arXiv:2302.03422v1 [math.DG] 7 Feb 2023

局部共形 Kähler 流形的双有理几何

Liviu Ornea[1], Misha Verbitsky[2]

摘要

局部共形 Kähler（LCK）流形是这样一种复流形：其覆盖空间上具有 Kähler 结构，且覆盖变换群以相似变换的方式作用于该结构。假设 Kähler 形式在 M 的极小 Kähler 覆盖上是恰当的。我们证明，任何双有理映射 $M' \to M$ 实际上都是全纯的；换言之， M 有唯一的极小模型。这一结论可应用于广泛的一类 LCK 流形，例如 Hopf 流形、它们的复子流形以及 OT 流形。

目录

1 引言 1

2 预备知识 2
2.1 局部共形 Kähler 流形.3 2.2 带势函数的局部共形凯勒流形.3

3 局部共形 Kähler 流形的双有理映射 4
3.1 正规簇.4 3.2 基本群与全纯映射.5 3.3 与局部共形凯勒流形双亚纯的流形 6

1 引言

自19世纪以来，极小模型的概念一直是双有理代数几何的核心。1901年，Castelnuovo证明了著名的收缩判别准则，指出任何光滑曲面的双有理收缩

[1]Liviu Ornea 部分经费由罗马尼亚教育与研究部 PN-III 计划资助，项目编号 PN-III-P4-ID-PCE-2020-0025，合同 30/04.02.2021 [2]Misha Verbitsky 部分经费由高等经济学院大学基础研究计划、FAPERJ SEI-260003/000410/2023 和 CNPq - 项目 310952/2021-2 资助。关键词：局部共形 K¨ahler，整体 K¨ahler 势函数，双亚纯映射，极小模型，正规簇。2010年数学主题分类：32H04，53C55

都会收缩自交数为（-1）的有理曲线。极小曲面理论由此诞生：如果一个曲面无法被收缩，它就是极小的。Castelnuovo与他的学生Enriques合作，通过一系列研究对极小曲面进行了分类，这些研究一直延续到20世纪20年代。

Kodaira 将极小模型理论从射影曲面扩展到了复曲面，并证明 Castelnuovo 和 Enriques 的大多数结果同样适用于紧复曲面。

Shigefumi Mori 提出的极小模型纲领，将 Castelnuovo-Enriques 极小模型理论从曲面推广到高维射影流形。其关于 K¨ahler 三维流形的版本，最近由 H¨oring 和 Peternell 完成（[HP]）。然而，对于维数为 ¨ 的非 K $>$ 2ähler 复流形，人们对其双有理几何所知甚少。

最简单的一类非 K¨ähler 流形是 LCK（局部共形 K¨ähler）流形。这类复流形具有一个 K¨ähler˜覆盖 $M \longrightarrow M$，其覆盖变换群通过相似变换作用。对于紧致 M情形，这种几何与 K¨ähler 几何截然不同。事实上，根据 Vaisman 定理（ [V2]），紧致局部共形凯勒流形不 ˜ 存在 K¨ähler 度量，除非覆盖变换群在 M 上通过等距变换作用。

令人惊讶的是，局部共形 Kähler 流形（至少是其中一个相当大的类别）的极小模型纲领，比 K¨ähler 流形乃至射影流形的情形简单得多。设 M' 是一个与局部共形凯勒流形双有理等价的紧致复簇 M，且该流形属于局部共形凯勒流形的两大子类之一：带势函数的局部共形凯勒流形或 OT 流形（第 2.2 小节）。那么映射 $M' \dashrightarrow M$ 是全纯的。

换言之， M 有唯一的极小模型。

证明本质上属于复几何范畴，并未使用双有理几何和双有理几何领域任何最前沿的结果。不过，似乎可以由弱分解定理推出这一结论（[M，定理 5-1-1]）。

我们的证明在更一般的情形下同样成立：设 M 是一个紧致复˜ ˜流形， M 是其覆叠空间。若 M 存在一个恰当的 K¨ähler 形式，那么任意双有理映射 $M' \dashrightarrow M$ 都是全纯的（定理 3.5）。

