arXiv:2302.03420v2 [math.ST] 8 Feb 2023

多个指数分布的尺度参数函数的不变估计量的不可容许性

[a]Lakshmi Kanta Patra*,[a]Shrajal Bajpai, [b]Neeraj Misra

[a]数学系，印度理工学院比莱分校

[b]数学与统计学系，印度理工学院坎普尔分校

摘要

在可靠性工程、分子生物学、金融学等各种应用领域中，概率分布的不确定性度量发挥着重要作用。在本研究中，我们考虑尺度参数函数的估计问题，即对具有未知且不等位置参数以及公共尺度参数的多个指数分布的熵进行估计。对于这一估计问题，我们考虑碗形位置不变损失函数。通过提出一个非光滑改进估计量，证明了最小风险不变估计量（MRIE）的不可容许性。此外，我们还获得了一个优于MRIE的光滑估计量。作为应用，我们针对两个众所周知的损失函数，即平方误差损失和Linex损失，给出了改进估计量的显式表达式。进一步地，我们证明了这些估计量也可以针对其他重要的删失抽样方案导出。首先，我们针对完整的独立同分布样本获得了相关结果。我们发现，这些结果可以应用于：（i）记录值；（ii）II型删失；以及（iii）渐进II型删失。最后，我们开展了一项模拟研究，以比较所提出改进估计量的风险表现。

关键词：决策理论；最小风险不变估计量；位置不变损失函数；不可容许性；Brewster-Zidek 型估计量；删失样本；记录值。

1 引言

与风险率类似，寿命分布的熵也是一个重要特征。它衡量概率分布的不确定性。香农熵广泛应用于科学和技术的各个领域，例如生态学、水文学、水资源、社会学、经济学、生物学等。在分子科学中，分子熵的估计对于理解各种化学和生物过程发挥着重要作用 [18]。在经济学中，熵估计通常使研究人员能够利用数据改进计量经济学模型中关于参数的假设，参见 [9]。在可靠性理论中，熵用于

* lkpatra@iitbhilai.ac.in, patralakshmi@gmail.com

衡量不确定性 [10]。如果我们想估计由若干独立部件组成的并联系统或串联系统的不确定性，就需要预测各个部件的不确定性。双参数经验分布是寿命试验和可靠性理论中最常用的寿命分布。在指数分布的情形下，熵是尺度参数的函数。尺度参数及其函数的估计是统计决策理论中研究较为充分的问题。正态方差的最佳仿射不变估计量的不可容许性最早由 [26]确立。这一结果促使许多统计学家寻找尺度参数的改进估计量。关于详细综述，可参阅 [14]。 [26] 的结果由 [8] 推广，从而证明了对于一大类位置尺度密度以及一般不变损失函数，尺度参数幂的最佳等变估计量是不可容许的。 [6]针对严格碗形损失函数，提出了两种获得优于等变估计量的改进方法。本文研究了公共尺度参数的一个函数，即若干指数分布的熵。设 X 为一个概率密度函数为$f(x|\theta)$的随机变量。则香农熵和R´ényi熵分别为

$$H(\theta) = -E(\ln f(x|\theta)) \tag{1.1}$$

and

$$R_\alpha(\theta) = \frac{1}{1-\alpha} \ln \int_{-\infty}^{\infty} f^\alpha(x|\theta)dx = \frac{1}{1-\alpha} \ln E\Big(f^{\alpha-1}(X|\theta)\Big) \tag{1.2}$$

分别，其中 $\alpha \geq 0$。

概率分布的熵是一项重要特征，与一般矩、分位数、均值、中位数和标准差一样。熵能提供有关概率分布不确定性的信息。近年来，许多作者从决策理论视角研究了各种概率模型的熵估计。下面介绍这方面的一些先前研究。 [16]研究了多元正态分布的熵估计。他们通过推导出两个改进估计量，证明了通常估计量不可容许。具体而言，他们得到了 Stein 型和 Brewster-Zidek 型改进估计量。最后，他们证明 Brewster-Zidek 型改进估计量是广义贝叶斯估计量。 [11]研究了不确定性度量，即若干指数分布的熵估计。他们证明，在平方误差损失函数下，BAEE 不可容许。Rényi 熵是一种重要的不确定性度量，比 Shannon 熵更灵活。 [12]研究了共同位置参数但尺度参数不同的 k 指数分布的 Rényi 熵估计。作者提出了一个充分条件，在此条件下，仿射等变估计量和尺度等变估计量不可容许。 [20]讨论了如何求具有序约束位置参数的双参数指数分布的熵的改进估计量。他们采用 [26],[7], 和 [13] 的技术，在一般位置不变损失函数下求得改进估计量。 [23]证明，若干指数分布的共同风险率的通常估计量不可容许。他们得到了改进估计量，且这些估计量优于最佳仿射等

变估计量。最近， [19] 研究了基于双重删失样本估计指数总体熵的问题。他证明，在一般碗形位置不变损失函数下，最佳仿射等变估计量不可容许。

设 $\boldsymbol{X}_i = (X_{i1}, \ldots, X_{in})$是从总体 Π_i, $i = 1, \ldots, k(k \geq 2)$中抽取的随机样本。我们假设样本是独立抽取的。假设总体 Π_i 的密度为

$$f_i(x; \theta_i, \sigma) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{x-\theta_i}{\sigma}\right), & \text{if } x > \theta_i, \theta_i \in \mathbb{R}, \sigma > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}. \tag{1.3}$$

对于概率密度函数为(1.3)的总体，香农熵为 $H(\sigma) = (1+\ln \sigma)$，Rényi 熵可表示为 $R(\sigma) = \ln \sigma - \ln\frac{\alpha}{1-\alpha}$。因此，估计 $H(\sigma)$和 $R(\sigma)$等价于估计 $\theta = \ln \sigma$。

本文考虑了相对于位置不变损失函数 $L(T-\theta)$的估计 θ ，其中 $L(t)$统计量满足以下条件。

(i) $L(t)$是实值、绝对连续的非单调函数。

(ii) $L(t)$满足：当 $t < 0$ 时， $L(t)$递减；当 $t > 0$ 时， $L(t)$递增；并且对所有 t， $L(t) > 0$。

由这些条件可知， $L(t)$ 几乎处处可微。基于第 i 个样本（X_{i1}， ...， X_{in}），关于（θ_i， σ）的完全充分统计量为（X_i， Y_i），其中 $X_i = nX_{i(1)}$且 $Y_i = \sum_{j=1}^{n}(X_{ij} - X_{i(1)})$，其中 $X_{i(1)} = \min\{X_{i1}, \ldots, X_{in}\}$。我们有 $S = \sum_{i=1}^{k} Y_i$，于是 $V = \frac{S}{\sigma}$ 服从 $Gamma(k(n-1), 1)$ 分布。基于所有样本，完全充分统计量为（ $\boldsymbol{X}$， S），其中 $\boldsymbol{X} = (X_1$， ...， $X_k)$。因此，我们得到 X_i和 V的概率密度函数分别为

$$h_i(x_i) = \frac{1}{\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{\sigma}(x_i - n\theta_i)\right\}, x_i > n\theta_i \quad g(v) = \frac{e^{-v} v^{k(n-1)-1}}{\Gamma(k(n-1))}, v > 0$$

