据 (h_k) 来保证 f 不是一个 T-余边界，并不十分$_{k=1}$清楚。事实上，命题 7.1 还有一个对应的结果。

命题 7.8. 对于任意均值为零的 $f \in L^1(\mu)$，存在一个属于 $L^1(\mu)$ 的序列 (h_k)，使得 $\sum_{k=1}^{\infty} h_k$ 在 L^1-范数下不收敛，而 $\sum_{k=1}^{\infty} h_k - h_k \circ T$ 在 L^1-范数下收敛，并且 $f = \sum_{k=1}^{\infty} h_k - h_k \circ T$.

证明。假设我们已通过归纳选取了 $(h_k : 1 \le k \le K)$，其中对所有 $k, 1 \le k \le K$ 都有 $\|h_k\|_1 \ge k$，且满足 $\|f - \sum_{k=1}^{K} h_k - h_k \circ T\|_1 \le 1/2^K$。选取一个 $g \in L^1(\mu)$，它不是 T-余边界，并且满足 $\|f - (\sum_{k=1}^{K} h_k - h_k \circ T) - g\|_1 \le \frac{1}{2}(1/2^{K+1})$。由于 g 不是 T-余边界，我们可以选取 $h_{K+1} \in L^1(\mu)$，使得 $\|h_{K+1}\|_1 \ge K+1$，且满足 $\|g - (h_{K+1} - h_{K+1} \circ T)\|_1 \le \frac{1}{2}(1/2^{K+1})$。这给出 $\|f - \sum_{k=1}^{K+1} h_k - h_k \circ T\|_1 \le 1/2^{K+1}$，并且对所有 $k = 1, \ldots, K+1$ 都有 $\|h_k\|_1 \ge k$。这样的归纳过程得到一个 $L^1(\mu)$ 中的序列 (h_k)，使得级数 $\sum_{k=1}^{\infty} h_k - h_k \circ T$ 收敛到 L^1-范数下的 f。但是，由于 $\|h_k\|_1$ 趋于无穷，级数 $\sum_{k=1}^{\infty} h_k$ 不可能在 L^1-范数下收敛。

□

在命题 7.8 中，f 是否为 T-余边界并不重要。因此，这一结果表明，仅仅因为 $\sum_{k=1}^{\infty} h_k$ 不在范数意义下收敛，而 $f = \sum_{k=1}^{\infty} h_k - h_k \circ T$ 在范数意义下收敛，我们不能得出 f 不是一个传递函数属于 $L^1(\mu)$ 的 T-余边界。在下面的例子中，我们绕过这一问题，通过适当选择 (h_k) 来给出这样的构造，使得 f 确实不是 T-余边界。

例子：下面给出一个余边界级数的例子。根据上述结果，它对于关于 T 的移动平均是良好的，但其本身并不是一个传递函数属于 $L^1(\mu)$ 的 T-余边界。对所有 k，我们取 $a_k = 1/k^{1/2}$。我们还取可测集 E_k，使得 $\mu(E_k) = 1/k^{1/2}$，并且 $\sum_{k=1}^{\infty} k^{1/2}\mu(E_k \Delta T(E_k)) < \infty$。令 $h_k = a_k 1_{E_k}$。那么 $\sum_{k=1}^{\infty} h_k - h_k \circ T$ 考虑 $f = \sum_{k=1}^{\infty} h_k - h_k \circ T$。我们有 $\sum \|h_k - h_k \circ T\|_1 \le \sum (1/k^{1/2})\mu(E_k \Delta T(E_k))$。因此，$f$ 是一个在 L^1-范数下收敛的级数。我们还有 $\|h_k\|_2 = a_k \mu(E_k)^{1/2} = (1/k^{1/2})(1/k^{1/4}) = 1/k^{3/4}$。这给出了命题 7.7 的第一个假设。此外，

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\|h_k - h_k \circ T\|_1 \le \sum_{k=1}^{\infty} (k/k^{1/2})\mu(E_k \Delta T(E_k)) < \infty.$$

这给出了命题 7.7 中的第二个假设。因此，f 对于关于 T 的所有移动平均都是良好的。

现在我们要安排使 f 不成为一个 T-余边界。出于技术上的原因，我们将 $f = \sum_{k=1}^{\infty} h_k^0 - h_k^0 \circ T$ 改写为，其中 $h_k^0 = h_k - \int_X h_k \, d\mu$。在我们的例子中，有 $\|h_k^0\|_1 = (2/k)(1 - 1/k^{1/2})$。因此，我们有 $\sum_{k=1}^{\infty} \|h_k^0\|_1 = \infty$。仅凭这一点还不足以证明 f 不是一个 T-余边界；参见命题 7.8。因此，我们进行了这些额外的归纳调整。

