arXiv:2302.03428v1 [math.ST] 7 Feb 2023

序约束下多个指数分布尺度参数的估计

Suchandan Kayal[a]、Lakshmi Kanta Patra[b*],

[a]鲁尔克拉国家理工学院数学系

[b]比莱印度理工学院数学系

摘要

本文研究了 LINEX 损失函数下多个尺度参数有序的指数分布参数估计问题。我们分别考虑了位置参数已知和未知时有序尺度参数的估计。对于每种情形，我们均考虑一类等变估计量，并得到了该类估计量优于通常估计量的充分条件。利用这一结果，我们证明了受限最大似然估计量是不可容许的。最后，我们针对每种情形开展模拟研究，以比较所提出估计量的风险表现。

关键词：决策理论；最佳仿射等变估计量；Linex 损失；不可容许性；受限最大似然估计量。

1 引言

在许多实验情境中，研究人员经常面临估计参数的问题，而这些参数往往存在序关系，例如工业、农业、临床试验和经济实验。举例来说，在一家公司中，通常认为高技能员工的薪资高于低技能员工。使用某种肥料后，作物的平均产量预计高于不施肥时的产量。过去六十年来，由于这一问题在各种领域中的应用，估计受限参数的问题受到了众多研究人员的广泛关注。关于参数存在序约束时的估计问题，综述可参见Barlow等人（1972）、Silvapulle和Sen（2004）以及van Eeden（2006）。

* patralakshmi@gmail.com

设$(X_{i1}, \ldots, X_{in_i})$为从第 i个总体 $\Pi_i, i = 1, \ldots, k\,(k \geq 2)$中抽取的随机样本。第 i个总体 Π_i 的概率密度函数为

$$f_i(x; \mu_i, \sigma_i) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_i} \exp\left(-\frac{x-\mu_i}{\sigma_i} \right), & \text{if } x > \mu_i, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $-\infty < \mu_i < \infty$ 和 $\sigma_i > 0$. 本文研究具有有序尺度参数的 k $(k \geq 2)$ 个指数总体参数的估计问题。为提高系统可靠性，需要在不同阶段进行一些更改，以纠正设计缺陷。假设共有 k 个阶段进行更改。因此，预期系统在每个阶段的可靠性都会提高。设 λ_i 为第i阶段的可靠性度量， $i = 1$，....., k. 因此，值得假设 $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_2$. 关于指数总体有序参数估计的大部分研究，都是针对平方误差损失函数展开的。相关参考文献包括 Kaur 和 Singh（1991年）、Vijayasree 和 Singh（1991年，1993年）、Kushary 等人（1989年）、Jin 和 Pal（1991年）、Pal 和 Kushary（1992年）、Vijayasree 等人（1995年）、Jana 等人（2016年）以及 Petropoulos（2017年）。本文主要关注点估计，尤其着重寻找在无约束问题中针对 LINEX 损失函数表现优于经典估计量的估计量，例如最大似然估计量、最佳仿射等变估计量和最佳尺度等变估计量。LINEX 损失函数定义如下：

$$L(\triangle) = p'[\exp\{p\triangle\} - p\triangle - 1],\ \triangle = \delta - \theta,\ p \neq 0,\ p' > 0. \tag{1.2}$$

这里， p 和 p' 分别是形状参数和尺度参数。在本文中，我们假设$p' = 1.$。注意，当 $|p|$ 趋于 0 时，(1.2) 就化为平方误差损失函数。关于 LINEX 损失函数的详细讨论，请参阅 Zellner（1986年）。

本文其余部分的安排如下。第2节讨论位置参数已知时有序尺度参数的估计。我们证明了最佳尺度等变估计量和受限最大似然估计量的不可容许性。第3节研究位置参数未知时有序尺度参数的改进估计。最后，对于每种情形，我们都比较了所提出的改进估计量的相对风险表现。

2 位置参数已知时有序尺度参数的估计

本节中，我们考虑在位置参数已知时， $k \geq 2$ 指数分布的有序尺度参数估计。因此，不失一般性，我们假设$\mu_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$. 本节中，我们考虑对受序约束限制的 σ_i进行估计

$\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \ldots \leq \sigma_k$. 损失函数取为

$$L(\sigma_i, \delta_i) = \exp\left\{p\left(\frac{\delta_i - \sigma_i}{\sigma_i}\right)\right\} - p\left(\frac{\delta_i - \sigma_i}{\sigma_i}\right) - 1,\ p \neq 0. \tag{2.1}$$

记为 $S_i = \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$. 则 $\underline{S} = (S_1, S_2, \ldots, S_k)$ 是 $\underline{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k)$ 的完全充分统计量。此外， $S_1, S_2, \ldots, S_k$ 相互独立，其中 S_i 服从形状参数为 n_i 、尺度参数为 σ_i. 的伽马分布。为方便起见，记 $S_i \sim Gamma(n_i, \sigma_i)$ $i = 1, 2, \ldots, k$.。 S_i 的概率密度函数为

$$f(x; n_i, \sigma_i) = \frac{1}{\sigma_i^{n_i}\Gamma(n_i)} e^{-\frac{x}{\sigma_i}} x^{n_i - 1},\ x > 0, \tag{2.2}$$

其中 $\Gamma(.)$ 表示通常的伽马函数。现在考虑尺度变换群 $G_{a_i} = \{g_{a_i} : g_{a_i}(x_{ij}) = a_i x_{ij},\ a_i > 0,\ j = 1, 2, \ldots, n_i, i = 1, 2, \ldots, k\}$.。在此变换下， $S_i \to a_i S_i$ 和 $\sigma_i \to a_i \sigma_i$. 。一个标准论证表明，任何尺度等变估计量都具有以下形式

$$\delta_{i_c}(\underline{S}) = cS_i \tag{2.3}$$

对于任意常数 $c.$ ，下面的定理给出了在不对 σ_i、 $i = 1$、2、.....、 $k.$ 施加限制时， σ_i的最佳尺度等变估计量。为简洁起见，省略该定理的证明。

定理 2.1 在 LINEX 损失函数 (2.1) 下， σ_i的（无约束）最佳尺度等变估计量为 $\delta_{i_{c_{0i}}}(\underline{S}) = c_{0i} S_i$，其中 $c_{0i} = p^{-1}(1 - e^{-p/(n_i+1)})$ $i = 1$， 2， ....., k.

2.1 改进（无约束）最佳尺度等变估计量

在本小节中，我们取尺度变换群 G_{a_i}的一个子群。考虑 $G_a = \{g_a : g_a(x_{ij}) = ax_{ij},\ a > 0,\ j = 1,\ 2,\ .....,\ n_i,\ i = 1,\ 2,\ .....,\ k\}$.。那么尺度等变估计量的形式为

$$\begin{aligned} \delta_{\psi_i}(\underline{S}) &= S_i \psi_i\left(\frac{S_1}{S_i}, \frac{S_2}{S_i}, \ldots, \frac{S_{i-1}}{S_i}, \frac{S_{i+1}}{S_i}, \ldots, \frac{S_k}{S_i}\right) \\ &= S_i \psi_i\left(\underline{U}\right), \end{aligned} \tag{2.4}$$

其中 $\underline{U} = (U_1, U_2, \ldots, U_{i-1}, U_{i+1}, \ldots, U_k)$ $U_j = S_j/S_i$，适用于 $j \neq i$, $j = 1, 2, \ldots, k$，且 $U_i = S_i$.。形式为 (2.4) 的估计量的风险函数为

$$\begin{aligned} R(\sigma_i, \delta_{\psi_i}) &= E\left[\exp\left\{p\left(\frac{S_i \psi_i(\underline{U})}{\sigma_i} - 1\right)\right\} - p\left(\frac{S_i \psi_i(\underline{U})}{\sigma_i} - 1\right) - 1\right] \\ &= E^{\underline{U}} R_1\left(\sigma_i, \underline{U}, \delta_{\psi_i}\right), \end{aligned} \tag{2.5}$$

