arXiv:2302.03403v1 [math.GR] 7 Feb 2023

关联图为直线或简单环的单纯边混合符号 Coxeter 群

YiskaEfrat Aharoni Robert Shwartz 数学系 数学系 Ariel University，以色列 Ariel University，以色列
yiskaefr.aharoni@msmail.ariel.ac.il robertsh@ariel.ac.il

摘要

2011 年，Eriko Hironaka 在研究某些映射类时，提出了 Coxeter 群的一种有趣推广。该推广通过将 Coxeter 图的顶点标记为 $+1$ 或 -1，并在关联 Coxeter 群的标准几何表示中纳入顶点标签而实现。Hironaka 通过这种推广得到的群称为混合符号 Coxeter 群。本文对关联图为直线或简单环的单边混合符号 Coxeter 群进行分类。我们证明，具有上述关联图（直线或简单环）的混合符号 Coxeter 群的所有定义关系，都是该混合符号 Coxeter 群中两个生成元的共轭元之积的平方或立方，并且与关联图顶点的标签密切相关。

1 引言

1.1 考克斯特群

Coxeter 群是一类重要的群，广泛应用于数学的许多领域和方面，例如对称性与反射的研究、李代数的分类以及许多其他课题。因此，我们先回顾 Coxeter 群的定义，以及一些相关的基本概念和性质，定义见 [6]。

定义 1.1.1. </style}一个群 W 是 Coxeter 群，当且仅当 W 具有如下由生成元与关系给出的表示:

$$W = \langle s_1, s_2, \ldots, s_n \mid s_i^2 = 1,\ (s_i s_j)^{m_{i,\,j}} = 1,\ 1 \le i, j \le n,\ m_{i,\,j} \in \mathbb{N},\ m_{i,\,j} \ge 2 \rangle.$$

即,

1. W由 $s_1, s_2, \ldots, s_n$生成，其中对所有$1 \le i \le n$， s_i都是对合（二阶元素）；

2. W 的所有定义关系形式如下:

$$s_i^2 = 1, \quad (s_i s_j)^{m_{i,\,j}} = 1,$$

其中 $i, j \in \{1, 2...n\}$, $i \ne j$和 $m_{i,\,j}$是 W中元素 $s_i s_j$的阶。

定义 1.1.2. 令 S 为考克斯特群 W 的生成元集合。

• 关联矩阵 M： $S \times S \to \{1, 2, \ldots, \infty\}$，称为群 W 的考克斯特矩阵，满足以下性质：

– $m_{s,\ s'} = m_{s',\ s} = |s \cdot s'|$（其中，$|s \cdot s'|$ 是群 W 中元素 $s \cdot s'$ 的阶）；– $m_{s,\ s'} = 1 \Leftrightarrow s = s'$。

• 相应的考克斯特图是一个顶点属于 S 并满足以下性质的图：

– 如果 $m_{s,\ s'} = 2$，则顶点 s 和 s' 在考克斯特图中不由任何边连接；– 如果 $m_{s,\ s'} = 3$，则存在一条连接顶点 $s,\ s'$ 的无标记边，称为单边；– 如果 $m_{s,\ s'} \geq 4$，则存在一条标记为 $m_{s,\ s'}$ 的边，连接顶点 $s,\ s'$；– 如果所有边都是单边，则称考克斯特图为单边考克斯特图。此时，相应的考克斯特群称为单边考克斯特群（即，对于所有 $1 \leq i,\ j \leq n$，均满足 $m_{s_i,\ s_j} \in \{2, 3\}$）。

备注 1.1.3。设 G 是一个没有环的边标记图，则存在唯一的考克斯特群，记作 $W(G)$，使得 G 是 $W(G)$ 的考克斯特图。

备注 1.1.4。请注意以下性质：

• $m_{s,\ s'} = 2$ 当且仅当 s 和 s' 可交换；

• $m_{s,\ s'} = \infty$ 当且仅当元素 $s \cdot s'$ 的阶为无穷。

定义 1.1.5。若 W 是一个考克斯特群，且 S 是考克斯特生成元的集合，则有序对 $(W,\ S)$ 称为考克斯特系统。S 的基数称为 $(W,\ S)$ 的秩。

1.2 标准几何表示

现在，我们回顾考克斯特群的标准几何表示的定义，该定义见于 [6]。

定义 1.2.1。反射系统由三元组 $(W、\ S、\ B)$ 定义，其中 $|S| = n$，且 B 是 $\mathbb{R}^n$ 上以 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ 为标准基的对称双线性型，该对称双线性型由考克斯特系统 $(W、\ S)$ 唯一确定，如下所示：

• $B(e_i,\ e_i) = 2$；
• $B(e_i、\ e_j) = -2\cos\left(\frac{\pi}{m_{i,j}}\right)$，其中，$m_{i、\ j}$ 由考克斯特系统 $(W、\ S)$ 给出。

现在，我们回顾退化双线性形式和非退化双线性形式的定义。

定义 1.2.2。设 B 是 $\mathbb{R}^n$ 上以 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ 为标准基的双线性型。

• 如果相应的矩阵 B（其中 $(B)_{i,\ j} := B(e_i,\ e_j)$）是奇异的，那么这个双线性型称为退化双线性型；

• 否则，如果相应的矩阵 B 是正则的（非奇异），则称该双线性型为非退化双线性型。

定义 1.2.3。 标准几何表示是忠实同态

$$\pi : W \to GL_n(\mathbb{R}),$$

其中 $GL_n(\mathbb{R})$ 是 $n \times n$ 上的可逆矩阵群；对于每个 $w \in W$， π_w 都由 $s_i \in S\,(1 \leq i \leq n)$ 中 π_{s_i} 的同态像唯一确定，如下所示：对于每个生成元 $s_i \in S$， π_{s_i} 定义为以下反射：

$$\pi_{s_i}(e_j) = e_j - \frac{2B(e_i, e_j)}{B(e_i, e_i)} e_i.$$

注意， π_{s_i} 将相应的基向量 e_i 变号，并固定相对于双线性型 B 与 e_i 正交的向量集合。反射群 W 由集合 $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ 生成，并作用于 $\mathbb{R}^n$，且保持双线性型 B 不变。

备注 1.2.4. 每个考克斯特群都由其标准几何表示唯一确定。

1.3 本文的背景与动机

标准几何表示有若干种推广，且各有不同的动机。最自然的推广由 Cameron、Seidel 和 Tsaranov 提出；他们于 1994 年提出将考克斯特群的标准几何表示推广为由符号图诱导的表示，即边带有 1 或 -1 [8] 的符号。由符号几何表示得到的群是一个广义考克斯特群，它是从相应非符号图的标准几何表示得到的考克斯特群的某个商群；广义考克斯特群中的非考克斯特关系由含有奇数条负号边的环诱导。另有一系列五篇论文 [14, 2, 1, 3, 10]，对广义考克斯特群和广义阿廷群进行分类，其研究对象包括对偶图（将给定图的顶点与边互换所得的图），以及考克斯特线图所对应的对偶符号图（其中可以将顶点与边互换）；考克斯特生成元标记在边上。这项研究的动机是对代数曲面的分支曲线的基本群进行分类。 [8] 的思想已推广到加权图；与符号图不同，加权图允许边标记为任意数（不一定是 1 或 -1） [7]。相应的加权考克斯特群是一个考克斯特群的商群，其中非考克斯特关系由这样的环诱导：沿环各边的权重之积等于一个单位根（即乘法群 $\mathbb{C}^*$ 中的有限阶元素）。

本文研究考克斯特图的一种不同推广，即单纯边混合符号 Coxeter 图，也就是说，图的顶点标记为 1 或 -1。与之相应的表示是对 Coxeter 群标准几何表示的推广，由 Hironaka 在 2011 [12]中提出。通过 Hironaka 的推广得到的群称为混合符号 Coxeter 群。Hironaka 定义混合符号 Coxeter 图和混合符号 Coxeter 群的动机，源于研究如何从广义 Coxeter 图构造伪阿诺索夫映射类（见 [12]）。2012 年，Armstrong 在其博士论文 [4], 中证明，每个混合符号 Coxeter 群都是某个 Coxeter 群的商群，该 Coxeter 群的图取决于相应混合符号 Coxeter 图中顶点的符号，但未说明其关系。本文研究混合符号 Coxeter 群的结构，并用生成元与关系对其进行描述。我们根据生成元与关系对单纯边混合符号 Coxeter 群进行分类，其考克斯特图为直线或简单环。具有由混合符号 Coxeter 图所诱导关系的 Coxeter 群商群，在

数学的其他领域中也具有重要意义，例如用于对簇代数中的种子进行分类 [5]。用给定群的元素标记给定图的边或顶点，并考虑与该图的圈相关的关系，这一思想也被用于截然不同的领域。例如，在小消去理论中，这一思想被用于证明单关系自由积满足自由定理 [15, 16, 13]。另一个方向是枚举用给定群的元素对给定无向图或有向图进行标记的各种可能方式，其中给定群的关系与图中圈上的标记相关联 [9]。

1.4 混合符号几何表示

我们首先回顾 Hironaka 和 Armstrong 在 [4, 12] 中定义的混合符号 Coxeter 群和混合符号几何表示。然后，我们给出一些关于混合符号几何表示性质的重要命题，这些命题将在主要定理的证明中用到。

定义 1.4.1. 混合符号考克斯特图 Γ 定义为一个无向顶点标记图，其 n 顶点记作 s_i （ $1 \leq i \leq n$），且 Γ的顶点上标有“$+1$”或“-1”号。顶点 s_i 的符号记作 f_i。如前所述，我们用记号$m_{i,j}$ 表示顶点 s_i 和 s_j之间的边权，其中:

- $m_{i,j} = 2$ 若 s_i 和 s_j 之间没有边相连;
- $m_{i,\ j} = 3$ 若 s_i 和 s_j 之间由无标记边相连（称为单边）;
- $m_{i,\ \ j} \geq 4$ 若 $s_i\ s_j$ 由一条标记为 $m_{i,\ \ j}$ 的边连接（该边称为多重边）

定义一个与混合符号考克斯特图 Γ相关联的 $\mathbb{R}^n$ 上的对称双线性型，该图的顶点为 n 个 s_1， s_2， ... , s_n，如下所示:

$$B\left(e_i, e_j\right) = \begin{cases} 2 & \text{if } i = j \text{ and vertex } s_i \text{ has label } +1 \\ -2 & \text{if } i = j \text{ and vertex } s_i \text{ has label } -1 \\ -2\cos\left(\frac{\pi}{m_{i,j}}\right) & \text{if } i \neq j \\ -2 & \text{if } m_{i,j} = \infty \end{cases}$$

其中，对于 $1 \leq i \leq n$， e_i 是 $\mathbb{R}^n$的第 i 个标准基向量。

令 $S = \{s_1, s_2, \ldots s_n\}$。考虑以下映射

$$\pi : S \to GL_n(\mathbb{R})$$

其中,

$$\pi_{s_i}\left(e_j\right) = e_j - \frac{2B\left(e_i, e_j\right)}{B\left(e_i, e_i\right)} e_i.$$

现在，我们定义群 $W(\Gamma)$，它由 $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ 生成，并将映射$\pi : S \to GL_n(R)$扩展为群同态 $\pi : W(\Gamma) \to GL_n(R)$。该表示

$$\pi : W(\Gamma) \to GL_n(R)$$

称为 $W(\Gamma)$ 的混合符号几何表示。

根据 π_{s_i} 关于 $1 \leq i \leq n$ 的定义，容易看出 s_i 是 $W(\Gamma)$中的一个对合。由对合 s_i （$1 \leq i \leq n$）生成的群 $W(\Gamma)$称为混合符号考克斯特群；而二元组 $(W(\Gamma)\ S)$ 称为混合符号 Coxeter 系统，其中 $W(\Gamma)$ 是与混合符号考克斯特图 Γ 相关联、由对合集合 $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ 生成的混合符号考克斯特群。特别要注意的是，每个经典 Coxeter 系统都是混合符号 Coxeter 系统。

备注 1.4.2. 本文只研究单边混合符号 Coxeter 群。因此，对于混合符号图 Γ，相应的混合符号几何表示具有以下形式：

$$\pi : S \to GL_n(\mathbb{R})$$

其中，

$$\pi_{s_i}(e_j) = \begin{cases} -e_j & \text{if } i = j \\ e_j & \text{if } m_{i,\ j} = 2 \\ e_j + f_i e_i & \text{if } m_{i,\ j} = 3 \end{cases}$$

1.5 混合符号 Coxeter 群的基本性质

本小节给出混合符号 Coxeter 群的一些基本性质，这些性质涉及相应的混合符号 Coxeter 图，并推广了 Coxeter 群的性质。

定义 1.5.1. 设 W 是由 $s_1, s_2, \ldots, s_n$ 生成的群，满足 $s_i^2 = 1$。

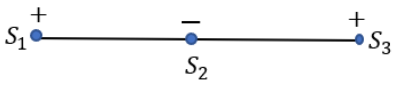
- 那么，形式为 $(s_i\hat{s}_j)^m = 1$ 的关系，其中 $\hat{s}_j$ 是 s_j 的任意共轭，称为广义 Coxeter 关系；
- 如果 W 中的所有关系都是广义 Coxeter 关系，那么 W 称为广义 Coxeter 群；
- 对于 $1 \leq k \leq n$，设 $\hat{s}_k$、$\check{s}_k$ 是 s_k 的两个任意共轭元，那么对于每个 $1 \leq i,\ \ j \leq n$，形如 $(\hat{s}_i\check{s}_j)^m = 1$ 的任意关系都可以改写为形如 $(s_i\check{s}_j)^m = 1,$ 的关系，其中 $\check{s}_j$是 s_j的一个特定共轭元。

现在，我们介绍混合符号 Coxeter 群的一些基本性质，这些性质在本文中被广泛使用。

命题 1.5.2。考虑由 s_1、s_2、.....、s_n生成的混合符号考克斯特群，其中关联混合符号考克斯特图中的相应顶点分别标记为 f_1、f_2、$\ldots f_n$，对于 $1 \leq i$、$j \leq n$，令$m_{i,\ j}$如定义 1.4.1 中所定义。则根据 [4], ，元素 s_is_j的阶如下：

- 若 s_i 和 s_j 由一条边相连（即 $m_{i,\ j} \geq 3$）：
  - 若 $f_i = f_j$，则$|s_is_j| = m_{i,\ j}$；
  - 若 $f_i \neq f_j$，则 $|s_is_j| = \infty$。
- 若 s_i 和 s_j 不由任何边相连（即 $m_{i,\ j} = 2$），则 $|s_is_j| = 2$，且不依赖于顶点 s_i 和 s_j 的符号。

例 1.5.3. 考虑以下混合符号考克斯特图：



通过考察图中的关系： $|s_1 s_2| = \infty$ 和 $|s_2 s_3| = \infty$。我们将根据定理 3.1.4证明，还存在一个关系：$(s_1[s_2 s_3 s_2])^3 = 1$。因此，混合符号考克斯特群并非考克斯特群，而只是一个考克斯特群的商群。混合符号考克斯特群用生成元与关系表示如下：

$$\langle s_1, s_2, s_3 | s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = 1, (s_1 s_2 s_3 s_2)^3 = 1 \rangle. \tag{1}$$

注 1.5.4。 设 Γ 是一个混合符号考克斯特图（即， Γ 的每个顶点都标记为 $+1$ 或 -1）。

- 那么，群 $W(\Gamma)\}$ 不一定是考克斯特群。
- 存在非同构的混合符号考克斯特图 Γ 和 Γ'，使得 $W(\Gamma) \approx W(\Gamma')$。

定义 1.5.5。 如果图 G 的顶点可以划分为两个不相交的集合 N_1 和 N_2，使得 G 中的每条边都连接 N_1 中的一个顶点和 N_2 中的一个顶点，则称其为二部图。

注 1.5.6。 定义 1.5.5 表明，任何直线图或偶数长度的简单环（即具有 $2n$ 个顶点的简单环）都是二部图。

定义 1.5.7。 设 Γ 是一个混合符号考克斯特图。那么， $-\Gamma$ 是一个与 Γ 具有相同顶点和边的混合符号考克斯特图，其中 $-\Gamma$ 中的每个顶点的标记都不同于 Γ 中同一顶点的标记。

Remark 1.5.8. 设 Γ 是一个混合符号 Coxeter 二部图。那么根据 [4], $W(\Gamma) \approx W(-\Gamma)$.