$_n$ $_N$令 $S_n^T(f) = \sum f \circ T^k$。令 $C_N^T(f) = \frac{1}{N}\sum S_n^T(f)$。众所周知， f是一个 T-余边界$_{k=1}$ $_{n=1}$，其传递函数为 $F \in L^1(\mu)$，当且仅当 $(C_N^T(f))$ 在 L^1-范数下收敛。此外，如果 F均值为零，那么当 $N \to \infty$时， $C_N^T(f) \to F$在 L^1-范数下成立。参见 Lin 和 Sine [20]。

现在假设我们已如上选定了 $(h_k\colon\ k = 1, \dots, K)$。那么，当 N_K 足够大时，我们 $_K$ $_K$就会有 $\|C_{N_K}^T(\sum h_k^0 - h_k^0 \circ T)\|_1 \geq \frac{1}{2}\|\sum h_k^0\|_1$。接下来，我们需要选择 $h_k, k > K_{k=1}$ $_{k=1K}$，使得仍然有 $\|C_{N_K}^T(f)\|_1 \geq \frac{1}{4}\|\sum h_k^0\|_1$。如果 C_n 是一致有界的算子，这样做会更容易；事实上，对于 (h_k) 的附加约束甚至都不需要。然而，很容易看出，在 $L^1(\mu)$ 中的零均值函数上，算子范数 $\|C_N\|_1 = \frac{N+1}{2}$。为了解决这一问题，我们只需确保 $E_k, k > K$ 足够 T-不变，从而使 $\|h_k - h_k \circ \tau\|_1$ 足够小，进而 ∞ $_K\|C_{N_K}^T(\sum h_k^0 - h_k^0 \circ \tau)\|_1 \leq \frac{1}{4}\|\sum h_k^0\|_1$。我们可以通过归纳法轻松做到这一点，而不影响$_{k=K+1}$ $_{k=1}$上面已经施加的条件。这就意味着 $C_N^T(f)$ 不在$L^1(\mu)$ 中收敛。因此， f 不是一个传递函数属于 $L^1(\mu)$ 的 T-余边界。

这里给出的余边界级数构造很可能能够产生不属于任何已知函数类的函数，而这些函数类对于关于 T 的所有移动平均都具有良好性质。例如，我们应当能够安排使得 f 也不是分数阶余边界，正如 Derriennic 和 Lin [14] 中所讨论的那样。

8. Functions with No Universal Moving Averages

本节给出关于零均值函数的条件，使得对于任意可逆遍历保测变换 T，都存在一个发散的移动平均。首先，我们定义一族特定的零均值函数。

8.1. $\mathcal{F}$ 的定义。设 $a_n > 2$ 是一个具有超多项式增长的实数序列。选取正测度的互不相交子集 $A_n \subset X$，使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \mu(A_n) \leq \frac{1}{2}.$$

选取一个子集 $B \subset X$，使得 $B \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \emptyset$ 且 $\mu(B) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mu(A_n)$。将函数 f 定义为

$$f(x) = \begin{cases} a_n & \text{if } x \in A_n, \\ -1 & \text{if } x \in B. \end{cases}$$

因此，

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mu(A_n) - \mu(B) = 0.$$

令 $\mathcal{F}$ 表示这一组可测函数。给定一个实数 $p > 1$，令

$$\mathcal{F}_p = \{f \in \mathcal{F} : \lim_{n \to \infty} a_n^p \mu(A_n) = \infty\}.$$

注意， $\mathcal{F}_p \cap L^p(\mu) = \emptyset$。不过，很容易证明

$$\mathcal{F}_p \cap \Big(\bigcap_{q<p} L^q(\mu) \Big) \neq \emptyset.$$

另一方面，我们有

$$L^p(\mu) \cap \Big(\bigcap_{q>p} \mathcal{F}_q \Big) \neq \emptyset.$$

这些性质 将有助于基于我们的主要结果构造反例。

8.2. 主要结果。本节的主要结果是定理 8.1，它是命题 5.5 的对应结果。

定理 8.1. 设 $(X, \mu, \mathcal{B})$ 为标准概率空间，且 $p > 1$。给定一个均值为零的函数 $f \in \mathcal{F}_p$ 以及任意可逆遍历的 μ-保持变换 $T : X \to X$，存在一个移动平均 (v_n, L_n)，满足 $L_n \geq n^{\frac{1}{p-1}}$，使得对于几乎处处的 $x \in X$,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{L_n} \sum_{i=v_n+1}^{v_n+L_n} f(T^i x) > 0.$$