其中 $R_1\left(\sigma_i, \underline{U}, \delta_{\psi_i}\right)$ 表示在给定 $\underline{U} = \underline{u}$ 的条件下 δ_{ψ_i} 的条件风险函数，其中 $\underline{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$。它可表示为

$$R_1(\sigma_i, \underline{U}, \delta_{\psi_i}) = E\left[\left(\exp\left\{p\left(\frac{S_i\psi_i(\underline{U})}{\sigma_i} - 1\right)\right\} - p\left(\frac{S_i\psi_i(\underline{U})}{\sigma_i} - 1\right) - 1\right)\Big|\underline{U} = \underline{u}\right]. \tag{2.6}$$

现在，给定 $\underline{U} = \underline{u}$，使 (2.6) 最小化的 $\psi_i(\underline{u})$ 的值可由下式求得:

$$E\left[U_i \exp\left\{\frac{pU_i\psi_i(\underline{U})}{\sigma_i}\right\}\Big|\underline{U} = \underline{u}\right] = \exp\{p\}E\left(U_i|\underline{U} = \underline{u}\right). \tag{2.7}$$

为求解上述方程，我们需要推导给定 $\underline{U} = \underline{u}$. 时 U_i 的条件分布。经过一些计算，可以证明 $U_i|\underline{U} = \underline{u}$ 服从形状参数为 $\sum_{j=1}^{k} n_j$、尺度参数为 $\left(\sigma_i^{-1} + \sum_j^k \text{的伽马分布}_{(\neq i)=1}(u_j/\sigma_j)\right)^{-1}$. 因此，经过化简，由 (2.7) 可得

$$\psi_i(\underline{u}, \underline{\sigma}) = \frac{1}{p}\left(1 - \exp\left\{-\frac{p}{n+1}\right\}\right)\left(1 + \sum_{j(\neq i)=1}^{k} \frac{u_j\sigma_i}{\sigma_j}\right), \tag{2.8}$$

其中 $n = \sum_{j=1}^{k} n_j$。要应用 Brewster 和 Zidek（1974）的方法，需要求出由 (2.8) 给出的 $\psi_i(\underline{u}, \underline{\sigma})$ 的上确界和下确界。对于 $p \neq 0$，在约束条件 $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq .. \leq \sigma_k$ 下，我们得到

$$\begin{aligned}
\sup_{\underline{\sigma}} \psi_i(\underline{u}, \underline{\sigma}) &= \begin{cases} \dfrac{1}{p}\left(1 - \exp\left\{-\dfrac{p}{n+1}\right\}\right)\left(1 + \displaystyle\sum_{j=2}^{k} u_j\right), & \text{if } i = 1 \\ +\infty, & \text{if } i = 2, \ldots, k. \end{cases} \\
&= \psi_i{}^*(\underline{u}), \text{ (say)}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

and

$$\begin{aligned}
\inf_{\underline{\sigma}} \psi_i(\underline{u}, \underline{\sigma}) &= \begin{cases} \dfrac{1}{p}\left(1 - \exp\left\{-\dfrac{p}{n+1}\right\}\right), & \text{if } i = 1 \\ \dfrac{1}{p}\left(1 - \exp\left\{-\dfrac{p}{n+1}\right\}\right)\left(1 + \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} u_j\right), & \text{if } i = 2, \ldots, k \end{cases} \\
&= \psi_{i*}(\underline{u}), \text{ (say)}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

现在，我们定义函数 $\psi_{i0}(\underline{u})$ 如下:

$$\psi_{i0}(\underline{u}) = \begin{cases} \psi_{i*}(\underline{u}), & \text{if } \psi_i(\underline{u}) \leq \psi_{i*}(\underline{u}) \\ \psi_i(\underline{u}), & \text{if } \psi_{i*}(\underline{u}) < \psi_i(\underline{u}) < \psi_i{}^*(\underline{u}) \\ \psi_i{}^*(\underline{u}), & \text{if } \psi_i(\underline{u}) \geq \psi_i{}^*(\underline{u}). \end{cases} \tag{2.11}$$

因此，我们得到以下定理，它给出了改进形如 (2.4) 的估计量的充分条件。

定理 2.2 设 $\delta_{\psi_i}(\underline{U}) = S_i\psi_i(\underline{U})$ 是由 (2.4) 给出的尺度等变估计量，且 ψ_{i0} 在 (2.11) 中定义。若存在某个 $\underline{\sigma}$ 使得 $P_{\underline{\sigma}}(\psi_{i0}(\underline{U}) \neq \psi_i(\underline{U})) > 0$，则在序约束 $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \ldots \leq \sigma_k$ 下，对于 LINEX 损失函数 (2.1)，估计量 $\delta_{\psi_{i0}}(\underline{U})$ 优于 $\delta_{\psi_i}(\underline{U})$。

以下推论可由定理 2.2 直接得到。记 $d_1 = p^{-1}(1-\exp\{-p/(n_1+n_2+1)\})$ 和 $d_2 = p^{-1}(1-\exp\{-p/(n+1)\})$。

推论 2.3 假设事先已知 $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \ldots \leq \sigma_k$。对于由（2.1）给出的 LINEX 损失函数,

(*i*) σ_1 的无约束最优尺度等变估计量是不可容许的，并且被下式给出的估计量支配:

$$\delta_{\psi_{10}}(\underline{U}) = \begin{cases} d_1 S_1, & if\ c_{01} < d_1 \\ c_{01} S_1, & if\ d_1 \leq c_{01} \leq d_1(1+U_2) \\ d_1(1+U_2)S_1, & if\ c_{01} > d_1(1+U_2); \end{cases} \tag{2.12}$$

(*ii*) σ_i、 $i = 2$、.....、 k 的无约束最优尺度等变估计量是不可容许的，并且被下式给出的估计量支配:

$$\delta_{\psi_{i0}}(\underline{U}) = \begin{cases} d_2\left(1+\sum_{j=1}^{i-1} U_j\right) S_i, & if\ c_{0i} < d_2\left(1+\sum_{j=1}^{i-1} U_j\right) \\ c_{0i} S_i, & otherwise. \end{cases} \tag{2.13}$$

接下来，我们考虑在约束 $\sigma_1 \leq \sigma_2 \cdots \leq \sigma_k$ 下 σ_i、 $i = 1$、2、.....、 k 的最大似然估计量，其形式为

$$\delta_{iRML} = \max_{s \leq i} \min_{t \geq i} \left\{ \frac{\sum_{j=s}^{t} S_j}{\sum_{j=s}^{t} n_j} \right\}. \tag{2.14}$$

特别地，考虑 $k = 2.$，则在约束 $\sigma_1 \leq \sigma_2$ 下， σ_1 和 σ_2 的最大似然估计量分别为

$$\delta_{1RML} = \min\left\{ \frac{Y_1}{n_1}, \frac{Y_1+Y_2}{n_1+n_2} \right\} \tag{2.15}$$

and

$$\delta_{2RML} = \max\left\{ \frac{Y_2}{n_2}, \frac{Y_1+Y_2}{n_1+n_2} \right\}, \tag{2.16}$$

分别。注意，上述估计量具有式 (2.4) 的尺度等变形式。因此，应用定理 2.2，可得以下推论。

推论 2.4 令 $\sigma_1 \leq \sigma_2.$ 则对于 $k = 2$，在 LINEX 损失函数 (2.1) 下，估计量

$$\delta_{1IRML}(\underline{U}) = \begin{cases} d_1 S_1, & if\ \phi_{01} < d_1 \\ \phi_{01} S_1, & if\ d_1 \leq \phi_{01} \leq d_1(1+U_1) \\ d_2 S_1, & if\ d_2(1+U_2) < \phi_{01}; \end{cases} \tag{2.17}$$

and

$$\delta_{2IRML}(\underline{U}) = \begin{cases} d_1(1+U_1)S_2, & if\ \phi_{02} < d_1(1+U_1) \\ \phi_{02}S_2, & otherwise, \end{cases} \tag{2.18}$$

其中 $\phi_{01} = \min\left\{\frac{1}{n_1}, \frac{1+U_2}{n_1+n_2}\right\}$和 $\phi_{02} = \max\left\{\frac{1}{n_2}, \frac{1+U_1}{n_1+n_2}\right\}$的风险分别一致小于 σ_1 和 σ_2的受限最大似然估计量。