2 预备知识

我们简要介绍局部共形 K¨ähler 几何中所需的概念。关于更多细节、示例以及最新的研究成果综述，请参阅 [OV4]。

2.1 局部共形 Kähler 流形

局部共形 K¨ahler 流形由 Izu Vaisman 于[V1]中定义。本文不需要原始定义，而采用以下等价定义：

定义 2.1：([V2，注 2.9]) Hermitian 流形（M， I， ω）称为˜局部共形 K¨ahler 流形，如果它存在一个 K¨ahler 覆盖（M， I， $\tilde{\omega}$），其甲板变换群 Γ 相对于 K¨ahler 度量由相似变换作用。

Hermitian 形式 ω 称为 LCK 形式。

定义 2.2：设 (M, I, ω) 为 LCK。根据定义，存在一个群同态 χ： $\pi_1(M) \to \mathbb{R}^{>0}$，由 $\chi(\gamma) = \frac{\gamma^*\tilde{\omega}}{\tilde{\omega}}$ 给出，其中每个$\gamma \in \pi_1(M)$ 都视为 K¨ahler 万有覆盖的甲板变换。这个群同态称为相似特征。

定义 2.3：设 (M, I, ω) 是一个局部共形凯勒流形， χ 是其关联的同态特征。(M, I, ω) 的极小 K¨ahler 覆盖是与 ker $\chi \subset \pi_1(M)$ 相关联的 K¨ahler 覆盖。

例 2.4：设 γ： $\mathbb{C}^n \longrightarrow C^n$ 是一个顶点为 0 的可逆全纯压缩映射。那么商空间 $H = \frac{\mathbb{C}^n \setminus 0}{\langle\gamma\rangle}$ 称为Hopf 流形。所有 Hopf 流形都是局部共形凯勒流形。对于 $\gamma \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 的情形（即我们所说的“线性 Hopf 流形”），其证明逐步发表于一系列论文中： [GO、OV1、OV2]；对于非线性压缩映射，证明直到最近才发表于 [OV5]。

例 2.5：几乎所有 Inoue 曲面（[I]）都是局部共形凯勒流形（[T、B]）。Oeljeklaus-Toma（OT）流形是 Inoue 曲面的高维推广，也都是局部共形凯勒流形。详情参见 [OV4，第 22]章。

2.2 带势函数的 LCK 流形

定义 2.6：设 (M, I, ω) 是一个局部共形凯勒流形。若满足以下条件，则称其为带势函数的 LCK 流形：

(i) K¨ahler 形式 $\tilde{\omega}$ 具有光滑、正的 K¨ahler 势： $\tilde{\omega} = dd^c\varphi$，其中 φ： $\tilde{M} \longrightarrow \mathbb{R}^{>0}$；(ii) 甲板变换群相对于该势作正相似变换：$\gamma^*\varphi = c_\gamma\varphi$，其中 $c_\gamma \in \mathbb{R}^{>0}$，对所有 $\gamma \in \Gamma$ 均成立。

姑且沿用这一术语，我们称“ω 具有势 φ”。

˜注 2.7：一般而言，若微分形式 η 定义在 M 上并满足$d^*\eta = c_\gamma\eta$, $c \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \Gamma$, 则称其为自守的。特别地，对于局部共形凯勒流形，其 K¨ähler 覆盖上的 K¨ähler 形式 $\tilde{\omega}$ 总是自守的。

注 2.8：万¨有覆盖上的 Kähler 形式 Inoue 曲面S^0 和 Oeljeklaus-Toma 流形确实具有正的全局势。然而，按照注 2.7的含义（参见 [OT]，[OV4，第 22]章）。

命题 2.9：带势函数的局部共形凯勒流形的所有光滑子流形都是带势函数的局部共形凯勒流形。 ■

例 2.10：所有 Hopf 流形（例 2.4）都是带势函数的 LCK 流形（[OV1，OV2，OV5]）。所有非 K¨ähler 椭圆曲面都是带势函数的 LCK 流形（[B，VVO]）。

命题 2.9 有如下部分逆命题：

定理 2.11：（[OV1，OV3]）设 (M, I, ω) 是一个带势函数的紧致局部共形凯勒流形，维数为$_{\mathbb{C}} M \geqslant 3$。那么 (M, I) 可全纯嵌入到一个线性 Hopf 流形中。 ■

总之，若将范围限定在复维数至少为 3 的情形，则可以说，带势函数的紧致局部共形凯勒流形是线性 Hopf 流形的光滑子流形。若全局球壳（GSS）猜想（亦称加藤猜想）成立，则维数为 2 时也同样成立（[OV3]）。