该定理推出以下推论，它们是移动平均理论中长期悬而未决的问题。

推论 8.2. 存在一个零均值函数 f，使得对所有 $p < 2$ 都有 $f \in L^p(\mu)$；并且对于任意给定的可逆遍历保测 μ变换 T，存在一个移动平均 (v_n, L_n)，满足$L_n \geq n$，使得对几乎处处的 $x \in X$,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{L_n} \sum_{i=v_n+1}^{v_n+L_n} f(T^i x) > 0.$$

换言之， f 是一个普遍劣函数，对于任意可逆遍历保测变换，移动平均都不存在普遍收敛。

证明. 给定具有超多项式增长的序列 a_n，选取互不相交子集 $A_n \subset X$，使得 $\mu(A_n) = n/a_n^2$。由于当 $n \to \infty$时， $a_n^2 \mu(A_n) \to \infty$，相应的函数$f \in \mathcal{F}$ 也包含在 $\mathcal{F}_2$中。因此，函数 f 满足定理 8.1 的结论，对 $p = 2$ 成立，或者也可以说，对 $L_n \geq n^{\frac{1}{p-1}} = n$成立。由于 a_n 具有超多项式增长，因此对于 $p < 2$,

$$\int_X |f|^p d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \mu(A_n) + \mu(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_n^{2-p}} + \mu(B) < \infty. \quad \square$$

□

推论 8.3. 存在一个均值为零的函数 $f \in L^1(\mu)$，使得对于任意可逆遍历的 μ 保测变换 T 以及任意多项式速率 n^d， $d \in \mathbb{Z}^+$，都存在整数$v_n = v_{n,\,d}$，使得对于几乎处处的 $x \in X$,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n^d} \sum_{i=v_n+1}^{v_n+n^d} f(T^i x) > 0.$$

换言之，存在一些可积函数，对于任何多项式速率和任何可逆遍历保测变换，它们普遍都是坏的。

证明。给定具有超多项式增长的序列 a_n，选取互不相交子集 $A_n \subset X$，使得

$$\mu(A_n) = \frac{3}{a_n n^2 \pi^2}.$$

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

那么相应的函数 f 可积且属于 $\mathcal{F}$。由于 a_n 的增长速度超多项式级别，因此对于 $p > 1$,

$$a_n^p \mu(A_n) = \frac{3a_n^{p-1}}{n^2\pi^2} \to \infty \text{ as } n \to \infty.$$

因此，对于任意 $p > 1$，函数 $f \in \mathcal{F}_p$ 都满足定理 8.1 的条件。令$\frac{1}{p-1} \to \infty$ 为 $p \to 1^+$，即可证明该推论。 □ □

8.3. 主要引理。前一个定理将用到以下引理 .

引理 8.4. 设 $p > 1$ 为实数， $f \in \mathcal{F}_p$，且 T 是定义在标准概率空间 $(X, \mu, \mathcal{B})$ 上的可逆遍历保测变换。假设存在实数 η，使得 $0 < \eta < 1$，并且对每个 $n \in \mathbb{Z}^+$，都存在可测集 B_n，使得$\mu(B_n) > \eta a_n \mu(A_n)$；对每个 $x \in B_n$，都存在 $\ell_x > \eta a_n$，使得

$$\sum_{i=0}^{\ell_x - 1} f(T^i x) > \eta \ell_x.$$

那么存在一个移动平均 (v_n, L_n)，满足 $L_n \geq n^{\frac{1}{p-1}}$，使得对于几乎处处的 $x \in X$,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{L_n} \sum_{i=v_n+1}^{v_n+L_n} f(T^i x) > 0.$$

证明。选取 $K > \eta a_n$，使得集合

$$B_n' = \{x \in B_n : \ell_x \leq K\} \tag{8.1}$$

满足

$$\mu(B_n') > \frac{1}{2}\mu(B_n) > \frac{\eta a_n \mu(A_n)}{2}. \tag{8.2}$$

为方便起见，设

$$\delta = \left(\frac{\eta^2}{16}\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Quan按照以下方式将 ℓ_x 的集合细分为 $x \in B_n'$。对于每个 $x \in B_n'$，令

$$\beta(x) = \min\{r \in \mathbb{Z}^+ : a_n \delta \cdot r^{\frac{1}{p-1}} \geq \ell_x\}.$$