2.2 数值研究

在本小节中，我们通过模拟研究对所提出估计量的风险表现进行数值比较。我们使用 R 软件生成了 50, 000 组来自两个相互独立的指数分布的随机样本，以开展模拟研究。估计量 δ_1 相对于另一估计量 δ_2 的百分比相对风险改进（PRRI）定义为

$$PRRI(\delta_1, \delta_2) = \left(\frac{Risk(\delta_2) - Risk(\delta_1)}{Risk(\delta_2)}\right) \times 100\% \tag{2.19}$$

在下表中，我们列出了不同样本量和不同 p取值下各种估计量的 PRRI。我们考虑的样本量（n_1, n_2）分别为 (3, 5)、(10, 15)、(8, 5) 和 (15, 10)。 p 的取值为 0.5 和 -0.5。从表 1 和表 2 中可以观察到以下几点。

1. 对于 BSEE，在约束条件 $n_1 < n_2$下，随着样本量（n_1, n_2）增加，改进的 BSEE 的 PRRI 会降低。对于 $n_1 > n_2$ 情形，也观察到类似现象。

2. 对于固定的 (n_1, n_2)，若 (σ_1, σ_2) 增大，则改进的 BSEE 相对于 BSEE 的 PRRI 会增大。此外，在保持 σ_1 不变的情况下增大 σ_2 的值，改进的 BSEE 相对于 BSEE 的 PRRI 会减小。这一观察表明，经过一段距离后，改进的 BSEE 的风险函数会与 BSEE 的风险函数重合。

表 1： $k = 2$ 和 $p = 0.5$. 的各种估计量的 PRRI。第 3、4 和 5 列分别列出改进的 BSEE、受限最大似然估计和改进的受限最大似然估计相对于 BSEE 的 PRRI；第 6、7 和 8 列则列出改进的 BSEE、BSEE 和改进的受限最大似然估计相对于受限最大似然估计的 PRRI。

(n_1, n_2)	(σ_1, σ_2)	$(\delta_{\psi_{10}}, \delta_{\psi_{20}})$	$(\delta_{1RML}, \delta_{2RML})$	$(\delta_{1IRML}, \delta_{2IRML})$	$(\delta_{\psi_{10}}, \delta_{\psi_{20}})$	$(\delta_{1c_{01}}, \delta_{2c_{02}})$	$(\delta_{1IRML}, \delta_{2IRML})$
(3,5)	(0.2,0.5)	(3.89,6.21)	(18.26,-28.32)	(17.27,-27.01)	(-14.39,29.13)	(-18.26,24.86)	(1.26,0.89)
	(0.2,1.0)	(0.37,0.58)	(-32.19,-33.29)	(-32.43,-33.22)	(24.63,25.41)	(24.35,24.97)	(0.23,0.05)
	(0.2,1.5)	(0.13,0.1)	(-51.64,-33.30)	(-51.84,-33.28)	(34.14,25.05)	(34.05,24.97)	(0.13,0.01)
	(0.5,1.0)	(6.19,9.78)	(25.57,-32.73)	(24.89,-30.47)	(-26.03,32.03)	(-34.35,24.66)	(0.80,1.70)
	(0.5,1.5)	(2.24,3.39)	(4.87,-33.21)	(3.27,-32.59)	(-2.76,27.47)	(-5.12,24.92)	(1.68,0.46)
	(0.5,2.0)	(0.71,1.33)	(-16.48,-33.27)	(-17.39,-33.09)	(14.76,25.97)	(14.15,24.96)	(0.78,0.14)
	(1.0,1.5)	(9.64,16.83)	(25.53,-31.53)	(29.74,-27.38)	(-21.35,36.77)	(-34.30,23.97)	(5.65,3.15)
	(1.0,2.0)	(6.19,9.78)	(25.57,-32.73)	(24.98,-30.47)	(-26.03,32.03)	(-34.35,24.66)	(0.78,1.70)
	(1.0,2.5)	(3.74,5.67)	(16.38,-33.08)	(15.33,-31.91)	(-15.11,29.12)	(-19.59,24.86)	(1.25,0.88)
(10,15)	(0.2,0.5)	(0.65,0.76)	(14.7,-10.80)	(13.62,-10.61)	(-16.48,10.44)	(-17.24,9.75)	(1.26,0.17)
	(0.2,1.0)	(0,0.002)	(-14.97,-10.80)	(-14.87,-10.81)	(13.03,9.76)	(13.03,9.75)	(0,0)
	(0.2,1.5)	(0,0)	(-15.99,-10.81)	(-15.99,-10.80)	(13.79,9.75)	(13.8,9.75)	(0,0)
	(0.5,1.0)	(2.53,2.90)	(27.96,-10.81)	(26.28,-9.83)	(-35.29,12.37)	(-38.81,9.57)	(2.32,0.88)
	(0.5,1.5)	(0.13,0.19)	(0.86,-10.80)	(0.47,-10.77)	(-0.73,9.92)	(-0.87,9.75)	(0.38,0.034)
	(0.5,2.0)	(0.02,0.015)	(-11.58,-10.81)	(-11.64,-10.80)	(10.40,9.76)	(10.38,9.75)	(0.051,0.003)
	(1.0,1.5)	(8.66,10.72)	(13.76,-10.77)	(17.78,-6.16)	(-5.92,19.40)	(-15.96,9.72)	(4.56,4.16)
	(1.0,2.0)	(2.53,2.91)	(27.96,-10.80)	(26.29,-9.83)	(-35.29,12.37)	(-38.80,9.75)	(2.32,0.88)
	(1.0,2.5)	(0.65,0.76)	(14.71,-10.80)	(13.62,-10.61)	(-16.48,10.44)	(-17.24,9.75)	(1.26,0.17)
(8,5)	(0.2,0.5)	(2.36,6.41)	(-13.92,-33.35)	(9.52,-32.10)	(14.29,29.87)	(12.22,25.06)	(20.58,1.01)
	(0.2,1.0)	(0.167,0.42)	(-0.23,-34.23)	(2.01,-34.16)	(0.40,25.82)	(0.23,25.5)	(2.22,0.05)
	(0.2,1.5)	(0.03,0.05)	(-11.55,-34.25)	(-11.14,-34.24)	(10.38,25.55)	(10.35,25.51)	(0.36,0.01)
	(0.5,1.0)	(4.16,12.74)	(-47.64,-32.24)	(-4.29,-29.51)	(35.08,34.02)	(32.27,24.38)	(29.36,2.06)
	(0.5,1.5)	(1.37,3.38)	(0.30,-33.92)	(13.65,-33.21)	(1.07,27.85)	(-0.30,25.33)	(13.38,0.52)
	(0.5,2.0)	(0.51,1.10)	(4.32,-34.18)	(9.39,-33.97)	(-3.98,26.30)	(-4.51,25.47)	(5.30,0.16)
	(1.0,1.5)	(7.07,25.77)	(-116.0,-28.55)	(-31.36,-23.05)	(56.98,42.26)	(53.70,22.21)	(39.18,4.28)
	(1.0,2.0)	(4.16,12.74)	(-47.64,-32.24)	(-4.29,-29.51)	(35.08,34.02)	(32.27,24.38)	(29.36,2.06)
	(1.0,2.5)	(2.36,6.41)	(-13.92,-33.45)	(9.52,-32.10)	(14.29,29.87)	(12.22,25.06)	(20.58,1.01)
(15,10)	(0.2,0.5)	(0.66,1.47)	(-5.75,-15.33)	(5.73,-14.91)	(6.01,14.57)	(5.44,13.29)	(10.86,0.36)
	(0.2,1.0)	(0,0.001)	(-2.63,-15.33)	(-2.56,-15.33)	(2.56,13.29)	(2.56,13.29)	(0.065,0)
	(0.2,1.5)	(0,0)	(-9.51,-15.33)	(-9.51,-15.3)	(9.05,13.29)	(9.05,13.29)	(0,0)
	(0.5,1.0)	(2.13,5.05)	(-61.69,-15.23)	(-28.66,-13.47)	(39.47,17.60)	(38.15,13.22)	(20.42,1.53)
	(0.5,1.5)	(0.17,0.43)	(10.06,-15.33)	(14.22,-15.25)	(-11.0,13.67)	(-11.18,13.29)	(4.62,0.072)
	(0.5,2.0)	(0.004,0.03)	(5.62,-15.34)	(6.18,-15.33)	(-5.95,13.32)	(-5.96,13.29)	(0.59,0.002)
	(1.0,1.5)	(6.38,17.11)	(-195.63,-14.12)	(-99.18,-7.55)	(68.33,27.37)	(66.17,12.37)	(32.62,5.75)
	(1.0,2.0)	(2.13,5.05)	(-61.69,-15.23)	(-28.66,-13.47)	(39.47,17.61)	(38.15,13.22)	(20.42,1.52)
	(1.0,2.5)	(0.66,1.47)	(-5.75,-15.32)	(5.73,-14.91)	(6.06,14.57)	(5.44,13.29)	(10.86,0.36)