分别为。

考虑如下变换群： $\mathcal{G} = \{g_{a,\boldsymbol{b}}, a > 0, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^k\}$。该变换为 $g_{a,\ \boldsymbol{b}}(\boldsymbol{z}) = (a\boldsymbol{z} + \boldsymbol{b})$。在此变换下，完全充分统计量（$\boldsymbol{X}$， S）是不变的，且我们有

$$(\boldsymbol{\theta}, \sigma) \to (a\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{b}, a\sigma) \quad \text{and} \quad (\boldsymbol{X}, S) \to (a\boldsymbol{X} + \boldsymbol{b}, aS).$$

因此，我们有

$$\ln \sigma \to \ln \sigma + \ln a$$

此外，损失函数 $L(T-\theta)$ 是不变的。因此，不变估计量的形式为

$$T_c = \ln S + c,$$

其中， c 为实常数。

下面的引理给出了最小风险不变估计量（MRIE）。记 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$。下文我们使用记号$E_{\boldsymbol{\theta},\ 1}$表示$E_{\boldsymbol{\theta},\ \sigma=1}$，并使用$E_{\mathbf{0},\ 1}$表示$E_{\boldsymbol{\theta}=\mathbf{0},\ \sigma=1}$。

引理 1.1 关于一般位置不变损失函数 $L(t)$， θ 的最小风险不变估计量为

$$T_0 = \ln S + q_0, \tag{1.4}$$

其中， q_0 使下式达到最小值

$$E_{\boldsymbol{\theta},1}\left(L\left(\ln S + c\right)\right). \tag{1.5}$$

证明：证明很简单，为简洁起见略去。 □

例 1.1 设 $L(t) = t^2$。则有 $c_0 = -\psi(nk-k)$，其中 $\psi(.)$ 表示双伽马函数。因此， θ 的最小风险不变估计量为 $T_{01} = \ln S - \psi(kn-k)$。

例 1.2 设 $L(t) = e^{at} - at - 1, a \neq 0.$。然后，利用 (1.5)，得到 $c_0 = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{\Gamma_{(nk-k)}}{\Gamma_{(nk+a-k)}}\right)$，其中 $a > k(1-n)$。在这种情况下， θ 的最小风险不变估计量为 $T_{02} = \ln S + \frac{1}{a}\ln\left(\frac{\Gamma_{(nk-k)}}{\Gamma_{(nk+a-k)}}\right)$。

本文旨在获得优于$\ln\sigma$的MRIE的估计量。我们针对四种重要的抽样方案进行了研究：(i) 完全独立同分布样本，(ii) 记录值，(iii) II型删失，以及 (iv) 渐进II型删失。在此，我们采用了 [26] 和 [7] 的技术来寻找改进估计量。一些研究者运用这些技术研究了在位置参数未知的情况下寻找尺度参数改进估计量的问题。关于这些技术的一些有趣应用，可参见[15；17；24；12；27；25；21；22； 28], 及其中的参考文献。

本文其余部分的组织如下。第2节中，我们通过推导基于独立同分布样本的非光滑改进估计量，证明了MRIE是不可容许的。作为应用，我们针对平方误差损失和LINEX损失函数提出了改进估计量。第3节中推导出了一个优于MRIE的光滑估计量。对于平方误差损失和LINEX损失函数，我们给出了光滑改进估计量的显式表达式。第4节给出了一个贝叶斯估计量。第5节比较了改进估计量的风险表现。第6节考虑了记录值、II型删失和渐进II型删失等特殊抽样方案。对于每种抽样方案，均利用独立同分布抽样方案的结果获得了改进估计量。我们针对记录值开展了模拟研究。最后，在第7节中给出了总结性评述。

2 最小风险不变估计量的不可容许性

在上一节中，我们得到了 $\ln\sigma$ 的最小风险不变估计量。现在，我们将在损失函数 $L(t)$ 下寻找一个优于该最小风险不变估计量的估计量。 [23] 证明了一个类似的结果，用以寻找若干指数分布的共同风险率的改进估计量。我们采用了与

[23]类似的技术。此外，这一结果将 [20] 的一个结果从一维推广到了 k 维。为了证明最小风险不变估计量的不可容许性，我们考虑以下尺度不变估计量类。

$$T_\zeta(\boldsymbol{X}, S) = \ln S + \zeta(\boldsymbol{Z}), \tag{2.1}$$

其中 $\boldsymbol{Z} = (Z_1, \ldots, Z_k)$， $Z_i = \frac{X_i}{S}$和 ζ是可测实值函数。下面的定理通过提出一个非光滑的支配估计量，证明最小风险不变估计量 T_0 是不可容许的。

定理 2.1 假设 p_0 是方程的唯一解

$$E\left(L'\left(\ln Y + p_0\right)\right) = 0. \tag{2.2}$$

其中 $Y \sim Gamma(kn,1)$。定义估计量

$$T_{\zeta_0}(\boldsymbol{X}, S) = \begin{cases} \ln S + \min\left\{q_0, p_0 + \ln\left(\sum_{i=1}^k Z_i + 1\right)\right\}, & Z_i > 0, i = 1, \ldots, k \\ \ln S + q_0, & otherwise \end{cases}, \tag{2.3}$$

其中 q_0 是（1.5）的唯一解。则在条件下，在一般位置不变损失函数 $L(t)$下， $T_{\zeta_0}(\boldsymbol{X}, S)$支配最小风险不变估计量 T_0

$$E\left[L'\left(\ln V + p_0\right)\right] < 0. \tag{2.4}$$

证明：容易看出，估计量 T_ζ 的风险仅通过 $\theta_1/\sigma, \ldots, \theta_k/\sigma$依赖于未知参数 $(\boldsymbol{\theta}, \sigma)$。因此，不失一般性，我们考虑 $\sigma = 1$。我们可以很容易地将 $T_\zeta(\boldsymbol{X}, S)$的期望损失写为

$$R(\boldsymbol{\theta}, T_\zeta) = E_{\boldsymbol{\theta}} E_{\boldsymbol{\theta}}\left[L(\ln V + \zeta(W)) \middle| \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z}\right].$$

记条件风险为

$$R_1(\boldsymbol{\theta}, q) = E_{\boldsymbol{\theta}}\left[L(\ln V + q) \middle| \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{z}\right]. \tag{2.5}$$

假设 $\boldsymbol{z} = (z_i, \ldots, z_k)$ 满足：对所有 i，均有 $z_i > 0$，且存在 j，使得当 $1 \le j \le k$ 时 $\theta_j > 0$。定义 $\beta_i = n\theta_i$，并将 $\mu =$ 记为 $\max_{1 \le i \le k}\{\beta_i / z_i\}$。给定$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{z}$ 时， V的条件密度为

$$f_V(v|\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{z}) \propto e^{-\left(\sum_{i=1}^k z_i + 1\right)v} v^{kn-1}, \quad v > \mu. \tag{2.6}$$

根据对损失函数的假设，不难看出 $R_1(\boldsymbol{\theta}, c)$ 严格呈碗形。设 $q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{Z})$ 是 $R_1(\boldsymbol{\theta}, c)$ 的极小值点。那么， $q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{Z})$ 是下式的唯一解

$$E\left(L'\left(\ln V + q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{Z})\right) \middle| \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{z}\right) = 0. \tag{2.7}$$

可以看出

$$E\left(L'\left(\ln V+q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{Z})\right)\Big|\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{z}\right)>0,$$