枚举满足以下条件的 $r_1 < r_2 < \ldots < r_t$

$$B_n' = \bigcup_{i=1}^{t} \{x \in B_n' : \beta(x) = r_i\}.$$

Set

$$\tau = \lfloor \left(a_n \delta\right)^{p-1} \rfloor.$$

对于 $0 \le k < \tau$ 和 $1 \le j \le t$，定义

$$L_{j\tau-k} = \lceil a_n\delta \cdot r_j^{\frac{1}{p-1}} \rceil + \lceil \frac{\eta^2 a_n^{p-1}}{8} \rceil - k.$$

显然可得

$$L_{j\tau-k} \ge \big(r_j\tau\big)^{\frac{1}{p-1}} \ge \big(j\tau\big)^{\frac{1}{p-1}} \ge \big(j\tau-k\big)^{\frac{1}{p-1}}.$$

对于满足 $\beta(x) = r_j$ 的 $x \in B'_n$，令 $k = 0$。因此，

$$\sum_{i=0}^{L_{j\tau}-1} f(T^i x) = \sum_{i=0}^{\ell_x-1} f(T^i x) + \sum_{i=\ell_x}^{L_{j\tau}-1} f(T^i x) \tag{8.3}$$

$$> \eta\ell_x - \frac{\eta^2 a_n}{4}. \tag{8.4}$$

因此，

$$\frac{1}{L_{j\tau}} \sum_{i=0}^{L_{j\tau}-1} f(T^i x) > \eta\frac{\ell_x}{L_{j\tau}} - \frac{\eta^2 a_n}{4\ell_x} \tag{8.5}$$

$$> \eta\Big(\frac{\ell_x}{\ell_x + \frac{\eta^2 a_n}{4}}\Big) - \frac{\eta}{4} \tag{8.6}$$

$$= \eta\Big(\frac{\ell_x + \frac{\eta^2 a_n}{4}}{\ell_x + \frac{\eta^2 a_n}{4}}\Big) - \eta\Big(\frac{\frac{\eta^2 a_n}{4}}{\ell_x + \frac{\eta^2 a_n}{4}}\Big) - \frac{\eta}{4} \tag{8.7}$$

$$> \eta - \frac{\eta^3 a_n}{4\ell_x} - \frac{\eta}{4} > \frac{\eta}{2}. \tag{8.8}$$

前一个方程确定了具有坏平均值的点。我们将利用 T 的遍历性，迭代地找出更多具有坏移动平均的点。令 $D_1 = X \setminus B'_n$。由于 T 是遍历的，存在 m_1 使得 $\mu(D_1 \cap T^{-m_1}B'_n) > \frac{1}{2}\mu(D_1)\mu(B'_n)$。令 $D_2 = D_1 \setminus T^{-m_1}B'_n$。因此，

$$\mu(D_2) < \mu(D_1)\Big(1 - \frac{1}{2}\mu(B'_n)\Big) < \Big(1 - \frac{1}{2}\mu(B'_n)\Big)^2.$$

将此过程继续 $\tau-1$ 次，得到集合 D_1、D_2、.....、$D_{\tau-1}$ 以及迭代 m_0、m_1、.....、$m_{\tau-1}$。令 $m_0 = 0$，并令 $\mathcal{M} = \{m_0, m_1, \dots, m_{\tau-1}\}$。集合 $D_{\tau-1}$ 满足：

$$\mu(D_{\tau-1}) < \Big(1 - \frac{1}{2}\mu(B'_n)\Big)^{\tau-1} \tag{8.9}$$

$$\le \Big(1 - \frac{\eta}{4}a_n\mu(A_n)\Big)^{(a_n\delta)^{p-1}-1} \quad \text{(for sufficiently large } n\text{)} \tag{8.10}$$

$$\le 2\Big(\big(1 - \frac{\eta}{4}a_n\mu(A_n)\big)^{\frac{1}{\eta a_n\mu(A_n)}}\Big)^{\eta\delta^{p-1}a_n^p\mu(A_n)} \to 0 \text{ as } n \to \infty. \tag{8.11}$$

前一个极限等于 0，因为以下极限成立：

$$\lim_{n\to\infty} a_n\mu(A_n) = 0, \tag{8.12}$$

$$\lim_{n\to\infty} \big(1 - \frac{\eta}{4}a_n\mu(A_n)\big)^{\frac{1}{\eta a_n\mu(A_n)}} = e^{-1/4} \tag{8.13}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^p\mu(A_n) = \infty. \tag{8.14}$$