1.6 工作计划

本研究的工作计划如下：

第 1 节介绍混合符号 Coxeter 群的基本概念和定义。第 2 节给出一些重要的引理和命题，我们将在主要定理的证明中使用这些结果。接着，在第 3 节中，我们研究关联图为单边标记直线或单边简单环的混合符号 Coxeter 群。最后，在第 4 节中，我们总结结论，并提出未来进一步研究的计划和思路。

1.7 本文的主要结果

- **定理 3.1.4：** 设 Γ 是一个单边混合符号考克斯特图，它是一条直线，具有 n个顶点 s_1， s_2、……、 s_n，这些顶点分别带有符号 f_1， f_2、……、 f_n，且对于 $1 \leq i \leq n-1$，顶点 s_i 与 s_{i+1} 由一条单边相连，如图 1 所示。那么，对于 $1 \leq i < j \leq n$，除了以下考克斯特关系：

$$(s_i \cdot s_j)^2 = 1 \Leftrightarrow j - i \geq 2. \tag{2}$$

$$(s_i \cdot s_{i+1})^3 = 1 \Leftrightarrow f_i = f_{i+1}. \tag{3}$$

根据命题 1.5.2，这些关系成立；以下广义 Coxeter 关系在 $W(\Gamma)$ 中成立：

$$(s_i \cdot s_{i+1,j,i+1})^3 = 1 \quad \text{if and only if} \quad f_i = f_j \tag{4}$$

• **定理 3.2.5：**设 Γ 是一个单边简单环，其顶点为 s_1、s_2、.....、s_n，其中顶点 s_i 在 $1 \le i \le n$时带符号 f_i，且顶点 s_i 和 s_{i+1} 在 $1 \le i \le n$时由一条单边连接。根据注记 3.2.1，我们将 $n+1$ 视为 1，将 $1-1$视为 n。那么对于 $1 \le i$、$j \le n$，除 Coxeter 关系外：

$$(s_i \cdot s_j)^2 = 1 \ \Leftrightarrow 2 \le |i-j| \le n-2. \tag{5}$$

$$(s_i \cdot s_{i+1})^3 = 1 \ \Leftrightarrow f_i = f_{i+1}. \tag{6}$$

根据命题 1.5.2，这些关系成立；以下广义 Coxeter 关系在 $W(\Gamma)$ 中成立：

$$(s_i \cdot s_{i+1,\ j,\ i+1})^3 = 1 \ \Leftrightarrow \ j \neq i-1 \quad \text{and} \quad f_i = f_j \tag{7}$$

$$(s_{j+1,i,j+1} \cdot s_{i+1,j,i+1})^2 = 1 \ \Leftrightarrow \ \frac{\prod_{k=1}^{n} f_k}{f_i \cdot f_j} = -1. \tag{8}$$

2 预备结果

In t本节给出混合符号几何表示的一些重要性质。

2.1 定义与记号

Now, 我们定义一些与混合符号几何表示相关的定义和记号 .

定义 2.1.1。对于每个 $1 \le i,\ j \le n$ 使得 $i \neq j$，定义矩阵 $E_{i,\ j}$ 为 $M_n(\mathbb{R})$：该矩阵将单位矩阵 I_n 的 i 行替换为第 j 行。$E_{i,\ j}$ 的各个元素如下：

- $(E_{i,\ j})_{i,\ i} = (E_{i,\ j})_{j,\ j} = 0$;
- $(E_{i,\ j})_{i,\ j} = (E_{i,\ j})_{j,\ i} = 1$;
- $(E_{i,\ j})_{k,\ k} = 1$，对于 $1 \le k \le n$ 使得 $k \neq i$ 且 $k \neq j$;
- $(E_{i,\ j})_{k,\ \ell} = 0$，对于 $k \neq \ell$ 以及 $(k,\ \ell) \notin \{(i,\ j),\ (j,\ i)\}$。

注记 2.1.2. 设 $E_{i,\ j}$ 是定义 2.1.1 中定义的 $M_n(\mathbb{R})$ 矩阵，则对于每个 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 矩阵，将 A 在左侧乘以 $E_{i,\ j}$（即 $E_{i,\ j} \cdot A$）后得到的矩阵，会将 A 的第 i 行与第 j 行交换。

定义 2.1.3. 考虑定义 1.4.1 中所定义的单边混合符号 Coxeter 群 W 的混合符号几何表示。对于 $1 \leq i \leq n$，我们用 τ_i 表示 $M_n(\mathbb{R})$ 中的矩阵（ $\mathbb{R}$ 上的 $n \times n$ 矩阵），它满足

$$\tau_i(e_j) = -\frac{2B(e_i, e_j)}{B(e_i, e_i)} e_i = \begin{cases} -2e_i & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } m_{i,\,j} = 2 \\ f_i e_i & \text{if } m_{i,\,j} = 3 \end{cases}$$

不难看出

$$\tau_i = \pi_{s_i} - 1 \quad \text{where 1 is the identity matrix of } M_n(\mathbb{R}).$$

注意，对于 $n > 1$， τ_i 不是 $M_n(\mathbb{R})$ 中的可逆矩阵，因为除了 i 行之外， τ_i 的所有行都是 0。因此，根据混合符号几何表示， τ_i 不是 W 中任何元素的代表像。尽管 τ_i 在关于混合符号 Coxeter 群结构的定理证明中被广泛使用。因此，我们现在给出 τ_i 的一些重要性质。

2.2 τ_i 的重要性质

本节介绍 τ_i 的乘积的一些重要性质，这些性质将在本文主要结果的证明中使用。

命题 2.2.1。对于 $1 \leq i \leq n$，设 τ_i 是 $M_n(\mathbb{R})$ 中根据定义 2.1.3 定义的元素，则 τ_i 满足以下性质：

(i) $\tau_i^2 = -2\tau_i$(ii) $(1 + \tau_i)$
$\tau_i = \tau_i(1 + \tau_i) = -\tau_i$

(iii) 令 $E_{i,\,j}$ 为定义 2.1.1 中所定义的 $M_n(\mathbb{R})$ 的矩阵。若 $m_{i,\,j} = 3$，则有：

- $\tau_i \tau_j = E_{i,\,j} \cdot f_i \cdot \tau_j$
- $\tau_i \tau_j \tau_i = f_i \cdot f_j \cdot \tau_i$
- $(\tau_i \tau_j)^k = (f_i \cdot f_j)^{k-1} \cdot \tau_i \tau_j = E_{i,\,j} \cdot (f_i)^k \cdot (f_j)^{k-1} \cdot \tau_j$
- $(\tau_i \tau_j)^k \tau_i = (f_i \cdot f_j)^k \cdot \tau_i$

(iv) 对于 $i \neq j$：

$$m_{i,\,j} = 2 \Leftrightarrow (s_i s_j)^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; s_i s_j = s_j s_i \;\Leftrightarrow\; \tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i = 0.$$

命题 2.2.2。设 W 是一个单边混合符号 Coxeter 群，其生成元为 s_1， s_2，……， s_n。对于 $1 \leq i,\ j \leq n$，令 τ_i 和 $E_{i,\,j}$ 分别表示定义 2.1.3 和定义 2.1.1 中定义的对象。考虑乘积 $\tau_{i_1} \cdot \tau_{i_2} \cdots \tau_{i_k}$，其中 ρ 表示满足 $\tau_{i_t} = \tau_{i_{t+1}}$ 的 $1 \leq t \leq k-1$ 的个数。于是由命题 2.2.1，对于每个 $1 \leq i_1$，……， $i_k \leq n$，下式成立：

$$\tau_{i_1} \cdot \tau_{i_2} \cdots \tau_{i_k} = \begin{cases} (-2)^\rho \cdot \prod_{t=1 \mid \tau_{i_t} \neq \tau_{i_{t+1}}}^{k-1} f_{i_t} \cdot E_{i_1, i_k} \cdot \tau_{i_k} & \text{If } m_{i_t, i_{t+1}} = 3 \quad \text{for all } 1 \leq t \leq k-1 \\ 0 & \text{If } m_{i_t, i_{t+1}} = 2 \quad \text{for some } 1 \leq t \leq k-1 \end{cases}$$

证明。 证明可通过将命题 2.2.1 应用 k 次得到。 □

推论 2.2.3. 设 W 是一个单边混合符号 Coxeter 群，其生成元为 s_1、s_2、.....、s_n。那么，对于 $1 \leq i_1$、i_2、.....、$i_k \leq n$，其中 k 是正整数， $M_n(\mathbb{R})$ 中所有形如 $\tau_{i_1} \cdot \tau_{i_2} \cdots \tau_{i_k}$ 的非零元素都满足以下性质:

- $\tau_{i_1} \cdot \tau_{i_2} \cdots \tau_{i_k}$ 仅含有一行非零行;
- $\tau_{i_1} \cdot \tau_{i_2} \cdots \tau_{i_k}$ 的非零行是第 i_1 行;
- $\tau_{i_1} \cdot \tau_{i_2} \cdots \tau_{i_k}$ 的第 i_1 行是 τ_{i_k} 的非零行（第 i_k 行）的倍数。

命题 2.2.4. 设 W 是一个单边混合符号 Coxeter 群，由 s_1、s_2、.....、s_n 生成。设 t 是 $\mathbb{R}$ 的一个非零元素，且 $1 \leq i_1$、i_2、.....、$i_k \leq n$。假设形如 $t \cdot \tau_{i_1}\tau_{i_2} \cdots \tau_{i_k}$ 的元素之和等于 0。那么，对于每个 $1 \leq p \leq n$，左侧带有 τ_p 的元素之和等于 0。

证明。假设

$$t_1 \cdot \tau_{i_{1,1}}\tau_{i_{1,2}} \cdots \tau_{i_{1,k_1}} + t_2 \cdot \tau_{i_{2,1}}\tau_{i_{2,2}} \cdots \tau_{i_{2,k_2}} + \cdots + t_\ell \cdot \tau_{i_{\ell,1}}\tau_{i_{\ell,2}} \cdots \tau_{i_{\ell,k_\ell}} = 0. \tag{9}$$

其中:

- ℓ 和 k_j 对于 $1 \leq j \leq \ell$ 是正整数;
- $1 \leq i_{u,v} \leq n$ 对于 $1 \leq u \leq \ell$ 和 $1 \leq v \leq k_u$;
- $t_1, t_2, \ldots, t_\ell$ 是 $\mathbb{R}$中的非零元素。

根据推论 2.2.3，对于每个 $1 \leq q \leq \ell$，形如 $t_q \cdot \tau_{i_{q,1}}\tau_{i_{q,2}} \cdots \tau_{i_{q,k_1}}$的一个加项，其中 $i_{q,1} = p$对某个 $1 \leq p \leq n$ 成立，是 $M_n(\mathbb{R})$中的一个矩阵，其唯一非零行是第 p 行。由于方程（9）左侧所有加项之和等于 0，因此对于每个 $1 \leq p \leq n$，方程（9）左侧所有左边带有 τ_p 的加项（这些加项仅在第 p 行有非零行）之和等于 0。 □

例 2.2.5. 考虑考克斯特群

$$\widetilde{S}_3 = \langle s_1, s_2, s_3 \mid s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = 1,\ (s_1s_2)^3 = (s_2s_3)^3 = (s_3s_1)^3 = 1 \rangle.$$

于是,

$$\tau_1 + \tau_1\tau_2 + \tau_1\tau_3 + \tau_3 + \tau_3\tau_2 + \tau_3\tau_1 + \tau_2 + \tau_2\tau_1 + \tau_2\tau_3 = 0.$$

注意,

$$\tau_1 + \tau_1\tau_2 + \tau_1\tau_3 = 0, \quad \tau_2 + \tau_2\tau_1 + \tau_2\tau_3 = 0, \quad \tau_3 + \tau_3\tau_2 + \tau_3\tau_1 = 0,$$

其中 $f_1 = f_2 = f_3 = 1$ 以及:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

定义 2.2.6. 对于每个 $1 \leq i \leq n$，向量 $\nu_i \in \mathbb{R}^n$ 定义为 τ_i 的第 i 行。

命题 2.2.7。 设 W 是一个由 s_1、s_2、.....、s_n 生成的单边混合符号 Coxeter 群。设 $0 \neq t \in \mathbb{R}$ 和 $1 \leq i_1$、i_2、.....、$i_k \leq n$ 对某个正整数 k 成立。假设以下条件成立:

- Sum of elements of the form $t \cdot \tau_{i_1}\tau_{i_2} \cdots \tau_{i_k}$ equals to 0;

- 关联双线性形式是非退化双线性形式（即，向量集 $\{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n\}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中线性无关）。

那么，对于每个满足 $1 \leq p, q \leq n$ 的有序对 (p, q)，左侧为 τ_p 、右侧为 τ_q 的元素之和等于 0。

证明。 考虑方程（9）及其所有记号。根据命题 2.2.4，对于每个 $1 \leq p \leq n$，方程（9）左边所有左侧为 τ_p 的加项之和等于 0。根据推论 2.2.3，方程（9）左边每个左侧为 τ_p 、右侧为 τ_q 的加项都是 $M_n(\mathbb{R})$ 中的矩阵，并具有以下性质：

- 唯一的非零行是第 p 行；
- 第 p 行是 ν_q 的倍数（其中 ν_q 在定义 2.2.6 中定义）。

因此，方程（9）左边所有左侧为 τ_p 的加项之和是一个矩阵，其第 p 行是向量 $\{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n\}$ 的线性组合。由于向量集 $\{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n\}$ 线性无关，因此对于每个 $1 \leq q \leq n$，方程（9）左边所有左侧为 τ_p 、右侧为 τ_q 的加项之和等于 0。

