arXiv:2302.03412v1 [math.PR] 7 Feb 2023

由高斯过程驱动的分布依赖型反向随机微分方程

范希良[a)]，吴江伦[b)]

[a)]安徽师范大学数学与统计学院，中国芜湖 241002[b)]斯旺西大学数学系，英国海湾校区，SA1 8EN

fanxiliang0515@163.com, j.l.wu@swansea.ac.uk

2023年2月8日

摘要

本文研究由高斯过程驱动的分布依赖型倒向随机微分方程（DDBSDE）。我们首先证明了这类方程解的存在性与唯一性。具体而言，我们提出一种传递原理，将适定性问题转化为一个由布朗运动驱动的辅助 DDBSDE。随后，在生成元满足 Lipschitz 条件且其 Lions 导数有界的假设下，我们建立了比较定理。此外，我们还得到了由高斯过程驱动的 DDBSDE 的一种新表示；即使对于由布朗运动驱动的方程，这种表示也是新的。借助这一新表示，我们证明了逆比较定理。最后，在同胚条件下，通过研究 Wasserstein 距离和测度相对熵的稳定性，我们推导出运输不等式和对数 Sobolev 不等式。

AMS 数学主题分类：60H10、60G15、60G22

关键词：分布依赖型反向随机微分方程；高斯过程；比较定理；逆比较定理；运输不等式；对数 Sobolev 不等式。

1 引言

倒向随机微分方程（反向随机微分方程）最初由 Bismut 于 [3] 以线性形式提出，用于研究随机控制问题及其与随机版本的 Pontryagin 最大值原理之间的联系。随后，BSDEs 在开创性著作 [32]中得到系统形式化并发展。近几十年来，BSDEs 在随机分析领域日益受到关注，因为这类方程自然出现在数学金融中的随机控制问题里，并且能够为半线性偏微分方程提供 Feynman–Kac 型公式（例如参见 [16, 30, 33, 41]）。

另一方面，分布依赖随机微分方程（分布依赖随机微分方程），也称为平均场方程或 McKean–Vlasov 方程，是其系数依赖于解的概率分布的 Itˆo 方程。由于分布依赖随机微分方程能够为一类非线性偏微分方程的解提供概率表示，其中一个典型例子是混沌传播，因此它们被广泛用于统计物理建模，也用于研究平均场博弈背景下的大规模社会互动；相关内容可参见例如 [5, 10, 23] 及其中的参考文献。此外，非线性分布依赖倒向随机微分方程最初由 Buckdahn、Djehiche、Li 和 Peng 在 [7]中提出。此后，DDBSDEs 日益受到关注，并在多种设定下得到研究。这里仅举几个例子。Chassagneux、Crisan 和 Delarue [12] 证明了完全耦合分布依赖倒向随机微分方程的解的存在性与唯一性；Carmona 和 Delarue [10] 通过随机最大值原理研究了 DDB- SDEs；Li [28] 研究了由布朗运动和独立泊松随机测度驱动的 DDBSDEs 的适定性问题，并为一类平均场型非局部偏微分方程提供了概率表示；Li、Liang 和 Zhang [29] 为 DDBSDEs 建立了比较定理。

本文旨在研究以下由高斯过程驱动的 DDBSDE：

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = -f(t, X_t, Y_t, Z_t, \mathscr{L}_{(X_t,Y_t,Z_t)})\mathrm{d}V_t + Z_t \mathrm{d}^{\diamond} X_t, \\ Y_T = g(X_T, \mathscr{L}_{X_T}), \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，X 是一个中心化一维高斯过程，使得 $V_t := \mathrm{Var} X_t, t \in [0, T]$是严格递增的连续函数，且 $V(0) = 0$ 在 [2], $\mathscr{L}_{(X_t,Y_t,Z_t)}$ 中引入，$\mathscr{L}_{X_T}$分别表示(X_t, Y_t, Z_t)和 X_T的分布；随机积分是由 S-变换和 Wick 乘积定义的 Wick-Itˆo 积分（见第2.1节）。关于生成元 f: $[0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathscr{P}_\theta(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 以及终端值函数 $g: \mathbb{R} \times \mathscr{P}_\theta(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 的精确假设将在后续章节中说明，其中$\mathscr{P}_\theta(\mathbb{R}^m)$表示 $\mathbb{R}^m$ 上具有有限 θ阶矩的概率测度全体。我们还想指出，（1.1）中的驱动噪声 X 包括Hurst 参数 $H \in (0, 1)$下的分数布朗运动B^H（而 $B^{1/2}$ 是标准布朗运动）以及分数 Wiener 积分（见注 2.1）。

本文的主要目标是证明（逆）比较定理的适定性，并进一步为（1.1）建立包括运输不等式和对数 Sobolev 不等式在内的泛函不等式。我们的策略如下。基于一种新的传递原理——该原理将 [2, Theroem 3.1] 推广到分布依赖情形——我们首先证明（1.1）的一般存在唯一性结果（见定理 3.1），随后将其应用于 Lipschitz 生成元 f的情形。其次，借助关于 L-导数的一个公式，我们能够推导出一个比较定理，该定理推广并改进了现有文献中的相应结果（见定理 4.1 和注 4.1）。值得强调的是，与分布无关情形下的研究相比，这里我们需要对 f 施加一个附加条件，该条件涉及 f的 Lions导数。此外，我们还得到了一个逆比较定理，粗略地说，它是对上述比较定理的逆命题（见定理 4.3 和注 4.3）。为此，我们为生成元 f 提供了一个表示定理；即使对于由布朗运动驱动的 DDBSDEs，该结果也是新的，其本身也颇具意义。最后，通过

利用同胚下 Wasserstein 距离和测度相对熵的稳定性，我们建立了若干泛函不等式，包括运输不等式和对数 Sobolev 不等式（见定理5.2和5.5）。这里需要指出的是，定理5.2中所述的（1.1）控制解 Z 的分布所满足的运输不等式具有如下形式

$$\mathbb{W}_p(\mathscr{L}_Z,\mu)\le C\left(H(\mu|\mathscr{L}_Z)\right)^{\frac{1}{2p}}$$

对任意 $p\ge 1$ 均成立。特别地，当 $p=2$ 时，该不等式化简为

$$\mathbb{W}_2(\mathscr{L}_Z,\mu)\le C\left(H(\mu|\mathscr{L}_Z)\right)^{\frac{1}{4}},$$

这显然不同于通常的二次运输不等式（也称为 Talagrand不等式）。另一方面，如 [1], 所示，这类不等式可以用来推导偏差不等式。然而，它无法导出其他重要的不等式，例如 Poincar´e 不等式等。因此，一个有趣的问题是，我们的结果能否在 $\mathbb{W}_2(\mathscr{L}_Z,\mu)\le C\sqrt{H(\mu|\mathscr{L}_Z)}$ 的意义下进一步改进。目前，我们的技术还~~不足以~~给出完整的答案，因为下文的引理 6.1 不适用于 Z 的情形。我们将把这一课题留待今后研究。

本文余下部分安排如下。第2节介绍高斯过程和 Lions导数的一些基本事实，并给出一个传递结果，以便建立所研究的 DDBSDE 与由布朗运动驱动的 DDBSDE 之间的联系。第3节证明由高斯过程驱动的 DDBSDE 的解的存在性与唯一性。第4节建立比较定理，并通过一个新的表示定理给出逆比较定理。第5节旨在推导泛函不等式，包括运输不等式和对数 Sobolev 不等式。第6节作为附录，证明第5节所需的一个辅助结果（参见命题 5.1）。

2 预备知识

2.1 高斯过程的 Wick-Itˆo 积分

本节将回顾关于高斯过程的 Wick-Itˆo 积分的一些重要定义和事实。更详细深入的讨论可参见例如 [2,第 2] 节及其中的参考文献。

设 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t^X)_{t\in[0,T]},\mathbb{P})$ 是一个滤过概率空间，其中 $(\mathscr{F}_t^X)_{t\in[0,T]}$ 是由中心高斯过程 $(X_t)_{0\le t\le T}$ 生成的自然完备右连续滤过，其协方差函数 $V_t:=\mathrm{Var}X_t, t\in[0,T]$ 是严格递增且连续的函数，并且 $V(0)=0$。

与 X 相关的第一混沌为

$$\mathfrak{C}_X:=\overline{\mathrm{span}\{X_t:t\in[0,T]\}},$$

其中闭包是在 $L_X^2 := L^2(\Omega, \mathscr{F}_T^X, \mathbb{P})$ 中取的。显然， $\mathfrak{C}_X$ 中的元素都是中心化高斯变量。我们定义映射 $\mathcal{R}: \mathfrak{C}_X \to \mathbb{R}^{[0,T]}$ 如下:

$$(\mathcal{R}f)(t) = \mathbb{E}(X_t f).$$

容易验证， $\mathcal{R}$ 是单射，其像 $\mathcal{R}(\mathfrak{C}_X)$ 称为 X 的卡梅隆-马丁空间，并赋予内积

$$\langle f, g\rangle_X := \mathbb{E}\left[\mathcal{R}^{-1}(f)\mathcal{R}^{-1}(g)\right].$$

现在，令 $\mathfrak{H}_X$ 为所有关于 $\mathrm{d}V$ 绝对连续且具有平方可积密度的 $\mathfrak{h} \in \mathcal{R}(\mathfrak{C}_X)$ 所组成的集合，即

$$\mathfrak{h}(t) = \int_0^t \dot{\mathfrak{h}}(s)\mathrm{d}V_s, \quad \dot{\mathfrak{h}} \in L^2([0,T], \mathrm{d}V).$$

在全文中，我们假设 $\mathfrak{H}_X$ 和 $\{\mathfrak{h}: \mathfrak{h} \in \mathfrak{H}_X\}$ 分别是 $\mathcal{R}(\mathfrak{C}_X)$ 和 $L^2([0,T], \mathrm{d}V)$ 的稠密子集。

注 2.1. 正如 $[2,$ 定理 2.2$]$, 所指出的，所讨论的高斯过程包含一大类例子，例如分数布朗运动 B^H，其中 $H \in (0,1)$，以及形式为 $\int_0^t \sigma(s)\mathrm{d}B_s^H$ 的分数 Wiener 积分，其中 $H \in (1/2, 1)$，且确定性函数 σ 满足某个 $c > 0$ 的条件。

接下来，我们将介绍关于高斯过程 X 的 Wick-Itˆo 积分的构造。根据 $[24,$ 推论 3.40$]$,, 形如

$$\mathrm{e}^{\diamond\mathfrak{h}} := \exp\left\{\mathcal{R}^{-1}(\mathfrak{h}) - \frac{1}{2}\mathrm{Var}\mathcal{R}^{-1}(\mathfrak{h})\right\}, \quad \mathfrak{h} \in \mathfrak{H}_X,$$

的随机变量构成 L_X^2 的一个全子集，其中 $\mathrm{e}^{\diamond\mathfrak{h}}$ 称为 Wick 指数。于是，对于每个随机变量 $\eta \in L_X^2$，都可以由其 $\mathcal{S}$ 变换唯一确定

$$(\mathcal{S}\eta)(\mathfrak{h}) := \mathbb{E}(\eta \mathrm{e}^{\diamond\mathfrak{h}}), \quad \mathfrak{h} \in \mathfrak{H}_X.$$

也就是说，如果 η 和 ζ 属于 L_X^2，且满足对于每个 $\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}_X$，都有 $(\mathcal{S}\eta)(\mathfrak{h}) = (\mathcal{S}\zeta)(\mathfrak{h})$，那么 $\eta = \zeta, \mathbb{P}$-几乎处处成立。此外，注意到对于每个 $\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}_X$,

$$(\mathcal{S}X_t)(\mathfrak{h}) = \mathbb{E}(X_t\mathcal{R}^{-1}(\mathfrak{h})) = \mathfrak{h}(t) = \int_0^t \dot{\mathfrak{h}}(s)\mathrm{d}V_s, \quad t \in [0,T]$$

是一个有界变差函数，因此可以视为 Lebesgue–Stieltjes 积分中的积分器，这使我们能够引入以下 Wick-Itˆo 积分。

定义 2.1. 若可测映射 $Z: [0,T] \to L_X^2$ 关于 X 存在 Wick-Itˆo 积分，则对任意 $\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}_X$,

$$\int_0^T (\mathcal{S}Z_t)(\mathfrak{h})\mathrm{d}\mathfrak{h}(t)$$

该积分存在，且存在随机变量 $\xi \in L_X^2$ 使得

$$(\mathcal{S}\xi)(\mathfrak{h}) = \int_0^T (\mathcal{S}Z_t)(\mathfrak{h})\mathrm{d}\mathfrak{h}(t).$$

在这种情况下，我们将 ξ 记作 $\int_0^T Z_t \mathrm{d}^\diamond X_t$，并称其为 Z 关于 X的 Wick-Itˆo 积分。此外，我们常用 $\int_a^b Z_t \mathrm{d}^\diamond X_t$ 表示 $\int_0^T \mathbb{I}_{[a,b]}(t) Z_t \mathrm{d}^\diamond X_t$。

注 2.2. (i) 假设 $Z\colon [0,T] \to L_X^2$ 连续，且 $\{\pi^n\}_{n\geq 1}$ 是 $[0,T]$的一个分割序列。那么，我们有

$$\int_0^T Z_t \mathrm{d}^\diamond X_t = \lim_{|\pi^n|\to 0} \sum_{t_i \in \pi^n} Z_{t_i} \diamond (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}), \tag{2.1}$$

前提是上述极限在 L_X^2中存在。这里，$Z_{t_i} \diamond (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$是如下定义的 Wick 乘积:

$$(\mathcal{S}(Z_{t_i} \diamond (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})))(\mathfrak{h}) = (\mathcal{S}Z_{t_i})(\mathfrak{h})(\mathcal{S}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}))(\mathfrak{h}), \quad \mathfrak{h} \in \mathfrak{H}_X.$$

根据 (2.1)，可以看出，Wick-Itˆo 积分可以解释为关于 Wick 乘积的黎曼和的极限。

(ii) If $X = B^{1/2}$，即 X 是布朗运动，则我们得到 $V_t = t$ 和

$$\mathcal{R}(\mathfrak{C}_{B^{1/2}}) = \mathfrak{H}_{B^{1/2}} = \left\{ \mathfrak{h} : \mathfrak{h}(t) = \int_0^t \dot{\mathfrak{h}}(s)\mathrm{d}s, \quad \dot{\mathfrak{h}} \in L^2([0,T], \mathrm{d}t) \right\}.$$

假设 Z 是渐进可测的，且满足 $\mathbb{E}\int_0^T Z_t^2 \mathrm{d}t < \infty$。那么，很容易验证 Wick-Itˆo 积分 $\int_0^T Z_t \mathrm{d}^\diamond B_t^{1/2}$ 与通常的 Itˆo 积分 $\int_0^T Z_t \mathrm{d}B_t^{1/2}$ 相同，因此

$$\left(\mathcal{S}\int_0^T Z_t \mathrm{d}B_t^{1/2}\right)(\mathfrak{h}) = \int_0^T (\mathcal{S}Z_t)(\mathfrak{h})\mathrm{d}\mathfrak{h}(t), \quad \mathfrak{h} \in \mathcal{R}(\mathfrak{C}_{B^{1/2}}) = \mathfrak{H}_{B^{1/2}}. \tag{2.2}$$