表 2： $k = 2$ 和 $p = -0.5$. 的各种估计量的 PRRI。第 3、4 和 5 列分别给出改进的 BSEE、受限最大似然估计和改进的受限最大似然估计相对于 BSEE 的 PRRI；第 6、7 和 8 列则给出改进的 BSEE、BSEE 和改进的受限最大似然估计相对于受限最大似然估计的 PRRI。

(n_1, n_2)	(σ_1, σ_2)	$(\delta_{\psi_{10}}, \delta_{\psi_{20}})$	$(\delta_{1RML}, \delta_{2RML})$	$(\delta_{1IRML}, \delta_{2IRML})$	$(\delta_{\psi_{10}}, \delta_{\psi_{20}})$	$(\delta_{1c_{01}}, \delta_{2c_{02}})$	$(\delta_{1IRML}, \delta_{2IRML})$
(3,5)	(0.2,0.5)	(4.49,5.92)	(20.66,-10.19)	(18.62,-7.99)	(-20.38,14.63)	(-26.04,9.25)	(2.56,2.00)
	(0.2,1.0)	(0.46,0.61)	(-4.43,-10.47)	(-4.76,-10.31)	(4.68,10.04)	(4.24,9.48)	(0.31,0.15)
	(0.2,1.5)	(0.13,0.11)	(-13.15,-10.48)	(-13.35,-10.45)	(11.74,9.58)	(11.62,9.48)	(0.17,0.02)
	(0.5,1.0)	(7.28,10.13)	(24.31,-9.73)	(24.13,-5.78)	(-22.49,18.10)	(-32.12,8.87)	(0.24,3.59)
	(0.5,1.5)	(2.79,3.57)	(14,66,-10.35)	(12.77,-9.11)	(-13.9,12.62)	(-17.18,9.38)	(2.21,1.13)
	(0.5,2.0)	(1.07,1.42)	(3.39,-10.44)	(2.02,-10.03)	(-2.40,10.74)	(-3.51,9.46)	(1.42,0.37)
	(1.0,1.5)	(11.19,17.19)	(18.68,-8.24)	(25.19,1.50)	(-9.21,23.39)	(-22.97,7.61)	(8.0,6.22)
	(1.0,2.0)	(7.28,10.12)	(24.31,-9.73)	(24.13,-5.78)	(-22.49,18.10)	(-32.12,8.17)	(0.23,3.59)
	(1.0,2.5)	(4.49,5.92)	(20.66,-10.19)	(18.62,-7.99)	(-20.38,14.63)	(-26.40,9.25)	(2.56,2.00)
(10,15)	(0.2,0.5)	(0.75,0.77)	(16.79,-3.68)	(15.28,-3.35)	(-19.28,4.29)	(-20.18,3.55)	(1.81,0.32)
	(0.2,1.0)	(0,0.002)	(-4.67,-3.68)	(-4.67,-3.68)	(4.63,3.55)	(4.63,3.55)	(0.0)
	(0.2,1.5)	(0,0)	(-5.32,-3.68)	(-5.32,-3.68)	(5.05,3.55)	(5.05,3.55)	(0,0)
	(0.5,1.0)	(2.8,2.92)	(25.65,-3.68)	(24.12,-2.17)	(-30.74,6.37)	(-34.51,3.55)	(2.06,1.46)
	(0.5,1.5)	(0.18,0.19)	(6.65,-3.68)	(5.99,-3.61)	(-6.39,3.73)	(-7.12,3.55)	(0.70,0.072)
	(0.5,2.0)	(0.02,0.02)	(-2.33,-3.69)	(-2.38,-3.68)	(2.30,3.57)	(2.28,3.55)	(0.05,0.005)
	(1.0,1.5)	(9.67,10.71)	(5.51,-3.64)	(12.33,2.77)	(4.41,13.85)	(-5.83,3.51)	(7.22,6.19)
	(1.0,2.0)	(2.79,2.92)	(25.65,-3.68)	(24.12,-2.17)	(-30.75,6.37)	(-34.51,3.55)	(2.07,1.46)
	(1.0,2.5)	(0.75,0.77)	(16.79,-3.68)	(15.27,-3.35)	(-19.28,4.29)	(-20.18,3.55)	(1.81,0.32)
(8,5)	(0.2,0.5)	(2.66,6.57)	(-26.18,-9.71)	(4.18,-7.42)	(22.85,14.84)	(20.75,8.84)	(24.53,2.07)
	(0.2,1.0)	(0.22,0.44)	(4.84,-10.74)	(7.76,-10.61)	(-4.85,10.09)	(-5.08,9.69)	(3.07,0.12)
	(0.2,1.5)	(0.04,0.05)	(-1.30,-10.77)	(-0.77,-10.75)	(1.32,9.77)	(1.29,9.72)	(0.52,0.02)
	(0.5,1.0)	(4.66,12.96)	(-69.06,-8.16)	(-11.62,-3.79)	(43.60,19.53)	(40.85,7.54)	(33.97,0.04)
	(0.5,1.5)	(1.55,3.53)	(-6.13,-10.32)	(11.44,-9.08)	(7.25,12.55)	(5.78,9.35)	(16.56,1.12)
	(0.5,2.0)	(0.59,1.16)	(5.17,-10.67)	(11.82,-10.27)	(-4.83,10.69)	(-5.44,9.64)	(7.01,0.67)
	(1.0,1.5)	(7.87,25.78)	(-105.43,-3.67)	(-41.70,4.48)	(63.79,28.42)	(60.69,4.54)	(44.30,7.86)
	(1.0,2.0)	(4.65,12.96)	(-69.07,-8.17)	(-11.62,-3.79)	(43.61,19.53)	(40.85,7.54)	(33.97,4.04)
	(1.0,2.5)	(2.65,6.57)	(-26.18,-9.71)	(4.78,-7.43)	(22.86,14.84)	(20.74,8.84)	(24.54,2.07)
(15,10)	(0.2,0.5)	(0.73,1.47)	(-15.12,-4.97)	(-0.25,-4.29)	(13.77,6.14)	(13.13,4.74)	(12.91,0.05)
	(0.2,1.0)	(0,0)	(2.41,-4.99)	(2.49,-4.99)	(-2.47,4.75)	(-2.47,4.75)	(0.08,0)
	(0.2,1.5)	(0,0)	(-3.02,-4.99)	(-3.02,-4.99)	(2.94,4.75)	(2.94,4.75)	(0,0)
	(0.5,1.0)	(2.31,5.00)	(-82.77,-4.85)	(-39.81,-2.28)	(46.54,9.41)	(45.28,4.63)	(23.50,2.45)
	(0.5,1.5)	(0.02,0.40)	(6.50,-4.99)	(11.87,-4.84)	(-6.74,5.13)	(-6.94,4.75)	(5.74,0.14)
	(0.5,2.0)	(0.007,0.03)	(7.99,-4.99)	(8.72,-4.98)	(-8.68,4.77)	(-8.69,4.75)	(0.79,0.01)
	(1.0,1.5)	(6.83,16.87)	(-224.95,-3.46)	(-118.74,5.39)	(72.99,19.66)	(71.01,3.35)	(36.58,8.56)
	(1.0,2.0)	(2.30,5.00)	(-82.77,-4.85)	(-39.81,-2.82)	(46.54,9.41)	(45.28,4.63)	(23.50,2.45)
	(1.0,2.5)	(0.73,1.47)	(-15.12,-4.97)	(-0.25,-4.29)	(13.77,6.14)	(13.13,4.74)	(12.91,0.64)