□

现在，我们回顾 Dickson 多项式的定义，该定义由 Dickson [11]给出。

第二类 Dickson 多项式 $\mathbb{E}_n(x, \alpha)$ 由下述关于 $n \geq 2$ 的递推关系定义：

$$\mathbb{E}_n(x, \alpha) = x\mathbb{E}_{n-1}(x, \alpha) - \alpha\mathbb{E}_{n-2}(x, \alpha),$$

其初始条件为 $\mathbb{E}_0(x, \alpha) = 1$ 以及 $\mathbb{E}_1(x, \alpha) = x$。在下面的论断中，我们使用 Dickson 多项式 $\mathbb{E}_n(x, \alpha)$，其中 $x = 1$ 以及 $\alpha = f_i f_j$（提醒： $f_i f_j$ 要么是 $+1$，要么是 -1）。并得到 $\mathbb{E}_n(1, f_i f_j)$，其标记方式与我们在上面设定的相同。

命题 2.2.8。 设 τ_i 和 τ_j 如定义 2.1.3 中所定义，且 r 为正整数，则有：

1.

$$[(1+\tau_i)(1+\tau_j)]^r - [(1+\tau_j)(1+\tau_i)]^r = (f_i f_j)^{r-1} \cdot \{\mathbb{E}_{2r-1}(1, f_i f_j)\} \cdot E_{i,j} \cdot (f_i \tau_j - f_j \tau_i) \tag{10}$$

2.

$$[(1+\tau_i)(1+\tau_j)]^r (1+\tau_i) - [(1+\tau_j)(1+\tau_i)]^r (1+\tau_j) = (f_i f_j)^r \cdot \{\mathbb{E}_{2r}(1, f_i f_j)\} \cdot (\tau_i - \tau_j) \tag{11}$$

证明。 我们对 r 使用归纳法证明该命题：

首先，考虑方程（10）中的 $r = 1$ 。

$$\begin{aligned}(1+\tau_i)(1+\tau_j) - (1+\tau_j)(1+\tau_i) &= \tau_i\tau_j - \tau_j\tau_i = 1 \cdot E_{i,j} \cdot (f_i\tau_j - f_j\tau_i) \\ &= (f_i f_j)^0 \cdot \{\mathbb{E}_1(1, f_i f_j)\} \cdot E_{i,j}(f_i \cdot \tau_j - f_j \cdot \tau_i).\end{aligned}$$

现在，考虑方程（11）中的 $r=1$

$$(1+\tau_i)(1+\tau_j)(1+\tau_i)-(1+\tau_j)(1+\tau_i)(1+\tau_j)=(\tau_i\tau_j\tau_i-\tau_i)-(\tau_j\tau_i\tau_j-\tau_j)$$

$$=(f_if_j-1)(\tau_i-\tau_j)=(f_if_j)^1\cdot\{\mathbb{E}_2(1\ ,\ f_if_j)\}\cdot(\tau_i-\tau_j)\,.$$

假设方程（10）和方程（11）对 $r=r_0$ 成立：

$$[(1+\tau_i)(1+\tau_j)]^{r_0}-[(1+\tau_j)(1+\tau_i)]^{r_0}=(f_if_j)^{r_0-1}\cdot\{\mathbb{E}_{2r_0-1}(1\ ,\ f_if_j)\}\cdot E_{i,j}\cdot(f_i\cdot\tau_j-f_j\cdot\tau_i) \tag{12}$$

and

$$[(1+\tau_i)(1+\tau_j)]^{r_0}(1+\tau_i)-[(1+\tau_j)(1+\tau_i)]^{r_0}(1+\tau_j)=(f_if_j)^{r_0}\cdot\{\mathbb{E}_{2r_0}(1\ ,\ f_if_j)\}\cdot(\tau_i-\tau_j) \tag{13}$$

现在，我们利用方程（12）和方程（13）证明 $r=r_0+1$ 的引理：

$$\begin{aligned}&[(1+\tau_i)(1+\tau_j)]^{r_0+1}-[(1+\tau_j)(1+\tau_i)]^{r_0+1}\\&=[(1+\tau_i)(1+\tau_j)]^{r_0}(1+\tau_i)(1+\tau_j)-(1+\tau_j)(1+\tau_i)[(1+\tau_j)(1+\tau_i)]^{r_0}\\&=[(1+\tau_i)(1+\tau_j)]^{r_0}(1+\tau_i)+[(1+\tau_i)(1+\tau_j)]^{r_0}(1+\tau_i)\tau_j\\&-(1+\tau_i)[(1+\tau_j)(1+\tau_i)]^{r_0}-\tau_j(1+\tau_i)[(1+\tau_j)(1+\tau_i)]^{r_0}\,.\end{aligned} \tag{14}$$

由于 $[(1+\tau_i)(1+\tau_j)]^{r_0}(1+\tau_i)-(1+\tau_i)[(1+\tau_j)(1+\tau_i)]^{r_0}=0$,
方程（14）等价于：

$$\begin{aligned}&[(1+\tau_i)(1+\tau_j)]^{r_0}(1+\tau_i)\tau_j-\tau_j(1+\tau_i)[(1+\tau_j)(1+\tau_i)]^{r_0}=\\&[(1+\tau_i)(1+\tau_j)]^{r_0}\tau_j+[(1+\tau_i)(1+\tau_j)]^{r_0}\tau_i\tau_j-\tau_j[(1+\tau_j)(1+\tau_i)]^{r_0}-\tau_j\tau_i[(1+\tau_j)(1+\tau_i)]^{r_0}\end{aligned} \tag{15}$$

现在，利用 $(1+\tau_j)\tau_j=\tau_j(1+\tau_j)=-\tau_j$，如命题 2.2.1 的第 (ii) 部分所述，我们得到以下方程：

$$[(1+\tau_i)(1+\tau_j)]^{r_0}\tau_j-\tau_j[(1+\tau_j)(1+\tau_i)]^{r_0}=-[(1+\tau_i)(1+\tau_j)]^{r_0}+[(1+\tau_j)(1+\tau_i)]^{r_0} \tag{16}$$

因此，利用方程（12）：

$$\begin{aligned}&[(1+\tau_i)(1+\tau_j)]^{r_0}\tau_j-\tau_j[(1+\tau_j)(1+\tau_i)]^{r_0}\\&=-(f_if_j)^{r_0-1}\cdot\{\mathbb{E}_{2r_0-1}(1\ ,\ f_if_j)\}\cdot E_{i,j}\cdot(f_i\tau_j-f_j\tau_i)\end{aligned} \tag{17}$$

由于 f_i 和 f_j 都等于 1 或 -1，因此 $(f_if_j)^2=1$ 始终成立，所以可以将方程（17）乘以 $(f_if_j)^2=1$，得到

$$\begin{aligned}&[(1+\tau_i)(1+\tau_j)]^{r_0}\tau_j-\tau_j[(1+\tau_j)(1+\tau_i)]^{r_0}\\&=-(f_if_j)^{r_0+1}\cdot\{\mathbb{E}_{2r_0-1}(1\ ,\ f_if_j)\}\cdot E_{i,j}\cdot(f_i\tau_j-f_j\tau_i)\,.\end{aligned} \tag{18}$$

现在我们考虑方程（14）的以下加项

$$[(1+\tau_i)(1+\tau_j)]^{r_0}\tau_i\tau_j-\tau_j\tau_i[(1+\tau_j)(1+\tau_i)]^{r_0}\,.$$

现在，利用方程 (13)：

$$
\begin{aligned}
&(f_i f_j)^{r_0} \cdot \{\mathbb{E}_{2r_0}(1, f_i f_j)\} \cdot (\tau_i - \tau_j) \\
&= [(1+\tau_i)(1+\tau_j)]^{r_0}(1+\tau_i) - [(1+\tau_j)(1+\tau_i)]^{r_0}(1+\tau_j) \\
&= [(1+\tau_i)(1+\tau_j)]^{r_0}(1+\tau_i) - (1+\tau_j)[(1+\tau_i)(1+\tau_j)]^{r_0} \\
&= [(1+\tau_i)(1+\tau_j)]^{r_0} + [(1+\tau_i)(1+\tau_j)]^{r_0}\tau_i - [(1+\tau_i)(1+\tau_j)]^{r_0} - \tau_j[(1+\tau_i)(1+\tau_j)]^{r_0} \\
&= \underbrace{[(1+\tau_i)(1+\tau_j)]^{r_0}\tau_i}_{\mathrm{A}} - \underbrace{\tau_j[(1+\tau_i)(1+\tau_j)]^{r_0}}_{\mathrm{B}}.
\end{aligned}
$$

现在，注意到 $[(1+\tau_i)(1+\tau_j)]^{r_0}$ 是如下形式元素的和：$(\tau_i\tau_j)^k$、$(\tau_i\tau_j)^k\tau_i$、$(\tau_j\tau_i)^k$、$(\tau_j\tau_i)^k\tau_j$，其中 $0 \le k \le r_0$。然后，根据命题 2.2.1，存在实数 $\rho_{i,\,i}$, $\rho_{i,\,j}$, $\rho_{j,\,i}$,$\rho_{j,\,j}$，使得：

$$
[(1+\tau_i)(1+\tau_j)]^{r_0} = 1 + \rho_{i,\,i}\tau_i + \rho_{i,\,j}\tau_i\tau_j + \rho_{j,\,i}\tau_j\tau_i + \rho_{j,\,j}\tau_j.
$$

由对称性可知 $\rho_{i,\,i} = \rho_{j,\,j}$ 显然成立。因此，我们得到：

$$
\begin{aligned}
&[(1+\tau_i)(1+\tau_j)]^{r_0}\tau_i - \tau_j[(1+\tau_i)(1+\tau_j)]^{r_0} \\
&= (1 + \rho_{i,\,i}\tau_i + \rho_{i,\,j}\tau_i\tau_j + \rho_{j,\,i}\tau_j\tau_i + \rho_{i,\,i}\tau_j)\tau_i - \tau_j(1 + \rho_{i,\,i}\tau_i + \rho_{i,\,j}\tau_i\tau_j + \rho_{j,\,i}\tau_j\tau_i + \rho_{i,\,i}\tau_j \quad).
\end{aligned}
$$

然后利用命题 2.2.1，我们得到：

$$
\begin{aligned}
&(f_i f_j)^{r_0} \cdot \{\mathbb{E}_{2r_0}(1, f_i f_j)\} \cdot (\tau_i - \tau_j) \\
&= [(1+\tau_i)(1+\tau_j)]^{r_0}\tau_i - \tau_j[(1+\tau_i)(1+\tau_j)]^{r_0} \\
&= (1 + \rho_{i,\,i}\tau_i + \rho_{i,\,j}\tau_i\tau_j + \rho_{i,\,j}\tau_j\tau_i + \rho_{i,\,i}\tau_j)\tau_i - \tau_j(1 + \rho_{i,\,i}\tau_i + \rho_{i,\,j}\tau_i\tau_j + \rho_{i,\,j}\tau_j\tau_i + \rho_{i,\,i}\tau_j) \\
&= \left(1 - 2\rho_{i,\,i} + \rho_{i,\,j}\cdot\tilde{f}_{i,\,j}\cdot\tilde{f}_{j,\,i}\right)(\tau_i - \tau_j).
\end{aligned} \tag{19}
$$

现在注意到，

$$
\begin{aligned}
&[(1+\tau_i)(1+\tau_j)]^{r_0}\tau_i\tau_j - \tau_j\tau_i[(1+\tau_j)(1+\tau_i)]^{r_0} \\
&= \left(1 - 2\rho_{i,\,i} + \rho_{i,\,j}\cdot\tilde{f}_{i,\,j}\cdot\tilde{f}_{j,\,i}\right)(\tau_i\tau_j - \tau_j\tau_i).
\end{aligned}
$$

因此，由方程（19）可得，

$$
\begin{aligned}
&[(1+\tau_i)(1+\tau_j)]^{r_0}\tau_i\tau_j - \tau_j\tau_i[(1+\tau_j)(1+\tau_i)]^{r_0} \\
&= (f_i f_j)^{r_0}\{\mathbb{E}_{2r_0}(1\ ,\ f_i f_j)\}(\tau_i\tau_j - \tau_j\tau_i).
\end{aligned} \tag{20}
$$

利用命题 2.2.1 对表达式 $(\tau_i\tau_j - \tau_j\tau_i)$ 进行处理，我们得到

$$
\begin{aligned}
&[(1+\tau_i)(1+\tau_j)]^{r_0}\tau_i\tau_j - \tau_j\tau_i[(1+\tau_j)(1+\tau_i)]^{r_0} \\
&= (f_i f_j)^{r_0}\cdot 1 \cdot \{\mathbb{E}_{2r_0}(1\ ,\ f_i f_j)\}\cdot E_{i,\,j}\cdot(f_i\tau_j - f_j\tau_i).
\end{aligned} \tag{21}
$$

最后，我们得到：

$$
\begin{aligned}
&[(1+\tau_i)(1+\tau_j)]^{r_0+1} - [(1+\tau_j)(1+\tau_i)]^{r_0+1} \\
&= [(1+\tau_i)(1+\tau_j)]^{r_0}(1+\tau_i)\tau_j - \tau_j(1+\tau_i)[(1+\tau_j)(1+\tau_i)]^{r_0} \\
&= [(1+\tau_i)(1+\tau_j)]^{r_0}\tau_j + [(1+\tau_i)(1+\tau_j)]^{r_0}\tau_i\tau_j - \tau_j[(1+\tau_j)(1+\tau_i)]^{r_0} - \tau_j\tau_i[(1+\tau_j)(1+\tau_i)]^{r_0} \\
&= (f_i f_j)^{r}\cdot 1 \cdot \{\mathbb{E}_{2r_0}(1\ ,\ f_i f_j)\}\cdot E_{i,\,j}\cdot(f_i\tau_j - f_j\tau_i) \\
&- (f_i f_j)^{r_0+1}\cdot\{\mathbb{E}_{2r_0-1}(1\ ,\ f_i f_j)\}\cdot E_{i,j}\cdot(f_i\tau_j - f_j\tau_i) \\
&= (f_i f_j)^{r}[1\cdot\{\mathbb{E}_{2r_0}(1\ ,\ f_i f_j)\} - (f_i f_j)\cdot\{\mathbb{E}_{2r_0-1}(1\ ,\ f_i f_j)\}]\cdot E_{i,\,j}\cdot(f_i\tau_j - f_j\tau_i) \\
&= (f_i f_j)^{r}\cdot\{\mathbb{E}_{2r_0+1}(1\ ,\ f_i f_j)\}\cdot E_{i,\,j}\cdot(f_i\tau_j - f_j\tau_i).
\end{aligned}
$$