更多细节见 [2, 注 2.4]。

2.2 传递原理

本节旨在建立一种传递原理，将由高斯过程驱动的分布依赖随机微分方程与由布朗运动驱动的分布依赖随机微分方程联系起来，并将在主要结果的证明中发挥关键作用。

为陈述该原理，我们令 U 为 V 的逆，定义如下

$$U_s := \inf\{r \geq 0 : V_r \geq s\}, \quad s \in [0, V_T],$$

~~并在一个滤过概率空间~~ ~~~~ ~~~~ ~~

定义该辅助概率空间上的 $\mathcal{S}$-变换如下：对于每个随机变量 $\widetilde{\eta} \in L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$,

$$(\widetilde{\mathcal{S}}\widetilde{\eta})(\mathfrak{h}) := \widetilde{\mathbb{E}}\left(\widetilde{\eta}\exp\left\{\int_0^{V_T}\dot{\mathfrak{h}}(s)\mathrm{d}\widetilde{W}_s - \frac{1}{2}\int_0^{V_T}\dot{\mathfrak{h}}^2(s)\mathrm{d}s\right\}\right), \quad \mathfrak{h} \in \mathcal{R}(\mathfrak{C}_{\widetilde{W}}).$$

这里，我们回顾一下，由于注 2.2（ii）， $\mathcal{R}(\mathfrak{C}_{\widetilde{W}})$ 具有如下形式

$$\mathcal{R}(\mathfrak{C}_{\widetilde{W}}) = \mathfrak{H}_{\widetilde{W}} = \left\{\mathfrak{h} : \mathfrak{h}(t) = \int_0^t \dot{\mathfrak{h}}(s)\mathrm{d}s, \quad \dot{\mathfrak{h}} \in L^2([0, V_T], \mathrm{d}t)\right\}.$$

现在，我们有如下传递原理，它是 [2, 定理 3.1]的分布依赖版本。

命题 2.1。假设 $\phi: \mathbb{R} \times \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$、$b: [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathscr{P}_2(\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$、$\vartheta: [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^m$ 以及 $\sigma: [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 是满足以下条件的可测函数

$$\mathbb{E}\left[\phi^2(X_t, \mathscr{L}_{X_t}) + \int_0^t (b^2(s, X_s, \mathscr{L}_{\vartheta(s,X_s,\mathscr{L}_{X_s})}) + \sigma^2(s, X_s, \mathscr{L}_{X_s}))\mathrm{d}V_s\right] < \infty \tag{2.3}$$

对于某个 $t \in [0,T]$，以及

$$\phi(\widetilde{W}_{V_t}, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_{V_t}}) = \int_0^{V_t} b(U_s, \widetilde{W}_s, \mathscr{L}_{\vartheta(U_s,\widetilde{W}_s,\mathscr{L}_{\widetilde{W}_s})})\mathrm{d}s + \int_0^{V_t}\sigma(U_s, \widetilde{W}_s, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_s})\mathrm{d}\widetilde{W}_s, \quad \widetilde{\mathbb{P}}\text{-}a.s. \tag{2.4}$$

The n, $\int_0^t \sigma(s, X_s, \mathscr{L}_{X_s})\mathrm{d}^\diamond X_s$ 是良定义的，并且在 $L^2(\Omega, \mathscr{F}_T^X, \mathbb{P})$ 中有

$$\phi(X_t, \mathscr{L}_{X_t}) = \int_0^t b(s, X_s, \mathscr{L}_{\vartheta(s,X_s,\mathscr{L}_{X_s})})\mathrm{d}V_s + \int_0^t \sigma(s, X_s, \mathscr{L}_{X_s})\mathrm{d}^\diamond X_s. \tag{2.5}$$

在证明命题 2.1 之前，我们先给出一个有用的引理，其证明与[2,引理 3.2]完全相同，因此在此略去。

引理 2.2. 假设 $\vartheta: [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^m$ 和 $\psi: [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathscr{P}_2(\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$是两个可测函数，满足 $\mathbb{E}\psi^2(t, X_t, \mathscr{L}_{\vartheta(t,X_t,\mathscr{L}_{X_t})}) < \infty$，其中某个 $t \in [0,T]$。那么对于任意 $\hbar \in \mathfrak{H}_X$,

$$(\mathcal{S}\psi(t, X_t, \mathscr{L}_{\vartheta(t,X_t,\mathscr{L}_{X_t})}))(\hbar) = (\widetilde{\mathcal{S}}\psi(t, \widetilde{W}_{V_t}, \mathscr{L}_{\vartheta(t,\widetilde{W}_{V_t},\mathscr{L}_{\widetilde{W}_{V_t}})}))(\hbar \circ U). \tag{2.6}$$

需要强调的是，如果 $\hbar \in \mathfrak{H}_X$，那么 $\hbar \circ U$属于 $\mathcal{R}(\mathfrak{C}_{\widetilde{W}})$，因此 (2.6) 右端是良定义的。事实上，注意到

$$(\hbar \circ U)(t) = \int_0^{U_t}\dot{\hbar}(s)\mathrm{d}V_s = \int_0^t (\dot{\hbar} \circ U)(s)\mathrm{d}s, \quad t \in [0, V_T]$$

and

$$\int_0^{V_T}(\dot{\hbar}\circ U)^2(s)\mathrm{d}s=\int_0^T\dot{\hbar}^2(s)\mathrm{d}V_s<\infty.$$

命题 2.1 的证明。根据 $\mathcal{S}$的线性、引理 2.2 以及变量变换，对每个 $\hbar\in\mathfrak{H}_X$，我们有

$$\begin{aligned}
&\left(\mathcal{S}\left(\phi(X_t,\mathscr{L}_{X_t})-\int_0^t b(s,X_s,\mathscr{L}_{\vartheta(s,X_s,\mathscr{L}_{X_s})})\mathrm{d}V_s\right)\right)(\hbar)\\
&=(\mathcal{S}\phi(X_t,\mathscr{L}_{X_t}))(\hbar)-\int_0^t(\mathcal{S}b(s,X_s,\mathscr{L}_{\vartheta(s,X_s,\mathscr{L}_{X_s})}))(\hbar)\mathrm{d}V_s\\
&=(\widetilde{\mathcal{S}}\phi(\widetilde{W}_{V_t},\mathscr{L}_{\widetilde{W}_{V_t}}))(\hbar\circ U)-\int_0^t(\widetilde{\mathcal{S}}b(s,\widetilde{W}_{V_s},\mathscr{L}_{\vartheta(s,\widetilde{W}_{V_s},\mathscr{L}_{\widetilde{W}_{V_s}})}))(\hbar\circ U)\mathrm{d}V_s\\
&=(\widetilde{\mathcal{S}}\phi(\widetilde{W}_{V_t},\mathscr{L}_{\widetilde{W}_{V_t}}))(\hbar\circ U)-\int_0^{V_t}(\widetilde{\mathcal{S}}b(U_r,\widetilde{W}_r,\mathscr{L}_{\vartheta(U_r,\widetilde{W}_r,\mathscr{L}_{\widetilde{W}_r})}))(\hbar\circ U)\mathrm{d}r\\
&=\left(\widetilde{\mathcal{S}}\left(\phi(\widetilde{W}_{V_t},\mathscr{L}_{\widetilde{W}_{V_t}})-\int_0^{V_t}b(U_r,\widetilde{W}_r,\mathscr{L}_{\vartheta(U_r,\widetilde{W}_r,\mathscr{L}_{\widetilde{W}_r})})\mathrm{d}r\right)\right)(\hbar\circ U)\\
&=\left(\widetilde{\mathcal{S}}\int_0^{V_t}\sigma(U_r,\widetilde{W}_r,\mathscr{L}_{\widetilde{W}_r})\mathrm{d}\widetilde{W}_r\right)(\hbar\circ U),\qquad(2.7)
\end{aligned}$$

其中，最后一个等式由 (2.4) 得出。
由于经典 Itˆo 积分与 Wick-Itˆo 积分相同（见注 2.2（ii）），且$\hbar\circ U$属于 $\mathfrak{H}_{\widetilde{W}}=\mathcal{R}(\mathfrak{C}_{\widetilde{W}})$，由 (2.2) 可得

$$\left(\widetilde{\mathcal{S}}\int_0^{V_t}\sigma(U_r,\widetilde{W}_r,\mathscr{L}_{\widetilde{W}_r})\mathrm{d}\widetilde{W}_r\right)(\hbar\circ U)=\int_0^{V_t}\left(\widetilde{\mathcal{S}}\sigma(U_r,\widetilde{W}_r,\mathscr{L}_{\widetilde{W}_r})\right)(\hbar\circ U)\mathrm{d}(\hbar\circ U)(r).$$

将其代入 (2.7)，并再次使用变量变换和引理 2.2，我们得到

$$\begin{aligned}
&\left(\mathcal{S}\left(\phi(X_t,\mathscr{L}_{X_t})-\int_0^t b(s,X_s,\mathbb{P}_{\vartheta(s,X_s,\mathscr{L}_{X_s})})\mathrm{d}V_s\right)\right)(\hbar)\\
&=\int_0^{V_t}\left(\widetilde{\mathcal{S}}\sigma(U_r,\widetilde{W}_r,\mathscr{L}_{\widetilde{W}_r})\right)(\hbar\circ U)\mathrm{d}(\hbar\circ U)(r)\\
&=\int_0^t\left(\widetilde{\mathcal{S}}\sigma(r,\widetilde{W}_{V_r},\mathscr{L}_{\widetilde{W}_{V_r}})\right)(\hbar\circ U)\mathrm{d}\hbar(r)\\
&=\int_0^t\left(\mathcal{S}\sigma(r,X_r,\mathscr{L}_{X_r})\right)(\hbar)\mathrm{d}\hbar(r),
\end{aligned}$$

由此可知，$\int_0^t\sigma(s,X_s,\mathbb{P}_{X_s})\mathrm{d}^\diamond X_s$是定义良好的；此外，根据定义 2.1，关系式 (2.5) 成立。
证明至此完成。

□

2.3 Lions导数

为便于后续使用，我们陈述 Lions导数的一些基本事实。

对于任意 $\theta \in [1,\infty)$，$\mathscr{P}_\theta(\mathbb{R}^d)$ 表示定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的 θ-可积概率测度集合，且 $\mathscr{P}_\theta(\mathbb{R}^d)$ 上的 L^θ-Wasserstein 距离定义如下:

$$\mathbb{W}_\theta(\mu,\nu) := \inf_{\pi\in\mathscr{C}(\mu,\nu)} \left(\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |x-y|^\theta \pi(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)\right)^{\frac{1}{\theta}}, \quad \mu,\nu\in\mathscr{P}_\theta(\mathbb{R}^d),$$

其中，$\mathscr{C}(\mu,\nu)$ 表示所有定义在 $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ 上、边缘分布为 μ 和 ν 的概率测度集合。众所周知，$(\mathscr{P}_\theta(\mathbb{R}^d)\ \mathbb{W}_\theta)$ 是一个波兰空间，通常称为 $\mathbb{R}^d$ 上的 θ-Wasserstein 空间。我们用 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示欧几里得内积，用 $\|\cdot\|_{L^2_\mu}$ 表示 $L^2(\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d,\mu)$ 范数。令 $\mathscr{L}_X$ 为随机变量 X 的分布。

定义 2.2. 设 $f\colon \mathscr{P}_2(\mathbb{R}^d)\to\mathbb{R}$。

(1) 若泛函在 $\mu\in\mathscr{P}_2(\mathbb{R}^d)$ 处是 L-可微的，则称 f

$$L^2(\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d,\mu)\ni\phi\mapsto f(\mu\circ(\mathrm{Id}+\phi)^{-1}))$$

它在 $0\in L^2(\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d,\mu)$ 处 Fr´echet 可微。也就是说，存在唯一的 $\gamma\in L^2(\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d,\mu)$，使得

$$\lim_{\|\phi\|_{L^2_\mu}\to 0}\frac{f(\mu\circ(\mathrm{Id}+\phi)^{-1})-f(\mu)-\mu(\langle\gamma,\phi\rangle)}{\|\phi\|_{L^2_\mu}}=0.$$

在这种情况下，将 γ 称为 f 在 μ 处的 L 导数，并记为 $D^Lf(\mu)$。

(2) 如果对于所有 $\mu\in\mathscr{P}_2(\mathbb{R}^d)$，$L$ 导数 $D^Lf(\mu)$ 都存在，则称 f 在 $\mathscr{P}_2(\mathbb{R}^d)$ 上 L 可微。此外，如果对于每个 $\mu\in\mathscr{P}_2(\mathbb{R}^d)$，都存在一个 μ 版本 $D^Lf(\mu)(\cdot)$，使得 $D^Lf(\mu)(x)$ 关于 $(\mu,x)\in\mathscr{P}_2\,\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ 联合连续，则记为 $f\in C^{(1,0)}(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}^d))$。

此外，根据 [9, 定理 6.5] 和 [35, 命题 3.1], ，我们得到以下关于 L 导数的有用公式。

引理 2.3. 设 $(\Omega\ \mathscr{F},\mathbb{P})$ 是一个无原子概率空间，且 $\xi,\eta\in L^2(\Omega\to\mathbb{R}^d,\mathbb{P})$。如果$f\in C^{1,\,0}(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}^d))$，则

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{f(\mathscr{L}_{\xi+\varepsilon\eta})-f(\mathscr{L}_\xi)}{\varepsilon}=\mathbb{E}\langle D^Lf(\mathscr{L}_\xi)(\xi),\eta\rangle.$$

3 高斯过程驱动的 DDBSDE 适定性

在这 本节中，我们考虑以下由高斯过程驱动的 DDBSDE :

$$\begin{cases}\mathrm{d}Y_t=-f(t,X_t,Y_t,Z_t,\mathscr{L}_{(X_t,Y_t,Z_t)})\mathrm{d}V_t+Z_t\mathrm{d}^\diamond X_t,\\ Y_T=g(X_T,\mathscr{L}_{X_T}),\end{cases}\tag{3.1}$$

其中 $f\colon\ [0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathscr{P}_2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ 和 $g\colon\ \mathbb{R}\times\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ 均为可测函数。现在，令 Υ 为满足以下条件的定义在 $[0,T]$上的 $(\mathscr{F}_t^X)_{t\in[0,T]}$-适应过程 (Y,Z) 对的空间

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T}|Y_t|^2+\int_0^T|Z_t|^2\mathrm{d}V_t\right)<\infty$$

and

$$Y_t=u(t,X_t,\mathscr{L}_{X_t}),\ \ \mathbb{P}\text{-}a.s.,\ t\in[0,T],\ \ Z_t=v(t,X_t,\mathscr{L}_{X_t}),\ \mathrm{d}\mathbb{P}\otimes\mathrm{d}V\text{-}a.e.$$

