arXiv:2302.03433v1 [math.CV] 7 Feb 2023

多复变函数论中 Corona问题与 Gleason 问题的等价性

S. R. PATEL

2023年2月8日

2020年数学主题分类：主要：46J05；次要：32A17、32A38、46E25、46J10、46J20

关键词：Corona 问题，Gleason 问题，局部 Stein-Banach 代数，盖尔范德理论，有限生成极大理想，Lipschitz 全纯函数，Gleason A 性质

摘要。我们在多复变函数论中证明了 Corona 问题（1962年）与 Gleason 问题（1964年）等价。作为应用，我们肯定地解决了某些有界伪凸域或多圆域中的 Corona 问题，这些域包括 $\mathbb{C}^n$ 中的球和多圆盘。事实上，我们拓展了近期基于泛函分析方法研究 Gleason 问题的工作，也拓展了 Clos 的近期工作。

我们还利用这一等价性或其他（泛函分析）方法，肯定地解决了 $\mathbb{C}^n$ 中各种类型区域上多种有界全纯函数的巴拿赫空间（包括某些全纯混合范数空间）中的这两个问题，例如全纯 H¨older 空间和利普希茨空间（该问题由 Fornæss 和 Øvrelid 于1983年遗留至今）、全纯均值 Besov-Lipschitz 空间、Besov-Lipschitz空间、Hardy-Sobolev 空间以及一个加权 Bergman 空间。讨论首先通过研究阶为 α 的全纯函数利普希茨代数展开，其中 $\alpha \in (0, 1]$；特别讨论了这些代数的盖尔范德理论和极大理想空间。

文章结构及策略说明。本文的组织如下。第 1 节介绍多复变函数论（简写为：SCV）中的 Corona 问题和 Gleason 问题，以便通过给出解决这一问题所必要且充分的背景来表述一种等价性。在第 2 节中，我们在定理2.3、2.4和2.6中讨论这两个问题之间的等价性。由于 [P4] 的某些结果构成了这一等价性思想的基础，同时 Clos 以及 Kerzmann 和 Nagel 的某些结果也得到了推广，这一工作才成为可能。随后，作为应用这一等价性的结果，或通过应用某些泛函分析方法（如巴拿赫代数方法以及经典死端空间方法），我们在第 3 节中得到了各种熟知的全纯函数巴拿赫空间中的 Gleason 可解性，包括肯定地解决 Fornæss 和 Øvrelid 于1983年遗留的关于全纯 H¨older 空间和利普希茨空间的问题；引理 3.2、定理3.13和3.14在这方面是重要结果。总体而言，我们的结果是对已有结果的补充，因为我们没有重新得到针对其他已知全纯函数巴拿赫空间所获得的旧结果。

在第 4 节中，我们结合巴拿赫代数方法与 Krantz 和 Li 最优雅的方法，解决了原始的 Corona 问题

[KL1]。此外，我们还将相同的方法用于解决各类区域上的有界全纯函数的熟悉巴拿赫空间中的 Corona 问题，这些区域位于 $\mathbb{C}^n$ （包括球和多圆盘）。在此过程中，我们还在某些情况下推广了若干结果（例如，参见 [KL2, K5]）。在第5节中，我们对所采用的方法作总结性评论，并由此展望未来方向和未解决问题。本文中，“代数”均指含幺复交换代数。

1 两个问题的历史及等价性的表述。

Corona 问题。1938年，盖尔范德在他的论文中讨论了巴拿赫代数。1942年，角谷在该领域提出了以下基本问题（称为 Corona 问题）：设 $H^\infty(D)$ 是由开单位圆盘 D 和复平面 $\mathbb{C}$ 上所有有界全纯函数构成的巴拿赫代数，并赋予通常的上确界范数；设 $f_j \in H^\infty(D)$ $j = 1, 2, \ldots, n$，且满足以下性质：对于某个正常数 ϵ 以及所有 $z \in D$，都有 $\sum_{j=1}^n |f_j(z)| > \epsilon$ （称其为圆盘 D 上的一组有限 Corona 数据）。是否存在 $g_j \in H^\infty(D)$ $j = 1, 2, \ldots, n$，使得 $\sum_{j=1}^n f_j g_j = 1$（即 $\sum_{j=1}^n f_j(z) g_j(z) = 1$