因此，方程（10）对每个 r都成立。

方程（11）的证明与方程（10）的证明非常相似，并采用相同的技巧完成。

□

3 单边直线或简单环上的混合符号 Coxeter 图

本节将从生成元与关系的角度，对关联图为单边标记直线或单边简单环的混合符号 Coxeter 群进行刻画。

3.1 混合符号考克斯特图为单边标记直线

现在，我们考虑关联的混合符号考克斯特图是一条含有两个以上顶点且所有边均为单边的直线的混合符号考克斯特群。



$Fig.\ 1.$

定义 3.1.1. 考虑具有 n 个顶点 s_1，s_2，……，s_n 的混合符号考克斯特图，这些顶点分别标记为 f_1，f_2，……，f_n，且对于 $1 \le i \le n-1$，顶点 s_i 通过单边与 s_{i+1}相连，如图 1 所示。对于 i_1，i_2，j，使得 $1 \le i_1 \le j \le i_2 \le n$，我们采用以下记号：

- $s_{i_1,j,i_2} := s_{i_1}s_{i_1+1}\cdots s_{j-1}s_j s_{j-1}\cdots s_{i_2+1}s_{i_2}$
- $\tau_{(i_1,j,i_2)} := \left(\prod_{k=i_1}^{j-1}\tau_k\right)\tau_j\left(\prod_{k=1}^{j-i_2}\tau_{j-k}\right) = \tau_{i_1}\ldots\tau_{j-1}\tau_j\tau_{j-1}\ldots\tau_{i_2}$
- $\tau_{i_1,j,i_2} := \sum_{k_1=i_1}^{j}\sum_{k_2=i_2}^{j}\tau_{(k_1,j,k_2)}$

命题 3.1.2. 考虑混合符号考克斯特图 Γ 以及定义 3.1.1 中的所有记号。则混合符号考克斯特群 $W(\Gamma)$ 满足以下性质：

$$\begin{aligned}\pi_{s_{i_1,j,i_2}} &= (1+\tau_{i_1})(1+\tau_{i_1+1})\cdots(1+\tau_{j-1})(1+\tau_j)(1+\tau_{j-1})\cdots(1+\tau_{i_2-1})(1+\tau_{i_2})\\ &= 1+\sum_{k_1=i_1}^{j}\sum_{k_2=i_2}^{j}\tau_{(k_1,j,k_2)} = 1+\tau_{i_1,j,i_2},\end{aligned}$$

对每个 i_1，i_2，使得 $i_1 < j$ 且 $i_2 < j$。

证明。 令定义 $i :=$ 最大$\{i_1, i_2\}$。现在，我们对 $j-i$ 使用归纳法证明该命题。对于 $j-i=1$，有：

$$\pi_{s_i s_j s_i} = (1+\tau_i)(1+\tau_j)(1+\tau_i) = 1+\tau_i\tau_j+\tau_j\tau_i+\tau_i\tau_j\tau_i+\tau_j.$$

因此，

• 如果 $i=i_1$，那么 $j=i_1+1$（因为 $j-i=1$），且 $i_2<i_1$，于是

$$\begin{aligned}\pi_{s_{i_1,j,i_2}} &= \pi_{s_{i_1}s_j s_{i_1}s_{i_1-1}\cdots s_{i_2}}\\ &= (1+\tau_i)(1+\tau_j)(1+\tau_i)(1+\tau_{i_1-1})\cdots(1+\tau_{i_2})\\ &= (1+\tau_i\tau_j+\tau_j\tau_i+\tau_i\tau_j\tau_i+\tau_j)(1+\tau_{i_1-1})\cdots(1+\tau_{i_2})\\ &= 1+\sum_{k_1=i_1}^{j}\sum_{k_2=i_2}^{j}\tau_{(k_1,j,k_2)} = 1+\tau_{i_1,j,i_2}\end{aligned}$$

• 若 $i=i_2$，则 $j=i_2+1$（因为 $j-i=1$）且 $i_1<i_2$，于是

$$\begin{aligned}\pi_{s_{i_1,j,i_2}} &= \pi_{s_{i_1}\cdots s_{i_2-1}s_{i_2}s_j s_{i_2}}\\ &= (1+\tau_{i_1})\cdots(1+\tau_{i_2-1})(1+\tau_i)(1+\tau_j)(1+\tau_i)\\ &= (1+\tau_{i_1})\cdots(1+\tau_{i_2-1})(1+\tau_i\tau_j+\tau_j\tau_i+\tau_i\tau_j\tau_i+\tau_j)\\ &= 1+\sum_{k_1=i_1}^{j}\sum_{k_2=i_2}^{j}\tau_{(k_1,j,k_2)} = 1+\tau_{i_1,j,i_2}\end{aligned}$$

假设根据归纳法，定理对 $j-i=p>1$ 成立。于是 $j=i+p$。

$$\left(\prod_{k=i}^{i+p-1}\pi_{s_k}\right)\pi_{s_{i+p}}\left(\prod_{k=i}^{i+p-1}\pi_{s_{i+p-k}}\right)=\pi_{s_{i,i+p,i}}=1+\sum_{k_1=i}^{i+p}\sum_{k_2=i}^{i+p}\tau_{(k_1,i+p,k_2)}=1+\tau_{i,i+p,i}\tag{22}$$

现在，我们考虑 $j-i=p+1$。

$$\left(\prod_{k=i}^{i+p}s_k\right)s_{i+p+1}\left(\prod_{k=i}^{i+p}s_{i+p+1-k}\right)=s_i\left(\prod_{k=i+1}^{i+p}s_k\right)s_{i+p+1}\left(\prod_{k=i+1}^{i+p}s_{i+p+1-k}\right)s_i.\tag{23}$$

由于（$i+p+1$）−（$i+1$）$=p$，根据方程（22），我们得到方程（23）等价于 :

$$\begin{aligned}&\left(\prod_{k=i}^{i+p}\pi_{s_k}\right)\pi_{s_{i+p+1}}\left(\prod_{k=i}^{i+p}\pi_{s_{i+p+1-k}}\right)=\pi_{s_i}\left(\prod_{k=i+1}^{i+p}\pi_{s_k}\right)\pi_{s_{i+p+1}}\left(\prod_{k=i+1}^{i+p}\pi_{s_{i+p+1-k}}\right)\pi_{s_i}\\ &=(1+\tau_i)(1+\tau_{i+1,i+p+1,i+1})(1+\tau_i)=1+\tau_{i,i+p+1,i}.\end{aligned}\tag{24}$$

于是,

• 在 $i_2<i_1$ 的情况下：将方程（24）右乘（$1+\tau_{i_1-1}$）（$1+\tau_{i_1-2}$）$\cdots$（$1+\tau_{i_2}$），得到

$$\pi_{s_{i,i+p+1,i_2}}=(1+\tau_{i,i+p+1,i})(1+\tau_{i_1-1})(1+\tau_{i_1-2})\cdots(1+\tau_{i_2})=1+\tau_{i,i+p+1,i_2}.$$

• 在 $i_1<i_2$ 的情况下：在左侧将方程（24）乘以 $(1+\tau_{i_1})(1+\tau_{i_1+1})\cdots(1+\tau_{i_2-1})$，得到

$$\pi_{s_{i_1,i+p+1,i}}=(1+\tau_{i_1})(1+\tau_{i_1+1})\cdots(1+\tau_{i_2-1})(1+\tau_{i,i+p+1,i})=1+\tau_{i_1,i+p+1,i}.$$

因此，该命题对每个 $1\le i_1<j<i_2\le n$ 都成立。

□

命题 3.1.3。 考虑混合符号考克斯特图 Γ，它是一条直线，顶点为s_1、 s_2、.....、 s_n，分别带有符号 f_1、 f_2、.....、 f_n，且对于 $1 \leq i \leq n-1$，顶点 s_i 和 s_{i+1} 由一条单边相连，如图 1 所示。对于 $1 \leq i$、 $j \leq n$，令 $E_{i,\ j}$ 为 $M_n(\mathbb{R})$ 的矩阵，其定义见定义 2.1.1。则对于 $1 \leq i < j \leq n$，有如下结论:

- $\prod_{k=i}^{j} \tau_k = E_{i,\ j} \cdot \prod_{k=i}^{j-1} f_k \cdot \tau_j$
- $\tau_{(i,\ j,\ i)} = f_i \cdot f_j \cdot \tau_i$
- $$\begin{aligned} &\left[\left(1+\tau_i\right)\left(1+\tau_{i+1,\ j,\ i+1}\right)\right]^r - \left[\left(1+\tau_{i+1,\ j,\ i+1}\right)\left(1+\tau_i\right)\right]^r \\ &= \left(f_i f_j\right)^{r-1} \cdot \left\{\mathbb{E}_{2r-1}(1\ ,\ f_i f_j)\right\} \cdot \left(\tau_i \cdot \tau_{i+1,\ j,\ i+1} - \tau_{i+1,\ j,\ i+1} \cdot \tau_i\right). \end{aligned} \tag{25}$$
- $$\begin{aligned} &\left[(1+\tau_i)(1+\tau_{i+1,\ j,\ i+1})\right]^r(1+\tau_i) - \left[(1+\tau_{i+1,\ j,\ i+1})(1+\tau_i)\right]^r(1+\tau_{i+1,\ j,\ i+1}) \\ &= \left(f_i f_j\right)^r \cdot \left\{\mathbb{E}_{2r}(1\ ,\ f_i f_j)\right\} \cdot \left(\tau_i - \tau_{i+1,\ j,\ i+1}\right). \end{aligned} \tag{26}$$

证明。 该命题第一部分的证明直接由命题 2.2.2 得出。因此，我们转而证明该命题的第二部分。

$$\tau_{(i,\ j,\ i)} = f_i \cdot \prod_{k=i+1}^{j-1} f_k \cdot f_j \cdot \prod_{k=i+1}^{j-1} f_k \cdot \prod_{k=i}^{j-1} (E_{k,\ k+1})^2 \cdot \tau_i$$

注意，对每个 $i \leq k \leq j$，均有 $(E_{k,\ k+1})^2 = 1$，且 $f_k \in \{+1, -1\}$。因此，$(f_k)^2 = 1$。于是，我们得到

$$\tau_{(i,\ j,\ i)} = f_i \cdot f_j \cdot \tau_i$$

现在，我们转向该命题的第三和第四部分。首先，根据定义 3.1.1，注意到

$$\tau_{i+1,\ j,\ i+1} := \sum_{k_1=i+1}^{j} \sum_{k_2=i+1}^{j} \tau_{(k_1,\ j,\ k_2)}. \tag{27}$$

因此,

$$\begin{aligned} &\left[\left(1+\tau_i\right)\left(1+\tau_{i+1,\ j,\ i+1}\right)\right]^r - \left[\left(1+\tau_{i+1,\ j,\ i+1}\right)\left(1+\tau_i\right)\right]^r \\ &= \left[(1+\tau_i)\left(1+\sum_{k_1=i+1}^{j}\sum_{k_2=i+1}^{j}\tau_{(k_1,\ j,\ k_2)}\right)\right]^r - \left[\left(1+\sum_{k_1=i+1}^{j}\sum_{k_2=i+1}^{j}\tau_{(k_1,\ j,\ k_2)}\right)(1+\tau_i)\right]^r \end{aligned} \tag{28}$$

and

$$\begin{aligned} &\left[\left(1+\tau_i\right)\left(1+\tau_{i+1,\ j,\ i+1}\right)\right]^r\left(1+\tau_i\right) - \left[\left(1+\tau_{i+1,\ j,\ i+1}\right)\left(1+\tau_i\right)\right]^r\left(1+\tau_{i+1,\ j,\ i+1}\right) \\ &= \left[(1+\tau_i)\left(1+\sum_{k_1=i+1}^{j}\sum_{k_2=i+1}^{j}\tau_{(k_1,\ j,\ k_2)}\right)\right]^r(1+\tau_i) \\ &- \left[\left(1+\sum_{k_1=i+1}^{j}\sum_{k_2=i+1}^{j}\tau_{(k_1,\ j,\ k_2)}\right)(1+\tau_i)\right]^r\left(1+\sum_{k_1=i+1}^{j}\sum_{k_2=i+1}^{j}\tau_{(k_1,\ j,\ k_2)}\right) \end{aligned} \tag{29}$$

现在，注意到,

$\left[(1+\tau_i)\left(1+\sum_{k_1=i+1}^{j}\sum_{k_2=i+1}^{j}\tau_{(k_1,\ j,\ k_2)}\right)\right]^r$, $\left[\left(1+\sum_{k_1=i+1}^{j}\sum_{k_2=i+1}^{j}\tau_{(k_1,\ j,\ k_2)}\right)(1+\tau_i)\right]^r$, $\left[(1+\tau_i)\left(1+\sum_{k_1=i+1}^{j}\sum_{k_2=i+1}^{j}\tau_{(k_1,\ j,\ k_2)}\right)\right]^r(1+\tau_i)$, and $\left[\left(1+\sum_{k_1=i+1}^{j}\sum_{k_2=i+1}^{j}\tau_{(k_1,\ j,\ k_2)}\right)(1+\tau_i)\right]^r\left(1+\sum_{k_1=i+1}^{j}\sum_{k_2=i+1}^{j}\tau_{(k_1,\ j,\ k_2)}\right)$

是以下形式的元素之和：

- $(\tau_i\cdot\sum_{k_1=i+1}^{j}\sum_{k_2=i+1}^{j}\tau_{(k_1,\ j,\ k_2)})^k$;
- $(\tau_i\cdot\sum_{k_1=i+1}^{j}\sum_{k_2=i+1}^{j}\tau_{(k_1,\ j,\ k_2)})^k\cdot\tau_i$;
- $(\sum_{k_1=i+1}^{j}\sum_{k_2=i+1}^{j}\tau_{(k_1,\ j,\ k_2)}\cdot\tau_i)^k$;
- $(\sum_{k_1=i+1}^{j}\sum_{k_2=i+1}^{j}\tau_{(k_1,\ j,\ k_2)}\cdot\tau_i)^k\cdot\sum_{k_1=i+1}^{j}\sum_{k_2=i+1}^{j}\tau_{(k_1,\ j,\ k_2)}\cdot$

对于 $0\le k\le r$。现在，根据命题 2.2.1，$\tau_i\tau_{i'}=0$ 对于 $i'\notin\{i-1,i,i+1\}$，以下结论成立：