其中 $[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ 为两个确定性函数 u、v。

定义 3.1。(1) 若随机过程对 $(Y,Z)=(Y_t,Z_t)_{0\le t\le T}$ 满足以下条件，则称其为方程 (3.1) 的一个解：$(Y,Z)\in\Upsilon$

$$\mathbb{E}\left[g^2(X_T,\mathscr{L}_{X_T})+\int_0^T f^2(s,X_s,Y_s,Z_s,\mathscr{L}_{(X_s,Y_s,Z_s)})\mathrm{d}V_s\right]<\infty,$$

对任意 $t\in[0,T]$，Wick-Itˆo 积分 $\int_0^t Z_s\mathrm{d}^\diamond X_s$ 存在，且 $\mathbb{P}$-几乎处处成立。

$$Y_t=g(X_T,\mathscr{L}_{X_T})+\int_t^T f(s,X_s,Y_s,Z_s,\mathscr{L}_{(X_s,Y_s,Z_s)})\mathrm{d}V_s-\int_t^T Z_s\mathrm{d}^\diamond X_s,\ \ t\in[0,T].$$

(2) 若任意两个解 $(Y^i,Z^i)\in\Upsilon, i=1,2$ 相等，则称 (3.1) 具有唯一性。

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T}|Y_t^1-Y_t^2|^2+\int_0^T|Z_t^1-Z_t^2|^2\mathrm{d}V_t\right)=0.$$

为了研究 (3.1)，我们将引入以下辅助BSDE

$$\text{(3.2)}\qquad\begin{cases}\mathrm{d}\widetilde{Y}_t=-f(U_t,\widetilde{W}_t,\widetilde{Y}_t,\widetilde{Z}_t,\mathscr{L}_{(\widetilde{W}_t,\widetilde{Y}_t,\widetilde{Z}_t)})\mathrm{d}t+\widetilde{Z}_t\mathrm{d}\widetilde{W}_t,\\ \widetilde{Y}_{V_T}=g(\widetilde{W}_{V_T},\mathscr{L}_{\widetilde{W}_{V_T}}),\end{cases}$$

~其中，我们回顾一下，$\{W_t\}_{t\in[0,V_T]}$ 是第2.2节中所述的标准布朗运动。令 ~ ~ ~Υ 为定义在 $[0,V_T]$ 上的、由 $(\mathscr{F}_t^W)_{t\in[0,V_T]}$ 适应过程 (Y,Z) 组成的空间，满足

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left(\sup_{0\le t\le V_T}|\widetilde{Y}_t|^2+\int_0^{V_T}|\widetilde{Z}_t|^2\mathrm{d}t\right)<\infty$$

and

$$\widetilde{Y}_t=\widetilde{u}(t,\widetilde{W}_t,\mathscr{L}_{\widetilde{W}_t}),\ \widetilde{\mathbb{P}}\text{-}a.s.,\ t\in[0,V_T],\ \ \widetilde{Z}_t=\widetilde{v}(t,\widetilde{W}_t,\mathscr{L}_{\widetilde{W}_t}),\ \mathrm{d}\widetilde{\mathbb{P}}\otimes\mathrm{d}t\text{-}a.e.$$

具有两个确定性函数 $\widetilde{u}$、$\widetilde{v}\colon\ [0,V_T]\times\mathbb{R}\times\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$。类似于定义 3.1，
~ ~ ~ ~ ~我们可以给出空间 Υ 中（3.2）的解（Y、Z）$=(Y_t$、$Z_t)_{0\le t\le V_T}$的概念。

~ ~定理 3.1. 假设 $\mathbb{E}[g^2(X_T、\ \mathscr{L}_{X_T})] < \infty$ 且（3.2）具有唯一解（Y、 Z） $\in\sim\Upsilon$。那么（3.1）具有唯一解（Y、 Z） $\in \Upsilon$。更确切地说，如果

$$\widetilde{Y}_t = \widetilde{u}(t, \widetilde{W}_t, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_t}), \quad \widetilde{Z}_t = \widetilde{v}(t, \widetilde{W}_t, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_t}), \quad t \in [0, V_T]$$

是（3.2）的唯一解，则

$$Y_t = u(t, X_t, \mathscr{L}_{X_t}), \quad Z_t = v(t, X_t, \mathscr{L}_{X_t}), \quad t \in [0, T],$$

是（3.1）的唯一解，其中

$$u(t, x, \mu) = \widetilde{u}(V_t, x, \mu), \quad v(t, x, \mu) = \widetilde{v}(V_t, x, \mu), \quad (t, x, \mu) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathscr{P}_2(\mathbb{R}).$$

证明。证明分为两个步骤。

步骤 1. 存在性。由于（ $\widetilde{Y}, \widetilde{Z}) \in \widetilde{\Upsilon}$ 是（3.2）的一个解，我们令

$$\widetilde{Y}_t = \widetilde{u}(t, \widetilde{W}_t, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_t}),\ \widetilde{\mathbb{P}}\text{-}a.s.,\ t \in [0, V_T], \quad \widetilde{Z}_t = \widetilde{v}(t, \widetilde{W}_t, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_t}),\ \mathrm{d}\widetilde{\mathbb{P}} \otimes \mathrm{d}t\text{-}a.e.,$$

于是，对于任意 $t \in [0, T]$，有

$$\begin{aligned}
&\widetilde{u}(V_t, \widetilde{W}_{V_t}, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_{V_t}}) - \widetilde{u}(0, 0, \delta_0) \\
&= -\int_0^{V_t} f(U_s, \widetilde{W}_s, \widetilde{u}(s, \widetilde{W}_s, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_s}), \widetilde{v}(s, \widetilde{W}_s, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_s}), \mathscr{L}_{(\widetilde{W}_s, \widetilde{u}(s, \widetilde{W}_s, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_s}), \widetilde{v}(s, \widetilde{W}_s, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_s}))})\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^{V_t} \widetilde{v}(s, \widetilde{W}_s, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_s})\mathrm{d}\widetilde{W}_s,
\end{aligned}$$

其中 δ_0 是狄拉克测度。

由于Υ的定义很容易验证，将 (2.3) 中的 (ϕ, b, σ) 替换为 $(\widetilde{u}(V_t, \cdot, \cdot)\ f, \widetilde{v})$ 后，等式仍然成立。因此，由命题 2.1 可得，对于任意 $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}
&\widetilde{u}(V_t, X_t, \mathscr{L}_{X_t}) - \widetilde{u}(0, 0, \delta_0) \\
&= -\int_0^{t} f(s, X_s, \widetilde{u}(V_s, X_s, \mathscr{L}_{X_s}), \widetilde{v}(V_s, X_s, \mathscr{L}_{X_s}), \mathscr{L}_{(X_s, \widetilde{u}(V_s, X_s, \mathscr{L}_{X_s}), \widetilde{v}(V_s, X_s, \mathscr{L}_{X_s}))})\mathrm{d}V_s \\
&\quad + \int_0^{t} \widetilde{v}(V_s, X_s, \mathscr{L}_{X_s})\mathrm{d}^{\diamond}X_s.
\end{aligned}$$

设 $u(t, x, \mu) = \widetilde{u}(V_t, x, \mu)$ $v(t, x, \mu) = \widetilde{v}(V_t, x, \mu)$, $(t, x, \mu) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$。那么 (Y_t, Z_t) $:= (u(t, X_t, \mathscr{L}_{X_t})$ $v(t, X_t, \mathscr{L}_{X_t}))$ 是以下倒向随机微分方程的解：

$$Y_t = Y_T + \int_t^T f(s, X_s, Y_s, Z_s, \mathscr{L}_{(X_s, Y_s, Z_s)})\mathrm{d}V_s + \int_t^T Z_s d^{\diamond}X_s. \tag{3.3}$$

~ ~另一方面，注意到 $g(W_{V_T}, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_{V_T}}) = \widetilde{u}(V_T, W_{V_T}, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_{V_T}})$ $\mathbb{P}$-$a.s.$ 以及 W_{V_T} 的高斯~分布，我们得到

$$g(x, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_{V_T}}) = \widetilde{u}(V_T, x, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_{V_T}}), \quad \mathrm{d}x\text{-}a.e.,$$

这意味着

$$
\begin{aligned}
&g(X_T, \mathscr{L}_{X_T}) = g(X_T, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_{V_T}}) = \widetilde{u}(V_T, X_T, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_{V_T}}) \\
&= \widetilde{u}(V_T, X_T, \mathscr{L}_{X_T}) = u(T, X_T, \mathscr{L}_{X_T}) = Y_T, \quad \mathbb{P}\text{-}a.s.
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

此外，我们容易得到

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T}|Y_t|^2 + \int_0^T |Z_t|^2 \mathrm{d}V_t\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T}|u(t, X_t, \mathscr{L}_{X_t})|^2 + \int_0^T |v(t, X_t, \mathscr{L}_{X_t})|^2 \mathrm{d}V_t\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T}|\widetilde{u}(V_t, X_t, \mathscr{L}_{X_t})|^2 + \int_0^T |\widetilde{v}(V_t, X_t, \mathscr{L}_{X_t})|^2 \mathrm{d}V_t\right) \\
&= \widetilde{\mathbb{E}}\left(\sup_{0\le t\le T}|\widetilde{u}(V_t, \widetilde{W}_{V_t}, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_{V_t}})|^2 + \int_0^T |\widetilde{v}(V_t, \widetilde{W}_{V_t}, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_{V_t}})|^2 \mathrm{d}V_t\right) \\
&= \widetilde{\mathbb{E}}\left(\sup_{0\le t\le V_T}|\widetilde{u}(t, \widetilde{W}_t, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_t})|^2 + \int_0^{V_T} |\widetilde{v}(t, \widetilde{W}_t, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_t})|^2 \mathrm{d}t\right) \\
&= \widetilde{\mathbb{E}}\left(\sup_{0\le t\le V_T}|\widetilde{Y}_t|^2 + \int_0^{V_T} |\widetilde{Z}_t|^2 \mathrm{d}V_t\right) < \infty,
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

由此结合（3.3）-（3.4），可知 $(Y, Z) \in \Upsilon$ 是（3.1）的一个解。

步骤2：唯一性。设 $(Y^i, Z^i) \in \Upsilon, i = 1, 2$ 是（3.1）的两个解。那么存在$u^i, v^i, i = 1, 2$，使得 $(Y_t^i, Z_t^i) = (u^i(t, X_t, \mathscr{L}_{X_t})\ v^i(t, X_t, \mathscr{L}_{X_t}))\ i = 1, 2$。沿用步骤1中的论证，我们可以得出 $(Y_t^i, Z_t^i) = (u^i(U_t, W_t, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_t})\ v^i(U_t, W_t, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_t})) \in \sim\Upsilon, i = 1, 2$ 是（3.2）的两个解。类似于（3.5），并利用（3.2）的唯一性，可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T}|Y_t^1 - Y_t^2|^2 + \int_0^T |Z_t^1 - Z_t^2|^2 \mathrm{d}V_t\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T}|u^1(t, X_t, \mathscr{L}_{X_t}) - u^2(t, X_t, \mathscr{L}_{X_t})|^2 + \int_0^T |v^1(t, X_t, \mathscr{L}_{X_t}) - v^2(t, X_t, \mathscr{L}_{X_t})|^2 \mathrm{d}V_t\right) \\
&= \widetilde{\mathbb{E}}\left(\sup_{0\le t\le V_T}|u^1(U_t, \widetilde{W}_t, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_t}) - u^2(t, \widetilde{W}_t, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_t})|^2 + \int_0^{V_T} |v^1(U_t, \widetilde{W}_t, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_t}) - v^2(t, \widetilde{W}_t, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_t})|^2 \mathrm{d}t\right) \\
&= \widetilde{\mathbb{E}}\left(\sup_{0\le t\le V_T}|\widetilde{Y}_t^1 - \widetilde{Y}_t^2|^2 + \int_0^{V_T} |\widetilde{Z}_t^1 - \widetilde{Z}_t^2|^2 \mathrm{d}t\right) = 0,
\end{aligned}
$$

由此完成证明。 □

接下来，我们将致力于将一般性的定理 3.1 应用于 Lipschitz连续函数 (g, f) 的情形。更确切地说，我们假设满足以下条件：

（H1）(i) g, f是利普希茨连续的，即存在两个常数 $L_g, L_f > 0$，使得对于所有 $t \in [0,T], x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R}, \mu, \widetilde{\mu} \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ $\mu_i \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ $i = 1, 2$,

$$|g(x_1,\mu) - g(x_2,\widetilde{\mu})| \le L_g(|x_1 - x_2| + \mathbb{W}_2(\mu,\widetilde{\mu}))$$

and

$$|f(t, x_1, y_1, z_1, \mu_1\ ) - f(t, x_2, y_2, z_2, \mu_2)| \le L_f(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| + \mathbb{W}_2(\mu_1, \mu_2)).$$

(ii) $|g(0,\delta_0)| + \sup_{t\in[0,T]} |f(t,\ 0,\ 0,\ 0,\ \delta_0)| < \infty$。

由于 [28, 定理 A.1] 其中驱动噪声为布朗运动和相互独立的泊松随机测度，辅助方程（3.2）存在唯一解$\widetilde{\ }\ \widetilde{\ }\ \widetilde{\ }(Y, Z) \in \Upsilon$。因此，借助定理 3.1，（3.1）存在唯一解 $(Y, Z) \in \Upsilon$。备注 3.1。（i）（稳定性估计）设 $(Y^i, Z^i) \in \Upsilon$ 是方程（3.1）在系数 (g^i, f^i) $i = 1$，2 下的唯一解，且满足（H1）。则存在一个常数 $C > 0$使得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\sup_{s\in[0,T]} |Y_s^1 - Y_s^2|^2 + \int_0^T |Z_s^1 - Z_s^2|^2 \mathrm{d}V_s\right)\\
\le& C\mathbb{E}\left[\left|(g^1 - g^2)(X_T, \mathscr{L}_{X_T})\right|^2 + \left(\int_0^T |(f^1 - f^2)(s, X_s, Y_s^1, Z_s^1, \mathscr{L}_{(X_s,Y_s^1,Z_s^1)})|\mathrm{d}V_s\right)^2\right].
\end{aligned}$$

$\widetilde{\ }\ \widetilde{\ }\ \widetilde{\ }$事实上，我们将（$Y^i$，$Z^i$）记为系数（$g^i$，$f^i$）$i$ =1, 2 对应的（3.2）的唯一解，其中 $\in \Upsilon$。根据 [28, 定理 A.2], ，我们可以推出存在一个常数 $C > 0$，使得

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathbb{E}}\left(\sup_{s\in[0,V_T]} |\widetilde{Y}_s^1 - \widetilde{Y}_s^2|^2 + \int_0^{V_T} |\widetilde{Z}_s^1 - \widetilde{Z}_s^2|^2 \mathrm{d}s\right)\\
\le& C\widetilde{\mathbb{E}}\left[\left|(g^1 - g^2)(\widetilde{W}_{V_T}, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_{V_T}})\right|^2 + \left(\int_0^{V_T} |(f^1 - f^2)(U_s, \widetilde{W}_s, \widetilde{Y}_s^1, \widetilde{Z}_s^1, \mathscr{L}_{(\widetilde{W}_s,\widetilde{Y}_s^1,\widetilde{Z}_s^1)})|\mathrm{d}s\right)^2\right].
\end{aligned}$$