如上所述，为 $1 \le j \le t$ 和 $0 \le k < \tau$ 定义移动平均 $v_{j\tau-k} = m_k$ 和 $L_{j\tau-k} = L_{j\tau} - k$。现在我们证明，对于 D_τ^c 中的点，这些移动平均不收敛。令 $x \notin D_\tau$。存在 $k \le t$ 使得 $x \in T^{-m_k} B'_n$。假设 $r_j = \beta(T^{m_k}x)$，并令 $y = T^{m_k}x$。因此，

$$\frac{1}{L_{j\tau-k}} \sum_{i=m_k}^{m_k+L_{j\tau-k}} f(T^i x) = \frac{1}{L_{j\tau-k}} \sum_{i=0}^{L_{j\tau-k}} f(T^i y) \tag{8.15}$$

$$= \frac{1}{L_{j\tau-k}} \sum_{i=0}^{\ell_x-1} f(T^i y) - \frac{1}{L_{j\tau-k}} \sum_{i=\ell_x}^{L_{j\tau-k}} f(T^i y) \tag{8.16}$$

$$> \frac{\ell_x}{L_{j\tau-k}} \Big(\frac{\eta}{2}\Big) - \frac{k}{L_{j\tau-k}} \tag{8.17}$$

$$> \frac{\eta}{4} - \frac{\eta^2 a_n}{8\eta a_n} = \frac{\eta}{8}. \tag{8.18}$$

由于量化步骤，对于 $p \le 2$， L_i 随 i 增大。给定 $n_1 \in \mathbb{Z}^+$，我们定义了一个有限的移动平均集合：

$$V_1 = \{(m_k, L_{j\tau-k}) : x \in B'_{n_1}, m_k \in \mathcal{M}_1\}.$$

选择 $n_2 \in \mathbb{Z}^+$，使得

$$\eta a_{n_2} > L_{t\tau}.$$

根据 (8.1)，该集合是有限的。对 n_2 重复同样的过程，得到有限的平均值集合 V_2。继续此过程，得到一个关于 $j \in \mathbb{Z}^+$ 的无限集合 V_j。因此，由 (8.9)–(8.18) 的结果可得该引理。

□ □

8.4. 定理 8.1 的证明。现在我们给出本节主定理的证明。对于 $x \in X$，定义

$$k_x = \inf\{k \in \mathbb{Z}^+ : \sum_{i=0}^{k-1} f(T^{-i}x) < \frac{1}{2}k\}.$$

由于 $f \in L^1(\mu)$ 的均值为零，且 T^{-1} 是遍历的，因此对于几乎处处的 $x \in X$，有 $k_x < \infty$。对于 $x \in A_n$，$k_x > \frac{2}{3}a_n$。选择 $K_n \in \mathbb{Z}^+$，使得

$$\mu\big(\{x \in A_n : k_x < K_n\}\big) > \frac{1}{2}\mu(A_n).$$

设 $C = \{I_n, T^{-1}I_n, \dots, T^{-h_n+1}I_n\}$ 是一个高度为 h_n 的 Rokhlin 塔，使得 $\frac{K_n}{h_n} < \mu(A_n)/8$，并且

$$\mu\Big(\bigcup_{i=0}^{h_n-1} T^{-i}I_n\Big) > 1 - \frac{\mu(A_n)}{16}.$$

设 $N > n$ 满足

$$\mu\Big(\bigcup_{i=N+1}^{\infty} A_i\Big) < \frac{\mu(A_n)\mu(I_n)}{16h_n}.$$

令 $E = \bigcup_{i=N+1}^{\infty} A_i$ 且

$$J_n = I_n \setminus \Big(\bigcup_{i=0}^{h_n-1} T^i E\Big).$$

因此， $\mu(J_n) > \big(1 - \frac{\mu(A_n)}{16}\big)\mu(I_n)$。由此，

$$\mu\Big(\bigcup_{i=0}^{h_n-1} T^i J_n\Big) > \big(1 - \frac{\mu(A_n)}{16}\big)\big(1 - \frac{\mu(A_n)}{16}\big) > 1 - \frac{\mu(A_n)}{8}.$$