3 局部共形凯勒流形的双有理映射

3.1 正规簇

我们需要一个关于解析范畴中正规簇的结果。回顾一下，复簇 X 称为正规，如果任意开子集 $U \subset X$ 上的局部有界亚纯函数都是全纯的（[D，定义 II.7.4]）。

命题 3.1：设 Z 为正规簇，且 $\varphi: Z_1 \longrightarrow Z$ 是一个全纯闭映射，使得对于所有 z，$\varphi^{-1}(z)$ 都是有限的，并且在一般点处为双射。

那么 φ^{-1} 是全纯的。

证明：对于代数簇之间的适当态射，这一陈述是正规性的定义之一：Z 是正规的，当且仅当任意有限的双有理正则映射 $Z_1 \longrightarrow Z$ 都是同构。

当 f 是双射时，这一陈述见[R，命题 14。7] 或见 [GLS，定理 1。102]。

根据[GLS，引理 1。54], 对于任意适当映射 $\varphi: Z_1 \longrightarrow Z$ 满足$\varphi^{-1}(z)$ 总是有限的情形，对每个 U_z，存在一个开邻域 $z \in Z$，使得 $\varphi^{-1}(U_z)$ 是开子集 V_1、.....、V_n的不交并；其中每个子集都为某个 $z_i \in \varphi^{-1}(z)$ 提供一个坐标邻域。

由于 φ 在一般点处是双射，应用此引理得到的开子集数恰好为 1；这意味着 φ 是双射，因此可以应用 [GLS，定理 1。102] ■

3.2 基本群与全纯映射

命题 3.2：设 $\varphi: M \dashrightarrow M_1$ 是紧致连通复流形之间的双有理映射，且 $X \subset M \times M_1$ 是其图的闭包。[1]那么，自然投影 $X \longrightarrow M$ 和 $X \longrightarrow M_1$ 诱导基本群之间的同构。

~证明。步骤 1：记 X 为 X的奇点消解。由~[K1，§7.8。1], 双有理全纯映射 $X \longrightarrow M_1$ 和 $X \longrightarrow M$在基本群上诱导同构。

步骤 2：我们证明簇 X 是正规的。根据定义，正规簇上的所有局部有界亚纯函数都是全纯的。注意，从 X 到 M 以及到 M_1 的投影都是双有理映射；因此，我们可以将 X 上的亚纯函数视为 M 和 M_1上的亚纯函数。X 上的任意局部有界亚纯函数 f 都定义了流形 M 和M_1上的局部有界亚纯函数；这两个流形是光滑的，因而是正规的。因此，f 在 M和 M_1上都是全纯的。这意味着 f 是 M 和 M_1上的全纯函数的拉回，故其在 $X \subset M \times M_1$上全纯。

~步骤 3：映射 $\pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(M)$（分别地，$\pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(M_1)$）的复合由步骤 1 可知是一个同构。因此——

[1]根据亚纯态射的定义，X 是 $M \times M_1$的一个复子簇。

要证明 $\pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(M_1)$（分别地， $\pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(M)$）是一个˜同构，只需证明自然映射 $\pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(X)$ 是满射。

$M^\circ \subset M$ 是 φ的例外集的补集。显然， $\varphi\Big|_{M^\circ}$ 的图在 X中稠密且为扎里斯基开集。

设 $U \subset Z$ 是正规复代数簇中的一个扎里斯基开子集。则自然映射 $\pi_1(U) \longrightarrow \pi_1(Z)$是满射（[SGA1，IX，推论 5。6]，[C1，§1。3]，或[K2，引理 3。3]）。

我们将得出˜论自然映射 $\pi_1(M^\circ) \longrightarrow \pi_1(X)$和 $\pi_1(M^\circ) \longrightarrow \pi_1(X)$是满射。˜因此，自然映射 $\pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(X)$也为满射。

■

3.3 与局部共形凯勒流形双有理等价的流形

设 $\chi:\ \pi_1(M) \longrightarrow \mathbb{R}^{>0}$ 是 M (定义 2.2) 上局部共形凯勒结构的相似特征；它是 $\tilde{M}$ 的覆盖变换群到 $\mathbb{R}^{>0}$ 的同态，将映射 $\Psi:\ \tilde{M} \longrightarrow \tilde{M}$ 映为缩放因子 $\frac{\Psi^*\tilde{\omega}}{\tilde{\omega}}$。