3 位置参数未知时的有序尺度参数估计

在本节中，我们假设 σ_i 和 μ_i、 $i=1$、.....、 k 均未知。此外，我们对尺度参数作出附加条件，即 $\sigma_1 \leq \ldots \leq \sigma_k$。记

$$X_{i(1)} = \min_{1\leq j\leq n_i} X_{ij}, \quad T_i = \sum_{j=1}^{n_i} \left(X_{ij} - X_{i(1)}\right),$$

其中 $i=1$、.....、 $k.$。已知 $\left(\underline{X_{(1)}}, \underline{T}\right)$ 是完全充分统计量，其中 $\underline{X_{(1)}} =$（$X_{1(1)}$、.....、 $X_{k(1)}$），且 $\underline{T} =$（T_1、.....、 T_k）。此外，($X_{1(1)}$、.....、 $X_{k(1)}$、 T_1、.....、 T_k) 相互独立，分别服从 $X_{i(1)} \sim E\left(\mu_i, \frac{\sigma_i}{n_i}\right)$ 和 $T_i \sim Gamma$（$n_i - 1$, σ_i），其中 $i=1$、.....、 $k.$

我们考虑在位置参数 μ_i未知时，对满足序约束 $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \ldots \leq \sigma_k$ 的尺度参数 σ_i 进行估计的问题。为此，我们采用式（2.1）给出的 LINEX 损失函数。考虑仿射变换群$G_{a_i,b_i} =\{g_{a_i,b_i}(x) = a_i x_{ij} + b_i,\ j=1,\ldots,n_i,\ i=1,\ldots,k\}$。在此变换群下，仿射等变估计量的形式可表示为

$$\delta_{id}(\underline{X_{(1)}}, \underline{T}) = dT_i, \tag{3.1}$$

其中 d 为常数。以下定理给出了在对 σ_i不施加任何限制时， σ_i的最佳仿射等变估计量。

定理3.1 在式（2.1）给出的 LINEX 损失函数下， σ_i的（无约束）最佳仿射等变估计量为 $\delta_{id_{0i}}(\underline{X_{(1)}}, \underline{T}) = d_{0i}T_i$，其中 $d_{0i} = \frac{1}{p}(1 - e^{-p/n_i})$ $i=1,\ldots,k.$

证明。证明很简单，因此为简洁起见略去。 □

3.1 改进（无约束的）最佳仿射等变估计量

考虑 G_{a_i,b_i} 作为 G_{a,b_i} 的一个子群。在变换 $g_{a,b_i} = ax_{ij} + b_i$, $i=1,\ldots,k$, $j=1,\ldots,n_i$ 下，估计量的形式为

$$\begin{aligned} \delta_{\phi_i}\left(\underline{X_{(1)}}, \underline{T}\right) &= T_i\phi_i\left(\frac{T_1}{T_i}, \ldots, \frac{T_{i-1}}{T_i}, \frac{T_{i+1}}{T_i}, \ldots, \frac{T_k}{T_i}\right) \\ &= T_i\phi_i\left(\underline{V}\right), \end{aligned} \tag{3.2}$$

其中，当 $j \neq i$ 且 $V_i = T_i.$ 时，$\underline{V} =$(V_1, ..., V_{i-1}, V_{i+1}, ..., V_k) $V_j = T_j/T_i$。形式（3.2）的估计量的风险为

$$\begin{aligned} R\left(\sigma_i, \delta_{\phi_i}\right) &= E\left[\exp\left\{p\Big(\frac{T_i\phi_i\left(\underline{V}\right)}{\sigma_i} - 1\Big)\right\} - p\Big(\frac{T_i\phi_i(\underline{V})}{\sigma_i} - 1\Big) - 1\right] \\ &= E^{\underline{V}}R_1\left(\sigma_i, \underline{V}, \delta_{\phi_i}\right), \end{aligned} \tag{3.3}$$

其中，$R_1\left(\sigma_i、\ \underline{V}、\ \delta_{\phi_i}\right)$ 表示在给定 $\underline{V}=\underline{v}$ 的条件下， δ_{ϕ_i} 的条件风险。其表示为

$$R_1\left(\sigma_i,\underline{V},\delta_{\phi_i}\right)=E\left[\left(\exp\left\{p\left(\frac{T_i\phi_i\left(\underline{V}\right)}{\sigma_i}-1\right)\right\}-p\left(\frac{T_i\phi_i(\underline{V})}{\sigma_i}-1\right)-1\right)\Big|\underline{V}=\underline{v}\right]. \tag{3.4}$$

注意到 $R_1(.,.,.)$ 是关于 $\phi_i(.)$ 的凸函数。因此，根据（3.4）给出的使 $R_1(.,.,.)$ 最小化的 $\phi_i(.)$ 可由以下关系得到:

$$E\left[T_i\exp\left\{\left(\frac{pT_i\phi_i\left(\underline{V}\right)}{\sigma_i}\right)\right\}\Big|\underline{V}=\underline{v}\right]=\exp\{p\}E\left(T_i|\underline{V}=\underline{v}\right). \tag{3.5}$$

要由（3.5）求得 $\phi_i(\underline{v})$，需要推导 $T_i|\underline{V}=\underline{v},\ i=1,\ldots,k.$ 的分布。可以证明， $T_i|\underline{V}=\underline{v}\sim Gamma\left(n-k,(\frac{1}{\sigma_i}+\sum_{j\ (\neq i)=1}^{k}\frac{v_j}{\sigma_j})^{-1}\right)$。因此，经过一些化简，由（3.5）可得

$$\phi_i\left(\underline{v},\underline{\sigma}\right)=\frac{1}{p}\left(1-\exp\left\{-\frac{p}{n-k+1}\right\}\right)\left(1+\sum_{j(\neq i)=1}^{k}\frac{v_j\sigma_i}{\sigma_j}\right). \tag{3.6}$$

接下来，我们求（3.6）给出的 $\phi_i\left(\underline{v},\underline{\sigma}\right)$ 关于 $\underline{\sigma}$ 的下确界和上确界。在序约束 $\sigma_1\leq\ldots\leq\sigma_k$ 和 $p\neq0$ 下， $\phi_i\left(\underline{v},\underline{\sigma}\right)$ 的下确界和上确界可表示为

$$\begin{aligned}\inf_{\underline{\sigma}}\phi_i\left(\underline{v},\underline{\sigma}\right) &= \begin{cases}\frac{1}{p}\left(1-\exp\left\{-\frac{p}{n-k+1}\right\}\right), & \text{if } i=1\\ \frac{1}{p}\left(1-\exp\left\{-\frac{p}{n-k+1}\right\}\right)\left(1+\sum_{j=1}^{i-1}v_j\right), & \text{if } i=2,\ldots,k\end{cases}\\ &= \phi_{i*}\left(\underline{v}\right),\ (\text{say})\end{aligned} \tag{3.7}$$

and

$$\begin{aligned}\sup_{\underline{\sigma}}\phi_i\left(\underline{v},\underline{\sigma}\right) &= \begin{cases}\frac{1}{p}\left(1-\exp\left\{-\frac{p}{n-k+1}\right\}\right)\left(1+\sum_{j=2}^{k}v_j\right), & \text{if } i=1\\ \infty, & \text{if } i=2,\ldots,k\end{cases}\\ &= {\phi_i}^*\left(\underline{v}\right),\ (\text{say}).\end{aligned} \tag{3.8}$$

现在，我们定义如下函数

$$\phi_{i0}\left(\underline{v}\right)=\begin{cases}\phi_{i*}\left(\underline{v}\right), & \text{if } \phi_i\left(\underline{v}\right)\leq\phi_{i*}\left(\underline{v}\right)\\ \phi_i\left(\underline{v}\right), & \text{if } \phi_{i*}\left(\underline{v}\right)<\phi_i\left(\underline{v}\right)<{\phi_i}^*\left(\underline{v}\right)\\ {\phi_i}^*\left(\underline{v}\right), & \text{if } \phi_i\left(\underline{v}\right)\geq{\phi_i}^*\left(\underline{v}\right).\end{cases} \tag{3.9}$$