这意味着

$$\mu(A_n \cap \bigcup_{i=0}^{h_n-K_n} T^{-i} J_n) > \frac{3\mu(A_n)}{4}.$$

若 $A_n' = \{x \in A_n : k_x < K_n\} \cap \bigcup_{i=0}^{h_n-K_n} T^{-i} J_n$，则

$$\mu(A_n') > \frac{\mu(A_n)}{4}.$$

设 P_n 是 J_n 的有限可测划分，使得对于每个 $q \in P_n$ 和 $0 \le i < h_n$，若存在某个 $1 \le j \le N$ 使 $\mu(A_j \cap T^{-i}q) > 0$，则 $\mu(A_j \cap T^{-i}q) = \mu(p)$。注意，对于$x$， $k_x = k_y$；对于 $0 \le i < h_n - K_n$，$y \in A_n' \cap T^{-i}q$。对于 $x \in T^{-i}q$ 和 $0 \le i < h_n - K_n$， k_x 的值取决于 q 和 i。将这些值记作 $k_{q,\,i}$。这一集合

$$\{(T^{-i}q, T^{-i-1}q, \dots, T^{-i-k_{q,i}+1}q) : T^{-i}q \subseteq A_n, 0 \le i < h_n - K_n\}$$

构成 $\{A_n \cap T^{-i}q : 0 \le i < h_n - K_n\}$ 的有限覆盖。对于每个 $q \in P_n$，该覆盖可视为用整数区间对整数进行的一维覆盖。应用维塔利覆盖引理 [27]，为每个 $q \in P_n$ 提取一个有限的不相交子覆盖。因此，对于每个 $q \in P_n$，存在一个有限集合 $r_{q,\,1}$，…， $r_{q,\,t_q}$，使得这些集合

$$U_{q,j} = \bigcup_{i=0}^{k_{q,r_{q,j}}-1} T^{-r_{q,j}-i} q$$

互不相交，且

$$\mu\big(A_n \cap \bigcup_{q \in P_n} \bigcup_{j=1}^{t_q} U_{q,j}\big) \ge \frac{1}{3}\mu(A_n') > \frac{1}{12}\mu(A_n).$$

现在，我们对落在 A_n 中的迭代点 $T^{-i}q$ 的最大数量进行估计。根据构造，$T^{-r_{q,\,j}}q \subseteq A_n$。对于 $x \in T^{-r_{q,\,j}}q$，

$$\sum_{i=0}^{k_{q,r_{q,j}}-1} f(T^{-i}x) < \frac{1}{2}k_{q,r_{q,j}}.$$

为简化接下来的计算，设 $k = k_{q,\,r_{q,\,j}}$。令 ρ_1 表示落在 A_n 中的迭代点数量， ρ_2 表示落在 B 中的迭代点数量， ρ_3 表示其余迭代点的数量。因此，$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = k$。我们有

$$\rho_1 a_n - \rho_2 + \rho_3 a < \frac{1}{2}k$$

其中 $a \ge 0$ 是包括 a_j、 $j \ne n$ 在内的非负值的平均值。这意味着

$$\rho_1 < \frac{3k}{2a_n}.$$

这表明

$$\mu(U_{q,j}) = \frac{k}{\rho_1}\mu(U_{q,j} \cap A_n) > \frac{2a_n}{3}\mu(U_{q,j} \cap A_n).$$

对所有 $U_{q,\ j}$ 求和，可得

$$\mu(\bigcup_{q\in P_n}\bigcup_{j=1}^{t_q}U_{q,j}) = \sum_{q\in P_n}\sum_{j=1}^{t_q}\mu(U_{q,j}) \tag{8.19}$$

$$> \sum_{q\in P_n}\sum_{j=1}^{t_q}\frac{2a_n}{3}\mu(U_{q,j}\cap A_n) \tag{8.20}$$

$$= \frac{2a_n}{3}\mu\big(A_n\cap\bigcup_{q\in P_n}\bigcup_{j=1}^{t_q}U_{q,j}\big) \tag{8.21}$$

$$> \Big(\frac{2a_n}{3}\Big)\Big(\frac{1}{12}\Big)\mu(A_n) = \frac{1}{18}a_n\mu(A_n). \tag{8.22}$$

我们的目标是应用引理 8.4。我们已经接近目标了。通过取 $U_{q,j}$ 的子集，我们得到集合 B_n。从 $U_{q,j}$ 的顶部开始。特别地，令

$$m_{q,j} = \lceil\frac{3k_{q,r_{q,j}}}{4}\rceil.$$

并令

$$U'_{q,j} = \bigcup_{i=m_{q,j}}^{k_{q,r_{q,j}}-1} T^{-r_{q,j}-i}q.$$

因此，

$$\mu(\bigcup_{q\in P_n}\bigcup_{j=1}^{t_q}U'_{q,j}) > \frac{1}{72}a_n\mu(A_n).$$