已知 $e^{-q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{Z})}<\mu$，这与（2.7）矛盾。由此可得

$$e^{-q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{Z})}>\mu. \tag{2.8}$$

再次可知，$q_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{Z})$ 是下式的唯一解

$$E_{\boldsymbol{\theta}=\mathbf{0}}\left(L'\left(\ln V+q_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{Z})\right)\Big|\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Z}\right)=0. \tag{2.9}$$

可以看出

$$E_{\boldsymbol{\theta}=\mathbf{0}}\left(L'\left(\ln V+q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{Z})\right)\Big|\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Z}\right)<0. \tag{2.10}$$

对于 $q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{Z})>\mu$。此外，$R_1(\boldsymbol{\theta},q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{Z}))$ 严格呈碗形。因此，由方程（2.9）和（2.10）可知

$$q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{z})<q_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{z}). \tag{2.11}$$

若对所有 $i=1,\ldots,k$，均有 $\theta_i\leq 0$，则不难看出

$$E_{\boldsymbol{\theta}}\left[L\left(\ln V+q\right)\Big|\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{z}\right]=E_{\mathbf{0}}\left[L\left(\ln V+q\right)\Big|\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}\right]$$

这使我们能够得到 $q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{z})=q_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{z})$。通过变量替换 $\mathfrak{u}=v(\sum_{i-1}^{k}z_i+1)$，由（2.9）可得

$$\int_0^{\infty}L'\left(\ln\mathfrak{u}+q_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{z})-\ln\left(\sum_{i=1}^{k}z_i+1\right)\right)e^{-\mathfrak{u}}\mathfrak{u}^{kn-1}d\mathfrak{u}=0. \tag{2.12}$$

由（2.12）结合（2.2），可得 $q_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{z})=p_0+\ln\left(\sum_{i=1}^{k}z_i+1\right)$。再次利用（1.5）和（2.4），得到

$$p_0<q_0. \tag{2.13}$$

现在考虑如下形式的函数

$$\zeta_0(\boldsymbol{Z})=\begin{cases}\min\left\{q_0,p_0+\ln\left(\sum_{i=1}^{k}z_i+1\right)\right\}, & z_i>0,\ i=1,\ldots,k\\ q_0, & \text{otherwise}\end{cases}. \tag{2.14}$$

由 (2.11) 和 (2.13) 可知，$q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{Z})<\zeta_0(\boldsymbol{Z})<q_0$ 在一个概率大于零的集合上成立。我们知道，$R_1(\boldsymbol{\theta},q)$ 是关于 q的严格碗形函数，$R_1(\boldsymbol{\theta},q)$ 是 q 的递减函数，其中 $q_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{z})<c$，因此 $R_1(\boldsymbol{\theta},\zeta_0(\boldsymbol{Z}))\leq R_1(\boldsymbol{\theta},q_0)$。由于 $\ln(\sum_{i=1}^{k}z_i+1)<q_0-p_0$ 在

对所有 $\boldsymbol{\theta}$ 以及 $i=1$ 的 $z_i>0$、……、k，上述结论在一个概率为正的集合上成立。因此，我们得到 Hence we get

$$R(\boldsymbol{\theta}, T_{\zeta_0}) \leq R(\boldsymbol{\theta}, T_0).$$

因此，定理得证。 □

例 2.1 设 $L(t)=t^2$。于是，由 (2.2) 可得 $b_0=-\psi(kn)$。因此，估计量

$$T_{01}^*=\begin{cases} \ln S+\min\left\{-\psi(kn-k), \ln(1+\sum_{i=1}^k z_i)-\psi(kn)\right\}, & z_i>0, i=1,\ldots,n \\ \ln S-\psi(kn-k), & otherwise \end{cases}$$

优于 T_{01}.

例 2.2 设 $L(t)=e^{at}-at-1,\ a\neq 0$。于是，由 (2.2) 可得 $b_0=\frac{1}{a}\ln\left(\frac{\Gamma(nk)}{\Gamma(a+nk)}\right)$。因此，估计量

$$T_{02}^*=\begin{cases} \ln S+\min\left\{\frac{1}{a}\ln\left(\frac{\Gamma(nk-k)}{\Gamma(a+nk-k)}\right), \ln(1+\sum_{i=1}^k z_i)+\frac{1}{a}\ln\left(\frac{\Gamma(nk)}{\Gamma(a+nk)}\right)\right\}, & z_i>0 \\ \ln S+\frac{1}{a}\ln\left(\frac{\Gamma(nk-k)}{\Gamma(a+nk-k)}\right), & otherwise \end{cases}$$

当 $a>k(1-n)$ 时，优于 T_{02}。

3 Brewster-Zidek 型改进估计量

在上一节中，我们提出了一个非光滑估计量。本节通过提出一个关于 $\{\boldsymbol{Z}=(Z_1,\ldots,Z_k)$ 光滑的估计量，证明 MRIE T_0 不可容许：$Z_i\in(0,\infty)\ i=1,2,\ldots,k\}$。[23] 研究了寻找共同风险率的光滑改进估计量这一问题。这里我们考虑寻找若干指数分布的熵的光滑估计量。为此，考虑如下形式的估计量

$$T_d(\boldsymbol{X}, S)=\begin{cases} \ln S+d, & \boldsymbol{Z}\in\mathcal{B}_{\boldsymbol{r}} \\ \ln S+q_0 & \text{otherwise} \end{cases}, \tag{3.1}$$

其中 $\mathcal{B}_{\boldsymbol{r}}=(0,r_1]\times(0,r_2]\times\ldots(0,r_k]$，且对所有 $i=1,\ldots,k$，都有 $r_i>0$。同样，不失一般性，取 $\sigma=1$。定义 $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\ldots,\beta_k)$，其中 $\beta_i=n\theta_i$，且 $\eta=\max_{1\leq i\leq k}\{\beta_i/r_i\}$。本节的结果将 [20] 针对单个指数分布所得的结果推广到多个指数分布。

致 pr 为了提出改进的估计量，我们将分析条件风险函数。 n

$$\mathcal{F}(d,\boldsymbol{\beta})=E_{\boldsymbol{\beta}}\left[L\left(\ln S+d\right)\middle|\boldsymbol{Z}\in\mathcal{B}_{\boldsymbol{r}}\right]\propto\int_0^\infty L(\ln v+d)f_{\boldsymbol{\beta}}(v,\boldsymbol{r})dv,$$

其中

$$f_{\boldsymbol{\beta}}(v,\boldsymbol{r}) \propto v^{kn-k-1}e^{-v}\prod_{i=1}^{k}\left(e^{\beta_i I_{(\beta_i>0)}}-e^{-vr_i}\right)I_{(v>\eta)}.$$

下面的引理将研究条件风险函数的性质。这有助于证明最小风险不变估计量的不可容许性

引理 3.1 (1) 对任意 $r_i>0,\ i=1,\ldots,k$，条件风险 $\mathcal{F}(d,\boldsymbol{\beta})$ 是关于 d 的严格碗形函数。

(2) 假设 $d(\boldsymbol{r}\ \boldsymbol{\beta})$ 是 $\mathcal{F}(d,\boldsymbol{\beta})$ 的极小化点，且 $d(\boldsymbol{r},0)$ 是 $\mathcal{F}(d,0)$ 的极小化点。那么对所有 $\boldsymbol{\beta}$，都有 $d(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\beta}) \le d(\boldsymbol{r},0)$。