因此，我们得到以下结果，该结果给出了改进式（3.2）所示形式的估计量的充分条件。

定理 3.2 考虑形式为 $\delta_{\phi_i}\left(\underline{X_{(1)}},\underline{T}\right)=T_i\phi_i(\underline{V})$ 的估计量。设 $\phi_{i0}(\underline{v})$ 是一个函数——

如 (3.9) 中所定义。如果存在某个 $\underline{\sigma}$，使得 $P_{\underline{\sigma}}(\phi_{i0}(\underline{V}) \neq \phi_i(\underline{V})) > 0$，那么在序约束 $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \ldots \leq \sigma_k$ 下，估计量 $\delta_{\phi_{i0}}\left(\underline{X_{(1)}}, \underline{T}\right)$ 在 LINEX 损失函数 (2.1) 下优于 $\delta_{\phi_i}\left(\underline{X_{(1)}}, \underline{T}\right)$。

下面我们给出一个可由定理 3.2 直接推出的推论。为方便表述，记 $e_1 = p^{-1}(1 - \exp\{-p/(n_1 + n_2 - 1)\})$ 和 $e_2 = p^{-1}(1 - \exp\{-p/(n - k + 1)\})$。

推论3.3 设 $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \ldots \leq \sigma_k$。在由 (2.1) 给出的损失函数 (i) 下，σ_1 的无约束最佳仿射等变估计量不可容许，且被下列估计量支配:

$$\delta_{\phi_{10}}\left(\underline{X_{(1)}}, \underline{T}\right) = \begin{cases} e_1 T_1, & \text{if } d_{01} < e_1 \\ d_{01} T_1, & \text{if } e_1 \leq d_{01} \leq e_1(1 + V_2) \\ e_1(1 + V_2) T_1, & \text{if } d_{01} > e_1(1 + V_2); \end{cases} \tag{3.10}$$

(ii) σ_i, $i = 2, \ldots, k$ 的无约束最佳仿射等变估计量不可容许，且被下列估计量支配:

$$\delta_{\phi_{i0}}\left(\underline{X_{(1)}}, \underline{T}\right) = \begin{cases} e_2\left(1 + \sum_{j=1}^{i-1} V_j\right) T_i, & \text{if } d_{0i} < e_2\left(1 + \sum_{j=1}^{i-1} V_j\right) \\ d_{0i} T_i, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.11}$$

现在我们考虑在对 σ_i 施加序约束时，对 σ_i, $i = 1, \ldots, k$ 进行最大似然估计。在约束 $\sigma \leq \sigma_2 \leq \ldots \leq \sigma_k$ 下，受限最大似然估计量为

$$\delta^2_{iRML} = \max_{s \leq i} \min_{t \geq i} \left\{ \frac{\sum_{j=s}^{t} T_j}{\sum_{j=s}^{t} n_j} \right\}, \ i = 1, \ldots, k. \tag{3.12}$$

令 $k = 2$. 则 σ_1 和 σ_2 的受限最大似然估计量，而 $\sigma_1 \leq \sigma_2$ 分别为

$$\delta^2_{1RML} = \min\left\{ \frac{T_1}{n_1}, \frac{T_1 + T_2}{n_1 + n_2} \right\} \tag{3.13}$$

and

$$\delta^2_{2RML} = \max\left\{ \frac{T_2}{n_2}, \frac{T_1 + T_2}{n_1 + n_2} \right\}. \tag{3.14}$$

注意，由（3.13）和（3.14）给出的估计量属于仿射等变估计量类（3.1）。因此，应用定理 3.2，可以根据风险函数轻松得到相应的改进估计量如下。

推论3.4 假设 e $\sigma_1 \leq \sigma_2$. 那么对于 $k = 2$，在 LINEX 损失函数 (2.1) 下，

估计量

$$\delta^2_{1IRML}\left(\underline{X_{(1)}},\underline{T}\right)=\begin{cases} e_1T_1, & if\ \xi_{01}(\underline{V})<e_1 \\ \xi_{01}(\underline{V})T_1, & if\ e_1\le\xi_{01}(\underline{V})\le e_1(1+V_2) \\ e_1(1+V_2)T_1, & if\ e_1(1+V_2)<\xi_{01}(\underline{V}); \end{cases} \tag{3.15}$$

and

$$\delta^2_{2IRML}\left(\underline{X_{(1)}},\underline{T}\right)=\begin{cases} e_1(1+V_1)T_2, & if\ \xi_{02}(\underline{V})<e_1(1+V_1) \\ \xi_{02}(\underline{V})T_2, & otherwise, \end{cases} \tag{3.16}$$

其中，$\xi_{01}(\underline{V})=\min\left\{\frac{1}{n_1}、\frac{T_2}{T_1}\frac{1}{n_1+n_2}\right\}$和 $\xi_{02}=\max\left\{\frac{1}{n_2}、\frac{T_1}{T_2}\frac{1}{n_1+n_2}\right\}$的风险分别一致小于 σ_1 和 σ_2的受限最大似然估计量。

3.2 数值研究

在此，我们通过模拟研究，对所提出估计量的风险函数进行数值比较。我们使用 R 软件，从两个相互独立的指数分布中生成了 50, 000 个随机样本。估计量 δ_1相对于另一个估计量 δ_2 的百分比相对风险改进（PRRI）定义为

$$PRRI(\delta_1,\delta_2)=\left(\frac{Risk(\delta_2)-Risk(\delta_1)}{Risk(\delta_2)}\right)\times 100\% \tag{3.17}$$

在下列表格中，我们列出了不同样本量和不同 p取值下各种估计量的 PRRI。我们考虑的样本量 (n_1,n_2) 分别为 (3, 5)、(10, 15)、(8, 5) 和 (15, 10)。 p 的取值为 0.5 和 -0.5。从表 1 和表 2 可以观察到以下几点。

1. 对于 BSEE，在约束条件 $n_1<n_2$ 下，随着样本量 (n_1,n_2) 的增加，改进估计量相对于 BSEE 的 PRRI 会降低。对于 $n_1>n_2$ 情形，也观察到了类似现象。

2. 对于固定的 (n_1,n_2)，如果 (σ_1,σ_2) 增加，改进估计量相对于 BSEE 的 PRRI 会增加。此外，在保持 σ_1 固定的情况下，增加 σ_2 的值，改进估计量相对于 BSEE 的 PRRI 会降低。这一观察结果表明，经过一定距离后，改进的 BSEE 的风险函数将与 BSEE 的风险函数重合。

3. 可以看出，在约束条件 $n_1<n_2$ 下，随着样本量 (n_1,n_2) 的增加，受限最大似然估计和改进的受限最大似然估计的风险表现会提高。

表 3: $k = 2$ 和 $p = 0.5$. 的各种估计量的 PRRI。第 3、4 和 5 列分别给出了改进的 BAEE、受限最大似然估计和改进的受限最大似然估计相对于 BAEE 的 PRRI；第 6、7 和 8 列则分别给出了改进的 BAEE、BAEE 和改进的受限最大似然估计相对于受限最大似然估计的 PRRI。