对所有 $z \in D$ 都成立）？后一方程称为贝祖方程 [Ho, 第 X 章] 和 [G, 定理 V.1.8]。回想一下，贝祖恒等式和定理源于算术和抽象代数。事实上，这个恒等式与代数基本定理推出了一个类似于上述基本问题答案的结果，不过对象是关于 n 个变量的任意数量的多项式；该结果称为希尔伯特零点定理，它确立了代数与几何之间的基本联系——这一联系构成代数几何的基石，因此它们也源于代数几何。

这个问题的等价表述是：询问 D 在极大理想空间（又称谱） $M(H^\infty(D))$ 中是否稠密，其中采用盖尔范德（即相对弱*）拓扑（等价地，询问 Corona 是否为空）。[K4] 对这种等价关系作了较为详细的解释。关于圆盘上的 Corona 问题，权威论述见 [G]。Carleson 于 1962 [C] 中肯定地解决了圆盘上的问题 D 。这里所说的区域，是指开、连通且有界的集合 G ，位于 $\mathbb{C}^n$。目前尚无已知的平面区域 $\mathbb{C}$，能使 Corona 问题不成立。

自1962年以来，球和多圆盘中的 Corona 问题在 $\mathbb{C}^n, n > 1$中“自动”开放。任意 $\mathbb{C}^n, n > 1$ 区域中的情形要复杂得多，人们已对这一问题

在各种类型的域中进行了研究；例如，参见 [BCL、KL1-3、K5]中关于多复变函数论中 Corona 问题的一些部分结果。关于这一问题研究历史的详尽论述见 [DKSTW] ——在本卷中，值得回顾Brudnyi关于 $H^\infty(R)$的相关结果，其中R 是一个Carathéodory双曲黎曼曲面 [Br]。

最近，Corona 问题已在$\mathbb{C}^n$ 中的一些基本区域内得到解决，例如 L^∞-伪凸域 [T] （回顾一下，对于 $n = 2$，这一结果由 Krantz [K5], 获得；在 [Pr], 中，在更为严格的假设下得到了类似结论：存在 $j \neq k$ 使得$|f_j|^{-1}(-\epsilon, \epsilon) \bigcap |f_k|^{-1}(-\epsilon, \epsilon) \bigcap \partial G = \emptyset$，其中 ∂G 表示边界）。

不仅如此，针对多复变函数论中的 Corona 问题，已有多种反例见 [FS, S1]；关于黎曼曲面上 Corona 问题的失败情况，可参见 [G] ，其中讨论了 Cole 的例子。本文的主要目的之一，是在 G 为某个伪凸域（包括球）或多圆域（包括多圆盘）的情况下，为 Corona 问题提供正面的结果，且该域位于 $\mathbb{C}^n$ 中（目前，为了使结果保持最优，我们仅考虑 $\mathbb{C}^n$ 中的某些域，包括球和多圆盘等基本域，而不涉及有限维复流形）。

事实上，在 Carleson 给出解法之后，后续大多数试图将其推广到 $\mathbb{C}^n$ 中更一般域的研究，都是旨在通过各种方法求解 B´ezout 的¯方程（主要是求解 $\partial-$ 方程）；例如，参见 [KL1-2, K5, T, V]。这些方法需要艰深的经典分析技巧；当 $n > 1$时，它们遇到了严重困难，未能解决原问题；例如，参见 [KL1-2, V]。例如，瓦罗普洛斯意识到，他的结果并不能推出多变量情形下¯Corona 问题无解——它只能说明，采用那种特定的卡尔森测度定义时， ∂–方法行不通。事实上，他在定理 3.1.1 和 3.1.2 之间指出了为何 Carleson 求解_∂_b–问题的经典方法，在多复变函数论情形下无法用于证明冠定理（参见 [V] 第 272 页上的定理，其中解函数属于有界平均振荡空间）。然而，本文将证明，事实确实如此。具体而言，我们首先推广 Clos 关于 Gleason 可解性的结果（见下文定理 2.3）：假设 G 是 $\mathbb{C}^n$ 中的某个伪凸域（即，¯不仅仅是一个伪凸域——在这样的域中， ∂–问题在 L^∞ 中可解；换言之，它是 L^∞–伪凸域）；然后利用这一结果，在下文定理 2.4 中建立冠定理。事实上，在第 4 节中，我们将针对某些域上的有界全纯函数的其他熟知巴拿赫空间，解决这一问题