(3) 对于 $i=1,\ldots,k$，函数 $d(\boldsymbol{r},0)$ 关于 r_i 单调不减。

证明：(1) 要证明 $\mathcal{F}(d,\boldsymbol{\beta})$ 是严格碗形函数，根据 [7] 的引理 (2.1)，我们需要证明，对于给定的 $0<d_1<d_2$，$^{\Lambda_{\boldsymbol{\beta}}\ (y-d_2,\ \boldsymbol{r})\ \Lambda_{\boldsymbol{\beta}}\ (y-d_1,\ \boldsymbol{r})}$ 关于 y 单调递增，其中

$$\Lambda_{\boldsymbol{\beta}}(y,\boldsymbol{r}) \propto (e^y)^{kn-k}e^{-e^y}\prod_{i=1}^{k}\left(e^{\beta_i I_{(\beta_i>0)}}-e^{-r_i e^y}\right)I_{(e^y>\eta/r)}.$$

现在我们有

$$\frac{\Lambda_{\boldsymbol{\beta}}(y-d_2,\boldsymbol{r})}{\Lambda_{\boldsymbol{\beta}}(y-d_1,\boldsymbol{r})}=\frac{(e^{y-d_2})^{kn-k}e^{-e^{y-d_2}}\prod_{i=1}^{k}\left(e^{\beta_i I_{(\beta_i>0)}}-e^{-r_i e^{y-d_2}}\right)I_{(e^{y-d_2}>\eta/r)}}{(e^{y-d_1})^{kn-k}e^{-e^{y-d_1}}\prod_{i=1}^{k}\left(e^{\beta_i I_{(\beta_i>0)}}-e^{-r_i e^{y-d_1}}\right)I_{(e^{y-d_1}>\eta/r)}}.$$

利用 [20] 的引理 6.1，可以很容易地证明，对于 $0<d_1\le d_2$，$^{\Lambda_{\boldsymbol{\beta}}(y-d_2,\boldsymbol{r})\ \Lambda_{\boldsymbol{\beta}}(y-d_1,\boldsymbol{r})}$ 关于 y 单调递增。

(2) 由第 (1) 部分可知，$\mathcal{F}(d,\boldsymbol{\beta})$ 是关于 d 的严格碗形函数。因此，存在唯一的极小化点，并且我们有

$$\mathcal{F}'(d(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\beta}),\boldsymbol{\beta})=0,\quad \text{for all } \boldsymbol{\beta}. \tag{3.2}$$

假设 $d(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\beta})>d(\boldsymbol{r},0)$，则有

$$\mathcal{F}'(d(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\beta}),\boldsymbol{\beta})>\mathcal{F}'(d(\boldsymbol{r},\mathbf{0}),\boldsymbol{\beta}))>\mathcal{F}'(d(\boldsymbol{r},\mathbf{0}),\mathbf{0}))=0 \tag{3.3}$$

这与 (3.2) 矛盾。这证明了 $d(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\beta})\le d(\boldsymbol{r},0)$，且上述表达式中的最后一个不等式由以下事实得出：$^{\Lambda_{\boldsymbol{\beta}}(y,\boldsymbol{r})\ \Lambda_{\mathbf{0}}(y,\boldsymbol{r})}$ 关于 y 单调递增。

(3) 令 $r_i=t$，并记 $d(\boldsymbol{r_t},0)=d((r_1,\ldots,r_{i-1},t,r_{i+1},\ldots,r_k),0)$。现在，对于 $0<t<t_1$，由 [20] 的引理 6.2 可容易看出，$^{\Lambda_{\mathbf{0}}(y,\boldsymbol{r_t})\,\Lambda_{\mathbf{0}}(y,\boldsymbol{r_{t_1}})}$ 关于 y 单调不减，这意味着 $d(\boldsymbol{r_t},0)$ 关于 t 单调不减。这证明了对于 $i=1,\ldots,k$，$d(\boldsymbol{r},0)$ 关于 r_i 单调不减。

□

作为共同 根据上述引理，我们得到以下支配结果 t.

定理 3.2 在一般位置参数不变损失函数 $L(t)$ 下，估计量 $T_{d(\boldsymbol{r},\mathbf{0})}=\zeta_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{Z})+\ln S$ 支配 T_0，其中

$$\zeta_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{Z})=\begin{cases} d(\boldsymbol{r},\mathbf{0}), & \boldsymbol{Z}\in\mathcal{B}_{\boldsymbol{r}} \\ \\ q_0, & otherwise. \end{cases} \tag{3.4}$$

设 $\boldsymbol{r}'=(r_1',\ldots,r_k')$ 满足 $r_i'<r_i$ for $i=1,\ldots,k$，并记 $\mathcal{B}_{\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}}=(r_1',r_1]\times\ldots(r_k',r_k]$。定义估计量如下。

$$T_{d,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'}(\boldsymbol{X},S)=\begin{cases} \ln S+d, & \boldsymbol{Z}\in\mathcal{B}_{\boldsymbol{r}'} \\ \\ \ln S+d(\boldsymbol{r},\mathbf{0}), & \boldsymbol{Z}\in\mathcal{B}_{\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}} \\ \\ \ln S+q_0, & \text{otherwise.} \end{cases},$$

按照上述方法，我们可以很容易地证明，估计量 $T_{c(\boldsymbol{r}',\mathbf{0})\,\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}'}=\ln S+\zeta_{\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}'}(\boldsymbol{Z})$ 优于 $T_{c(\boldsymbol{r},\mathbf{0})}$，因此最小风险不变估计量 T_0，其中

$$\zeta_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'}(\boldsymbol{Z})=\begin{cases} d(\boldsymbol{r}',\mathbf{0}), & \boldsymbol{Z}\in\mathcal{B}_{\boldsymbol{r}'} \\ \\ d(\boldsymbol{r},\mathbf{0}), & \boldsymbol{Z}\in\mathcal{B}_{\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}} \\ \\ q_0, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

类似于 [23]，现在我们将 $\prod_{i=1}^{k}[0,\infty)$ 划分为 $0=r_{j,0}^i<r_{j,1}^i<r_{j,2}^i<\cdots<r_{j,m_j-1}^i<r_{j,m_j}^i<\infty$，其中 $i=1,2,\ldots,k$。

$$\begin{cases} 0=r_{j,0}^1<r_{j,1}^1<r_{j,2}^1<\cdots<r_{j,m_j-1}^1<r_{j,m_j}^1<\infty \\ \\ 0=r_{j,0}^2<r_{j_1}^2<r_{j,2}^2<\cdots<r_{j,m_j-1}^2<r_{j,m_j}^2<\infty \\ \\ 0=r_{j,0}^3<r_{j,1}^3<r_{j,2}^3<\cdots<r_{j,m_j-1}^3<r_{j,m_j}^3<\infty \\ . \\ . \\ . \\ 0=r_{j,0}^k<r_{j,1}^k<r_{j,2}^k<\cdots<r_{j,m_j-1}^k<r_{j,m_j}^k<\infty \end{cases}$$