对于我们的主要结果，我们使用下面的命题。

˜命题 3.3：设 (M,ω) 是一个紧致局部共形凯勒流形，$(M,\tilde{\omega})$ 是其极小凯勒覆盖（定义 2.3），且 $Z \subset M$ 是一个正维子簇。假设凯勒形式 $\tilde{\omega}$ 是恰当的。那么 $\pi_1(Z)$ 在 $\pi_1(M)$ 中的像包含一个无限循环子群。

˜　　˜证明：记 $Z \subset M$ 为通过同伦˜提升引理由 Z 得到的覆盖。如果 $\pi_1(Z)$ 在 $\pi_1(M)$ 中的像是有限的，则簇 Z 是˜紧致的。这不可能，因为 Z 具有一个凯勒¨形式 $\tilde{\omega}$，该形式是恰当的，因此 $0 = \int_{\tilde{Z}} \tilde{\omega}^{\dim_{\mathbb{C}} Z} = \mathrm{Vol}(\tilde{Z}) > 0$；矛盾。由同样的˜论证，限制在 Z 上的凯勒¨形式 $\tilde{\omega}$ 不是 Z 上某个凯勒¨形式的拉回。这意味着覆盖变换群通过非平凡的相似变换作用于 $(\tilde{Z},\tilde{\omega}\Big|_{\tilde{Z}})$，从而 $\chi(\pi_1(Z)) \subset \mathbb{R}^{>0}$ 是非平凡的。

考虑一个元素 $\gamma \in \pi_1(Z)$，使得 $\chi(\gamma) \in \mathbb{R}^{>0}\backslash 1$。那么 γ 的阶是无限的；它在 $\pi_1(M)$ 中的像的阶也为无限，因为 χ 可通过 $\pi_1(M)$ 分解。

■

定理 3.4：设 M、M_1 是紧致复流形，且 $\varphi:\ M_1 \dashrightarrow M$ 是一个双亚纯映射。假设 M 是局部共形凯勒流形，且 $(M,\tilde{\omega})$ 是其最小凯勒覆盖；还假设 M 上的凯勒形式 $\tilde{\omega}$ 是恰当的。那么 φ 是全纯的。

证明。步骤 1：设 $X \subset M \times M_1$ 是 φ的图。根据定义， X是 $M \times M_1$ 的一个复子簇，它在 M和 M_1 上分别投影，且在一般点处双射。我们将投影映射记为 $\sigma:\ X \longrightarrow M$， $\sigma_1:\ X \longrightarrow M_1$。为证明 定理 3.4，我们需要证明对所有 $\sigma_1^{-1}(z)$都是有限的。于是 定理 3.4 由 命题 3.1得证，因为 M_1 是光滑的，因此是正规的。

步骤 2：反设存在某个 $z \in M_1$，其原像$Z_1 := \sigma_1^{-1}(z)$ 具有正维数。由于投影 $M \times M_1$ 到 M在集合 $M \times \{z\}$上是双射，集合 Z_1 全纯且双射地映射到 M。设 $Z \subset M$ 是 Z_1 在 M中的像。根据 Remmert适当映射定理（[D，§8.2]）， Z 是 M中的一个复子簇。

步骤 3：根据 命题 3.3， $\pi_1(Z)$ 在 $\pi_1(M)$ 中的像包含一个无限阶循环子群。因此，它在 $\pi_1(X) = \pi_1(M)$ 中的像也包含一个无限阶循环子群。这不可能，因为$\pi_1(X) = \pi_1(M) = \pi_1(M_1)$，且 Z 到 M_1 的投影只是一个点。 ■

由于上述证明并未用到 LCK几何 的全部效力，同样的论证也可用于证明以下结果，该结果或许也有独立的用处。

定理 3.5：设 M、 M_1 是紧致复流形，且 $\varphi:\ M_1 \dashrightarrow M$ 是一个双亚纯映射。假设 M 有一个覆盖空间，该覆盖空间上存在恰当的 K¨ahler 形式。那么 φ 是全纯的。 ■

致谢：感谢 Florin Ambro 和 Marian Aprodu 与我们进行了非常有益的讨论，并提供了文献线索。我们尤其感谢 Victor Vuletescu，他发现了论文早期版本中的一个错误。

参考文献

[B] F. A. Belgun， *On the metric structure of non-Kähler complex surfaces*, Math. Ann. **317** (2000), 1-40.（引述见第3和4页。）[C1] Campana, F., *On twistor spaces of the class C* 33 1991 2, , 《微 541 549 6 分几何杂志》（），第 - 期。（引述见第 页。）[D]J.-P. Demailly，《复解析与微分几何》，https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf （引述见第4和7页。）