然后，通过传递原理命题 2.1 进行直接计算，即可得到所需的稳定性估计。

（ii）在分布无关情形下，即（3.1）中的系数 g 和 f 与分布无关，Bender [2, 定理 4.2 和 4.4] 证明了存在唯一性结果；而我们近期的工作 [18, 定理 5.1] 研究了密度的存在性，并进一步推导出了该解的边缘分布的高斯估计。因此，本文的工作可视为对 [2, 18] 的延续和推广。

4 比较定理和逆比较定理

本节中，我们首先通过对涉及生成元 Lions导数的条件施加限制，得到一个比较定理。第二部分，我们关注比较定理的逆问题。

更具体地说，我们将建立生成元的表示定理，并说明如何结合这一结果推导出一个逆比较定理。

4.1 比较定理

在布朗运动情形下，即 $X = B^{1/2}$， [8, 例 3.1 和 3.2] 或 [29, 例 2.1] 中给出的反例表明，如果生成元 f 依赖于 Z 的分布，或者关于 Y的分布不是递增的，那么方程 (3.1) 通常不满足比较定理。现在我们考虑 (3.1) 的以下特殊形式：

$$Y_t = g(X_T, \mathscr{L}_{X_T}) + \int_t^T f(s, X_s, Y_s, Z_s, \mathscr{L}_{(X_s,Y_s)})\mathrm{d}V_s - \int_t^T Z_s \mathrm{d}^\diamond X_s, \quad t \in [0,T]. \tag{4.1}$$

相应地，(4.1) 的辅助方程形式如下：

$$\widetilde{Y}_t = g(\widetilde{W}_{V_T}, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_{V_T}}) + \int_t^{V_T} f(U_s, \widetilde{W}_s, \widetilde{Y}_s, \widetilde{Z}_s, \mathscr{L}_{(\widetilde{W}_s,\widetilde{Y}_s)})\mathrm{d}s - \int_t^{V_T} \widetilde{Z}_s \mathrm{d}\widetilde{W}_s, \quad t \in [0, V_T]. \tag{4.2}$$

定理 4.1. 假设两个生成元 $f^i, i = 1$ 满足（H1），并且对于任意的 (t, x, y, z), $\in [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f^1(t, x, y, z, \cdot)$ 属于 $C^{(1,0)}(\mathscr{P}_2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}))$，其中 $0 \le (D^L f^1)^{(2)} \le K$，且某个常数为 $K > 0$，这里 $(D^L f^1)^{(2)}$表示 $D^L f^1$的第二个分量。设 $(Y^i, Z^i) \in \Upsilon, i = 1$是分别对应数据 (g^i, f^i) $i = 1$的 (4.1) 的解。则，若

$$g^1(x,\mu) \le g^2(x,\mu), \quad x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \tag{4.3}$$

and

$$f^1(t,x,y,z,\nu) \le f^2(t,x,y,z,\nu), \quad t \in [0,T], x,y,z \in \mathbb{R}, \nu \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}), \tag{4.4}$$

对每个 $t \in [0,T], Y_t^1 \le Y_t^2, \mathbb{P}$，几乎处处成立。

证明。设 $(Y^i, Z^i) \in \Upsilon$ 是与 (g^i, f^i) $i = 1, 2$ 相关的 (4.2) 的唯一解，并分别记 $(\widetilde{u}^i, \widetilde{v}^i)$ $i = 1, 2$ 为其表示函数。

我们首先给出关于（Y^i, Z^i） $i = 1$、2 的一个比较结果。我们的策略依赖于应用于 $[(Y_t^1 - Y_t^2)^+]^2$ 的伊藤-田中公式（参见例如 [34, 命题 2.35 及注 2.36]），该公式对任意 $t \in [0, V_T]$给出：

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathbb{E}}[(\widetilde{Y}_t^1 - \widetilde{Y}_t^2)^+]^2 + \widetilde{\mathbb{E}} \int_t^{V_T} |\widetilde{Z}_s^1 - \widetilde{Z}_s^2|^2 \mathrm{I}_{\{\widetilde{Y}_s^1 - \widetilde{Y}_s^2 \ge 0\}} \mathrm{d}s \\
=&\widetilde{\mathbb{E}}[(g^1 - g^2)^+(\widetilde{W}_{V_T}, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_{V_T}})]^2 \\
&+ 2\widetilde{\mathbb{E}} \int_t^{V_T} (\widetilde{Y}_s^1 - \widetilde{Y}_s^2)^+ \left(f^1(U_s, \Theta_s^1, \mathscr{L}_{(\widetilde{W}_s, \widetilde{Y}_s^1)}) - f^2(U_s, \Theta_s^2, \mathscr{L}_{(\widetilde{W}_s, \widetilde{Y}_s^2)}) \right) \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

$$=2\widetilde{\mathbb{E}}\int_t^{V_T}(\widetilde{Y}_s^1-\widetilde{Y}_s^2)^+\left(f^1(U_s,\Theta_s^1,\mathscr{L}_{(\widetilde{W}_s,\widetilde{Y}_s^1)})-f^2(U_s,\Theta_s^2,\mathscr{L}_{(\widetilde{W}_s,\widetilde{Y}_s^2)})\right)\mathrm{d}s,$$

这里，我们令 $\Theta_s^i=(W_s,Y_s^i,Z_s^i)$ $i=1$、2，并使用了（4.3）。

利用 f^1的 Lipschitz 连续性，以及由 (4.4) 可知，对于每个$t\in[0,V_T]$， $f^1(U_t,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)\le f^2(U_t,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$, 可得

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathbb{E}}[(\widetilde{Y}_t^1-\widetilde{Y}_t^2)^+]^2+\widetilde{\mathbb{E}}\int_t^{V_T}|\widetilde{Z}_s^1-\widetilde{Z}_s^2|^2\mathrm{I}_{\{\widetilde{Y}_s^1-\widetilde{Y}_s^2\ge0\}}\mathrm{d}s\\
=&2\widetilde{\mathbb{E}}\int_t^{V_T}(\widetilde{Y}_s^1-\widetilde{Y}_s^2)^+\left(f^1(U_s,\Theta_s^1,\mathscr{L}_{(\widetilde{W}_s,\widetilde{Y}_s^1)})-f^1(U_s,\Theta_s^2,\mathscr{L}_{(\widetilde{W}_s,\widetilde{Y}_s^1)})\right)\mathrm{d}s\\
&+2\widetilde{\mathbb{E}}\int_t^{V_T}(\widetilde{Y}_s^1-\widetilde{Y}_s^2)^+\left(f^1(U_s,\Theta_s^2,\mathscr{L}_{(\widetilde{W}_s,\widetilde{Y}_s^1)})-f^1(U_s,\Theta_s^2,\mathscr{L}_{(\widetilde{W}_s,\widetilde{Y}_s^2)})\right)\mathrm{d}s\\
&+2\widetilde{\mathbb{E}}\int_t^{V_T}(\widetilde{Y}_s^1-\widetilde{Y}_s^2)^+\left(f^1(U_s,\Theta_s^2,\mathscr{L}_{(\widetilde{W}_s,\widetilde{Y}_s^2)})-f^2(U_s,\Theta_s^2,\mathscr{L}_{(\widetilde{W}_s,\widetilde{Y}_s^2)})\right)\mathrm{d}s\\
\le&2L_{f^1}\widetilde{\mathbb{E}}\int_t^{V_T}(\widetilde{Y}_s^1-\widetilde{Y}_s^2)^+\left(|\widetilde{Y}_s^1-\widetilde{Y}_s^2|+|\widetilde{Z}_s^1-\widetilde{Z}_s^2|\right)\mathrm{d}s\\
&+2\widetilde{\mathbb{E}}\int_t^{V_T}(\widetilde{Y}_s^1-\widetilde{Y}_s^2)^+\left(f^1(U_s,\Theta_s^2,\mathscr{L}_{(\widetilde{W}_s,\widetilde{Y}_s^1)})-f^1(U_s,\Theta_s^2,\mathscr{L}_{(\widetilde{W}_s,\widetilde{Y}_s^2)})\right)\mathrm{d}s.
\end{aligned}\tag{4.5}$$

注意，由引理 2.3 可得

$$\begin{aligned}
&f^1(U_s,\Theta_s^2,\mathscr{L}_{(\widetilde{W}_s,\widetilde{Y}_s^1)})-f^1(U_s,\Theta_s^2,\mathscr{L}_{(\widetilde{W}_s,\widetilde{Y}_s^2)})\\
=&\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}f^1(U_s,\Theta_r^2,\mathscr{L}_{\chi_s(r)})\mathrm{d}r\\
=&\int_0^1\widetilde{\mathbb{E}}\langle D^Lf^1(U_s,x,\cdot)(\mathscr{L}_{\chi_s(r)})(\chi_s(r)),(0,\widetilde{Y}_s^1-\widetilde{Y}_s^2)\rangle|_{x=\Theta_r^2}\mathrm{d}r\\
=&\int_0^1\widetilde{\mathbb{E}}\left[(D^Lf^1)^{(2)}(U_s,x,\cdot)(\mathscr{L}_{\chi_s(r)})(\chi_s(r))\cdot(\widetilde{Y}_s^1-\widetilde{Y}_s^2)\right]\big|_{x=\Theta_r^2}\mathrm{d}r\\
\le&K\widetilde{\mathbb{E}}(\widetilde{Y}_s^1-\widetilde{Y}_s^2)^+,
\end{aligned}$$

其中，对于任意 $r\in[0,1]$, $\chi_s(r)=(W_s,Y_s^2)+r(0,Y_s^1-Y_s^2)$。

因此，将其代入（4.5），并应用 H¨older 不等式和 Young 不等式，可得

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathbb{E}}[(\widetilde{Y}_t^1-\widetilde{Y}_t^2)^+]^2+\widetilde{\mathbb{E}}\int_t^{V_T}|\widetilde{Z}_s^1-\widetilde{Z}_s^2|^2\mathrm{I}_{\{\widetilde{Y}_s^1-\widetilde{Y}_s^2\ge0\}}\mathrm{d}s\\
\le&2(L_{f^1}\vee K)\widetilde{\mathbb{E}}\int_t^{V_T}(\widetilde{Y}_s^1-\widetilde{Y}_s^2)^+\left(|\widetilde{Y}_s^1-\widetilde{Y}_s^2|+|\widetilde{Z}_s^1-\widetilde{Z}_s^2|+\widetilde{\mathbb{E}}(\widetilde{Y}_s^1-\widetilde{Y}_s^2)^+\right)\mathrm{d}s\\
\le&C\int_t^{V_T}\widetilde{\mathbb{E}}[(\widetilde{Y}_s^1-\widetilde{Y}_s^2)^+]^2\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\widetilde{\mathbb{E}}\int_t^{V_T}|\widetilde{Z}_s^1-\widetilde{Z}_s^2|^2\mathrm{I}_{\{\widetilde{Y}_s^1-\widetilde{Y}_s^2\ge0\}}\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

其中，以下所述的 C 表示一个通用常数。

因此，由格朗沃尔不等式可得 $\widetilde{Y}_t^2$ 也是 $\widetilde{Y}_t^1$ 的一个 $\widetilde{\mathbb{P}}$ 的 $\widetilde{W}_t$ 都成立。因此，对任意 $t \in [0, V_T]$，都有

$$\widetilde{u}^1(t, \widetilde{W}_t, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_t}) = \widetilde{Y}_t^1 \leq \widetilde{Y}_t^2 = \widetilde{u}^2(t, \widetilde{W}_t, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_t}), \quad \widetilde{\mathbb{P}}\text{-}a.s..$$

由于 W_t 服从高斯分布，我们推得对任意 $t \in [0, V_T]$，

$$\widetilde{u}^1(t, x, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_t}) \leq \widetilde{u}^2(t, x, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_t}), \quad \mathrm{d}x\text{-}a.e.,$$

结合 $\mathscr{L}_{\widetilde{W}_{V_t}} = \mathscr{L}_{X_t}$ 这一事实，可得对每个 $t \in [0, T]$，

$$\widetilde{u}^1(V_t, x, \mathscr{L}_{X_t}) \leq \widetilde{u}^2(V_t, x, \mathscr{L}_{X_t}), \quad \mathrm{d}x\text{-}a.e.,$$

根据定理 3.1，我们得出对每个 $t \in [0, T]$，$Y_t^1 \leq Y_t^2$，$\mathbb{P}$-几乎处处成立。证明完毕。

□

注 4.1. (i) 根据上述证明可知，若将 f^1 的条件替换为 f^2 的条件，定理 4.1 仍然成立。

(ii) 与 [29, 中的定理 2.2 和注 2.2], 所展示的、由标准布朗运动驱动的 DDBSDEs 相关结果相比，很容易看出，我们上述的定理 4.1 适用于更一般的反向随机微分方程，因为我们将驱动过程 $B^{1/2}$ 替换为一般的高斯过程 X 。此外，与分布无关情形（例如，见 [2, 定理 4.6 (iii)], [16, 定理 2.2]或 [22, 定理 12.3]）不同，我们需要通过一个关于 L-导数的公式（引理 2.3），克服生成元中出现$\mathscr{L}_{(X_s, Y_s)}$ 所带来的困难。

4.2 逆比较定理

在本部分中，我们研究一种逆比较问题：如果对每个 $t \in [0, T]$, $\epsilon \in (0, T-t)$ 和 $\xi \in L_X^2$, $Y_t^1(t+\epsilon, \xi) \leq Y_t^2(t+\epsilon, \xi)$（定义见定理 4.3 开头），都有 $f^1(t, y, z, \nu) \leq f^2(t, y, z, \nu)$，那么对每个 $(t, y, z, \nu) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathscr{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$，是否都有？也就是说，如果对于所有终端条件，我们都能比较具有相同终端条件的两个 DDBSDE 的解，那么能否比较它们的生成元？为了研究这个问题，我们首先给出一个由 [6]提出的生成元 f 的表示定理。

现在，给定 $(t, y, z) \in [0, T) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 并令 $0 < \epsilon < T - t$，记 (Y^ϵ, Z^ϵ) 为以下 DDBSDE 在 $[t, t+\epsilon]$ 上的唯一解：

$$Y_r^\epsilon = y + z(X_{t+\epsilon} - X_t) + \int_r^{t+\epsilon} f(s, Y_s^\epsilon, Z_s^\epsilon, \mathscr{L}_{(X_s, Y_s^\epsilon, Z_s^\epsilon)}) \mathrm{d}V_s - \int_r^{t+\epsilon} Z_s^\epsilon \mathrm{d}^\diamond X_s. \tag{4.6}$$