令 $\boldsymbol{r}_{j,l}=(r_{j,l}^1,\ldots,r_{j,l}^k)$, $l=0,\ldots,m_j$, 并定义

$$\zeta_j(\boldsymbol{Z})=\begin{cases} d\left(\boldsymbol{r}_{j,1},\mathbf{0}\right), & \text{if} \quad r_{j,0}^i<z_i\le r_{j,1}^i, i=1,\ldots,k \\ d\left(\boldsymbol{r}_{j,2},\mathbf{0}\right), & \text{if} \quad r_{j,1}^i<z_i\le r_{j,2}^i, i=1,\ldots,k \\ d\left(\boldsymbol{r}_{j,3},\mathbf{0}\right), & \text{if} \quad r_{j,2}^i<z_i\le r_{j,3}^i, i=1,\ldots,k \\ . \\ . \\ d\left(\boldsymbol{r}_{j,m_j},\mathbf{0}\right), & \text{if} \quad r_{j,m_j-1}^i<z_i\le r_{j,m_j}^i, i=1,\ldots,k \\ q_0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

假设

$$\max_{1\le\kappa\le m_j}|r_{j,\kappa}^\nu-r_{j,\kappa-1}^\nu|\to 0 \text{ as } j\to\infty \text{ for } \nu=1,\ldots,k.$$

于是，我们有 $\zeta_j(\boldsymbol{Z})\to\zeta_*(\boldsymbol{Z})$ 逐点成立，其中 $j\to\infty$.。由于对于 $j=1,2,\ldots$, 估计量 $T_j(\boldsymbol{X},S)=\ln S+\zeta_j(\boldsymbol{Z})$ 的风险小于 T_0 的风险，因此应用法图引理可得以下支配结果。

定理 3.3 定义如下形式的函数

$$\zeta_*(\boldsymbol{Z})=\begin{cases} d(\boldsymbol{Z},\mathbf{0}), & z_1>0,\ldots,z_k>0 \\ q_0, & otherwise \end{cases}. \tag{3.5}$$

于是，估计量 $T_{BZ}(\boldsymbol{X},S)=\ln S+\zeta_*(\boldsymbol{Z})$ 在一般位置不变损失函数 $L(t)$ 下支配 T_0。

现在我们考虑两个特殊损失函数，并推导出风险一致地小于 T_0 的平滑改进估计量。

例3.1 考虑平方误差损失函数 $L(t)=t^2$。由定理 3.3 可得 Brewster-Zidek 型估计量如下

$$T_{BZ1}(\boldsymbol{X},S)=\begin{cases} \ln S+d(\boldsymbol{Z},\mathbf{0}), & z_1>0,\ldots,z_k>0 \\ \ln S-\psi(nk-k), & otherwise \end{cases}. \tag{3.6}$$

其中

$$d(\boldsymbol{z},\mathbf{0})=-\frac{\displaystyle\int_0^\infty \ln v e^{-v}v^{kn-k-1}\prod_{i=1}^{k}(1-e^{-vz_i})dv}{\displaystyle\int_0^\infty e^{-v}v^{kn-k-1}\prod_{i=1}^{k}(1-e^{-vz_i})dv}$$

对于 $k=2$

$$d(\boldsymbol{z},\mathbf{0})=-\frac{\psi(2n-2)\left[1-(z_1+1)^{2-2n}-(z_2+1)^{2-2n}+(z_1+z_2+1)^{2-2n}\right]+D}{1-(z_1+1)^{2-2n}-(z_2+1)^{2-2n}+(z_1+z_2+1)^{2-2n}},$$

其中

$$D=\frac{\ln(1+z_1)}{(1+z_1)^{2n-2}}+\frac{\ln(1+z_2)}{(1+z_2)^{2n-2}}-\frac{\ln(1+z_1+z_2)}{(1+z_1+z_2)^{2n-2}}$$

例 3.2 考虑 LINEX损失函数 $L(t)=e^{at}-at-1, a\neq 0$。由定理 3.3 可得 Brewster-Zidek 型估计量为

$$T_{BZ2}(\boldsymbol{X},S)=\begin{cases}\ln S+d(\boldsymbol{Z},\mathbf{0}), & Z_1>0,\ldots,Z_k>0\\ \ln S+\frac{1}{a}\ln\left(\frac{\Gamma(nk-k)}{\Gamma(nk+a-k)}\right), & otherwise\end{cases}. \tag{3.7}$$

其中 $d(\boldsymbol{z},0)=-\frac{1}{a}\ln H(\boldsymbol{z})$，且

$$H(\boldsymbol{z})=\int_0^\infty e^{-v}v^{kn+a-k-1}\prod_{i=1}^{k}(1-e^{-vz_i})dv$$

对于 $k=2$

$$H(\boldsymbol{z})=\Gamma(a+2n-2)\left(1-(z_1+1)^{2-2n-a}-(z_2+1)^{2-2n-a}+(z_1+z_2+1)^{2-2n-a}\right)$$

4 贝叶斯估计量

在本节中，我们考虑了 $\theta=\ln\sigma$ 的贝叶斯估计。为此，我们将先验分布设为

$$\Pi(\boldsymbol{\theta},\sigma)=\left(\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{\sigma}\exp\left(\frac{\theta_i-\mu_0}{\sigma}\right)I(\theta_i<\mu_0)\right)\frac{\sigma_0^{\nu+1}}{\Gamma(\nu)\sigma^{\nu+1}}\exp\left(-\frac{\sigma_0}{\sigma}\right). \tag{4.1}$$

因此，$(\boldsymbol{\theta}, \sigma)$ 的后验分布可得为

$$\Pi(\boldsymbol{\theta}, \sigma|\boldsymbol{X}) = \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{1+n_i}{\sigma} \exp\left(\frac{n_i+1}{\sigma}(\theta_i - \min\{x_{i(1)}, \mu_0\})\right) I(\theta_i < \min\{x_{i(1)}, \mu_0\})\right) \frac{1}{\sigma^{\nu+1+nk}} \exp\left(-\frac{1}{\sigma}(k\mu_0 + \sigma_0 + \sum_i \sum_j x_{ij})\right).$$

现在，对于给定的 σ； θ_1、 θ_2， ....., θ_k 相互独立，且 $\frac{n_i+1}{\sigma}(\theta_i - \min\{x_{i(1)}, \mu_0\}) \sim Exp(1)$。此外，我们得到 $\frac{1}{\sigma}(k\mu_0 + \sigma_0 + \sum_i \sum_j x_{ij}) \sim \Gamma(nk+\nu)$。

因此，相对于平方误差损失函数的贝叶斯估计量为

$$T_\Pi = E(\ln \sigma|\boldsymbol{X}) = \ln\left(k\mu_0 + \sigma_0 + \sum_i \sum_j x_{ij}\right) - \zeta(nk+\nu).$$

5 模拟研究

上文讨论了 $\ln \sigma$ 的 MIRE 的不可容许性。为证明其不可容许性，我们得到了两个改进估计量。一个是 Stein型非光滑估计量，另一个是针对若干指数分布熵的 Brewster-Zidek型光滑改进估计量。本节将通过模拟研究所提出的改进估计量相对于平方误差损失函数的风险表现。为进行模拟，我们从位置参数为 θ_1、 θ_2、尺度参数为 1 的两个指数分布中生成了 20,000 个随机样本，样本量分别为 $n = 4$、6、8。在表1中，我们列出了改进估计量相对于 MRIE T_0 的风险百分比改善（PRI），分别对应 $n = 4$ 和 $n = 6$ 以及 $n = 8$。在模拟研究中，我们考虑了 θ_1 和 θ_2 的不同取值。估计量 T 相对于 T_0 的 PRI 定义为

$$PRI(T) = \frac{Risk(T_0) - Risk(T)}{Risk(T_0)} \times 100$$

通过模拟，我们得到以下观察结果。

(i) 随着 θ_1 和 θ_2 的值增加， T_{01}^* 的 PRI 会降低。当 θ_1 和 θ_2 的值接近于零时， T_{01}^* 的风险表现优于 T_{BZ1}。