- $(\tau_i\cdot\sum_{k_1=i+1}^{j}\sum_{k_2=i+1}^{j}\tau_{(k_1,\ j,\ k_2)})^k=(\tau_i\cdot\tau_{(i+1,\ j,\ i+1)})^{k-1}\cdot\tau_i\cdot\sum_{k_1=i+1}^{j}\sum_{k_2=i+1}^{j}\tau_{(k_1,\ j,\ k_2)}$;
- $(\tau_i\cdot\sum_{k_1=i+1}^{j}\sum_{k_2=i+1}^{j}\tau_{(k_1,\ j,\ k_2)})^k\cdot\tau_i=(\tau_i\cdot\tau_{(i+1,\ j,\ i+1)})^k\cdot\tau_i$;
- $(\sum_{k_1=i+1}^{j}\sum_{k_2=i+1}^{j}\tau_{(k_1,\ j,\ k_2)}\cdot\tau_i)^k=\sum_{k_1=i+1}^{j}\sum_{k_2=i+1}^{j}\tau_{(k_1,\ j,\ k_2)}\cdot(\tau_i\cdot\tau_{(i+1,\ j,\ i+1)})^{k-1}\cdot\tau_i$;
- $(\sum_{k_1=i+1}^{j}\sum_{k_2=i+1}^{j}\tau_{(k_1,\ j,\ k_2)}\cdot\tau_i)^k\cdot\sum_{k_1=i+1}^{j}\sum_{k_2=i+1}^{j}\tau_{(k_1,\ j,\ k_2)}=\sum_{k_1=i+1}^{j}\sum_{k_2=i+1}^{j}\tau_{(k_1,\ j,\ k_2)}\cdot(\tau_i\cdot\tau_{(i+1,\ j,\ i+1)})^{k-1}\cdot\tau_i\cdot\sum_{k_1=i+1}^{j}\sum_{k_2=i+1}^{j}\tau_{(k_1,\ j,\ k_2)}\cdot$

现在，根据定义 3.1.1，$\tau_i\cdot\tau_{(i+1,\ j,\ i+1)}\cdot\tau_i=\tau_{(i,\ j,\ i)}$，其中根据该命题的第二部分，$\tau_{(i,\ j,\ i)}=f_i\cdot f_j\cdot\tau_i$。因此，在命题 2.2.8 中用 $\tau_{(i+1,\ j,\ i+1)}$ 替换 τ_j，并采用命题 2.2.8 的相同过程，我们得到该命题所需的结果。

□

定理 3.1.4. 设 Γ 为混合符号考克斯特图，它是一条直线，包含 n 个顶点 s_1、s_2、...、s_n，其符号分别为 f_1、f_2、...、f_n，且对于 $1\le i\le n-1$，顶点 s_i 通过一条单边与 s_{i+1} 相连，如图 *1* 所示。那么，对于 $1\le i<j\le n$，除考克斯特关系外：

$$(s_i\cdot s_j)^2=1\ \Leftrightarrow j-i\ge 2. \tag{30}$$

$$(s_i\cdot s_{i+1})^3=1\ \Leftrightarrow f_i=f_{i+1}. \tag{31}$$

由命题 *1.5.2*，在 $W(\Gamma)$ 中成立以下广义 *Coxeter* 关系：

$$(s_i\cdot s_{i+1,\ j,\ i+1})^3=1\quad \textit{if and only if}\quad f_i=f_j \tag{32}$$

证明。根据定义 2.1.3，$\pi_{s_i}=1+\tau_i$ 以及命题 3.1.3，$\pi_{s_{i+1,\ j,\ i+1}}=1+\tau_{i+1,\ j,\ i+1}$。

因此，

$$(s_i\cdot s_{i+1,\ j,\ i+1})^r=1 \tag{33}$$

等价于

$$[(1+\tau_i)(1+\tau_{i+1,\ j,\ i+1})]^r=1 \tag{34}$$

由于 $(1+\tau_i)$ 和 $(1+\tau_{i+1,\ \ j,\ \ i+1})$ 都是对合，方程 (34) 等价于：

- 在偶数情形下 r:

$$[(1+\tau_i)\,(1+\tau_{i+1,\ j,\ i+1})]^{\frac{r}{2}} - [(1+\tau_{i+1,\ j,\ i+1})\,(1+\tau_i)]^{\frac{r}{2}}\,; \tag{35}$$

- 当 r 为奇数时:

$$[(1+\tau_i)\,(1+\tau_{i+1,\ j,\ i+1})]^{\frac{r-1}{2}}\,(1+\tau_i) - [(1+\tau_{i+1,\ j,\ i+1})\,(1+\tau_i)]^{\frac{r-1}{2}}\,(1+\tau_{i+1,\ j,\ i+1})\text{。} \tag{36}$$

现在，由命题 3.1.3 可得:

- 当 r为偶数时:

$$\begin{aligned}&[(1+\tau_i)\,(1+\tau_{i+1,\ j,\ i+1})]^{\frac{r}{2}} - [(1+\tau_{i+1,\ j,\ i+1})\,(1+\tau_i)]^{\frac{r}{2}}\\ &= (f_i f_j)^{\frac{r}{2}-1}\cdot\{\mathbb{E}_{r-1}(1\ ,\ f_i f_j)\}\cdot(\tau_i\cdot\tau_{i+1,\ j,\ i+1} - \tau_{i+1,\ j,\ i+1}\cdot\tau_i)\,.\end{aligned} \tag{37}$$

- 当 r 为奇数时:

$$\begin{aligned}&[(1+\tau_i)(1+\tau_{i+1,\ j,\ i+1})]^{\frac{r-1}{2}}(1+\tau_i) - [(1+\tau_{i+1,\ j,\ i+1})(1+\tau_i)]^{\frac{r-1}{2}}(1+\tau_{i+1,\ j,\ i+1})\\ &= (f_i f_j)^{\frac{r-1}{2}}\cdot\{\mathbb{E}_{r-1}(1\ ,\ f_i f_j)\}\cdot(\tau_i - \tau_{i+1,\ j,\ i+1})\,.\end{aligned} \tag{38}$$

注意，由命题 2.2.4，$\tau_i\cdot\tau_{i+1,\ j,\ i+1} - \tau_{i+1,\ j,\ i+1}\cdot\tau_i \neq 0$ 以及 $\tau_i - \tau_{i+1,\ j,\ i+1} \neq 0$。因此，方程 (33) 成立当且仅当

$$\mathbb{E}_{r-1}(1\ ,\ f_i f_j) = 0. \tag{39}$$

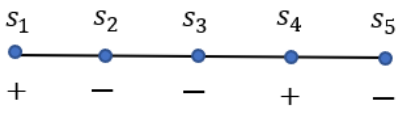
由于 f_i，f_j 要么是 $+1$，要么是 -1，因此方程 (39) 成立当且仅当

$$r = 3 \qquad \text{and} \quad f_i = f_j.$$

□

注记 3.1.5。注意，在定理 3.1.4 的证明中，除了通常的考克斯特关系 $(s_i s_j)^r = 1$（其中，对于单边混合符号 Coxeter 群，$r \in \{2,3\}$ ）之外，
$1 \leq i,\ j \leq n$（注意，在 $r=3$ 的情况下，顶点 s_i 和 s_j 的符号满足 $f_i = f_j$），我们只考虑形如 $(s_i s_{i+1,\ j,\ i+1})^r = 1$ 的关系（其中，对于关联的混合符号考克斯特图为单边标记直线的混合符号考克斯特群，r 等于 3）。通过类似于证明考克斯特群中的每个关系都由某种形式的关系 $(s_i s_j)^r = 1$（对于某个 r [6]）导出的方式，可以证明，任何其他类型的关系（可通过定理 3.1.4 的证明方法找到）都由定理 3.1.4 中所述的关系导出。

例 3.1.6。考虑以下混合符号考克斯特图 Γ:



Then

$$\begin{aligned}W(\Gamma) = \langle s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \mid\ & s_i^2 = 1 \text{ for } 1 \leq i \leq 5,\ (s_2 s_3)^3 = (s_1 s_2 s_3 s_4 s_3 s_2)^3 = (s_3 s_4 s_5 s_4)^3 = 1,\\ & (s_i s_j)^2 = 1 \text{ for } 1 \leq i < j \leq 5 \text{ and } j - i \geq 2\rangle.\end{aligned} \tag{40}$$

正如注记 3.1.5 中所述， $W(\Gamma)$ 中还存在其他关系，这些关系由方程 (40) 中描述的关系推导而来。例如，可以证明以下关系成立：

$$\left([s_5s_4s_3s_4s_5]\cdot[s_4s_3s_2s_3s_4]\right)^2=1. \tag{41}$$

注意，

$$\left(s_3s_4s_5s_4\right)^3=1, \tag{42}$$

它出现在 $W(\Gamma)$ 的表示中。将方程 (42) 关于 s_4 共轭后，该方程等价于：

$$\left(s_4s_3s_4s_5\right)^3=1, \tag{43}$$

方程 (43) 等价于

$$s_5\left(s_4s_3s_4\right)s_5=\left(s_4s_3s_4\right)s_5\left(s_4s_3s_4\right). \tag{44}$$

注意，$(s_2s_4)^2$ 蕴含 $s_2s_4=s_4s_2$，而这又蕴含 $s_4s_2s_4=s_2$。因此，我们有

$$s_4s_3s_2s_3s_4=\left(s_4s_3s_4\right)s_2\left(s_4s_3s_4\right). \tag{45}$$

因此，将方程 (44) 和 (45) 的结果应用于方程 (41)，可得

$$\left([\left(s_4s_3s_4\right)s_5\left(s_4s_3s_4\right)]\left[\left(s_4s_3s_4\right)s_2\left(s_4s_3s_4\right)\right]\right)^2=1, \tag{46}$$

其中，将方程 (46) 关于 $s_4s_3s_4$ 共轭后，该方程等价于

$$\left(s_5s_2\right)^2=1. \tag{47}$$

3.2 混合符号考克斯特图是单边简单环

本小节将从生成元与关系的角度描述混合符号 Coxeter 群。考虑混合符号 Coxeter 群 $W(\Gamma)$，其中 Γ 是一个顶点为 s_1、s_2、……、s_n 的单边简单环，这些顶点依次带有符号 f_1、f_2、……、f_n；对于 $1\le i\le n-1$，顶点 s_i 与 s_{i+1} 之间由一条单边相连，此外，顶点 s_n 与 s_1 之间也由一条单边相连。

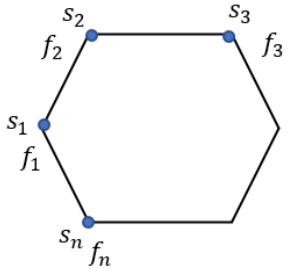


Fig. 2.

注记 3.2.1. 为方便起见，在本小节中，我们令 $n+1$ 等于 1，令 $1-1$ 等于 n （即按 n 取模的循环加法），这里讨论的是简单环上由一条边连接的顶点指标。于是，对于 $1\le i\le n$，我们可以说顶点 s_i 和 s_{i+1} 由一条边连接（不将 s_n 和 s_1 视为特殊情形）。

命题 3.2.2。 设 Γ 是一个混合符号考克斯特图，即一个有 n 个顶点 s_1、s_2、……、s_n 的简单环，这些顶点依次带有符号 f_1、f_2、……、f_n；其中 s_i 与 s_{i+1} 之间由一条单边相连，对应于 $1 \leq i \leq n$，如图 2 所示。设 ν_i 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个向量，对于每个 $1 \leq i \leq n$，将 τ_i 的第 i 行视为一个向量即可得到该向量（定义见定义 2.2.6）。那么，关联双线性形式非退化，这等价于：

向量集

$$\{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n\}$$

是 $\mathbb{R}^n$ 中的线性无关向量集，除非满足以下条件之一

- $f_i = +1$ 对每个 $1 \leq i \leq n$ 都成立；
- $f_i = -1$ 对每个 $1 \leq i \leq n$ 都成立，并且 n 为偶数。

证明。 由于对每个 $1 \leq i \leq n$，通过将 τ_i 的第 i 行视为一个向量，ν_i 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个向量，因此 ν_i 具有如下形式（如注记 3.2.1 所述，$n+1$ 视为 1，$1-1$ 视为 n）：

- $(\nu_i)_j = 0$ 在 $j \notin \{i-1,\ i,\ i+1\}$ 的情况下；
- $(\nu_i)_j = f_i$ 在 $j = i-1$ 或 $j = i+1$ 的情况下；
- $(\nu_i)_j = -2$ 在 $j = i$ 的情况下。

由于 $f_i = +1$ 或 $f_i = -1$，因此很容易证明向量集

$$\{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n\}$$

是一个向量线性无关集，除非对于每个 $1 \leq i \leq n$，$f_i = +1$；或者对于每个 $1 \leq i \leq n$ 和 n 为偶数。 □

备注 3.2.3。 作为命题 3.2.2 的结论，仿射 Coxeter 群 S_n 是混合符号单边 Coxeter 群中仅有的、其相应混合符号考克斯特图为简单环且具有退化双线性型的情形。

命题 3.2.4。 设 Γ 是一个顶点为 s_1、s_2、……、s_n 的单边简单环，其中顶点 s_i 在 $1 \leq i \leq n$时由 f_i 赋予符号，并且当 $1 \leq i \leq n$时，顶点 s_i 和 s_{i+1} 通过单边连接；根据备注 3.2.1，我们将 $n+1$ 视为 1，将 $1-1$ 视为 n。对于$1 \leq i$、$j \leq n$，使得 $i \neq j$，定义

$$\kappa_{i,j} := f_{i+1} \cdot f_{i+2} \cdots f_{j-1} + f_{i-1} \cdot f_{i-2} \cdots f_{j+1}$$

于是有如下结论：

- $$\begin{aligned}&\left[\left(1+\tau_{j+1,\ i,\ j+1}\right)\left(1+\tau_{i+1,\ j,\ i+1}\right)\right]^r - \left[\left(1+\tau_{i+1,\ j,\ i+1}\right)\left(1+\tau_{j+1,\ i,\ j+1}\right)\right]^r \\ &= \left(f_i f_j\right)^{r-1} \cdot \left\{\mathbb{E}_{2r-1}(\kappa_{i,j}\ ,\ f_i f_j)\right\} \cdot \left(\tau_{j+1,\ i,\ ,j+1} \cdot \tau_{i+1,\ j,\ i+1} - \tau_{i+1,\ j,\ ,i+1} \cdot \tau_{j+1,\ i,\ j+1}\right).\end{aligned} \tag{48}$$
- $$\begin{aligned}&\left[\left(1+\tau_{j+1,\ i,\ j+1}\right)\left(1+\tau_{i+1,\ j,\ i+1}\right)\right]^r\left(1+\tau_{j+1,\ i,\ j+1}\right) \\ &- \left[\left(1+\tau_{i+1,\ j,\ i+1}\right)\left(1+\tau_{j+1,\ i,\ j+1}\right)\right]^r\left(1+\tau_{i+1,\ j,\ i+1}\right) \\ &= \left(f_i f_j\right)^r \cdot \left\{\mathbb{E}_{2r}(\kappa_{i,j}\ ,\ f_i f_j)\right\} \cdot \left(\tau_{j+1,\ i,\ j+1} - \tau_{i+1,\ j,\ i+1}\right).\end{aligned} \tag{49}$$

证明。 根据定义 3.1.1,

$$\tau_{i+1,\ j,\ i+1} := \sum_{k_1=i+1}^{j} \sum_{k_2=i+1}^{j} \tau_{(k_1,\ j,\ k_2)} \qquad \tau_{j+1,\ i,\ j+1} := \sum_{k_1=j+1}^{i} \sum_{k_2=j+1}^{i} \tau_{(k_1,\ i,\ k_2)}. \tag{50}$$