[GO] P. Gauduchon, L. Ornea, *Locally conformally Kähler metrics on Hopf surfaces*, Ann. Inst. Fourier（格勒诺布尔）48（1998），1107-1128。（引述见第3页。）[GLS] G.-M. Greuel, C. Lossen, E. I. Shustin, *Introduction to singularities and deformations*, Springer 数学专著丛书, Springer，2007。（引述见第5页。）[HP] A. H¨oring, Th. Peternell, *Bimeromorphic geometry of Kähler threefolds*, 《代数几何：盐湖城 2015》，381-402，纯数学专题讨论会论文集，97.1，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2018。（引述见第2页。）[I] Ma. Inoue, *On surfaces of class VII_0*, Invent. Math., 24（1974），269-310（引述见第3页。）[K1] J. Koll´ar, *Shafarevich maps and plurigenera of algebraic varieties*, Invent. Math. 113, （1993）177-215。（引述见第5页。）[K2] J. Koll´ar, , *Fundamental groups of rationally connected varieties. Dedicated to William Fulton on the occasion of his 60th birthday* **48** 2000 359 368 Michigan Math. J.（），-。（引述见第6页。）[M] K. Matsuki, *Lectures on factorization of birational maps*, arxiv:0002084。（引述见第2页。）[OT] K. Oeljeklaus, M. Toma, *Non-Kähler compact complex manifolds associated to number fields* **55**, 1 2005 1291 1300 4 , Ann. Inst. Fourier 第（），-。（引述见第 页。）[OV1] L. Ornea, M. Verbitsky, *Locally conformal Kähler manifolds with potential*, Math. Ann. 348（2010），25-33。（引述见第3和4页。）[OV2] L. Ornea, M. Verbitsky, *Locally conformally Kähler metrics obtained from pseudoconvex shells* **144** 2016 325 335 3 4 , 美国数学会会刊（），-。（引述见第和页。）[OV3] L. Ornea, M. Verbitsky, *Embedding of LCK manifolds with potential into Hopf manifoldsusing Riesz-Schauder theorem*, 《复几何与辛几何》，Springer INdAM 系列，2017，137-148。（引述见第4页。）[OV4] L. Ornea, M. Verbitsky, *Principles of locally conformally Kähler geometry*, arXiv:2208.07188。（引述见第2、3和4页。）[OV5] L. Ornea, M. Verbitsky, *Non-linear Hopf manifolds are locally conformally Kähler* , arXiv:2202.12398。（引述见第3和4页。）[R] R. Remmert, *Local theory of complex spaces*, 载于《数学科学百科全书》，第74卷，7-96，Springer，1994。（引述见第5页。）[SGA1] A. Grothendieck, *Revétements étales et groupe fondamental*, 数学讲义丛书224，Springer，1971。（引述见第6页。）[T] F. Tricerri, *Some examples of local ly conformal Kähler manifolds*, Rend. Sem. Mat., Torino 40，第1期（1982），81-92。（引述见第3页。）[V1] I. Vaisman, *On locally conformal almost Kähler manifolds*, Israel J. Math. 24（1976），338-351。（引述见第3页。）[V2] I. Vaisman, *On locally and globally conformal Kähler manifolds*, 美国数学会汇刊, 262（1980），533-542。（引述见第2和3页。）[VVO] M. Verbitsky, V. Vuletescu, L. Ornea, *Classification of non-Kähler surfaces and locally conformally Kähler geometry* **76** 2021 261 290 1810 05768 , 俄罗斯数学评论（），-。arxiv: .。（引述见第4页。）

Liviu Ornea
University of Bucharest, Faculty of Mathematics and Informatics,
14 Academiei str. 70109 Bucharest Romania and: , „
Institute of Mathematics "Simion Stoilow" of the Romanian Academy,
21 Romania ,
Calea Grivitei Str. 010702-Bucharest,lornea@fmi.unibuc.ro, liviu.ornea@imar.ro

Misha VerbitskyInstituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA)
Estrada Dona Castorina,110Jardim Botânico, CEP 22460-320Rio de Janeiro, RJ - Brasil
also:Laboratory of Algebraic Geometry,
Faculty of Mathematics National Research University Higher School of Economics 6 ,
Usacheva Str. Moscow Russia
, ,verbit@verbit.ru, verbit@impa.br