我们的表示定理表述如下

定理 4.2. 假设（H1）成立，并且对于任意 $t \in [0,T,\ V_{t+\epsilon} - V_t = O(\epsilon)$ 满足 $\epsilon \to 0$。那么对于任意 $(t,y,z) \in [0,T) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$，以下两个陈述等价：

$$(i)\ \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{Y_t^\epsilon - y}{\epsilon} = f(t,y,z,\mathscr{L}_{(X_t,y,z)}); \tag{4.7}$$

$$(ii)\ \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\epsilon} \int_t^{t+\epsilon} f(r,y,z,\mathscr{L}_{(X_t,y,z)}) \mathrm{d}r = f(t,y,z,\mathscr{L}_{(X_t,y,z)}). \tag{4.8}$$

证明。我们将证明分为两步。首先，针对（4.6）的辅助方程情形证明该定理；然后，通过应用传递原理将这一结果推广到（4.6）。

步骤 1. 辅助方程情形。首先注意，（4.6）对应的辅助方程为

$$\begin{aligned} \widetilde{Y}_{V_r}^\epsilon =& y + z(\widetilde{W}_{V_{t+\epsilon}} - \widetilde{W}_{V_t}) + \int_{V_r}^{V_{t+\epsilon}} f(U_s, \widetilde{Y}_s^\epsilon, \widetilde{Z}_s^\epsilon, \mathscr{L}_{(\widetilde{W}_s, \widetilde{Y}_s^\epsilon, \widetilde{Z}_s^\epsilon)}) \mathrm{d}s \\ & - \int_{V_r}^{V_{t+\epsilon}} \widetilde{Z}_s^\epsilon \mathrm{d}\widetilde{W}_s, \quad r \in [t, t+\epsilon]. \end{aligned} \tag{4.9}$$

我们声称，对于任意的 $(t,y,z) \in [0,T) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$，以下两个陈述等价：

$$(I)\ \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\widetilde{Y}_{V_t}^\epsilon - y}{\epsilon} = f(t,y,z,\mathscr{L}_{(\widetilde{W}_{V_t}.y,z)});$$

$$(II)\ \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\epsilon} \int_{V_t}^{V_{t+\epsilon}} f(U_r,y,z,\mathscr{L}_{(\widetilde{W}_{V_t}.y,z)}) \mathrm{d}r = f(t,y,z,\mathscr{L}_{(\widetilde{W}_{V_t}.y,z)}).$$

~ ~ ~事实上，对于 $s \in [V_t, V_{t+\epsilon}]$，我们令 $\Gamma_s^\epsilon := Y_s^\epsilon - (y + z($ $W_s - W_{V_t}))$。然后，在区间 $[V_t, V_{t+\epsilon}]$ 上对 Γ_s^ϵ 应用 Itô 公式，得到

$$\begin{aligned} \Gamma_s^\epsilon =& \int_s^{V_{t+\epsilon}} f(U_r, \Gamma_r^\epsilon + y + z(\widetilde{W}_r - \widetilde{W}_{V_t}), \widetilde{Z}_r^\epsilon, \mathscr{L}_{(\widetilde{W}_r, \Gamma_r^\epsilon + y + z(\widetilde{W}_r - \widetilde{W}_{V_t}), \widetilde{Z}_r^\epsilon)}) \mathrm{d}r \\ & - \int_s^{V_{t+\epsilon}} (\widetilde{Z}_r^\epsilon - z) \mathrm{d}\widetilde{W}_r \\ =:& \int_s^{V_{t+\epsilon}} f^\epsilon(r) \mathrm{d}r - \int_s^{V_{t+\epsilon}} (\widetilde{Z}_r^\epsilon - z) \mathrm{d}\widetilde{W}_r. \end{aligned} \tag{4.10}$$

利用以下事实：$Y_{V_t}^\epsilon - y = \Gamma_{V_t}^\epsilon$，且由于命题 4.2~，$\Gamma_{V_t}^\epsilon$ 是确定性的；再对（4.10）关于 $\mathscr{F}_{V_t}$ 取条件期望，可得

$$\begin{aligned} & \frac{\widetilde{Y}_{V_t}^\epsilon - y}{\epsilon} - f(t,y,z,\mathscr{L}_{(\widetilde{W}_{V_t}.y,z)}) \\ =& \frac{\Gamma_{V_t}^\epsilon}{\epsilon} - f(t,y,z,\mathscr{L}_{(\widetilde{W}_{V_t}.y,z)}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&\frac{1}{\epsilon}\widetilde{\mathbb{E}}\left(\int_{V_t}^{V_{t+\epsilon}} f^\epsilon(r)\mathrm{d}r|\widetilde{\mathscr{F}}_{V_t}\right)-f(t,y,z,\mathscr{L}_{(\widetilde{W}_{V_t}\cdot,y,z)})\\
=&\frac{1}{\epsilon}\widetilde{\mathbb{E}}\left[\int_{V_t}^{V_{t+\epsilon}}\left(f^\epsilon(r)-f(U_r,y+z(\widetilde{W}_r-\widetilde{W}_{V_t}),z,\mathscr{L}_{(\widetilde{W}_r,y+z(\widetilde{W}_r-\widetilde{W}_{V_t}),z)})\right)\mathrm{d}r\big|\widetilde{\mathscr{F}}_{V_t}\right]\\
&+\frac{1}{\epsilon}\widetilde{\mathbb{E}}\Big[\int_{V_t}^{V_{t+\epsilon}}\Big(f(U_r,y+z(\widetilde{W}_r-\widetilde{W}_{V_t}),z,\mathscr{L}_{(\widetilde{W}_r,y+z(\widetilde{W}_r-\widetilde{W}_{V_t}),z)})\\
&\qquad\qquad-f(U_r,y,z,\mathscr{L}_{(\widetilde{W}_{V_t}\cdot,y,z)})\Big)\mathrm{d}r\big|\widetilde{\mathscr{F}}_{V_t}\Big]\\
&+\frac{1}{\epsilon}\int_{V_t}^{V_{t+\epsilon}} f(U_r,y,z,\mathscr{L}_{(\widetilde{W}_{V_t}\cdot,y,z)})\mathrm{d}r-f(t,y,z,\mathscr{L}_{(\widetilde{W}_{V_t}\cdot,y,z)})\\
=:&I_1+I_2+I_3.
\end{aligned}\tag{4.11}
$$

由 H¨older 不等式和（H1），可得

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathbb{E}}|I_1|^2\leq&3L_f^2\frac{V_{t+\epsilon}-V_t}{\epsilon^2}\int_{V_t}^{V_{t+\epsilon}}\widetilde{\mathbb{E}}\left[|\Gamma_r^\epsilon|^2+|\widetilde{Z}_r^\epsilon-z|^2+\widetilde{\mathbb{E}}\left(|\Gamma_r^\epsilon|^2+|\widetilde{Z}_r^\epsilon-z|^2\right)\right]\mathrm{d}r\\
=&6L_f^2\frac{V_{t+\epsilon}-V_t}{\epsilon^2}\int_{V_t}^{V_{t+\epsilon}}\widetilde{\mathbb{E}}\left(|\Gamma_r^\epsilon|^2+|\widetilde{Z}_r^\epsilon-z|^2\right)\mathrm{d}r
\end{aligned}\tag{4.12}
$$

and

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathbb{E}}|I_2|^2\leq&2L_f^2\frac{V_{t+\epsilon}-V_t}{\epsilon^2}\int_{V_t}^{V_{t+\epsilon}}\mathbb{E}\left[z^2|\widetilde{W}_r-\widetilde{W}_{V_t}|^2+(1+z^2)\widetilde{\mathbb{E}}|\widetilde{W}_r-\widetilde{W}_{V_t}|^2\right]\mathrm{d}r\\
=&2L_f^2(1+2z^2)\frac{V_{t+\epsilon}-V_t}{\epsilon^2}\int_{V_t}^{V_{t+\epsilon}}(r-V_t)\mathrm{d}r\\
=&L_f^2(1+2z^2)\frac{(V_{t+\epsilon}-V_t)^3}{\epsilon^2}.
\end{aligned}\tag{4.13}
$$

与 [6, 命题 2.2], 类似，对 $\mathrm{e}^{\beta s}|\Gamma_s^\epsilon|^2$ 应用 Itˆo 公式，并取一个仅依赖于 L_f 的常数 $\beta>0$，我们得到 (4.10) 的以下先验估计（其解 $\widetilde{\ }$ 视为 $(\Gamma_\cdot^\epsilon, Z_\cdot^\epsilon-z)$）

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\mathbb{E}}\left(\sup_{V_t\leq s\leq V_{t+\epsilon}}|\Gamma_s^\epsilon|^2+\int_{V_t}^{V_{t+\epsilon}}|\widetilde{Z}_r^\epsilon-z|^2\mathrm{d}r\big|\widetilde{\mathscr{F}}_{V_t}\right)\\
\leq&C\widetilde{\mathbb{E}}\left[\left(\int_{V_t}^{V_{t+\epsilon}}|f(U_r,y+z(\widetilde{W}_r-\widetilde{W}_{V_t}),z,\mathscr{L}_{(\widetilde{W}_r,y+z(\widetilde{W}_r-\widetilde{W}_{V_t}),z)})|\mathrm{d}r\right)^2\big|\widetilde{\mathscr{F}}_{V_t}\right].
\end{aligned}
$$

于是，由 H¨older 不等式和（H1）可得

$$
\widetilde{\mathbb{E}}\left(\sup_{V_t\leq s\leq V_{t+\epsilon}}|\Gamma_s^\epsilon|^2+\int_{V_t}^{V_{t+\epsilon}}|\widetilde{Z}_r^\epsilon-z|^2\mathrm{d}r\right)
$$

$$\leq C(V_{t+\epsilon}-V_t)\int_{V_t}^{V_{t+\epsilon}}\widetilde{\mathbb{E}}\left[|f(U_r,y,z,\mathscr{L}_{(\widetilde{W}_{V_t},y,z)})|^2+z^2|\widetilde{W}_r-\widetilde{W}_{V_t}|^2+(1+z^2)\widetilde{\mathbb{E}}|\widetilde{W}_r-\widetilde{W}_{V_t}|^2\right]\mathrm{d}r$$

$$=C(V_{t+\epsilon}-V_t)\left[\int_{V_t}^{V_{t+\epsilon}}|f(U_r,y,z,\mathscr{L}_{(\widetilde{W}_{V_t},y,z)})|^2\mathrm{d}r+(1+2z^2)(V_{t+\epsilon}-V_t)^2\right].$$

将其代入（4.12）可得

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbb{E}}|I_1|^2\leq& C\left(\frac{V_{t+\epsilon}-V_t}{\epsilon}\right)^2(1+V_{t+\epsilon}-V_t)\\ &\times\left[\int_{V_t}^{V_{t+\epsilon}}|f(U_r,y,z,\mathscr{L}_{(\widetilde{W}_{V_t},y,z)})|^2\mathrm{d}r+(1+2z^2)(V_{t+\epsilon}-V_t)^2\right].\end{aligned}\tag{4.14}$$

注意到根据积分的绝对连续性，我们有

$$\lim_{\epsilon\to0^+}\int_{V_t}^{V_{t+\epsilon}}|f(U_r,y,z,\mathscr{L}_{(\widetilde{W}_{V_t},y,z)})|^2\mathrm{d}r=0.$$

因此，由于条件 $V_{t+\epsilon}-V_t=O(\epsilon)$ 以及 $\epsilon\to0$，并结合 (4.13)-(4.14)，我们得到

$$\lim_{\epsilon\to0^+}\left(\widetilde{\mathbb{E}}|I_1|^2+\widetilde{\mathbb{E}}|I_2|^2\right)=0,$$

~这与 (4.11) 以及 $Y^\epsilon_{V_t}$ 是确定性的这一事实相结合；根据 [16, ，再次应用命题 4.2]，可推出所需结论。

步骤 2。高斯噪声情形下的方程。对定理 3.1 的证明稍作修改可知，对于每个 $\epsilon>0$，存在一个表示函数 $\widetilde{u}^\epsilon$，使得 (4.6) 和 (4.9) 的解可写成如下形式：对于任意 $r\in[t,t+\epsilon]$，

$$Y^\epsilon_r=\widetilde{u}^\epsilon(V_r,X_r-X_t,\mathscr{L}_{X_r-X_t})\quad\text{and}\quad\widetilde{Y}^\epsilon_{V_r}=\widetilde{u}^\epsilon(V_r,\widetilde{W}_{V_r}-\widetilde{W}_{V_t},\mathscr{L}_{\widetilde{W}_{V_r}-\widetilde{W}_{V_t}}).$$

于是，我们得到

$$\frac{Y^\epsilon_t-y}{\epsilon}=\frac{\widetilde{u}^\epsilon(V_t,0,\delta_0)-y}{\epsilon}=\frac{\widetilde{Y}^\epsilon_{V_t}-y}{\epsilon}.\tag{4.15}$$

另一方面，通过变量变换，容易看出

$$\int_t^{t+\epsilon}f(r,y,z,\mathscr{L}_{(\widetilde{W}_{V_t},y,z)})\mathrm{d}r=\int_{V_t}^{V_{t+\epsilon}}f(U_r,y,z,\mathscr{L}_{(\widetilde{W}_{V_t}.y,z)})\mathrm{d}r.\tag{4.16}$$

最后，结合步骤 1 中的断言，利用 (4.15)-(4.16) 以及 $\mathscr{L}_{(\widetilde{W}_{V_t},y,z)}=\mathscr{L}_{(X_t,y,z)}$这一事实，我们推得 (4.7) 等价于 (4.8)。证明至此完成。

□

注 4.2. 尽管计算会复杂得多，但不难将步骤 1 中的结果推广到 (4.9)，其中 W 由扩散过程取代。这是对 [6, 命题 2.3] 和 [25, 定理 3.3] 的推广；后两者处理的是由布朗运动驱动的分布无关型倒向随机微分方程。

借助定理 4.2，我们可以建立一个逆比较定理。为此，我们将 $(Y_t^i(T, g(X_T, \mathscr{L}_{X_T}))\ Z_t^i(T, g(X_T, \mathscr{L}_{X_T})))^{t\in[0,T]}$ 记为.....的解

$$\begin{aligned} Y_t^i =& g(X_T, \mathscr{L}_{X_T}) + \int_t^T f^i(s, Y_s^i, Z_s^i, \mathscr{L}_{(X_s, Y_s^i, Z_s^i)})\mathrm{d}V_s \\ & - \int_t^T Z_s^i \mathrm{d}^\diamond X_s, \quad t \in [0,T], \quad i = 1, 2. \end{aligned} \tag{4.17}$$

我们的逆比较定理如下

定理 4.3. 设（H1）对 $f^i, i = 1, 2$ 和 $V_{t+\epsilon} - V_t = O(\epsilon)$ 成立，其中 $\epsilon \to 0$ 适用于任意 $t \in [0, T)$。此外，假设对每个 $(t, y, z) \in [0, T) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 和 $\epsilon \in (0, T - t]$,

$$Y_t^1(t + \epsilon, y + z(X_{t+\epsilon} - X_t)) \le Y_t^2(t + \epsilon, y + z(X_{t+\epsilon} - X_t)). \tag{4.18}$$