对于每个 $x\in U'_{q,j}$，存在 $m, m_{q,j}\le m < k_{q,r_{q,j}}$，使得 $x\in T^{-r_{q,j}-m}q$。令 $\ell_x = k_{q,r_{q,j}}-1$，它大于 $\frac{2}{3}a_n - 1$。考虑 T 在 $x\in U'_{q,j}$ 下的遍历平均。因此，

$$\sum_{i=0}^{\ell_x-1}f(T^ix) = \sum_{i=0}^{m_{q,j}}f(T^ix) + \sum_{i=m_{q,j}+1}^{\ell_x-1}f(T^ix) \tag{8.23}$$

$$> \frac{1}{2}\Big(\frac{3\ell_x}{4}\Big) - \frac{\ell_x}{4} > \frac{1}{8}\ell_x. \tag{8.24}$$

因此，根据引理 8.4，该定理得证。 □

9. 附录 A：通过余边界解构造普适移动平均

给定可测函数 f，如果存在余边界方程 $f = g - g\circ T$ 的解 T 和 g，其中 T 是遍历保测度的，且对于 $p>0$，$g\in L^p(\mu)$，那么所有移动平均（v_n，L_n）都几乎处处收敛，其中 $L_n\ge n^{\frac{1}{p}}$。$p=1$ 情形的证明见 [2] 的附录。

定理 9.1. 设 T 是 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 上的遍历可逆保测变换。若对于 $p>0$，f 是以 $g\in L^p(\mu)$ 为传递函数的余边界，则给定 $L_n\ge n^{\frac{1}{p}}$ 和 $v_n\in\mathbb{Z}$，存在一个测度为零的集合 E，使得对于 $x\notin E$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{L_n}\sum_{i=1}^{L_n}f(T^{v_n+i}x) = 0.$$

证明：设对于几乎处处的 $x \in X$， $f(x) = g(x) - g(Tx)$。则

$$\sum_{i=1}^{L_n} f(T^{v_n+i}x) = g(T^{v_n+1}x) - g(T^{v_n+L_n+1}x).$$

[1]由于 $L_n \geq n^{\overline{p}}$，只需证明以下各项：

- 对于几乎处处的 x，$\lim_{n\to\infty} g(T^{v_n+1}x)/n^{\frac{1}{p}} = 0$;
- 对于几乎处处的 x，$\lim_{n\to\infty} g(T^{v_n+L_n+1}x)/n^{\frac{1}{p}} = 0$。

这里，我们证明第一项收敛于零。类似的论证可证明第二项也收敛于零。

对于 n， $k \in$ 自然数集，定义

$$E_{n,k} = \{x \in X : n-1 \leq |g(T^{v_k+1}x)|^p < n\}.$$

由于 $g \in L^p(\mu)$，因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\mu(E_{n,1}) \leq \int_X |g(T^{v_1+1}x)|^p d\mu < \infty.$$

存在非递减的 $K_n \in$ 自然数集，使得 $\lim_{n\to\infty} n/K_n = 0$ 并且

$$\sum_{n=1}^{\infty} K_n \mu(E_{n,1}) < \infty.$$

定义

$$E = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{K_n} E_{n,k}.$$

首先，由于 T 是保测的，我们有

$$\begin{aligned}\mu(E) \leq \sum_{n=m}^{\infty}\sum_{k=1}^{K_n}\mu(E_{n,k}) &= \sum_{n=m}^{\infty}\sum_{k=1}^{K_n}\mu(E_{n,1}) \\ &= \sum_{n=m}^{\infty} K_n\mu(E_{n,1}) \to 0 \quad \text{as } m \to \infty.\end{aligned}$$

因此， $\mu(E) = 0$。其次，我们证明对于 $x \notin E$，几乎处处收敛。若 $x \notin E$，则存在m 充分大，使得

$$x \notin \bigcup_{k=1}^{K_n} E_{n,k} \quad \text{for } n \geq m.$$

因此，若 $n > |g(T^{v_k+1}x)|^p \geq n-1$，则 $k > K_n$。所以，

$$\frac{|g(T^{v_k+1}x)|}{k^{\frac{1}{p}}} < \left(\frac{n}{K_n}\right)^{\frac{1}{p}} \to 0 \quad \text{as } n \to \infty. \ \square$$

推论 9.2. 设 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 是标准概率空间，且 $f \in L^p(\mu)$ 对于 $p > 1$ 成立。存在一个定义在 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上的遍历可逆保测变换 T，使得当 $L_n \geq n^{\frac{1}{p-1}}$ 时，所有移动平均 (v_n, L_n) 都逐点收敛到零。