(ii) 随着 θ_1 和 θ_2 的值增加， T_{BZ1} 的 PRI 先上升后下降。当 θ_1 和 θ_2 的值较大时， T_{BZ1} 的风险表现优于 T_{01}^*。

(iii) 我们发现，随着 n 增加， T_{01}^* 和 T_{BZ1} 的 PRI 会降低。当 n 的值较大时， T_{01}^* 的表现与最小风险无偏估计量相同。当风险表现较大时，T_{BZ1} 优于 T_{01}^*。

(iv) 根据模拟 结果，我们认为总体而言， T_{BZ1} 优于其他估计量 .

对于 Linex 损失函数，我们也有类似类型的观测值。

表1 ： 相对于平方误差损失函数的风险百分比改善

n		4		6		8	
θ_2	θ_1	T_{01}^*	T_{BZ1}	T_{01}^*	T_{BZ1}	T_{01}^*	T_{BZ1}
0.1	0.1	10.47579	0.665244	5.23372	2.720082	2.196369	3.563242
	0.2	8.177379	3.837873	2.352601	4.995069	0.370062	5.044513
	0.5	2.071238	6.912677	0.02876744	5.791525	0	4.552717
	0.6	1.128674	7.042573	0.0055315	5.500053	0	4.190413
	0.7	0.564448	7.004393	0.0004631	5.185024	0	3.894156
	0.8	0.2685096	6.872046	0	4.888716	0	3.665736
0.2	0.1	8.177379	3.888181	2.352601	5.0272	0.370062	5.054616
	0.2	5.611596	6.894204	0.7650419	7.086941	0.02789947	6.307205
	0.5	1.128674	9.681164	0.0055315	7.550914	0	5.507273
	0.6	0.564448	9.752206	0.0004630	7.200807	0	5.099963
	0.7	0.2685096	9.665549	0	6.840881	0	4.772228
	0.8	0.1268464	9.492634	0	6.509755	0	4.521561
0.4	0.1	3.523156	6.578196	0.1702922	6.007922	0.001014834	4.944141
	0.2	2.071238	9.369283	0.02876744	7.813017	0	5.953738
	0.5	0.2685096	11.74199	0	7.835906	0	4.784317
	0.6	0.1268464	11.72101	0	7.400792	0	4.317633
	0.7	0.05596951	11.5567	0	6.974144	0	3.947277
	0.8	0.02279446	11.31756	0	6.59024	0	3.665847
0.7	0.1	0.564448	7.089663	0.0004630	5.211967	0	4.476075
	0.2	0.2685096	9.700335	0	6.835372	0	5.686527
	0.5	0.02279446	11.68276	0	6.5038	0	4.685471
	0.6	0.009141	11.5671	0	5.993729	0	4.14633
	0.7	0.00295038	11.32069	0	5.506559	0	3.682823
	0.8	0.0008821	11.00996	0	5.073649	0	3.304135

6 特殊抽样方案

上一节中，我们研究了基于独立同分布样本的 $\ln\sigma$ 估计问题。本节将讨论在三种特殊抽样方案下的同一估计问题，分别是：(i) 记录值，(ii) II型删失，以及 (iii) 渐进II型删失。在这些抽样方案下，我们推导出优于最小风险不变估计量的改进估计量，并将看到这些结果可由独立同分布抽样方案推得。 [22] 研究了在这些抽样方案下对风险率进行估计的问题。

6.1 记录值

记录模型已在体育分析、水文学、气象学和股市分析等多个领域得到应用。由于记录值十分重要，已有多位作者对其进行了研究。关于这一方向的详细文献综述，请参见 [1], [2] and[3]。设 $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$为取自指数总体$E(\mu, \sigma)$的独立同分布随机变量序列。对于 $m \geq 2$，定义 $u(1) = 1$和 $u(m) = \min\{j | j > u(m-1)\ Z_j > Z_{u(m-1)}\}$，则

$\{X_m = V_{u(m)}, m \geq 1\}$ 给出一个（最大）记录统计量序列。序列 $u(m)$ $m \geq 1$称为记录时刻。考虑来自 $Exp(\theta_i, \sigma)$的记录样本 $Y_{i1}, \ldots, Y_{in}$， $i = 1, 2, \ldots, k$. 则$(Y_{11}, Y_{2,\ 1}, \ \ldots, Y_{k1}, S)$是$(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k, \sigma)$的充分统计量，其中 $S = \sum_{i=1}^{k}(Y_{in} - Y_{i1})$ $\sim Gamma(k(n-1)\ \sigma)$且 $Y_{i1} \sim Exp(\theta_i, \sigma)$。

我们有 $\ln\sigma$ 的最小风险不变估计量为

$$T_0^R = \ln S + q_0,$$

其中 q_0 使

$$E_{\boldsymbol{\theta},1} L\left[L(\ln S + c)\right]$$

现在定义 $z_i = \frac{Y_{i1}}{S}$、 $i = 1$、$2 \ldots$、 k，并记 $\boldsymbol{Y} = (Y_{11}, Y_{21}, \ldots, Y_{k1})$。然后利用定理（2.1），我们可以证明估计量

$$T_{\zeta_0}^R(\boldsymbol{Y}, S) = \begin{cases} \ln S + \min\left\{q_0, p_0 + \ln\left(\sum_{i=1}^{k} z_i + 1\right)\right\}, & z_i > 0, i = 1, \ldots, k \\ \ln S + q_0, & \text{otherwise} \end{cases}, \tag{6.1}$$

其风险一致地小于最小风险不变估计量 T_0^R 的风险，其中 q_0 和 p_0 的定义如定理（2.1）所示。估计量 $T_{\zeta_0}^R(\boldsymbol{Y}, S)$ 不光滑。现在我们将提出一种基于记录值的 $\ln\ \sigma$ 估计量，它优于最小风险不变估计量 T_0^R。根据定理 3.3，支配估计量可表示为

$$T_{BZ}^R(\boldsymbol{Y}, S) = \begin{cases} \ln S + d(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{0}), & z_1 > 0, \ldots, z_k > 0 \\ \ln S + q_0, & \text{otherwise} \end{cases}. \tag{6.2}$$

其中， $d(\boldsymbol{Z}, 0)$ 在平方误差损失函数下见例（3.1），在 Linex损失函数下见例（3.2）。我们将 T_{01}^{*R} 和 T_{BZ1}^R 记为平方误差损失函数下的改进估计量。对于 Linex 损失函数，改进估计量记为 T_{02}^{*R} 和 T_{BZ2}^R。

6.1.1 模拟研究

本节比较基于从两个指数分布生成的记录值的改进估计量的风险表现。模拟中，从位置参数为 θ_1、 θ_2，尺度参数为 1 的两个指数分布生成了 20,000 个样本量为 $n = 4$、6、8 的记录样本。表2分别列出了针对 $n = 4$ 、 $n = 6$ 和 $n = 8$ 的改进估计量相对于 BAEE T_0 的风险百分比改善（PRI）。 T_0 的风险与 θ_1 和 θ_2 无关，且为常数。 T_0 的风险值按 $n = 4$、6、8 的顺序分别为 0.183962、0.1065479 和 0.07516415。根据模拟结果，我们得到以下观察结论。

(i) T_{01}^{*R} 和 T_{BZ1}^R 的表现分别优于 T_{01}^* 和 T_{BZ1}^R。

(ii) T_{01}^{*R}和 T_{BZ1}^R的改进区间分别大于 T_{01}^*和 T_{BZ1}^R。

(iii) 随着 θ_1和 θ_2增大， T_{01}^{*R}和 T_{BZ1}^R的 PRI 缓慢下降。

对于 Linex 损失函数，也可以得出类似的观察结果 .