$\mathbb{C}^n$ 中非常熟悉的区域（包括球和多圆盘）；接着，我们需要用到一些著名的经典泛函分析方法，例如巴拿赫代数方法和经典死端空间方法。在第 2 节中，我们首先证明这个问题与多复变函数论中的另一个重要问题——Gleason 问题（1964年）等价，现将其详细阐述如下。

Gleason 问题。令 $A(G)$ 为区域 G in $\mathbb{C}^n$ 上所有全纯函数构成的巴拿赫代数，这些函数可通过连续性延拓到G的闭包，并赋予由上确界范数给出的通常紧开拓扑。因此，它是 $H^\infty(G)$ 的闭子代数，所以为方便起见，我们也可以将 $A(G)$ 视为 G [A]上所有一致连续全纯函数构成的巴拿赫代数。Gleason 问题旨在判定：在 A 中，由在定点 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in G$ 处取值为零的函数组成的理想（其中 A 或为 $H^\infty(G)$，或为 $A(G)$），是否由平移坐标函数 $z_j - \lambda_j$ for $j = 1, 2, \ldots, n$ 代数有限生成（更多细节参见 [BF] 及其中引用的其他文献）。这实际上是原始 Gleason 问题的一个变体。原问题针对 $A(G)$ 提出，其中 G 是 $\mathbb{C}^2$ 中的单位球，且 $\lambda = (0, 0)$ [Gl]。严格伪凸域且边界光滑时的肯定解已由 [H2] 给出。它

并且在 [J] 中进一步加强如下：连续线性算子

$$T_j : A(G) \to A(G),\ f \mapsto T_j(f),\ j = 1, 2, \ldots, n$$

存在解决 Gleason 问题的方法，这意味着

$$f(z) - f(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} (z_j - \lambda_j)(T_j(f))(z),\ z \in G, f \in A(G).$$

对于多圆域，通过固定除一个变量以外的所有变量，可以轻松得到类似的分解。

特别是，这意味着谱 $M(A(G))$ 中位于 G 上方纤维的部分，通过坐标函数的 Gel'fand 变换 $(\hat{z}^1, \ldots, \hat{z}^n)$ 双射映射到 G （另见 [A]）。根据 [HS], 的结果，整个谱 $M(A(G))$ 双射映射到 $\overline{G}$ ，其中 G 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个光滑伪凸域（考虑一个具有 Stein 邻域基的伪凸域 G 也足够；见 [Ro]）。因此，盖尔范德拓扑与 $\overline{G}$ 上的欧几里得拓扑一致，并且 G 在 $M(A(G))$ 中是开集。

必要且充分的背景。本文延续了 [P4], 中开始的研究，因此我们将自由使用其中确立的术语和约定。不过，本文具体探讨的是多复变函数论中 Corona 问题与 Gleason 问题的等价性。