因此,

$$\begin{aligned} &\left[\left(1+\tau_{j+1,\ i,\ j+1}\right)\left(1+\tau_{i+1,\ j,\ i+1}\right)\right]^r - \left[\left(1+\tau_{i+1,\ j,\ i+1}\right)\left(1+\tau_{j+1,\ i,\ j+1}\right)\right]^r \\ &= \left[\left(1+\sum_{k_1=j+1}^{i}\sum_{k_2=j+1}^{i}\tau_{(k_1,\ i,\ k_2)}\right)\left(1+\sum_{k_1=i+1}^{j}\sum_{k_2=i+1}^{j}\tau_{(k_1,\ j,\ k_2)}\right)\right]^r \\ &- \left[\left(1+\sum_{k_1=i+1}^{j}\sum_{k_2=i+1}^{j}\tau_{(k_1,\ j,\ k_2)}\right)\left(1+\sum_{k_1=j+1}^{i}\sum_{k_2=j+1}^{i}\tau_{(k_1,\ i,\ k_2)}\right)\right]^r \end{aligned} \tag{51}$$

and

$$\begin{aligned} &\left[\left(1+\tau_{j+1,\ i,\ j+1}\right)\left(1+\tau_{i+1,\ j,\ i+1}\right)\right]^r\left(1+\tau_{j+1,\ i,\ j+1}\right) - \left[\left(1+\tau_{i+1,\ j,\ i+1}\right)\left(1+\tau_{j+1,\ i,\ j+1}\right)\right]^r\left(1+\tau_{i+1,\ j,\ i+1}\right) \\ &= \left[\left(1+\sum_{k_1=j+1}^{i}\sum_{k_2=j+1}^{i}\tau_{(k_1,\ i,\ k_2)}\right)\left(1+\sum_{k_1=i+1}^{j}\sum_{k_2=i+1}^{j}\tau_{(k_1,\ j,\ k_2)}\right)\right]^r\left(1+\sum_{k_1=j+1}^{i}\sum_{k_2=j+1}^{i}\tau_{(k_1,\ i,\ k_2)}\right) \\ &- \left[\left(1+\sum_{k_1=i+1}^{j}\sum_{k_2=i+1}^{j}\tau_{(k_1,\ j,\ k_2)}\right)\left(1+\sum_{k_1=j+1}^{i}\sum_{k_2=j+1}^{i}\tau_{(k_1,\ i,\ k_2)}\right)\right]^r\left(1+\sum_{k_1=i+1}^{j}\sum_{k_2=i+1}^{j}\tau_{(k_1,\ j,\ k_2)}\right) \end{aligned} \tag{52}$$

Now, notice that,

$\left[\left(1+\sum_{k_1=j+1}^{i}\sum_{k_2=j+1}^{i}\tau_{(k_1,\ i,\ k_2)}\right)\left(1+\sum_{k_1=i+1}^{j}\sum_{k_2=i+1}^{j}\tau_{(k_1,\ j,\ k_2)}\right)\right]^r$,

$\left[\left(1+\sum_{k_1=i+1}^{j}\sum_{k_2=i+1}^{j}\tau_{(k_1,\ j,\ k_2)}\right)\left(1+\tau_{\sum_{k_1=j+1}^{i}\sum_{k_2=j+1}^{i}\tau_{(k_1,\ i,\ k_2)}}\right)\right]^r$,

$\left[\left(1+\sum_{k_1=j+1}^{i}\sum_{k_2=j+1}^{i}\tau_{(k_1,\ i,\ k_2)}\right)\left(1+\sum_{k_1=i+1}^{j}\sum_{k_2=i+1}^{j}\tau_{(k_1,\ j,\ k_2)}\right)\right]^r\left(1+\sum_{k_1=j+1}^{i}\sum_{k_2=j+1}^{i}\tau_{(k_1,\ i,\ k_2)}\right)$,

and

$\left[\left(1+\sum_{k_1=i+1}^{j}\sum_{k_2=i+1}^{j}\tau_{(k_1,\ j,\ k_2)}\right)\left(1+\sum_{k_1=j+1}^{i}\sum_{k_2=j+1}^{i}\tau_{(k_1,\ i,\ k_2)}\right)\right]^r\left(1+\sum_{k_1=i+1}^{j}\sum_{k_2=i+1}^{j}\tau_{(k_1,\ j,\ k_2)}\right)$

是以下形式的元素之和:

- $(\sum_{k_1=j+1}^{i}\sum_{k_2=j+1}^{i}\tau_{(k_1,\ i,\ k_2)}\cdot\sum_{k_1=i+1}^{j}\sum_{k_2=i+1}^{j}\tau_{(k_1,\ j,\ k_2)})^k$;
- $(\sum_{k_1=j+1}^{i}\sum_{k_2=j+1}^{i}\tau_{(k_1,\ i,\ k_2)}\cdot\sum_{k_1=i+1}^{j}\sum_{k_2=i+1}^{j}\tau_{(k_1,\ j,\ k_2)})^k\cdot\sum_{k_1=j+1}^{i}\sum_{k_2=j+1}^{i}\tau_{(k_1,\ i,\ k_2)}$;
- $(\sum_{k_1=i+1}^{j}\sum_{k_2=i+1}^{j}\tau_{(k_1,\ j,\ k_2)}\cdot\sum_{k_1=j+1}^{i}\sum_{k_2=j+1}^{i}\tau_{(k_1,\ i,\ k_2)})^k$;
- $(\sum_{k_1=i+1}^{j}\sum_{k_2=i+1}^{j}\tau_{(k_1,\ j,\ k_2)}\cdot\sum_{k_1=j+1}^{i}\sum_{k_2=j+1}^{i}\tau_{(k_1,\ i,\ k_2)})^k\cdot\sum_{k_1=i+1}^{j}\sum_{k_2=i+1}^{j}\tau_{(k_1,\ j,\ k_2)}$.

对于 $0 \le k \le r$。现在，根据命题 2.2.1， $\tau_i\tau_{i'} = 0$ 以及 $\tau_j\tau_{j'} = 0$ 对于 $i' \notin \{i-1, i, i+1\}$, 且$j' \notin \{j-1, j, j+1\}$。因此，以下结论成立:

•

$$\sum_{k_1=j+1}^{i}\sum_{k_2=j+1}^{i}\tau_{(k_1,\ i,\ k_2)}\cdot\sum_{k_1=i+1}^{j}\sum_{k_2=i+1}^{j}\tau_{(k_1,\ j,\ k_2)}\Big)^k$$
$$=\sum_{k_1=j+1}^{i-1}\tau_{(k_1,\ i-1,\ i-1)}$$
$$\cdot\left[\tau_i\left(\tau_{i+1}\tau_{i+2}\cdots\tau_{j-2}\tau_{j-1}+\tau_{i-1}\tau_{i-2}\cdots\tau_{j+2}\tau_{j+1}\right)\tau_j\left(\tau_{i+1}\tau_{i+2}\cdots\tau_{j-2}\tau_{j-1}+\tau_{i-1}\tau_{i-2}\cdots\tau_{j+2}\tau_{j+1}\right)\right]^{k-1}$$
$$\cdot\tau_i\left(\tau_{i+1}\tau_{i+2}\cdots\tau_{j-2}\tau_{j-1}+\tau_{i-1}\tau_{i-2}\cdots\tau_{j+2}\tau_{j+1}\right)\tau_j\cdot\sum_{k_2=i+1}^{j-1}\tau_{(j-1,\ j-1,\ k_2)};\tag{53}$$

•

$$\sum_{k_1=i+1}^{j}\sum_{k_2=i+1}^{j}\tau_{(k_1,\ j,\ k_2)}\cdot\sum_{k_1=j+1}^{i}\sum_{k_2=j+1}^{i}\tau_{(k_1,\ i,\ k_2)}\Big)^k$$
$$=\sum_{k_1=i+1}^{j-1}\tau_{(k_1,\ j-1,\ j-1)}$$
$$\cdot\left[\tau_j\left(\tau_{j+1}\tau_{j+2}\cdots\tau_{i-2}\tau_{i-1}+\tau_{j-1}\tau_{j-2}\cdots\tau_{i+2}\tau_{i+1}\right)\tau_i\left(\tau_{j+1}\tau_{j+2}\cdots\tau_{i-2}\tau_{i-1}+\tau_{j-1}\tau_{j-2}\cdots\tau_{i+2}\tau_{i+1}\right)\right]^{k-1}$$
$$\cdot\tau_j\left(\tau_{j+1}\tau_{j+2}\cdots\tau_{i-2}\tau_{i-1}+\tau_{j-1}\tau_{j-2}\cdots\tau_{i+2}\tau_{i+1}\right)\tau_i\cdot\sum_{k_2=j+1}^{i-1}\tau_{(i-1,\ i-1,\ k_2)};\tag{54}$$

•

$$\sum_{k_1=j+1}^{i}\sum_{k_2=j+1}^{i}\tau_{(k_1,\ i,\ k_2)}\cdot\sum_{k_1=i+1}^{j}\sum_{k_2=i+1}^{j}\tau_{(k_1,\ j,\ k_2)}\Big)^k\cdot\sum_{k_1=j+1}^{i}\sum_{k_2=j+1}^{i}\tau_{(k_1,\ i,\ k_2)}$$
$$=\sum_{k_1=j+1}^{i-1}\tau_{(k_1,\ i-1,\ i-1)}$$
$$\cdot\left[\tau_i\left(\tau_{i+1}\tau_{i+2}\cdots\tau_{j-2}\tau_{j-1}+\tau_{i-1}\tau_{i-2}\cdots\tau_{j+2}\tau_{j+1}\right)\tau_j\left(\tau_{i+1}\tau_{i+2}\cdots\tau_{j-2}\tau_{j-1}+\tau_{i-1}\tau_{i-2}\cdots\tau_{j+2}\tau_{j+1}\right)\right]^{k}$$
$$\cdot\tau_i\cdot\sum_{k_2=j+1}^{i-1}\tau_{(i-1,\ i-1,\ k_2)};\tag{55}$$

•

$$\sum_{k_1=i+1}^{j}\sum_{k_2=i+1}^{j}\tau_{(k_1,\,j,\,k_2)}\cdot\sum_{k_1=j+1}^{i}\sum_{k_2=j+1}^{i}\tau_{(k_1,\,i,\,k_2)})^k\cdot\sum_{k_1=i+1}^{j}\sum_{k_2=i+1}^{j}\tau_{(k_1,\,j,\,k_2)}$$
$$=\sum_{k_1=i+1}^{j-1}\tau_{(k_1,\,j-1,\,j-1)}$$
$$\cdot\left[\tau_j\left(\tau_{j+1}\tau_{j+2}\cdots\tau_{i-2}\tau_{i-1}+\tau_{j-1}\tau_{j-2}\cdots\tau_{i+2}\tau_{i+1}\right)\tau_i\left(\tau_{j+1}\tau_{j+2}\cdots\tau_{i-2}\tau_{i-1}+\tau_{j-1}\tau_{j-2}\cdots\tau_{i+2}\tau_{i+1}\right)\right]^k$$
$$\cdot\tau_j\cdot\sum_{k_2=i+1}^{j-1}\tau_{(j-1,\,j-1,\,k_2)};\tag{56}$$

那么，在命题 2.2.8 中用 $\tau_{(i+1,\,j,\,i+1)}$ 替换 τ_j ，并用 $\tau_{(j+1,\,i,\,j+1)}$ 替换 τ_i ，再应用命题 2.2.8 的相同过程，即可得到该命题所需的结果。

□

现在，我们给出一个定理，描述当关联的混合符号 Coxeter 图是一个简单环时，混合符号单纯边 Coxeter 群上的关系。

定理 3.2.5. 设 Γ 是一个单边简单环，其顶点为 s_1、s_2、.....、s_n，其中顶点 s_i 对于 $1\leq i\leq n$ 由 f_i 标记，且顶点 s_i 和 s_{i+1} 对于 $1\leq i\leq n$ 由一条单边相连。根据注记 *3.2.1*，我们令 $n+1$ 为 1，令 $1-1$ 为 n。那么对于$1\leq i$、 $j\leq n$，除考克斯特关系外：

$$(s_i\cdot s_j)^2=1\ \Leftrightarrow 2\leq|i-j|\leq n-2.\tag{57}$$

$$(s_i\cdot s_{i+1})^3=1\ \Leftrightarrow f_i=f_{i+1}.\tag{58}$$

根据命题 *1.5.2*，在 $W(\Gamma)$ 中成立以下广义 *Coxeter* 关系：

$$(s_i\cdot s_{i+1,\,j,\,i+1})^3=1\ \Leftrightarrow\ j\neq i-1\quad and\quad f_i=f_j\tag{59}$$

$$(s_{j+1,i,j+1}\cdot s_{i+1,j,i+1})^2=1\ \Leftrightarrow\ \frac{\prod_{k=1}^{n}f_k}{f_i\cdot f_j}=-1.\tag{60}$$

证明。 注意，对于 $j\neq i-1$， Γ 中以顶点集 $\{s_i,s_{i+1},\ldots,s_j\}$ 为顶点的子图是一条直线。因此，根据定理 3.1.4，考虑与该子图关联的混合符号 Coxeter 群时，公式 (59) 中的关系成立。于是，我们转而证明公式 (60) 中的关系。

首先，根据命题 3.2.2，关联双线性形式可能退化的唯一情形是以下情况之一成立时：

- $f_i=+1$ 对每个 $1\leq i\leq n$;
- $f_i=-1$ 对于每个 $1\leq i\leq n$， n 都是偶数。

在这两种情况下，都不存在满足 $1 \le i, j \le n$ 且满足公式 (60) 的条件 $\frac{\prod_{k=1}^{n} f_k}{f_i \cdot f_j} = -1$ 的 i 和 j。因此，在定理的证明中，我们可以假设并使用关联双线性形式是非退化的。

By Definition 3.1.1, $\pi_{s_{i+1,j,\ i+1}} = 1 + \tau_{i+1,j,\ i+1}$ and $\pi_{s_{j+1,i,\ j+1}} = 1 + \tau_{j+1,i,\ j+1}$.