6.2 II型删失

研究人员在可靠性和寿命试验中经常会遇到实验单元在失效前从实验中丢失或被移除的情况。例如，在许多工业试验中，实验单元会在规定时间之前意外发生故障；个体可能退出临床试验，或者实验可能因资金不足而终止。试验人员也可能为了节省测试所需的时间和成本而有意终止实验。此类实验获得的数据称为删失数据。其中一种删失方案是 II 型删失。在这种方案中，试验人员决定在指定数量的项目 $r \leq n$ 失效后终止实验。有关这一主题的更多详情，请参阅 [5]。

设从指数分布 $E(\theta_i, \sigma)$ 中抽取一个容量为 n 的样本，并按顺序观测，即 $X_{i(1)} \leq X_{i(2)} \leq \cdots \leq X_{i(n)}$，其中 $i = 1$、2、. . .、k。这里，$X_{i(j)}$ 是从指数分布 $E(\theta_i, \sigma)$ 总体中抽取的 n 个观测值里最小的 j^{th} 个观测值。现在考虑前 r 个次序观测值 $X_{i(1)}, X_{i(2)}, \ldots, X_{i(r)}$, $r \leq n$, $i = 1$，其中 k 为 2 、 . . .。我们考虑在碗形位置不变损失函数 $L(t)$ 下，基于删失样本对 $\ln \sigma$ 进行估计。定义 $S = \sum_{j=1}^{k} \left[\sum_{i=1}^{r}(X_{j(i)} - X_{j(1)}) + (n-r)(X_{j(n)} - X_{j(1)})\right]$。那么在此设定下，$(X_{1(1)}, X_{2(1)}, \ldots, X_{k(1)}, S)$ 是一个最小充分统计量，其中对于 $i = 1$、2、. . .、k, $X_i = nX_{i(1)}$ 和 S 分别服从指数分布 $E(n\theta_i, \sigma)$ 和伽马分布 $Gamma(k(n-1)\ \sigma)$。因此，可以利用定理 2.1 和 3.3 推导出 $\ln \sigma$ 的改进估计量。

6.3 渐进II型删失

在删失情形下，寿命分布因其在科学、工程、社会科学、公共卫生和医学中的广泛应用而更受关注。删失方案有多种，其中一种重要的删失方案是渐进II型删失。当删失数据是在每个个体单元失效时，移除预先设定数量的存活单元而得到的，就称其为渐进II型删失。该过程持续进行，直到发生预先设定数量的失效；此时，剩余的存活个体也会被移除/删失。详情请参见 [29], [5], [4]。

现在我们将介绍渐进II型删失方案。这里的描述与 [22] 类似。设 $X_{i1}, X_2, \ldots, X_{im}$ 为置于寿命试验中的 m 个独立单元的寿命，其中 X_{ij} 服从指数分布 $E(\theta_i, \sigma)$ $i = 1, 2, \ldots, k$。对于 $r = 1, 2, \ldots, n$,$n \leq m$，在第 $r-$次失效时，从试验中移除预先设定数量的 R_r 个存活单元，其中 $R_n = m - n - R_1 - R_2 - \cdots - R_{n-1}$。设 $X_{i1:n:m} \leq X_{i2:n:m} \leq \cdots \leq X_{in:n:m}$为对应于 $i = 1$、2、.....、k的渐进 II 型删失样本。我们考虑基于渐进 II 型删失样本对 $\ln \sigma$ 进行估计。定义 $S = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} [(R_j + 1)(X_{ij:n:m} - X_{i1:n:m})]$。在这种情况下，$(X_{11:n:m}, X_{21:n:m}, \ldots X_{k1:n:m}, S)$是一个极小充分统计量。定义$X_i = nX_{i1:n:m}, i = 1$、2、.....、$k$。则 X_i服从指数分布 $E(n\mu_i, \sigma)$，而 S服从伽马分布 $Gamma(k(n-1)\ \sigma)$。因此，可由定理 2.1 和 3.3 求得 $\ln \sigma$ 的改进估计量。

7 结论

在应用统计学的多个领域，例如可靠性工程、分子生物学、金融学、信息论、统计物理学等，概率分布的不确定性度量发挥着重要作用。香农熵和 Rényi 熵是广泛使用的不确定性度量。与均值、标准差、方差和分位数类似，熵也是分布参数族的一项重要特征。本文研究在碗形位置不变损失函数下，对多个指数分布的熵进行估计的问题。首先，我们基于 S推导出最小风险不变估计量（MRIE）。随后利用$(\boldsymbol{X}, S)$中包含的信息，推导出优于熵 $\ln \sigma$的最小风险不变估计量的估计量。我们采用了 [26], 和 [7] 的技术来推导改进估计量。作为应用，我们推导了平方误差损失函数和 LINEX 损失函数下的改进估计量。我们发现，利用独立同分布抽样的结果，可以得到（i）记录值、（ii）II 型删失、（iii）渐进 II 型删失情形下的改进估计量。最后，我们进行了模拟研究，对所提出估计量的风险表现进行数值比较。模拟结果表明，对于记录样本，改进估计量的表现更好。

参考文献

[1] Ahsanullah, M. [1995]。《记录统计学导论》，NOVA Science，美国纽约州亨廷顿。[2] Ahsanullah, M. 和 Nevzorov, V. B. [2001]。《有序随机变量》，NOVA Science，美国纽约州亨廷顿。[3] Arnold, B. C., Balakrishnan, N. 和 Nagaraja, H. N. [2011]。《记录值》，第768卷，Wiley，纽约。[4] Balakrishnan, N. [2007]。渐进删失方法：评述，Test. 16(2), 211。[5] Balakrishnan, N. 和 Aggarwala, R. [2000]。《渐进删失：理论、方法与应用》，Springer，纽约。[6] Brewster, J. F. [1974]。未知位置参数下指数分布尺度参数的替代估计量，《统计年鉴》。2(3), 553–557。[7] Brewster, J. F. 和 Zidek, J. [1974]。改进等变估计量，《统计年鉴》。2(1), 21–38。[8] Brown, L. [1968]。在位置参数和尺度参数未知的问题中，尺度参数通常估计量的不可容许性，《数学统计年鉴》。39(1), 29–48。[9] Golan, A., Judge, G. G. 和 Miller, D. [1996]。《最大熵计量经济学》，技术报告。