那么，对每个 $(t, y, z) \in [0, T) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$，有

$$f^1(t, y, z, \mathscr{L}_{(X_t, y, z)}) \le f^2(t, y, z, \mathscr{L}_{(X_t, y, z)}). \tag{4.19}$$

证明。由于（H1）对 $f^i, i = 1, 2$ 成立，可以看出，对于任意 $(t, y, z) \in [0, T) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\epsilon} \int_t^{t+\epsilon} f^i(r, y, z, \mathscr{L}_{(X_t, y, z)})\mathrm{d}r = f^i(t, y, z, \mathscr{L}_{(X_t, y, z)}), \quad i = 1, 2.$$

那么，根据定理 4.2，我们有

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{Y_t^i(t + \epsilon, y + z(X_{t+\epsilon} - X_t)) - y}{\epsilon} = f^i(t, y, z, \mathscr{L}_{(X_t, y, z)}), \quad i = 1, 2. \tag{4.20}$$

由假设 (4.18) 可得，对于任意 $(t, y, z) \in [0, T) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 和 $\epsilon \in (0, T - t]$,

$$Y_t^1(t + \epsilon, y + z(X_{t+\epsilon} - X_t)) - y \le Y_t^2(t + \epsilon, y + z(X_{t+\epsilon} - X_t)) - y,$$

这与 (4.20) 一起，得出所需关系。至此，证明完成 . □

我们以一条评注结束本节。

注 4.3. 根据定理 4.2 和定理 4.3，我们惊讶地发现，关系式 (4.7)、(4.8) 和 (4.19) 都依赖于 $\mathscr{L}_{(X_t, y, z)}$，这与无分布依赖情形有很大不同（例如，参见 [6, 定理 4.1], [13, 定理] 或 [25, 定理 5.1]）。这意味着，在处理表示定理或逆比较定理时，生成元的测度并非任意选择；这是因为分别在 (4.6) 和 (4.17) 中出现了分布依赖项 $\mathscr{L}_{(X_s, Y_s^\epsilon, Z_s^\epsilon)}$ 和 $\mathscr{L}_{(X_s, Y_s^i, Z_s^i)}$。

5 泛函不等式

本节旨在为 (3.1) 建立泛函不等式，主要包括输运不等式和对数 Sobolev 不等式。我们的论证结合了 Wasserstein 距离和测度相对熵在同胚作用下的稳定性，以及传递原理。

5.1 运输不等式

设 (E,d) 是一个度量空间，$\mathscr{P}(E)$ 表示 E 上所有概率测度的集合。对于 $p\in[1,\infty)$，如果存在一个常数 $C\geq 0$ 使得……，则称概率测度 $\mu\in\mathscr{P}(E)$ 在 (E,d) 上满足 p-运输不等式（记作 $\mu\in T_p(C)$）。

$$\mathbb{W}_p(\mu,\nu)\leq C\sqrt{H(\nu|\mu)},\quad \nu\in\mathscr{P}(E),$$

其中，$H(\nu|\mu)$ 是 ν 关于 μ 的相对熵（或 Kullback-Leibler 散度），定义为

$$H(\nu|\mu)=\begin{cases}\int\log\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}\mathrm{d}\nu, & \text{if } \nu\ll\mu,\\ +\infty, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

运输不等式有许多应用，例如定量金融、测度集中现象以及高维概率中的各种问题。有关更多内容，请参阅 [1, 15, 26, 36, 37, 38] 及其中的参考文献。

在转向（3.1）之前，我们先证明辅助方程（3.2）的运输不等式；该方程是 [1, 定理 1.3 和引理 4.1] 的分布依赖版本。

命题 5.1. 假设（H1）成立。则有

(i) The law of $(\widetilde{Y}_t)_{t\in[0,V_T]}$ *satisfies* $T_2(C_{Tr,\widetilde{Y}})$ *on* $\widetilde{\Omega}$ *with* $C_{Tr,\widetilde{Y}}=2(L_g+L_fV_T)^2\mathrm{e}^{2L_fV_T}$.

(ii) 对任意 $p\geq 1$，$(Z_t)_{t\in[0,V_T]}$ 的分布记为 $\mathscr{L}_{\widetilde{Z}}$，满足

$$\mathbb{W}_p(\mathscr{L}_{\widetilde{Z}},\mu)\leq C_{Tr,\widetilde{Z}}\left(H(\mu|\mathscr{L}_{\widetilde{Z}})\right)^{\frac{1}{2p}},\quad \mu\in\mathscr{P}(\widetilde{\Omega}),$$

其中

$$C_{Tr,\widetilde{Z}}=2\inf_{\alpha>0}\left\{\frac{1}{2\alpha}\left[1+\alpha\mathrm{e}^{2pL_fV_T}(L_g+L_fV_T)^{2p}\right]\right\}^{\frac{1}{2p}}.$$

为简洁起见，证明推迟至附录给出。利用命题 5.1 和传递原理，我们现在陈述并证明如下关于 (3.1) 的运输不等式。

T定理 5.2. 假设（H1）成立。那么对于每个 $t\in[0,T]$，我们有

(i) Y_t的分布在 $\mathbb{R}$ 上满足 $T_2(C_{Tr,Y_t})$，其中 $C_{Tr,Y_t} = 2(L_g + L_f(V_T - V_t))^2 \mathrm{e}^{(V_T - V_t)}$。

(ii) 对任意 $p \geq 1$， Z_t 的分布满足

$$\mathbb{W}_p(\mathscr{L}_{Z_t}, \mu) \leq C_{Tr,Z_t} \left(H(\mu|\mathscr{L}_{Z_t})\right)^{\frac{1}{2p}}, \quad \mu \in \mathscr{P}(\mathbb{R}),$$

其中

$$C_{Tr,Z_t} = 2 \inf_{\alpha>0} \left\{ \frac{1}{2\alpha} \left[1 + \alpha \mathrm{e}^{2pL_f(V_T - V_t)} (L_g + L_f(V_T - V_t))^{2p}\right] \right\}^{\frac{1}{2p}}.$$

证明。根据命题 5.1 及其证明（见附录中的（6.6）和（6.8）），容易看出，对于每个 $t \in [0, V_T]$， $\mathscr{L}_{\widetilde{Y}_t}$ 满足 $T_2(C_{Tr,\widetilde{Y}_t})$，在 $\mathbb{R}$ 上且 $C_{Tr,\widetilde{Y}_t} = 2(L_g + L_f(V_T - t))^2 \mathrm{e}^{2L_f(V_T - t)}$，并且 $\mathscr{L}_{\widetilde{Z}_t}$ 满足

$$\mathbb{W}_p(\mathscr{L}_{\widetilde{Z}_t}, \mu) \leq C_{Tr,\widetilde{Z}_t} \left(H(\mu|\mathscr{L}_{\widetilde{Z}_t})\right)^{\frac{1}{2p}}, \quad \mu \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$$

对任意 $p \geq 1$ 且

$$C_{Tr,\widetilde{Z}_t} = 2 \inf_{\alpha>0} \left\{ \frac{1}{2\alpha} \left[1 + \alpha \mathrm{e}^{2pL_f(V_T - t)} (L_g + L_f(V_T - t))^{2p}\right] \right\}^{\frac{1}{2p}}.$$

注意到，对于任意 $t \in [0, T]$，根据定理 3.1， Y_t 和 Z_t 的分布分别与 $\widetilde{Y_{V_t}}$ 和 Z_{V_t} 的分布相同，由此得到所需的断言 (i) 和 (ii)。 □

注 5.1. 若 $f = 0$ 和 $g(x, \mu) = x$，则可以验证，(3.1) 和（3.2）分别有唯一的 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ 解 $(Y, Z) = (X, 1)$ 和 $(Y, Z) = (W, 1)$。由定理 5.2 和命题 5.1，可得 $C_{Tr,Y_t} = 2$ 和 $C_{Tr,\widetilde{Y}} = 2$，已知它们对高斯过程和布朗运动是最优的。这意味着上述常数 C_{Tr,Y_t} 和 $C_{Tr,\widetilde{Y}}$ 是锐利的。还需指出，目前尚不清楚 Y 和 Z 的路径分布是否满足运输不等式。事实上，由于空间 $\mathscr{P}(C([0, T]))$ 和 $\mathscr{P}(C([0, V_T]))$ 之间存在差异，传递原理在这种情况下可能失效。

5.2 对数 Sobolev 不等式

为了介绍我们关于（3.1）的结果，我们先给出辅助方程（3.2）的对数 Sobolev 不等式。

命题 5.3. 假设（H1）成立。那么对于每个 $t \in [0, V_T]$ ，

$$\mathrm{Ent}_{\mathscr{L}_{\widetilde{Y}_t}}(f^2) \leq C_{LS,\widetilde{Y}_t} \int_{\mathbb{R}} |f'|^2 \mathrm{d}\mathscr{L}_{\widetilde{Y}_t} \tag{5.1}$$

对于所有 $\mathscr{L}_{\widetilde{Y}_t}$-可积且可微的函数 $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，均成立，其中

$$C_{LS,\widetilde{Y}_t} = 2V_T(L_g + L_f(V_T - t))^2 \mathrm{e}^{2L_f(V_T - t)}.$$

这里，$0 \le F \in L^1(\mu)$ 相对于概率测度 μ 的熵定义为

$$\mathrm{Ent}_\mu(F) = \int_{\mathbb{R}} F \log F \mathrm{d}\mu - \int_{\mathbb{R}} F \mathrm{d}\mu \cdot \log \int_{\mathbb{R}} F \mathrm{d}\mu.$$

当 μ 满足以 $\mathscr{L}_{\widetilde{Y}_t}$ 替代 μ 的式 (5.1) 时，我们称 μ 满足 $LSI(C_{LS})$。该不等式由 Gross [21], 首创，现已成为无限维随机分析中的重要工具。它在正向扩散的背景下得到了充分研究，并且与 2-运输不等式有关（例如参见 [11, 20, 27, 31, 39, 40]）。

为证明命题 5.3，我们回顾一项结果：对数 Sobolev 不等式在经 Lipschitz 映射推前后具有稳定性（参见 [14, 第 1] 节或 [1,引理 6.1]）。

~引理 5.4。若 $\psi : (\Omega, \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}^d$ 是 Lipschitz 连续的，即

$$|\psi(\omega_1) - \psi(\omega_2)| \le L_\psi \|\omega_1 - \omega_2\|_\infty := L_\psi \sup_{r\in[0,V_T]} |\omega_1(r) - \omega_2(r)|, \quad \omega_1, \omega_2 \in \widetilde{\Omega},$$

~其中 $L_\psi > 0$ 为常数。则 $\mathbb{P} \circ \psi^{-1}$ 满足 LSI($2V_T L_\psi^2$)。

~根据命题 5.1 的证明（见附录），我们已经证明：$Y : \widetilde{\Omega} \to C([0, V_T])$ 是利普希茨连续的，其利普希茨常数为 $(L_g + L_f V_T)\mathrm{e}^{L_f V_T}$；这~ ~实际上意味着，对于任意 $t \in [0, V_T]$，$Y_t : \Omega \to \mathbb{R}$ 也是利普希茨连续的，其利普希茨常数为 $(L_g + L_f(V_T - t))\mathrm{e}^{L_f（V_T - t）}$，这是由 (6.6) 得到的。因此，根据引理 5.4，我们得到了命题 5.3 中所述的期望结论。

注意到，根据定理 3.1，Y_t 的分布 $\mathbb{P}_{Y_t}$ 满足 [0, V_t] 上的对数 Sobolev 不等式。因此，根据命题 5.3，我们得到关于 (3.1) 的如下对数 Sobolev 不等式。

定理 5.5. 假设（H1）成立。那么对于任意 $t \in [0, T]$，Y_t 的分布满足 LSI($C_{LS,\ Y_t}$)，其中

$$C_{LS,Y_t} = 2V_T(L_g + L_f(V_T - V_t))^2 \mathrm{e}^{2L_f(V_T - V_t)}.$$

6 附录：命题 5.1 的证明

为了证明该命题，我们先给出后续将要用到的三个引理。第一个引理讨论运输不等式在经 Lipschitz 映射推前后的稳定性，这归功于 [15, 引理 2.1]（例如，参见 [36, 引理 4.1] 和 [38, 推论 2.2]，后者给出了一个推广版本）。

引理 6.1. 设 (E, d_E) 和 $(\overline{E}, d_{\overline{E}})$ 是两个度量空间。假设 (E, d_E) 上的 $\mu \in T_p(C)$，且 $\chi : (E, d_E) \to (\overline{E}, d_{\overline{E}})$ 是利普希茨连续的，利普希茨常数为 L_χ。那么 $(\overline{E}, d_{\overline{E}})$ 上的 $\mu \circ \chi^{-1} \in T_p(CL_\chi^2)$。

下面的第二个引理给出了一个充分条件，该条件以指数矩的形式表述，适用于满足形式为 (6.1) 的运输不等式的概率测度。

引理 6.2.（*[4, 推论 2.4]*）设（E, d_E）为一个度量空间，且 ν 是定义在 E 和 $p \geq 1$上的概率测度。假设存在 $x_0 \in E$ 和 $\alpha > 0$，使得

$$\int_E \exp\left\{\alpha d_E^{2p}(x_0, x)\right\} \mathrm{d}\nu(x) < \infty.$$

Then

$$\mathbb{W}_p(\mu, \nu) \leq C(H(\mu|\nu))^{\frac{1}{2p}}, \quad \mu \in \mathscr{P}(E) \tag{6.1}$$

成立，其中

$$C = 2 \inf_{x_0 \in E, \alpha > 0} \left[\frac{1}{2\alpha}\left(1 + \log \int_E \exp\left\{\alpha d_E^{2p}(x_0, x)\right\} \mathrm{d}\nu(x)\right)\right]^{\frac{1}{2p}} < \infty.$$

陈述第三个引理之前，我们需要引入 [1, 17]中的一些记号。对于 $t \in [0, V_T]$，令 $\widetilde{\Omega}^t$ 为 Ω 的平移空间，定义如下：

$$\widetilde{\Omega}^t := \{\gamma \in C([t, V_T]) : \gamma(t) = 0\}.$$

$\widetilde{\mathbb{P}}^t$ 分别用 W^t 和 $\mathbb{P}^t$ 表示 $\widetilde{\Omega}^t$上的典范过程和维纳测度，并用 $(\mathscr{F}_s^t)_{s\in[t,V_T]}$ 表示由 W^t生成的滤过。对于 $\omega \in \Omega$ $t \in [0, V_T]$和 $\gamma \in \widetilde{\Omega}^t$，定义拼接 $\omega \otimes_t \gamma \in \Omega$ 如下：

$$(\omega \otimes_t \gamma)(s) := \begin{cases} \omega(s), & s \in [0, t), \\ \omega(t) + \gamma(s), & s \in [t, V_T], \end{cases}$$