证明：根据 [2], 的定理 1.1，存在解对 T 和 $g \in L^{p-1}(\mu)$，使得$f = g - g \circ T$几乎处处成立。因此，根据定理 9.1，对于 f 和 T，所有移动平均都收敛到零。 □致谢：感谢 Joanna Furno 和 Andy Parrish 帮助审阅本文，也感谢 Benjy Weiss 告诉我们如何判断函数$f \in L^1(\mu)$ 是否能成为某个映射 T 在 X 上生成的独立同分布序列 $(f \circ T^k)$ 的生成函数。

References

[1] T. Adams, J. Rosenblatt, 联合余边界，《动力系统、遍历理论与概率：纪念 Kolya Chernov》，《当代数学》698（2017）。[2] T. Adams 和 J. Rosenblatt，保测系统余边界方程解的存在与不存在，《遍历理论与动力系统》，即将出版，40 页。[3] M. Akcoglu 和 A. del Junco，点变换平均值的收敛性，《美国数学会会刊》49（1975）265-266。[4] M. Akcoglu、A. del Junco 和 W. M. F. Lee，A. Bellow 问题的一个解，《几乎处处收敛》II（伊利诺伊州埃文斯顿，1989），177，学术出版社，马萨诸塞州波士顿，1991。[5] S. Asmussen 和 T. Kurtz，大数定律中完全收敛的充要条件，《概率年刊》8，第 1 期（1980）176-182。[6] J. Baxter，一类具有单谱的遍历变换，《美国数学会会刊》27（1971）275-279。[7] J.-M. Belley，可逆保测变换与逐点收敛，《美国数学会会刊》43（1974）159-162。[8] A. Bellow，两个问题，奥伯沃尔法赫测度论会议论文集（1987 年 6 月），《施普林格数学讲义》945，1987。[9] A. Bellow，序列的扰动，《数学进展》78，第 2 期（1989）131-139。[10] A. Bellow、R. Jones 和 J. Rosenblatt，移动平均的收敛性，《遍历理论与动力系统》10，第 1 期（1990）43-62。[11] J. Bourgain，几乎必然收敛与有界熵，《以色列数学杂志》63，第 1 期（1988）79-97。[12] J. Bourgain，算术集合的逐点遍历定理，《高等科学研究所数学出版物》69（1989）5-45。[13] A. del Junco，一个不属于秩一的具有单谱的变换，《加拿大数学杂志》29，第 3 期（1977）655-663。[14] Y. Derriennic 和 M. Lin，分数阶泊松方程及分数阶余边界的遍历定理，《以色列数学杂志》123（2001）93-130。[15] P. Erd˝os，论 Hsu 和 Robbins 的一个定理，《数理统计年刊》20（1949）286-291。[16] A. Gut，关于子序列大数定律的完全收敛，《概率年刊》13，第 4 期（1985）1286-1291。[17] W. Hoeffding，有界随机变量之和的概率不等式，《美国统计学会杂志》58，第 301 期（1963）13–30。https://doi.org/10.2307/2282952。[18] P. L. Hsu 和 H. Robbins，完全收敛与大数定律，《美国国家科学院院刊》33（1947）25-31。[19] K. Knopp，《无穷级数理论与应用》，Blackie & Son LTD，伦敦和格拉斯哥（1954）。[20] M. Lin 和 R. Sine，遍历理论与函数方程（$I - T$）$x = y$，《算子理论杂志》10（1983）第 1 期，153-166。[21] M. Mentzen，若干具有秩 R 和单谱的自同构例子，《波兰科学院数学通报》35，第 7-8 期（1987）417-424。[22] D. Newton，具有单谱的高斯过程，《概率论及其应用领域杂志》5（1966）207-209。[23] K. Reinhold，L^p-空间中受扰序列的行为差异，《美国数学会会刊》120，第 3 期（1994）865-874。[24] J. Rosenblatt，遍历理论中的最优范数逼近，载于《动力系统进展》第 40–76 页，由 Idris Assani 编，德古意特出版社，柏林，2016。[25] H. Rosenthal，由独立随机变量序列张成的 L^p（$p > 2$）子空间，《以色列数学杂志》8（1970）273-303。

[26] S. Sawyer，弱型极大不等式，《数学年刊》84，第 2 期（1966）157-174。[27] G. Vitali，关于点群和实变量函数，都灵《学报》43（1908）229-246。

T. Adams 美国政府 电子
邮件：terry@ieee.org

J. Rosenblatt 数学系 伊利
诺伊大学 厄巴纳，IL
46201，美国 电子邮件：
rosnbltt@illinois.ed