[10] Kamavaram, S. 和 Goseva-Popstojanova, K. [2002]。熵作为软件可靠性中的不确定性度量，第13届国际软件可靠性工程研讨会，第209–210页。[11] Kayal, S. 和 Kumar, S. [2011]。LINEX损失函数下指数总体熵的估计，印度统计学会期刊。49, 91–112。[12] Kayal, S., Kumar, S. 和 Vellaisamy, P. [2015]。多个指数总体的 R´enyi 熵估计，巴西概率与统计杂志。29(1), 94–111。[13] Kubokawa, T. [1994]。改进等变估计量的统一方法，《统计年鉴》。22(1), 290–299。[14] Maatta, J. M., Casella, G. 等 [1990]。决策理论方差估计的发展，统计科学。5(1), 90–101。[15] Misra, N., Choudhary, P., Dhariyal, I. 和 Kundu, D. [2002]。两个伽马分布序约束尺度参数的光滑估计量，Metrika。56(2), 143–161。[16] Misra, N., Singh, H. 和 Demchuk, E. [2005]。多元正态分布熵的估计，多元分析杂志。92(2), 324–342。[17] Misra, N., van der Meulen, E. C. 和 Branden, K. V. [2006]。关于若干特定伽马总体尺度参数的不可容许性结果，统计规划与推断杂志。136(7), 2340–2351。[18] Nalewajski, R. F. [2002]。信息论在分子电子结构和化学反应性问题中的应用，国际分子科学杂志。3(4), 237–259。[19] Patra, L. K. [2020]。基于双重删失样本改进指数分布尺度参数函数的估计，应用统计学杂志。47(9), 1637–1651。[20] Patra, L. K., Kayal, S. 和 Kumar, S. [2018]。一般损失函数下未知位置参数的指数总体尺度参数函数估计，统计论文。第1–17页。[21] Patra, L. K., Kayal, S. 和 Kumar, S. [2019]。具有序约束均值的两个正态总体共同方差和精度的极小极大估计，统计论文。第1–25页。[22] Patra, L. K. 和 Kumar, S. [2018]。具有序约束位置参数的两个指数分布共同风险率的估计，统计学。52(5), 1040–1059。[23] Patra, L. K. 和 Kumar, S. [2019]。多个指数分布共同风险率的估计，统计学通讯：理论与方法。48(19), 4861–4873。

[24] Petropoulos, C. [2010]. 指数分布混合模型中未知位置参数下尺度参数的一类改进估计量, 《统计学通讯：理论与方法》。39(17), 3153–3162.[25] Petropoulos, C. [2017]. 基于Lomax分布的两个总体序约束尺度参数估计，Metrika。80(4), 483–502.[26] Stein, C. [1964]. 未知均值正态分布方差通常估计量的不可容许性, 《统计数学研究所年刊》。16(1), 155–160.[27] Tripathi, Y. M., Petropoulos, C., Sultana, F. and Rastogi, M. K. [2017]. 双重删失指数分布线性参数函数的估计, 《统计学》。pp. 1–16.[28]Tripathi, Y., Petropoulos, C. and Sen, T. [2020]. 渐进删失指数分布的分位数估计, 《统计学通讯：理论与方法》。49(16), 3919–3932.[29] Viveros, R. and Balakrishnan, N. [1994]. 基于渐进删失数据的寿命参数区间估计, Technometrics。36(1), 84–91.

表2　：相对于平方误差损失函数的风险百分比改善

n		4		6		8	
θ_2	θ_1	T_{01}^{*R}	T_{BZ1}^{R}	T_{01}^{*R}	T_{BZ1}^{R}	T_{01}^{*R}	T_{BZ1}^{R}
0.1	0.1	9.995703	7.56919	6.568983	5.769624	4.768522	4.621218
	0.2	10.61596	6.92789	7.048523	4.693227	5.174139	3.797647
	0.5	11.04688	2.00213	7.476931	2.054984	5.580389	1.81209
	0.6	10.81651	1.800788	7.327636	1.37326	5.484115	1.290101
	0.7	10.43916	1.021211	7.060799	0.7919498	5.288744	0.880932
	0.8	9.962606	0.3461317	6.69991	0.2828253	5.012398	0.420678
	0.9	9.397655	0.2377135	6.263447	0.1615921	4.673977	0.062847
	1	8.780024	0.7418085	5.778098	0.5480858	4.287963	0.2500554
	1.2	7.482334	1.549307	4.742903	1.171272	3.438672	0.7579012
	1.3	6.829807	1.868922	4.224752	1.418521	3.004381	0.9604498
	1.5	5.585653	2.372942	3.235294	1.806937	2.182459	1.279523
0.5	0.1	11.04688	2.69118	7.476931	2.029748	5.580389	1.809013
	0.2	10.81651	1.187459	7.327636	1.011165	5.484115	1.035108
	0.5	9.397655	2.215693	6.263447	1.388422	4.673977	0.8212147
	0.6	8.780024	3.058793	5.778098	2.004203	4.287963	1.305989
	0.7	8.136173	3.787176	5.266646	2.543115	3.869757	1.733374
	0.8	7.482334	4.415578	4.742903	3.01307	3.438672	2.108569
	0.9	6.829807	4.956729	4.224752	3.42126	3.004381	2.43641
	1	6.195272	5.421653	3.719696	3.774205	2.580883	2.721376
	1.2	5.005209	6.159832	2.783005	4.337397	1.820591	3.178925
	1.3	4.459724	6.448651	2.369488	4.557787	1.497925	3.358831
	1.5	3.481266	6.897491	1.665062	4.897876	0.9633909	3.637013
0.7	0.1	10.43916	1.010742	7.060799	0.785796	5.288744	0.824321
	0.2	9.962606	0.4624575	6.69991	0.2081989	5.012398	0.070203
	0.5	8.136173	3.788664	5.266646	2.544073	3.869757	1.734094
	0.6	7.482334	4.610197	4.742903	3.141557	3.438672	2.203726
	0.7	6.829807	5.318709	4.224752	3.663454	3.004381	2.616951
	0.8	6.195272	5.928763	3.719696	4.117574	2.580883	2.978904
	0.9	5.585653	6.452934	3.235294	4.511014	2.182459	3.294357
	1	5.005209	6.902107	2.783005	4.850207	1.820591	3.567731
	1.2	3.951458	7.611995	1.997429	5.388569	1.210856	4.004263
	1.3	3.481266	7.888071	1.665062	5.597741	0.9633909	4.174644
	1.5	2.657382	8.313801	1.122664	5.917473	0.5815305	4.435515
0.9	0.1	9.397655	0.2498145	6.263447	0.1684079	4.673977	0.058519
	0.2	8.780024	1.697961	5.778098	1.141567	4.287963	0.6785448
	0.5	6.829807	4.959899	4.224752	3.422922	3.004381	2.437712
	0.6	6.195272	5.763112	3.719696	4.004595	2.580883	2.894121
	0.7	5.585653	6.45462	3.235294	4.511722	2.182459	3.294943
	0.8	5.005209	7.048864	2.783005	4.952036	1.820591	3.645259
	0.9	4.459724	7.558307	2.369488	5.332562	1.497925	3.949792
	1	3.951458	7.993733	1.997429	5.659663	1.210856	4.212918
	1.2	3.050316	8.678725	1.374264	6.17607	0.7543619	4.63079
	1.3	2.657382	8.943496	1.122664	6.375266	0.5815305	4.792679
	1.5	1.982989	9.348586	0.7328501	6.676806	0.3320165	5.038056