对于 $\zeta: \Omega \times [0, V_T] \to \mathbb{R}$，定义其平移 $X^{t,\omega}$如下：

$$\begin{aligned} \zeta^{t,\omega} : \widetilde{\Omega}^t \times [t, V_T] &\to \mathbb{R}, \\ (\gamma, s) &\mapsto \zeta_s(\omega \otimes_t \gamma) =: \zeta_s^{t,\omega}(\gamma). \end{aligned}$$

正如 [1], 中所指出的，我们有

$$\widetilde{\mathbb{E}}(\zeta|\widetilde{\mathscr{F}_t})(\omega) = \int_{\Omega^t} \zeta^{t,\omega}(\gamma)\widetilde{\mathbb{P}}^t(\mathrm{d}\gamma) =: \widetilde{\mathbb{E}}_{\widetilde{\mathbb{P}}^t}\zeta^{t,\omega}.$$

下面的引理给出了一个结果，它是 [1, 引理 2.2] 的分布依赖版本。其证明与 [1, 引理 2.2] 的证明非常相似，这里省略。

引理 6.3。设 $(Y, Z) \in \Upsilon$ 是（3.2）的解。那么对于任意 $t \in [0, V_T]$，存在一个 $\mathbb{P}$-零测集 $N \subset \Omega$，使得对于 $\omega \in N^c$，

$$\begin{aligned} \widetilde{Y}_s^{t,\omega} =& g(\widetilde{W}_{V_T}^{t,\omega}, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_{V_T}}) + \int_s^{V_T} f(U_r, \widetilde{W}_r^{t,\omega}, \widetilde{Y}_r^{t,\omega}, \widetilde{Z}_r^{t,\omega}, \mathscr{L}_{(\widetilde{W}_r, \widetilde{Y}_r, \widetilde{Y}_r)})\mathrm{d}r \\ &- \int_s^{V_T} \widetilde{Z}_r^{t,\omega}\mathrm{d}\widetilde{W}_r^t, \quad \widetilde{\mathbb{P}}^t\text{-}a.s., \ s \in [t, V_T] \end{aligned}$$

且 $\widetilde{Y}^{t,\omega}_{t} = \widetilde{Y}_t(\omega)\widetilde{\mathbb{P}}^t$-几乎必然成立。

现在我们可以证明命题 5.1 了。

命题 5.1 的证明。由（H1），我们知道存在唯一的解 $(Y, Z) \in \Upsilon$，满足（3.2）。此外，很容易得出，Y 具有 $\mathbb{P}$-几乎处处连续的路径，且 Z 平方可积。证明的其余部分分为两步。

Step 1. 借鉴 [17, Proposition 5.4] 和 [1, 定理 1.3] 的证明思路，我们旨在证明 $Y\colon \Omega \to \mathbb{R}$ 是利普希茨连续的。

令 $t \in [0, T)$ 是固定的。根据引理 6.3，存在一个 $\widetilde{\mathbb{P}}$-零测集 $N \subset \widetilde{\Omega}$，使得对于 $\omega \in N^c$，

$$\widetilde{Y}_t^{t,\omega} = \widetilde{Y}_t(\omega), \quad \widetilde{\mathbb{P}}^t\text{-}a.s. \tag{6.2}$$

and

$$\begin{aligned}\widetilde{Y}_s^{t,\omega} =& g(\widetilde{W}_{V_T}^{t,\omega}, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_{V_T}}) + \int_s^{V_T} f(U_r, \widetilde{W}_r^{t,\omega}, \widetilde{Y}_r^{t,\omega}, \widetilde{Z}_r^{t,\omega}, \mathscr{L}_{(\widetilde{W}_r, \widetilde{Y}_r, \widetilde{Y}_r)})\mathrm{d}r \\ &- \int_s^{V_T} \widetilde{Z}_r^{t,\omega}\mathrm{d}\widetilde{W}_r^t, \quad \widetilde{\mathbb{P}}^t\text{-}a.s., \ s \in [t, V_T].\end{aligned} \tag{6.3}$$

那么对于任意的 w_1、$w_2 \in N^c$，由（6.3）和（H1）可得

$$\begin{aligned}&\widetilde{Y}_s^{t,\omega_1} - \widetilde{Y}_s^{t,\omega_2} \\ =& g(\widetilde{W}_{V_T}^{t,\omega_1}, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_{V_T}}) - g(\widetilde{W}_{V_T}^{t,\omega_2}, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_{V_T}}) \\ &+ \int_s^{V_T} \left(f(U_r, \widetilde{W}_r^{t,\omega_1}, \widetilde{Y}_r^{t,\omega_1}, \widetilde{Z}_r^{t,\omega_1}, \mathscr{L}_{(\widetilde{W}_r, \widetilde{Y}_r, \widetilde{Y}_r)}) - f(U_r, \widetilde{W}_r^{t,\omega_2}, \widetilde{Y}_r^{t,\omega_2}, \widetilde{Z}_r^{t,\omega_2}, \mathscr{L}_{(\widetilde{W}_r, \widetilde{Y}_r, \widetilde{Y}_r)}) \right) \mathrm{d}r \\ &- \int_s^{V_T} \left(\widetilde{Z}_r^{t,\omega_1} - \widetilde{Z}_r^{t,\omega_2} \right) \mathrm{d}\widetilde{W}_r^t \\ =& g(\widetilde{W}_{V_T}^{t,\omega_1}, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_{V_T}}) - g(\widetilde{W}_{V_T}^{t,\omega_2}, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_{V_T}}) \\ &+ \int_s^{V_T} \left[\alpha_r (\widetilde{W}_r^{t,\omega_1} - \widetilde{W}_r^{t,\omega_2}) + \beta_r (\widetilde{Y}_r^{t,\omega_1} - \widetilde{Y}_r^{t,\omega_2}) + \rho_r (\widetilde{Z}_r^{t,\omega_1} - \widetilde{Z}_r^{t,\omega_2}) \right] \mathrm{d}r \\ &- \int_s^{V_T} \left(\widetilde{Z}_r^{t,\omega_1} - \widetilde{Z}_r^{t,\omega_2} \right) \mathrm{d}\widetilde{W}_r^t, \quad \mathbb{P}^t\text{-}a.s., \ s \in [t, V_T],\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\alpha_r &:= \int_0^1 \partial_x f(U_r, \widetilde{W}_r^{t,\omega_2} + \theta(\widetilde{W}_r^{t,\omega_1} - \widetilde{W}_r^{t,\omega_2}), \widetilde{Y}_r^{t,\omega_1}, \widetilde{Z}_r^{t,\omega_1}, \mathscr{L}_{(\widetilde{W}_r, \widetilde{Y}_r, \widetilde{Y}_r)})\mathrm{d}\theta, \\ \beta_r &:= \int_0^1 \partial_y f(U_r, \widetilde{W}_r^{t,\omega_2}, \widetilde{Y}_r^{t,\omega_2} + \theta(\widetilde{Y}_r^{t,\omega_1} - \widetilde{Y}_r^{t,\omega_2}), \widetilde{Z}_r^{t,\omega_1}, \mathscr{L}_{(\widetilde{W}_r, \widetilde{Y}_r, \widetilde{Y}_r)})\mathrm{d}\theta, \\ \rho_r &:= \int_0^1 \partial_z f(U_r, \widetilde{W}_r^{t,\omega_2}, \widetilde{Y}_r^{t,\omega_2}, \widetilde{Z}_r^{t,\omega_2} + \theta(\widetilde{Z}_r^{t,\omega_1} - \widetilde{Z}_r^{t,\omega_2}), \mathscr{L}_{(\widetilde{W}_r, \widetilde{Y}_r, \widetilde{Y}_r)})\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

我们认为，乘积 $\mathrm{e}^{\int_t^s \beta_r \mathrm{d}r}(\widetilde{Y}^{t,\ \omega_1}_{s} - \widetilde{Y}^{t,\ \omega_2}_{s})$ 为 $\sim Y^{t,\ \omega_1}_{s} - Y^{t,\ \omega_2}_{s}$ 提供了更合适的表示。事实上，对于 $s \in (t, V_T]$,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}\left[\mathrm{e}^{\int_t^s \beta_r \mathrm{d}r}(\widetilde{Y}_s^{t,\omega_1} - \widetilde{Y}_s^{t,\omega_2})\right] \\
=&\Bigg[(\widetilde{Y}_s^{t,\omega_1} - \widetilde{Y}_s^{t,\omega_2})\mathrm{e}^{\int_t^s \beta_r \mathrm{d}r}\beta_s \\
&- \mathrm{e}^{\int_t^s \beta_r \mathrm{d}r}\left(\alpha_s(\widetilde{W}_s^{t,\omega_1} - \widetilde{W}_s^{t,\omega_2}) + \beta_s(\widetilde{Y}_s^{t,\omega_1} - \widetilde{Y}_s^{t,\omega_2}) + \rho_s(\widetilde{Z}_s^{t,\omega_1} - \widetilde{Z}_s^{t,\omega_2})\right)\Bigg]\mathrm{d}s \\
&+ e^{\int_t^s \beta_r \mathrm{d}r}\left(\widetilde{Z}_s^{t,\omega_1} - \widetilde{Z}_s^{t,\omega_2}\right)\mathrm{d}\widetilde{W}_s^t \\
=&\left[-\mathrm{e}^{\int_t^s \beta_r \mathrm{d}r}\left(\alpha_s(\widetilde{W}_s^{t,\omega_1} - \widetilde{W}_s^{t,\omega_2}) + \rho_s(\widetilde{Z}_s^{t,\omega_1} - \widetilde{Z}_s^{t,\omega_2})\right)\right]\mathrm{d}s + e^{\int_t^s \beta_r \mathrm{d}r}\left(\widetilde{Z}_s^{t,\omega_1} - \widetilde{Z}_s^{t,\omega_2}\right)\mathrm{d}\widetilde{W}_s^t.
\end{aligned}
$$

然后，对 s 到 V_T 积分可得

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{\int_t^{V_T} \beta_r \mathrm{d}r}(\widetilde{Y}_{V_T}^{t,\omega_1} - \widetilde{Y}_{V_T}^{t,\omega_2}) - \mathrm{e}^{\int_t^s \beta_r \mathrm{d}r}(\widetilde{Y}_s^{t,\omega_1} - \widetilde{Y}_s^{t,\omega_2}) \\
=&-\int_s^{V_T} \mathrm{e}^{\int_t^r \beta_\theta \mathrm{d}\theta}\left(\alpha_r(\widetilde{W}_r^{t,\omega_1} - \widetilde{W}_r^{t,\omega_2}) + \rho_r(\widetilde{Z}_r^{t,\omega_1} - \widetilde{Z}_r^{t,\omega_2})\right)\mathrm{d}r \\
&+\int_s^{V_T} e^{\int_t^r \beta_\theta \mathrm{d}\theta}\left(\widetilde{Z}_r^{t,\omega_1} - \widetilde{Z}_r^{t,\omega_2}\right)\mathrm{d}\widetilde{W}_r^t, \quad \widetilde{\mathbb{P}}^t\text{-}a.s..
\end{aligned}
$$

注意到 $\widetilde{Y}^{t,\ \omega_i}_{V_T} = g(\widetilde{W}^{t,\ \omega_i}_{V_T}, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_{V_T}})$ $i = 1, 2$，因此我们得到

$$
\begin{aligned}
\widetilde{Y}_s^{t,\omega_1} - \widetilde{Y}_s^{t,\omega_2} =&\mathrm{e}^{\int_s^{V_T} \beta_r \mathrm{d}r}\left(g(\widetilde{W}_{V_T}^{t,\omega_1}, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_{V_T}}) - g(\widetilde{W}_{V_T}^{t,\omega_2}, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_{V_T}})\right) \\
&+\int_s^{V_T} \mathrm{e}^{\int_s^r \beta_\theta \mathrm{d}\theta}\left(\alpha_r(\widetilde{W}_r^{t,\omega_1} - \widetilde{W}_r^{t,\omega_2}) + \rho_r(\widetilde{Z}_r^{t,\omega_1} - \widetilde{Z}_r^{t,\omega_2})\right)\mathrm{d}r \\
&-\int_s^{V_T} e^{\int_s^r \beta_\theta \mathrm{d}\theta}\left(\widetilde{Z}_r^{t,\omega_1} - \widetilde{Z}_r^{t,\omega_2}\right)\mathrm{d}\widetilde{W}_r^t \\
=&\mathrm{e}^{\int_s^{V_T} \beta_r \mathrm{d}r}\left(g(\widetilde{W}_{V_T}^{t,\omega_1}, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_{V_T}}) - g(\widetilde{W}_{V_T}^{t,\omega_2}, \mathscr{L}_{\widetilde{W}_{V_T}})\right) \\
&+\int_s^{V_T} \mathrm{e}^{\int_s^r \beta_\theta \mathrm{d}\theta}\alpha_r(\widetilde{W}_r^{t,\omega_1} - \widetilde{W}_r^{t,\omega_2})\mathrm{d}r - \int_s^{V_T} e^{\int_s^r \beta_\theta \mathrm{d}\theta}\left(\widetilde{Z}_r^{t,\omega_1} - \widetilde{Z}_r^{t,\omega_2}\right)\mathrm{d}\overline{W}_r^t, \qquad (6.4)
\end{aligned}
$$

其中 $\overline{W}_r^t := \widetilde{W}_r - \int_t^r \rho_r \mathrm{d}r$。

现在，对于 $s \in [t, V_T]$，我们定义

$$
R_s = \exp\left\{\int_t^s \rho_r \mathrm{d}\widetilde{W}_r - \frac{1}{2}\int_t^s |\rho_r|^2 \mathrm{d}r\right\}.
$$

根据（H1），容易验证 Novikov 条件成立，这意味着由于 Girsanov 定理，$\overline{W}_\cdot^t$ 在概率 $R_{V_T}\mathbb{P}^t$ 下是一个布朗运动。然后，在 $R_{V_T}\mathbb{P}^t$ 下对等式（6.4）两边取关于 $\mathscr{F}_s^t$ 的条件期望，可得

$$
\widetilde{\mathbb{E}}_{R_{V_T}\widetilde{\mathbb{P}}^t}\left(\widetilde{Y}_s^{t,\omega_1} - \widetilde{Y}_s^{t,\omega_2} | \widetilde{\mathscr{F}}_s^t\right)
$$

$$
\begin{aligned}
=&\widetilde{\mathbb{E}}_{R_{V_T}\widetilde{\mathbb{P}}^t}\left[\mathrm{e}^{\int_s^{V_T}\beta_r\mathrm{d}r}\left(g(\widetilde{W}_{V_T}^{t,\omega_1},\mathscr{L}_{\widetilde{W}_{V_T}})-g(\widetilde{W}_{V_T}^{t,\omega_2},\mathscr{L}_{\widetilde{W}_{V_T}})\right)|\widetilde{\mathscr{F}}_s^t\right]\\
&+\widetilde{\mathbb{E}}_{R_{V_T}\widetilde{\mathbb{P}}^t}\left[\int_s^{V_T}\mathrm{e}^{\int_s^r\beta_\theta\mathrm{d}\theta}\alpha_r(\widetilde{W}_r^{t,\omega_1}-\widetilde{W}_r^{t,\omega_2})\mathrm{d}r|\widetilde{\mathscr{F}}_s^t\right],\ \ \widetilde{\mathbb{P}}^t\text{-}a.s.,\ s\in[t,V_T].
\end{aligned}\tag{6.5}
$$