(n_1, n_2)	(σ_1, σ_2)	$(\delta_{\phi_{10}}, \delta_{\phi_{20}})$	$(\delta^2_{1RML}, \delta^2_{2RML})$	$(\delta^2_{1IRML}, \delta^2_{2IRML})$	$(\delta_{\phi_{10}}, \delta_{\phi_{20}})$	$(\delta_{1d_{01}}, \delta_{2d_{02}})$	$(\delta^2_{1IRML}, \delta^2_{2IRML})$
(3,5)	(0.2,0.5)	(4.35,6.54)	(12.26,-0.71)	(13.50,3.94)	(-9.00,7.20)	(-13.09,0.71)	(1.41,4.62)
	(0.2,1.0)	(0.88,1.06)	(7.26,-1.01)	(7.44,-0.23)	(-6.88,2.05)	(-7.87,1.00)	(0.19,0.68)
	(0.2,1.5)	(0.42,0.28)	(2.04,-1.03)	(2.44,-0.85)	(-2.03,1.29)	(-2.46,1.02)	(0.04,0.18)
	(0.5,1.0)	(6.06,10.21)	(9.89,-0.37)	(12.22,7.01)	(-4.25,10.55)	(-10.98,0.37)	(2.58,7.35)
	(0.5,1.5)	(3.01,4.30)	(12.04,-0.86)	(12.87,2.15)	(-10.26,5.12)	(-13.69,0.85)	(0.84,2.98)
	(0.5,2.0)	(1.41,2.04)	(9.87,-0.97)	(10.12,0.39)	(-9.27,2.98)	(-10.87,0.96)	(0.38,1.35)
	(1.0,1.5)	(8.26,15.98)	(1.69,0.65)	(6.53,12.11)	(6.68,15.42)	(-1.71,-0.66)	(4.92,11.53)
	(1.0,2.0)	(6.06,10.21)	(9.89,-0.37)	(12.22,7.01)	(-4.25,10.55)	(-10.98,0.36)	(2.58,7.35)
	(1.0,2.5)	(4.35,6.54)	(12.25,-0.71)	(13.50,3.94)	(-9.00,7.20)	(-13.97,0.70)	(1.41,4.62)
(10,15)	(0.2,0.5)	(0.83,0.90)	(15.79,-0.44)	(15.82,-0.24)	(-17.76,1.35)	(-18.76,0.44)	(0.03,0.69)
	(0.2,1.0)	(0,0.002)	(0.18,-0.44)	(0.18,-0.45)	(-0.18,0.44)	(-0.18,0.44)	(0,0.001)
	(0.2,1.5)	(0,0)	(-0.53,-0.44)	(-0.53,-0.45)	(0.52,0.45)	(0.53,0.44)	(0,0)
	(0.5,1.0)	(2.94,3.16)	(17.64,-0.44)	(17.85,2.11)	(-17.84,3.59)	(-21.42,0.44)	(0.25,2.54)
	(0.5,1.5)	(0.15,0.26)	(9.59,-0.44)	(9.59,-0.25)	(-10.43,0.70)	(-10.61,0.44)	(0.01,0.19)
	(0.5,2.0)	(0.01,0.02)	(2.42,-0.44)	(-2.42,-0.43)	(-2.47,0.46)	(-2.49,0.44)	(0,0.01)
	(1.0,1.5)	(9.05,10.87)	(-6.79,-0.42)	(-5.15,8.79)	(14.84,11.24)	(6.36,0.42)	(1.54,9.16)
	(1.0,2.0)	(2.94,3.16)	(17.64,-0.45)	(17.85,2.11)	(-17.84,3.59)	(-21.42,0.44)	(0.25,2.54)
	(1.0,2.5)	(0.83,0.90)	(15.79,-0.45)	(15.82,0.25)	(-17.76,1.34)	(-18.76,0.44)	(0.03,0.69)
(8,5)	(0.2,0.5)	(2.73,8.67)	(-54.73,0.39)	(-7.14,5.99)	(37.14,8.31)	(35.37,-0.39)	(30.75,5.62)
	(0.2,1.0)	(0.28,0.79)	(1.23,-1.07)	(8.78,-0.54)	(-0.96,1.84)	(-1.25,1.06)	(7.64,0.52)
	(0.2,1.5)	(0.10,0.14)	(3.54,-1.13)	(5.49,-1.04)	(-3.59,1.26)	(-3.67,1.12)	(2.02,0.08)
	(0.5,1.0)	(4.38,15.67)	(-95.99,2.40)	(-20.71,12.05)	(51.21,13.59)	(48.97,-2.46)	(38.41,9.88)
	(0.5,1.5)	(1.68,5.04)	(-29.96,-0.42)	(1.26,2.88)	(24.35,5.40)	(23.06,0.42)	(24.03,3.29)
	(0.5,2.0)	(0.62,1.87)	(-6.67,-0.94)	(8.00,0.31)	(6.81,2.79)	(6.22,0.93)	(13.37,1.24)
	(1.0,1.5)	(6.96,28.68)	(-162.75,7.87)	(-39.43,23.68)	(64.59,22.58)	(61.94,-8.55)	(46.93,17.15)
	(1.0,2.0)	(4.37,15.67)	(-95.99,2.40)	(-20.71,12.05)	(51.21,13.59)	(48.97,-2.46)	(38.41,9.88)
	(1.0,2.5)	(2.73,8.67)	(-54.73,0.39)	(-7.14,5.99)	(36.13,8.31)	(35.37,-0.39)	(30.75,5.62)
(15,10)	(0.2,0.5)	(0.79,1.79)	(-35.54,-0.44)	(-13.89,0.95)	(26.81,2.23)	(26.22,0.44)	(15.97,1.39)
	(0.2,1.0)	(0.005,0.01)	(5.55,-0.47)	(5.88,-0.47)	(-5.87,0.48)	(-5.88,0.47)	(0.35,0.01)
	(0.2,1.5)	(0,0)	(0.76,-0.47)	(0.79,-0.48)	(-0.77,0.47)	(-0.77,0.47)	(0.30,0)
	(0.5,1.0)	(2.25,5.80)	(-105.05,-0.24)	(-15.86,4.30)	(52.32,6.03)	(51.23,0.25)	(25.94,4.53)
	(0.5,1.5)	(0.27,0.59)	(-5.78,-0.46)	(3.08,-0.03)	(5.72,1.05)	(5.47,0.56)	(8.38,0.44)
	(0.5,2.0)	(0.03,0.10)	(7.78,-0.48)	(9.49,-0.44)	(-8.40,0.54)	(-8.43,0.47)	(1.86,0.04)
	(1.0,1.5)	(6.56,18.19)	(-242.13,1.25)	(-110.63,15.21)	(72.69,17.15)	(17.77,-1.27)	(38.43,14.13)
	(1.0,2.0)	(2.25,5.80)	(-105.05,-0.25)	(-51.86,4.30)	(52.33,6.03)	(51.23,0.24)	(24.94,4.53)
	(1.0,2.5)	(0.79,1.79)	(-35.54,-0.44)	(-13.89,0.95)	(26.81,2.23)	(26.22,0.44)	(15.97,1.39)

表 4: $k = 2$ 和 $p = -0.5.$ 的各种估计量的 PRRI。第 3、4 和 5 列分别表示改进的 BAEE、受限最大似然估计和改进的受限最大似然估计相对于 BAEE 的 PRRI；第 6、7 和 8 列则分别表示改进的 BAEE、BAEE 和改进的受限最大似然估计相对于受限最大似然估计的 PRRI。