因此，我们需要证明:

$$[(1 + \tau_{i+1,j,\ i+1})(1 + \tau_{j+1,i,\ j+1})]^2 = 1 \quad \text{if and only if} \quad \frac{\prod_{k=1}^{n} f_k}{f_i \cdot f_j} = -1.$$

注意，条件

$$[(1 + \tau_{i+1,j,i+1})(1 + \tau_{j+1,i,j+1})]^2 = 1 \tag{61}$$

等价于

$$(1 + \tau_{i+1,j,i+1})(1 + \tau_{j+1,i,j+1}) = (1 + \tau_{j+1,i,j+1})(1 + \tau_{i+1,j,i+1}), \tag{62}$$

其中，方程 (62) 等价于:

$$\tau_{i+1,j,i+1} \cdot \tau_{j+1,i,j+1} = \tau_{j+1,i,j+1} \cdot \tau_{i+1,j,i+1} \tag{63}$$

根据定义 3.1.1 中对 $\tau_{i+1,\ j,\ i+1}$ 和 $\tau_{j+1,i,\ j+1}$ 的定义，再根据命题 2.2.4，方程 (63) 成立当且仅当

$$\tau_{i+1,j,i+1} \cdot \tau_{j+1,i,j+1} = 0 \quad \text{and} \quad \tau_{j+1,i,j+1} \cdot \tau_{i+1,j,i+1} = 0. \tag{64}$$

由于根据命题 3.2.2，关联双线性形式是非退化的（除 $\widetilde{\ }$ 的 $W(\Gamma) = S_n$ 情形外；如证明开头所述，这种情形与我们的证明无关），我们将命题 2.2.7 应用于方程 (64)。因此，对于每个 $p \in \{i+1, i+2, \ldots, j-1, j\}$ 和 $q \in \{j+1, j+2, \ldots, i-1, i\}$,

$$\left(\sum_{k_1=i+1}^{j} \tau_{(p,j,k_1)} \right) \cdot \left(\sum_{k_2=j+1}^{i} \tau_{(k_2,i,q)} \right) = 0. \tag{65}$$

注意，根据命题 2.2.1 的第二部分，如果 $|k_1 - k_2| \neq 1$，那么 $\tau_{(p,j,k_1)} \cdot \tau_{(k_2,i,q)} = 0$。

因此，方程 (65) 等价于:

$$\tau_{(p,j,j)} \cdot \tau_{(j+1,i,q)} + \tau_{(p,j,i+1)} \cdot \tau_{(i,i,q)} = 0 \tag{66}$$

其中，方程 (66) 可以写成以下形式:

$$\tau_{(p,j-1,j-1)} \cdot (\tau_j \cdot \tau_{j+1} \cdots \tau_{i-1} \tau_i + \tau_j \cdot \tau_{j-1} \cdots \tau_{i+1} \tau_i) \cdot \tau_{(i-1,i-1,q)} = 0. \tag{67}$$

根据命题 2.2.7，我们由方程 (67) 推导出以下观察结果:

$$\tau_j \cdot \tau_{j+1} \cdots \tau_{i-1} \tau_i + \tau_j \cdot \tau_{j-1} \cdots \tau_{i+1} \tau_i = 0. \tag{68}$$

根据命题 2.2.1 的第三部分，方程（68）成立当且仅当:

$$f_j \cdot f_{j+1} \cdots f_{i-1} + f_j \cdot f_{j-1} \cdots f_{i+1} = f_j \cdot (f_{j+1} \cdots f_{i-1} + f_{j-1} \cdots f_{i+1}) = 0. \tag{69}$$

由于对于每个 $1 \le k \le n$ 都有 $f_k \in \{1, -1\}$，方程（69）成立当且仅当

$$f_{j+1} \cdot f_{j+2} \cdots f_{i-1} = -f_{j-1} \cdot f_{j-2} \cdots f_{i+1}$$

这等价于:

$$\frac{\prod_{k=1}^{n} f_k}{f_i \cdot f_j} = -1.$$

现在，我们来找出哪种形式的关系

$$(s_{j+1,\ i,\ j+1} \cdot s_{i+1,\ j,\ i+1})^r = 1 \qquad \text{for} \quad r \ge 3. \tag{70}$$

可能在 W 中成立。
考虑方程（70）中的关系。
由于 $s_{j+1,\ i,\ j+1}$ 和 $s_{i+1,\ j,\ i+1}$ 都是对合，方程（70）等价于:

- 在偶数 r的情况下:

$$\left[(1 + \tau_{j+1,\ i,\ j+1})\,(1 + \tau_{i+1,\ j,\ i+1})\right]^{\frac{r}{2}} - \left[(1 + \tau_{i+1,\ j,\ i+1})\,(1 + \tau_{j+1,\ i,\ j+1})\right]^{\frac{r}{2}}; \tag{71}$$

- 当 r 为奇数时:

$$\begin{aligned} &\left[(1 + \tau_{j+1,\ i,\ j+1})\,(1 + \tau_{i+1,\ j,\ i+1})\right]^{\frac{r-1}{2}} (1 + \tau_{j+1,\ i,\ j+1}) \\ &- \left[(1 + \tau_{i+1,\ j,\ i+1})\,(1 + \tau_{j+1,\ i,\ j+1})\right]^{\frac{r-1}{2}} (1 + \tau_{i+1,\ j,\ i+1})\,. \end{aligned} \tag{72}$$

现在，由命题 3.2.4 可知:

- 当 r为偶数时:

$$\begin{aligned} &\left[(1 + \tau_{j+1,\ i,\ j+1})\,(1 + \tau_{i+1,\ j,\ i+1})\right]^{\frac{r}{2}} - \left[(1 + \tau_{i+1,\ j,\ i+1})\,(1 + \tau_{j+1,\ i,\ j+1})\right]^{\frac{r}{2}} \\ &= (f_i f_j)^{\frac{r}{2}-1} \cdot \{\mathbb{E}_{r-1}(\kappa_{i,j}\ ,\ f_i f_j)\} \cdot (\tau_{j+1,\ i,\ j+1} \cdot \tau_{i+1,\ j,\ i+1} - \tau_{i+1,\ j,\ i+1} \cdot \tau_{j+1,\ i,\ j+1})\,. \end{aligned} \tag{73}$$

- 当 r 为奇数时:

$$\begin{aligned} &\left[(1 + \tau_{j+1,\ i,\ j+1})(1 + \tau_{i+1,\ j,\ i+1})\right]^{\frac{r-1}{2}} (1 + \tau_{j+1,\ i,\ j+1}) \\ &- \left[(1 + \tau_{i+1,\ j,\ i+1})(1 + \tau_{j+1,\ i,\ j+1})\right]^{\frac{r-1}{2}} (1 + \tau_{i+1,\ j,\ i+1}) \\ &= (f_i f_j)^{\frac{r-1}{2}} \cdot \{\mathbb{E}_{r-1}(\kappa_{i,j}\ ,\ f_i f_j)\} \cdot (\tau_{j+1,\ i,\ j+1} - \tau_{i+1,\ j,\ i+1})\,. \end{aligned} \tag{74}$$

其中，$\kappa_{i,\ j} := f_{i+1} \cdot f_{i+2} \cdots f_{j-1} + f_{i-1} \cdot f_{i-2} \cdots f_{j+1}$。

注意,

$$(\tau_{j+1,\ i,\ j+1} - \tau_{i+1,\ j,\ i+1}) \neq 0$$

and

$(\tau_{j+1,\ i,\ j+1} \cdot \tau_{i+1,\ j,\ i+1} - \tau_{i+1,\ j,\ i+1} \cdot \tau_{j+1,\ i,\ j+1}) = 0 \Leftrightarrow s_{j+1,\ i,\ j+1} \cdot s_{i+1,\ j,\ i+1} = s_{i+1,\ j,\ i+1} \cdot s_{j+1,\ i,\ j+1}$。
当且仅当 $r = 2$ 和 $\prod_{\substack{k=1 \\ f_i f_j}}^{n} f_k = -1$时成立，因为这已在定理中证明。由于 f_i, f_j 要么是 $+1$，要么是 -1，利用方程（73）和（74），方程（70）当且仅当

$$\mathbb{E}_{r-1}(\kappa_{i,j}\ ,\ f_i f_j) = 0. \tag{75}$$

其中，当且仅当满足以下条件时，方程（75）成立:

- $r = 2m$，其中 $m \in \mathbb{N}$;
- $\kappa_{i,j} = f_{i+1} \cdot f_{i+2} \cdots f_{j-1} + f_{i-1} \cdot f_{i-2} \cdots f_{j+1} = 0$, which is equivalent to $\frac{\prod_{k=1}^{n} f_k}{f_i \cdot f_j} = -1$.

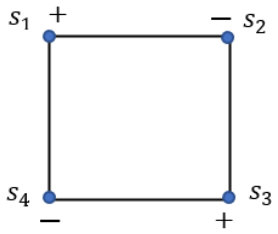
因此，
定义关系为

$$(s_{j+1,i,j+1} \cdot s_{i+1,j,i+1})^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{\prod_{k=1}^{n} f_k}{f_i \cdot f_j} = -1. \tag{76}$$

□

备注 3.2.6. 请注意，在定理 3.2.5 的证明中，除了通常的考克斯特关系（$s_i s_j)^{\,r} = 1$（其中，对于单边混合符号 Coxeter 群，$r \in \{2, 3\}$，而 $1 \leq i,\ j \leq n$（请注意，对于 $r = 3$，顶点 s_i 和 s_j 的符号满足 $f_i = f_j$））），我们只考虑以下形式的关系（$s_i s_{i+1,\ j,\ i+1})^{\,r_1} = 1$，其中 $j \neq i-1$（由顶点集为 $\{s_i, s_{i+1}, \ldots, s_j\}$ 的子图诱导），以及以下形式的关系（$[s_{j+1,i,j+1}][s_{i+1,\ j,\ i+1}])^{\,r_2} = 1$（该关系包含 $W(\Gamma)$ 中 $1 \leq k \leq n$ 的所有生成元 s_k）。请注意，对于关联的混合符号考克斯特图为单边简单环的混合符号考克斯特群，r_1 等于 3，r_2 等于 2。类似于证明考克斯特群中的每个关系都可由某个 r [6] 的形式为（$s_i s_j)^{\,r} = 1$ 的关系推出的方法，可以证明，任何其他类型的关系（可用定理 3.1.4 和 3.2.5 的证明中的相同方法找到）都可由定理 3.2.5 中提到的关系推出。

例 3.2.7. 与混合符号考克斯特图相关联的混合符号考克斯特群的表示如下方阵所示：



is:

$$\begin{aligned}
&\langle s_1, s_2, s_3, s_4 | s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = s_4^2 = 1,\ (s_1 s_3)^2 = (s_2 s_4)^2 = 1,\\
&(s_1 s_2 s_3 s_2)^3 = (s_2 s_3 s_4 s_3)^3 = (s_3 s_4 s_1 s_4)^3 = (s_4 s_1 s_2 s_1)^3 = 1,\\
&(s_1 s_2 s_3 s_4 s_3 s_2)^2 = (s_2 s_3 s_4 s_1 s_4 s_3)^2 = (s_3 s_4 s_1 s_2 s_1 s_4)^2 =\\
&(s_4 s_1 s_2 s_3 s_2 s_1)^2 = 1\rangle.
\end{aligned}$$

3.2.1 某些混合符号单边简单环的分类

现在，我们对混合符号考克斯特群进行分类，其中在某些特殊情形下，其关联的混合符号考克斯特图是一个单边简单环。我们首先完整分类关联的简单环具有 3 个顶点的情形，然后转向简单

环，其中环的所有顶点都带有相同的符号。最后，我们证明：当关联的混合符号考克斯特图是一个简单环、具有奇数长度，且图的顶点带有符号 -1 时，我们得到的混合符号考克斯特群就是 CoxeterD_n （这一点已在 [4] 中提及，但未给出证明，因为其中仅通过 GAP 检查予以验证）。我们先介绍一个有用的引理，并将在证明中使用它。

引理 3.2.8。设 Γ 是一个混合符号考克斯特图，它是长度为 n 的单边简单环，其顶点 s_1、s_2、……、s_n 分别带有符号 f_1、f_2、……、f_n，并且满足 $f_{i-1} = f_i = f_{i+1}$，其中 $1 \leq i \leq n$ （根据注记 3.2.1， $n+1 := 1$ 且 $1-1 := n$）。那么， $W(\Gamma)$ 中的下列元素：

$$s_i(s_{i+1}s_{i+2}\cdots s_{i-2}s_{i-1}s_{i-2}\cdots s_{i+2}s_{i+1})$$

与……共轭

$$s_{i+1}(s_{i+2}s_{i+3}\cdots s_{i-2}s_{i-1}s_is_{i-1}s_{i-2}\cdots s_{i+3}s_{i+2}).$$

特别地，若对所有 $1 \leq i \leq n$， f_i 都相同（即对所有 $1 \leq i \leq n$，要么是 $f_i = -1$，要么是 $f_i = +1$），那么所有形如

$$s_i(s_{i+1}s_{i+2}\cdots s_{i-2}s_{i-1}s_{i-2}\cdots s_{i+2}s_{i+1})$$

与……共轭

$$s_1(s_2s_3\cdots s_{n-1}s_ns_{n-1}\cdots s_3s_2).$$

证明。考虑带有生成元 s_1、s_2、$\ldots s_n$ 的 $W(\Gamma)$，使得 $f_{i-1} = f_i = f_{i+1}$，其中 $1 \leq i \leq n$。那么，$W(\Gamma)$ 中成立以下关系：

- $s_i^2 = 1$;
- $s_is_{i+1}s_i = s_{i+1}s_is_{i+1}$ 根据注记 3.2.1，我们考虑 $n+1 := 1$;
- $s_is_j = s_js_i$ 对于 $|i-j| \neq 1$。

因此，

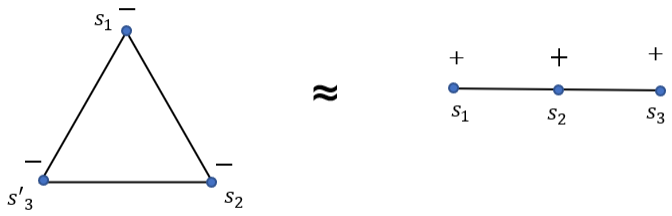
$$\begin{aligned}
&(s_is_{i+1})[s_i(s_{i+1}s_{i+2}\cdots s_{i-2}s_{i-1}s_{i-2}\cdots s_{i+2}s_{i+1})](s_{i+1}s_i)\\
&= s_is_is_{i+1}s_is_{i+2}s_{i+3}\cdots s_{i-2}s_{i-1}s_{i-2}\cdots s_{i+2}s_i\\
&= s_{i+1}(s_is_{i+2}s_{i+3}\cdots s_{i-2}s_{i-1}s_{i-2}\cdots s_{i+3}s_{i+2}s_i)\\
&= s_{i+1}(s_{i+2}s_{i+3}\cdots s_{i-2}s_is_{i-1}s_is_{i-2}\cdots s_{i+3}s_{i+2})\\
&= s_{i+1}(s_{i+2}s_{i+3}\cdots s_{i-2}s_{i-1}s_is_{i-1}s_{i-2}\cdots s_{i+3}s_{i+2}).
\end{aligned}$$

□

情形： $n = 3$

现在，我们对混合符号考克斯特图为长度 3 的单边简单环的混合符号考克斯特群进行分类。我们揭示了这类群与其关联的混合符号考克斯特图为含 3 个顶点的直线的混合符号考克斯特群之间的紧密联系。

1. 考虑右侧的混合符号考克斯特图（它是一个考克斯特图，因为所有标记都是+1）：



与之关联的考克斯特群，也就是对称群 S_4，具有如下表示：

$$\langle s_1, s_2, s_3 \mid s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = 1,\ (s_1 s_3)^2 = 1,\ (s_1 s_2)^3 = (s_2 s_3)^3 = 1 \rangle.$$