因此，我们有

$$
\begin{aligned}
\widetilde{Y}_t^{t,\omega_1}-\widetilde{Y}_t^{t,\omega_2}=&\widetilde{\mathbb{E}}_{R_{V_T}\widetilde{\mathbb{P}}^t}\left[\mathrm{e}^{\int_t^{V_T}\beta_r\mathrm{d}r}\left(g(\widetilde{W}_{V_T}^{t,\omega_1},\mathscr{L}_{\widetilde{W}_{V_T}})-g(\widetilde{W}_{V_T}^{t,\omega_2},\mathscr{L}_{\widetilde{W}_{V_T}})\right)\right]\\
&+\widetilde{\mathbb{E}}_{R_{V_T}\widetilde{\mathbb{P}}^t}\left[\int_t^{V_T}\mathrm{e}^{\int_t^r\beta_\theta\mathrm{d}\theta}\alpha_r(\widetilde{W}_r^{t,\omega_1}-\widetilde{W}_r^{t,\omega_2})\mathrm{d}r\right],\ \ \widetilde{\mathbb{P}}^t\text{-}a.s..
\end{aligned}
$$

由（6.2）和（H1）可推得

$$
\begin{aligned}
&|\widetilde{Y}_t(\omega_1)-\widetilde{Y}_t(\omega_2)|=|\widetilde{Y}_t^{t,\omega_1}-\widetilde{Y}_t^{t,\omega_2}|\\
\leq&\mathrm{e}^{L_f(V_T-t)}\left(L_g\widetilde{\mathbb{E}}_{R_{V_T}\widetilde{\mathbb{P}}^t}|\widetilde{W}_{V_T}^{t,\omega_1}-\widetilde{W}_{V_T}^{t,\omega_2}|+L_f\int_t^{V_T}\widetilde{\mathbb{E}}_{R_{V_T}\widetilde{\mathbb{P}}^t}|\widetilde{W}_r^{t,\omega_1}-\widetilde{W}_r^{t,\omega_2}|\mathrm{d}r\right)\\
=&\mathrm{e}^{L_f(V_T-t)}\Bigg(L_g\widetilde{\mathbb{E}}_{R_{V_T}\widetilde{\mathbb{P}}^t}|(\omega_1\otimes_t\cdot)(V_T)-(\omega_2\otimes_t\cdot)(V_T)|\\
&\qquad+L_f\int_t^{V_T}\widetilde{\mathbb{E}}_{R_{V_T}\widetilde{\mathbb{P}}^t}|(\omega_1\otimes_t\cdot)(r)-(\omega_2\otimes_t\cdot)(r)|\mathrm{d}r\Bigg)\\
\leq&\left(L_g+L_f(V_T-t)\right)\mathrm{e}^{L_f(V_T-t)}\sup_{0\leq r\leq t}|\omega_1(r)-\omega_2(r)|,
\end{aligned}\tag{6.6}
$$

其中，最后一个不等式源于拼接变量 $\omega_i\otimes_t\cdot$、$i=1$、2. ~的定义。注意到 $t\in[0,V_t]$和 w_1、$w_2\in N^c$是任意的，且 $\mathbb{P}(N)=0$，我们得出~ ~$Y\colon\Omega\to C([0,V_T])$ 是利普希茨连续的，其利普希茨常数为 $(L_g+L_fV_T)\,\mathrm{e}^{L_fV_T}$。因此，考虑到维纳过程的分布满足 T_2(2)（见[19, 定理 3.1]），由引理 6.1可得第一个断言。

~*Step 2. Transportation inequality for Z*。我们首先假设 $g(x,\mu)$ 和 $f(t,x,y,z,\nu)$ ~ ~关于 x、y和 z可微。于是 (Y,Z) 可微，并且此外~ ~ $(\nabla Y,\nabla Z)$ 满足以下线性 DDBSDE

$$
\begin{aligned}
\nabla\widetilde{Y}_t=&\nabla_x g(\widetilde{W}_{V_T},\mathscr{L}_{\widetilde{W}_{V_T}})-\int_t^{V_T}\nabla\widetilde{Z}_s\mathrm{d}\widetilde{W}_s\\
&+\int_t^{V_T}\Big[\nabla_x f(U_s,\widetilde{W}_s,\widetilde{Y}_s,\widetilde{Z}_s,\mathscr{L}_{(\widetilde{W}_s,\widetilde{Y}_s,\widetilde{Z}_s)})+\nabla_y f(U_s,\widetilde{W}_s,\widetilde{Y}_s,\widetilde{Z}_s,\mathscr{L}_{(\widetilde{W}_s,\widetilde{Y}_s,\widetilde{Z}_s)})\nabla\widetilde{Y}_s\\
&\qquad+\nabla_z f(U_s,\widetilde{W}_s,\widetilde{Y}_s,\widetilde{Z}_s,\mathscr{L}_{(\widetilde{W}_s,\widetilde{Y}_s,\widetilde{Z}_s)})\nabla\widetilde{Z}_s\Big]\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

与 (6.5) 中的推导类似，应用乘积 $\mathrm{e}_{\int_0^t\nabla_y f(U_s,\widetilde{W}_s,\widetilde{Y}_s,\widetilde{Z}_s,\mathscr{L}_{(\widetilde{W}_s,\widetilde{Y}_s,\widetilde{Z}_s)})\mathrm{d}^s}\nabla\widetilde{Y}_t$和~Girsanov 定理，我们推得存在某个概率 $\mathbb{Q}$，使得

$$
\widetilde{W}_\cdot-\int_0^\cdot\nabla_z f(U_s,\widetilde{W}_s,\widetilde{Y}_s,\widetilde{Z}_s,\mathscr{L}_{(\widetilde{W}_s,\widetilde{Y}_s,\widetilde{Z}_s)})\mathrm{d}s
$$

~是布朗运动，且 ∇Y_t 具有如下表示

$$\begin{aligned}\nabla\widetilde{Y}_t =&\widetilde{\mathbb{E}}_{\widetilde{\mathbb{Q}}}\Big[e^{\int_t^{V_T}\nabla_y f(U_s,\widetilde{W}_s,\widetilde{Y}_s,\widetilde{Z}_s,\mathscr{L}_{(\widetilde{W}_s,\widetilde{Y}_s,\widetilde{Z}_s)})\mathrm{d}s}\nabla_x g(\widetilde{W}_{V_T},\mathscr{L}_{\widetilde{W}_{V_T}})\\&+\int_t^{V_T}e^{\int_t^s\nabla_y f(U_r,\widetilde{W}_r,\widetilde{Y}_r,\widetilde{Z}_r,\mathscr{L}_{(\widetilde{W}_r,\widetilde{Y}_r,\widetilde{Z}_r)})\mathrm{d}r}\nabla_x f(U_s,\widetilde{W}_s,\widetilde{Y}_s,\widetilde{Z}_s,\mathscr{L}_{(\widetilde{W}_s,\widetilde{Y}_s,\widetilde{Z}_s)})\mathrm{d}s\big|\widetilde{\mathscr{F}}_t\Big].\end{aligned}$$

因此，容易看出

$$|\nabla\widetilde{Y}_t|\le \mathrm{e}^{L_f(V_T-t)}(L_g+L_f(V_T-t)). \tag{6.7}$$

~另一方面，经典结果表明，存在一个版本的 $(Z_t)_{t\in[0,T]}$，其形式为~$(\nabla Y_t)_{t\in[0,T]}$（例如，参见 [28, 注 9.1]）。因此，将其与 (6.7) 结合可得

$$|\widetilde{Z}_t|\le \mathrm{e}^{L_f(V_T-t)}(L_g+L_f(V_T-t)). \tag{6.8}$$

当 g 和 f 不可微时，我们也可以通过标准的逼近和稳定性结果得到 (6.8)（见注 3.1 (i)）。因此，借助引理 6.2，我们得出第二个断言。

□

致谢

X. Fan 部分得到了安徽省自然科学基金（编号：2008085MA10）和国家自然科学基金（编号：11871076、12071003）的资助。

参考文献

[1] D. Bartl 和 L. Tangpi，正向与反向扩散的泛函不等式，《电子概率学杂志》25 (2020)，1–22。[2] C. Bender，由高斯过程驱动的倒向随机微分方程，《随机过程及其应用》124 (2014)，2892–2916。[3] J. M. Bismut，最优随机控制中的共轭凸函数，《数学分析及其应用杂志》44 (1973)，384–404。[4] F. Bolley 和 C. Villani，加权 Csisz´ar-Kllback-Pinsker 不等式及其在运输不等式中的应用，《图卢兹数学科学学院年刊》14 (2005)，331–352。[5] M. Bossy 和 D. Talay，麦基恩-弗拉索夫方程与 Burgers 方程的随机粒子方法，《数学计算》66 (1997)，157–192。[6] P. Briand、F. Coquet、Y. Hu、J. M´emin 和 S. Peng，反向随机微分方程的逆比较定理及 g-期望的相关性质，《电子概率通信》5 (2000)，101–117。[7] R. Buckdahn、B. Djehiche、J. Li 和 S. Peng，平均场反向随机微分方程：一种极限方法，《概率年刊》37 (2009)，1524–1565。[8] R. Buckdahn、J. Li 和 S. Peng，平均场反向随机微分方程及相关偏微分方程，《随机过程及其应用》119 (2009)，3133–3154。[9] P. Cardaliaguet，平均场博弈讲义，法兰西公学院 P.-L. Lions 讲座，
https://www.ceremade.dauphine.fr/cardaliaguet/MFG20130420.pdf，2013。

[10] R. Carmona 和 F. Delarue，正向-反向随机微分方程与受控麦基恩-弗拉索夫动力学，《概率年刊》43 (2015)，2647–2700。[11] P. Cattiaux、A. Guillin 和 L. Wu，关于 Talagrand 运输不等式与对数Sobolev不等式的注记，《概率理论及其相关领域》148 (2010)，285–304。[12] J.-F. Chassagneux、D. Crisan 和 F. Delarue，以概率方法求解大规模群体均衡主方程的经典解，arXiv:1411.3009v2。[13] Z. Chen，倒向随机微分方程的一项性质，巴黎科学院报告，数学系列 I 326 (1998)，483–488。 ́M. Colombo、A. Figalli 和 Y. Jhaveri，对数凹测度扰动之间的 Lipschitz变量变换，《比萨高等师范学校年刊：科学类》17 (2017)，1491–1519。[14] H. Djellout、A. Guilin 和 L. Wu，运输成本-信息不等式及其在随机动力系统与扩散过程中的应用，《概率年刊》32 (2004)，2702–2732。[15] N. EI Karoui、S. Peng 和 M. C. Quenez，金融中的倒向随机微分方程，《数学金融》7 (1997)，1–71。[16] I. Ekren、C. Keller、N. Touzi 和 J. Zhang，路径依赖偏微分方程的黏性解，《概率年刊》42 (2014)，204–236。[17] X. Fan 和 J.-L. Wu，由高斯过程驱动的倒向随机微分方程解的密度估计，《势分析》54 (2021)，483–501。[18] ..D. Feyel 和 A. S. Ust[19] unel，Wiener空间上的 Monge-Kantorovich测度运输与 Monge-Amp¨ere 方程，《概率理论及其相关领域》128 (2004)，347–385。`M. Gourcy 和 L. Wu，扩散过程关于 [20] 度量的对数Sobolev不等式，《势分析》25 (2006)，77–102。 L^2 L. Gross，对数Sobolev不等式，《美国数学杂志》97 (1975)，1061–1083。[21] Y. Hu、D. Ocone 和 J. Song，关于由分数布朗运动驱动的倒向随机微分方程的一些结果，载于：T. Zhang、X.Y. Zhou（编），《随机分析及其在金融中的应用》，World Sci. Publ.，Hackensack，NJ，2012，225–242。[22] M. Huang、R. Malham[23] e 和 P. Caines，大规模群体随机动态博弈：闭环麦基恩-弗拉索夫系统与纳什确定性等价原理，《通信、信息与系统》6 (2006)，221–251。 ́S. Janson，高斯希尔伯特空间，剑桥大学出版社，剑桥，1997。[24] L. Jiang，倒向随机微分方程生成元的表示定理及其应用，《随机过程及其应用》115 (2005)，1883–1903。[25] D. Lacker，流动性、风险度量与测度集中，《数学运筹研究》43 (2018)，813–837。[26] M. Ledoux，测度集中与对数Sobolev不等式，《概率研讨会》第三十三卷，数学讲义，1709，Springer，柏林，1999，120–216。[27] J. Li，带跳跃的平均场正向与反向随机微分方程及相关非局部拟线性积分偏微分方程，《随机过程及其应用》128 (2018)，3118–3180。 ́J. Li、H. Liang 和 X. Zhang，具有连续系数的一般平均场倒向随机微分方程，《数学分析及其应用杂志》466 (2018)，264–280。 ́J. Ma 和 J. Yong，《正向-反向随机微分方程及其应用》，数学讲义，1702，Springer，柏林，1999。[28] F. Otto 和 C. Villani，Talagrand 不等式的推广及其与对数Sobolev不等式的联系，《泛函分析杂志》173 (2000)，361–400。

[32] E. Pardoux 和 S. Peng，倒向随机微分方程的适应解，《系统与控制通讯》14 (1990)，55–61。[33] E. Pardoux 和 S. Peng，倒向随机微分方程与拟线性抛物型偏微分方程及其应用，载于：《随机偏微分方程及其应用》，《控制与信息科学讲义》176，Springer，柏林，1992，200–217。[34] E. Pardoux 和 A. Rˆa̧scanu，《随机微分方程、倒向随机微分方程、偏微分方程》，Springer，2014。[35] P. Ren 和 F.-Y. Wang，分布依赖型随机微分方程的 Lions导数的 Bismut公式及其应用，《微分方程杂志》267 (2019)，4745–4777。[36] S. Riedel，由高斯过程驱动的扩散过程的运输成本不等式，《电子概率杂志》22 (2017)，1–26。[37] B. Saussereau，由分数布朗运动驱动的随机微分方程的运输不等式，《Bernoulli》18 (2012)，1–23。[38] Y. Suo、C. Yuan 和 S.-Q. Zhang，具有不规则漂移项的随机微分方程的运输成本不等式，《随机过程及其应用》144 (2022)，288–311。[39] F. -Y. Wang，对数Sobolev不等式：条件与反例，《算子理论杂志》46 (2001)，183–197。[40] F. -Y. Wang，对数Sobolev不等式：Ricci曲率与Hessian矩阵的不同作用，《概率年刊》37 (2009)，1587–1604。[41] J. Zhang，《倒向随机微分方程——从线性理论到完全非线性理论》，Springer，纽约，2017。