(n_1, n_2)	(σ_1, σ_2)	$(\delta_{\phi_{10}}, \delta_{\phi_{20}})$	$(\delta^2_{1RML}, \delta^2_{2RML})$	$(\delta^2_{1IRML}, \delta^2_{2IRML})$	$(\delta_{\phi_{10}}, \delta_{\phi_{20}})$	$(\delta_{1d_{01}}, \delta_{2d_{02}})$	$(\delta^2_{1IRML}, \delta^2_{2IRML})$
(3,5)	(0.2,0.5)	(5.18,6.98)	(3.01,-0.57)	(4.75,8.16)	(2.25,7.50)	(-3.09,0.56)	(1.81,8.67)
	(0.2,1.0)	(1.09,1.16)	(2.65,-0.98)	(2.89,0.71)	(-1.61,2.11)	(-2.72,0.96)	(0.25,1.67)
	(0.2,1.5)	(0.44,0.31)	(0.45,-1.01)	(0.52,-0.51)	(-0.02,1.31)	(-0.46,0.99)	(0.06,0.48)
	(0.5,1.0)	(7.32,10.77)	(-0.84,-0.11)	(2.44,12.65)	(8.09,10.86)	(0.84,0.11)	(3.25,12.74)
	(0.5,1.5)	(3.69,4.64)	(4.07,-0.77)	(5.12,5.27)	(-0.39,5.37)	(-4.24,0.76)	(1.07,5.98)
	(0.5,2.0)	(1.92,2.22)	(3.72,-0.92)	(4.19,2.15)	(-1.87,3.12)	(-3.87,0.91)	(0.48,3.05)
	(1.0,1.5)	(10.14,16.63)	(-11.23,1.21)	(-4.45,19.45)	(19.22,15.61)	(10.10,-1.22)	(6.09,18.25)
	(1.0,2.0)	(7.31,10.77)	(-0.84,-0.11)	(2.43,12.65)	(8.09,10.87)	(0.84,0.11)	(3.26,12.75)
	(1.0,2.5)	(5.18,6.98)	(3.00,-0.57)	(4.75,8.16)	(2.25,7.50)	(-3.09,0.56)	(1.81,8.68)
(10,15)	(0.2,0.5)	(0.94,0.91)	(11.1,-0.35)	(11.1,0.83)	(-17.76,1.34)	(-18.76,0.44)	(0.03,0.69)
	(0.2,1.0)	(0,0.002)	(-0.08,-0.08)	(-0.08,-0.34)	(-0.18,0.45)	(0.53,0.44)	(0,0)
	(0.2,1.5)	(0,0)	(-0.56,-0.56)	(-0.56,-0.35)	(0.52,0.44)	(0.53,0.44)	(0,0)
	(0.5,1.0)	(3.23,3.17)	(10.45,-0.35)	(10.79,3.58)	(-17.85,3.59)	(-21.42,0.45)	(0.25,2.54)
	(0.5,1.5)	(0.23,0.26)	(6.71,-0.35)	(6.72,0.005)	(-10.43,0.71)	(-10.61,0.45)	(0.006,0.19)
	(0.5,2.0)	(0.02,0.02)	(1.47,-0.35)	(1.47,-0.32)	(-2.47,0.46)	(-2.48,0.45)	(0,0.013)
	(1.0,1.5)	(10.02,10.83)	(-19.06,-0.31)	(-16.81,12.4)	(14.84,11.25)	(6.36,0.41)	(1.54,9.17)
	(1.0,2.0)	(3.22,3.17)	(10.49,-0.35)	(10.79,3.58)	(-17.84,3.59)	(-21.42,0.44)	(0.25,2.54)
	(1.0,2.5)	(0.93,0.91)	(11.12,-0.35)	(11.14,0.83)	(-17.76,1.35)	(-18.76,0.45)	(0.03,0.69)
(8,5)	(0.2,0.5)	(3.09,8.9)	(-79.04,1.18)	(-15.82,9.99)	(37.14,8.31)	(35.37,-0.39)	(30.75,5.62)
	(0.2,1.0)	(0.35,0.81)	(-6.05,-0.81)	(3.94,0.16)	(-0.96,1.84)	(-1.25,1.06)	(7.64,0.52)
	(0.2,1.5)	(0.08,0.13)	(0.51,-0.89)	(3.09,-0.71)	(-3.59,1.26)	(-3.67,1.12)	(2.03,0.08)
	(0.5,1.0)	(4.68,16.02)	(-130.67,3.78)	(-30.31,18.17)	(51.21,13.59)	(48.97,-2.46)	(38.41,9.88)
	(0.5,1.5)	(1.92,5.18)	(-47.95,0.09)	(-6.5,5.53)	(24.35,5.40)	(23.06,0.41)	(24.03,3.29)
	(0.5,2.0)	(0.76,1.93)	(-17.64,-0.62)	(1.71,1.58)	(6.81,2.79)	(6.23,0.93)	(13.37,1.24)
	(1.0,1.5)	(7.71,28.81)	(-215.37,10.58)	(-50.04,32.48)	(64.59,22.58)	(61.94,-8.55)	(46.93,17.15)
	(1.0,2.0)	(4.88,16.02)	(-130.68,3.78)	(-30.32,18.17)	(51.21,13.59)	(48.97,-2.46)	(38.41,9.88)
	(1.0,2.5)	(3.09,8.95)	(-79.04,1.17)	(-15.82,9.98)	(36.14,8.32)	(35.37,-0.39)	(30.75,5.62)
(15,10)	(0.2,0.5)	(0.85,1.78)	(-51.33,-0.62)	(-23.48,1.56)	(26.81,2.23)	(26.22,0.44)	(15.97,1.39)
	(0.2,1.0)	(0.008,0.01)	(3.73,-0.67)	(4.17,-0.66)	(-5.87,0.49)	(-5.88,0.47)	(0.35,0.01)
	(0.2,1.5)	(0,0)	(0.53,-0.67)	(0.56,-0.67)	(-0.77,0.47)	(-0.77,0.47)	(0.30,0)
	(0.5,1.0)	(2.45,5.72)	(-135.07,-0.36)	(-65.83,6.27)	(52.32,6.03)	(51.23,0.25)	(25.94,4.54)
	(0.5,1.5)	(0.29,0.57)	(-15.18,-0.65)	(-3.66,0.08)	(5.72,1.05)	(5.47,0.56)	(8.39,0.44)
	(0.5,2.0)	(0.03,0.06)	(3.75,-0.67)	(5.97,-0.59)	(-8.41,0.54)	(-8.43,0.48)	(1.86,0.04)
	(1.0,1.5)	(7.02,17.92)	(-303.68,1.55)	(-131.17,20.14)	(72.69,17.15)	(17.77,-1.27)	(38.43,14.14)
	(1.0,2.0)	(2.45,5.72)	(-135.07,-0.36)	(-65.82,6.27)	(52.33,6.03)	(51.23,0.24)	(24.94,4.53)
	(1.0,2.5)	(0.86,1.79)	(-51.54,-0.62)	(-23.48,1.56)	(26.81,2.23)	(26.22,0.44)	(15.97,1.39)

4 结论

本文研究了在 LINEX 损失函数下，当尺度参数具有序约束时，多个指数分布尺度参数的分量估计。第2节研究了位置参数已知时的有序尺度参数估计。通过推导一类改进估计量，证明通常估计量不可容许。利用这一结果，我们得到了一个优于受限最大似然估计的估计量。第3节考察了位置参数未知时的有序尺度参数估计。通过推导一类改进估计量，证明 BAEE 不可容许。我们还证明了受限最大似然估计不可容许。最后，对于这两种情形，我们通过模拟比较了所提出估计量的风险表现。

参考文献

Barlow, R. E., Bartholomew, D. J., Bremner, J. 和 Brunk, H. D.（1972）。《序约束下的统计推断：保序回归理论与应用》，Wiley，纽约。Brewster, J. F. 和 Zidek, J.（1974）。改进等变估计量，《统计年刊》。2(1)，21–38。Jana, N., Kumar, S. 和 Misra, N.（2016）。参数受序约束的双参数指数总体的分类规则，《统计计算与模拟杂志》。86(8)，1559–1581。Jin, C. 和 Pal, N.（1991）。多个指数分布的位置参数估计，《统计学通讯：理论与方法》。20(12)，3995–4003。Kaur, A. 和 Singh, H.（1991）。关于两个指数总体有序均值的估计，《统计数学研究所年刊》。43(2)，347–356。Kushary, D., Cohen, A. 等（1989）。有序位置参数和尺度参数的估计，《统计与决策》。7，201–213。Pal, N. 和 Kushary, D.（1992）。关于两个指数分布的位置参数序约束，《统计与风险建模》。10(1-2)，133–152。Petropoulos, C.（2017）。洛马克斯分布两个总体的序约束尺度参数估计，Metrika。80(4)，483–502。Silvapulle, M. 和 Sen, P.（2004）。《约束统计推断：序、不等式与形状约束》。概率与统计系列。van Eeden, C.（2006）。《受限参数空间估计问题：可容许性与极小极大性质》，Springer，纽约。

Vijayasree, G., Misra, N. 和 Singh, H.（1995）。k ($\geq$ 2) 个指数总体有序参数的分量估计，《统计数学研究所年刊》。47(2)，287–307。Vijayasree, G. 和 Singh, H.（1991）。两个有序指数参数的同时估计，《统计学通讯：理论与方法》。20(8)，2559–2576。Vijayasree, G. 和 Singh, H.（1993）。两个有序指数均值的混合估计量，《统计规划与推断杂志》。35(1)，47–53。Zellner, A.（1986）。利用非对称损失函数进行贝叶斯估计与预测，《美国统计学会杂志》。81(394)，446–451。