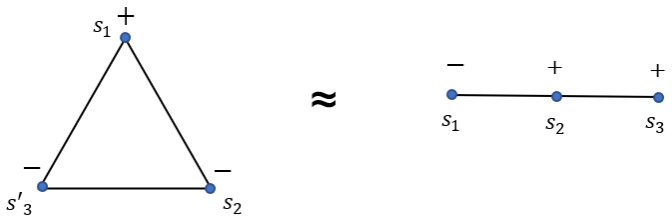
定义 $s'_3 := s_2 s_3 s_2$. 那么，使用生成元 s_1， s_2， s'_3 得到的同一个考克斯特群的表示如下：

$$\langle s_1, s_2, s'_3 \mid s_1^2 = s_2^2 = {s'}_3^2 = 1,\ (s_1 s_2 s'_3 s_2)^2 = (s_1 s_2)^3 = (s_2 s'_3)^3 = (s_1 s'_3)^3 = 1 \rangle.$$

其中，该表示与左侧简单环对应的混合符号考克斯特图所关联的混合符号考克斯特群的表示相同。

注意，根据引理 3.2.8，三个元素 $s_2 s'_3 s_1 s'_3$、 $s_1 s_2 s'_3 s_2$ 和 $s'_3 s_1 s_2 s_1$ 在 $W(\Gamma)$ 中是共轭元素，因此 $(s_1 s_2 s'_3 s_2)^2 = 1$ 蕴含 $(s_2 s'_3 s_1 s'_3)^2 = 1$ ， $(s'_3 s_1 s_2 s_1)^2 = 1$ 也同样成立。

2. 考虑右侧的混合符号考克斯特图：



相应的混合符号考克斯特群具有如下表示：

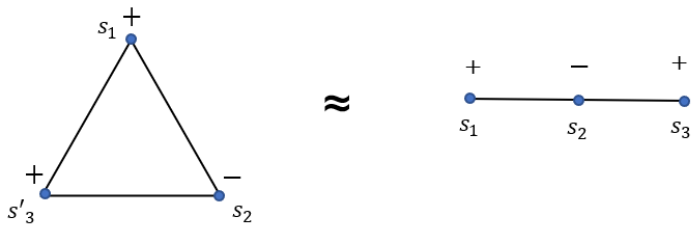
$$\langle s_1, s_2, s_3 \mid s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = 1,\ (s_1 s_3)^2 = 1,\ (s_2 s_3)^3 = 1 \rangle.$$

定义 $s'_3 := s_2 s_3 s_2$. 那么，使用生成元 s_1、 s_2、 s'_3 对同一个混合符号考克斯特群的表示如下：

$$\langle s_1, s_2, s'_3 \mid s_1^2 = s_2^2 = {s'}_3^2 = 1,\ (s_1 s_2 {s'}_3 s_2)^2 = (s_2 s'_3)^3 = 1 \rangle.$$

其中，其表示与左侧简单环混合符号考克斯特图所对应的混合符号考克斯特群的表示相同。

3. 考虑右侧的混合符号考克斯特图:



对应的混合符号考克斯特群具有如下表示:

$$\langle s_1, s_2, s_3 \mid s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = 1,\ (s_1 s_3)^2 = 1,\ (s_1 s_2 s_3 s_2)^3 = 1 \rangle.$$

定义 $s'_3 := s_2 s_3 s_2$. 那么，使用生成元 s_1、s_2、s'_3 对同一个混合符号考克斯特群的表示如下:

$$\langle s_1, s_2, s'_3 \mid s_1^2 = s_2^2 = {s'}_3^2 = 1,\ (s_1 s_2 s'_3 s_2)^2 = 1,\ (s_1 s'_3)^3 = 1 \rangle.$$

其中，该表示与左侧简单环对应的混合符号考克斯特图所关联的混合符号考克斯特群的表示相同。

与上述混合符号考克斯特图对应的混合符号考克斯特群的表示**不是**考克斯特群，因为这些群中存在涉及两个以上生成元的关系。

单边简单环——所有顶点的符号相同

现在，我们对混合符号考克斯特群进行分类，其中关联的混合符号考克斯特图是单边简单环，且所有顶点的符号都相同（ $+1$或-1）。

命题 3.2.9。设 Γ 是一个混合符号考克斯特图，且 Γ 是一个长度为 n 的简单环（即具有 n 个顶点和 n 条边的简单环）。

- 若 Γ 的所有顶点均标记为 $+1$,

$$W(\Gamma) \approx \widetilde{S}_n.$$

- 若 Γ 的所有顶点均标记为 -1，则有以下子情形:

1. 若 Γ 是一个偶数长度环（即 n 为偶数），则

$$W(\Gamma) \approx \widetilde{S}_n.$$

2. 若 Γ 是奇数长度环（即 n 为奇数），则

$$W(\Gamma) \approx D_n.$$

证明。 若混合符号考克斯特图的所有顶点都标记为 $+1$，则相应的混合符号考克斯特群是一个考克斯特群。因此，根据考克斯特群分类，~[6] $W(\Gamma) \approx S_n$。因此，假设混合符号考克斯特图的所有顶点都标记为 -1。

假设情形 1。那么， Γ是一个偶数长度环，因此， Γ是一个二部图。根据注释 1.5.8， $W(\Gamma) \approx W(-\Gamma)$。因此我们有：

$$W(\Gamma) \approx W(-\Gamma) \approx \widetilde{S}_n.$$

假设情形 2。设 $\Gamma = C^-_{2n+1}$ 为一个混合符号考克斯特图，它是一个单边简单环，其顶点为 s_1，s_2、.....、 s_{2n+1}（即顶点数为奇数），并且对所有$1 \leq i \leq 2n+1$都有 $f_i = -1$。那么，根据定理 3.2.5，除标准考克斯特关系之外，还满足以下关系

$$[s_i(s_{i+1}s_{i+2}\cdots s_{i-2}s_{i-1}s_{i-2}\cdots s_{i+1})]^2 = 1, \tag{77}$$

对于 $1 \leq i \leq 2n+1$，（根据注记 3.2.1，$(2n+1)+1 := 1$）。根据引理 3.2.8，所有形如以下形式的元素

$$s_i(s_{i+1}s_{i+2}\cdots s_{i-2}s_{i-1}s_{i-2}\cdots s_{i+1}s_i)$$

是 $W(C^-_{2n+1})$ 中的共轭元素。因此，公式 (77) 中的所有关系都可以由以下关系推导出来。

$$[s_1(s_2s_3\cdots s_{2n}s_{2n+1}s_{2n}\cdots s_3s_2)]^2 = 1. \tag{78}$$

定义 s'_0 为 $(s_2s_3\cdots s_{2n}s_{2n+1}s_{2n}\cdots s_3s_2)$。注意，元素 s_1、 s_2、 $\ldots s_{2n}$、 s'_0 生成群 $W(C^-_{2n+1})$。现在，考虑由生成元 s_1、 s_2、 $\ldots s_{2n}$、 s'_0给出的 $W(C^-_{2n+1})$ 的表示。则有以下关系：根据 s'_0 的定义和公式 (78)，我们有：

$$(s_1s'_0)^2 = 1.$$

现在，考虑 s'_0 与 s_i 在 $2 \leq i \leq 2n$情况下的关系。利用以下性质：与顶点 s_2、 s_3、 $\ldots$、 s_{2n+1} 对应的子图所关联的混合符号考克斯特群是 Coxeter 群 S_{2n+1}，其标准关系为

- $(s_is_{i+1})^3 = 1$;
- $(s_is_j)^2 = 1$ 对于 $|i-j| > 1$。

因此，对于每个 $2 \leq i < j \leq 2n$，以下结论成立：

$$s_is_{i+1}\cdots s_{j-1}s_js_{j-1}\cdots s_{i+1}s_i = s_js_{j-1}\cdots s_{i+1}s_is_{i+1}\cdots s_{j-1}s_j.$$

因此，

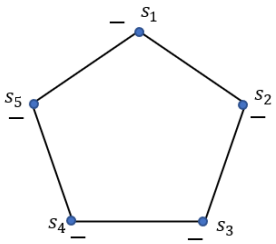
$$\begin{aligned}(s'_0s_2)^3 &= ([s_2s_3\cdots s_{2n}s_{2n+1}s_{2n}\cdots s_3s_2]s_2)^3 = ([s_3\cdots s_{2n}s_{2n+1}s_{2n}\cdots s_3]s_2)^3\\ &= ([s_{2n+1}s_{2n}\cdots s_4s_3s_4\cdots s_{2n}s_{2n+1}]s_2)^3 = (s_3s_2)^3 = 1.\end{aligned}$$

现在，对于 $3 \leq k \leq 2n$:

$$\begin{aligned}(s'_0s_k)^2 &= ([s_2s_3\cdots s_{2n}s_{2n+1}s_{2n}\cdots s_3s_2]s_k)^2 = ([s_{k-1}s_ks_{k+1}s_ks_{k-1}]s_k)^2\\ &= ([s_ks_{k+1}s_k][s_{k-1}s_ks_{k-1}])^2 = ([s_ks_{k+1}s_k][s_ks_{k-1}s_k])^2 = (s_{k+1}s_{k-1})^2 = 1\end{aligned}$$

□

例 3.2.10。 考虑图



其中 $n=5$ 和 $f_i=-1\ \forall i$，则关系为：

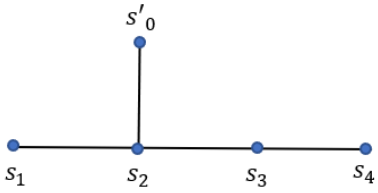
$$\begin{aligned} W(C_5^-) = \langle s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \mid & {s_1}^2 = {s_2}^2 = {s_3}^2 = {s_4}^2 = {s_5}^2 = 1, \\ & (s_1s_3)^2 = (s_1s_4)^2 = (s_2s_4)^2 = (s_2s_5)^2 = (s_3s_5)^2 = 1, \\ & (s_1s_2)^3 = (s_2s_3)^3 = (s_3s_4)^3 = (s_4s_5)^3 = (s_1s_5)^3 = 1, \\ & (s_1[s_2s_3s_4s_5s_4s_3s_2])^2 = 1.\rangle \end{aligned} \tag{79}$$

定义 s_0' 为 $s_2s_3s_4s_5s_4s_3s_2$，并考虑由生成元s_1、 s_2、 s_3、 s_4、 s_0'给出的 $W(C_5^-)$ 的表示。于是方程（79）中的关系变为：

- ${s_5}^2 = 1$ 变为 ${s_0'}^2 = 1$;
- $(s_2s_5)^2 = (s_3s_5)^2 = (s_4s_5)^3 = 1$ 变为 $(s_3s_0')^2 =(s_4s_0')^2 =(s_2s_0')^3 = 1$;
- $(s_1[s_2s_3s_4s_5s_4s_3s_2])^2 = 1$ 变为 $(s_1s_0')^2 = 1$;
- 关系 $(s_1s_5)^3$ 可由 $W(C_5^-)$ 的其余关系推出，如下所示：定义$s_0' := s_2s_3s_4s_5s_4s_3s_2$ 推出 $s_5 = s_4s_3s_2s_0's_2s_3s_4$。然后，利用 $s_1s_4 = s_4s_1$、 $s_1s_3 = s_3s_1$、$s_2s_0's_2 = s_0's_2s_0'$、 $s_0's_1 = s_1s_0'$ 和 $(s_1s_2)^3 = 1$，可得：

$$\begin{aligned} (s_1s_5)^3 &= (s_1[s_4s_3s_2s_0's_2s_3s_4])^3 \\ &= (s_1[s_3s_2s_0's_2s_3])^3 = (s_1[s_2s_0's_2])^3 \\ &= (s_1[s_0's_2s_0'])^3 = (s_1s_2)^3 = 1. \end{aligned}$$

因此，使用生成元集合 $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_0'\}$ 而非集合 $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ 对 $W(C_5^-)$ 进行表示，得到的是一个考克斯特群表示，其关联的考克斯特图如下：



4 结论与未来计划

我们用生成元与关系对 Coxeter 群的商群进行了分类，这些商群可表示为单边混合符号 Coxeter 群 $[12, 4],$，其 Coxeter 图是

一条直线或一个简单环，并且关联双线性型的矩阵满足非奇异条件。将本文的结果推广到其他单边 Coxeter 图（例如一般的树或非简单环）以及非单边混合符号考克斯特图，是很有意义的。

参考文献

[1] M. Amram, R. Lawrence, U. Vishne, 《辫群的阿廷覆盖》《结理论及其分支杂志》21(7) (2012)[2] M. Amram, R. Shwartz, M. Teicher, 《经典科克斯特群的科克斯特覆盖》, 《国际代数与计算杂志》20 (2010) 1041-1062.[3] M. Amram, R. Shwartz, M. Teicher, 《D 型阿廷群的覆盖》, 《电子组合学杂志》24(4) (2017), 研究论文 17.[4] J. K. Armstrong, 《混合符号科克斯特系统的主元素》, 《电子学位论文、专题论文与学位论文集》。论文 4697, (2012).[5] M. Barot, R. J. Marsh, 《源自簇代数的反射群表示》, 《美国数学会汇刊》367 (2015) 1945-1967.[6] A. Bj¨orner, F. Brenti, 《科克斯特群的组合学》, 研究生数学丛书, 第 231 卷, 施普林格 (2004).[7] V. Bugaenko, Y. Cherniavsky, T. Nagnibeda, and R. Shwartz, 《加权科克斯特图与 Coxeter 群的广义几何表示》, 《离散应用数学》第 192 卷, 第 17-27 页 (2015).[8] P. J. Cameron, J. J. Seidel, S. V. Tsaranov, 《符号图、格与 Coxeter 群》, 《代数杂志》164 (1994) 173-209.

[9] Y. Cherniavsky、A.Goldstein、V. E. Levit、R. Shwartz, 《有向图上的平衡有限群值函数》, 《信息处理快报》**116** （2016）484-488。

[10] Y. Cherniavsky, R. Shwartz, 《与符号线图相关的科克斯特群的商群》, 《离散数学进展与应用》25 (2), 213-261 (2020).[11] L. E. Dickson, 《关于素数次字母置换的解析表示，并论述线性群 I、II》。《数学年刊》11 (1/6) (1897) 65-120.[12] E. Hironaka, 《与混合符号考克斯特图相关的映射类》, 预印本, 见 arXiv (2011).[13]J. Howie, R. Shwartz, 《由广义三角群诱导的单关系子乘积》, 《代数通信》**32** (2004)2505-2526.[14] L. Rowen, M. Teicher, U. Vishne, 《对称群的科克斯特覆盖》, 《群论杂志》8 (2005) 139-169.

[15] R. Shwartz, 《某些单关系词自由积中的自由定理 1》, 《代数与计算国际期刊》11(2001) 673-706.

[16] R 。Shwartz, 《关于某些单关系词自由积中的自由定理 3》, 爱丁堡数学学会会议录 h M爱丁堡数学学会 45（2002）693-700。