正如 [P4], 中所述，我们通过研究交换 Fr´echet 代数的理想结构，给出了其谱中存在（局部）解析结构的充分条件。这将 Gleason 的结果推广到了 Fr´echet 代数中的有限生成理想，并对 [Ca] 针对 Fr´echet 代数提出的问题作出了肯定回答。因此，在 Fr´echet 代数这一类中，局部 Stein 代数可由其内在性质完全刻画；作为这一刻画的应用，我们肯定地回答了此类代数的 Gleason 问题，从而重现了多复变函数论中有关 Gleason 问题的所有经典结果。事实上，我们还指出，复分析学家或许也会对这些充分条件的应用价值感兴趣；例如，可参见 [P4], 中的定理 4.2、4.3 和推论 4.4，以及 MathSciNet 中关于 [Gl] 的参考文献（及其评论；MR0159241 (28 # 2458)）。正如我们将看到的，事实确实如此。事实上，众所周知，在巴拿赫代数的背景下 $A(G)$ 和 $H^\infty(G)$（更一般地说，在 G上的有界全纯函数巴拿赫代数中，其中 G 是 $\mathbb{C}^n$中的一个区域），了解纤维结构有助于研究 Gleason 部分；而 Gleason 部分的研究，正是由在谱中寻找解析结构这一目标所推动的。

我们回顾一下，满足 [P4] 中引理 3.1 的巴拿赫代数（特别是，

多圆盘代数 $A(D^n)$、球代数 $A(B^n)$ 和代数 $H^\infty(G)$）都是局部 Stein-Banach 代数。在 §3 中，我们证明，对于 $\alpha \in (0,1]$, 的 Banach 子代数 $\mathrm{Lip}_H^\alpha(G)$，它们属于 $A(G)$（因而也属于 $H^\infty(G)$），且我们希望确立其 Gleason 可解性），同样是局部 Stein-Banach 代数。此外，我们回顾一下，若一个区域 G 对某个局部 Stein 代数 A 满足 Gleason A-性质，则对于 G 中的所有点，Gleason 问题都有肯定解。Clos 将此称为区域 G 关于 $H^\infty(G)$ 的 Gleason 可解性性质。事实上，Gleason 可解性有时也称为 Hefer 条件（由 Hefer 于 1940年提出）。关于 Hefer 条件的更多信息，参见 [K3，第 5] 章。研究 Hefer 条件所用的许多方法都涉及 [H1、R] 中发展的积分表示技术。Gleason 可解性最初由 Leibenson 证明，不过证明并不正式[Ru]。 [Ru、L、O、RS1、Z] 研究了全纯 Bergman 空间、全纯混合范数空间和全纯 Bloch 空间中的 Gleason 可解性。最初考察的域是单位球，后来推广到边界为 C^2-光滑的强拟凸域。此外，人们对其他函数空间和域也颇感兴趣，包括如 [RS2] 所示的蛋形域上的加权 Bergman 空间。关于调和

具有光滑边界的有界强拟凸域上的混合范数空间和 Bloch 空间。

此外，我们回顾一下，$M(A)$ 的子空间 X 具有 Gleason A-性质，是指该问题在 X 的所有点上都有肯定的解。在 [P4], 的推论 4.4 中，我们证明了稠密开子空间 Y 具有 Gleason$A$-性质，其中 A 是一个半单局部Stein代数；特别地，A 可以是 $H^\infty(G)$ 或 $A(G)$，其中 G 是 $\mathbb{C}^n$ 中包含原点的一个区域。因此，我们以抽象的方式处理了 Gleason 问题的肯定解；由此，这一抽象方法重新获得了 Beatrous Jr. [Be], Fornæss 和 Øvrelid [FO], 、Kerzman 和 Nagel [KN], 、Lieb [Li], 、Noell [N], 以及 Backlund 和 F¨allstr¨om [BF] 所得到的经典结果（关于 Gleason 问题的论文列表，另请参见其中的其他参考文献），即，$\mathbb{C}^n$ 中的区域 G 具有 Gleason A-性质，其中 A 可以是 $H^\infty(G)$ 或 $A(G)$，而 G 是 $\mathbb{C}^n$ 中具有各种边界条件的（严格或弱）伪凸域。

关于 Corona 问题，据我们所知，过去几乎所有尝试要么依赖于求解 B´ezout 方程，要么依赖于使用 Koszul 复形（这一思想最初用于计算李代数 [K5, T] 的上同调¯），同时应用 ∂–方法。正如

我们将会看到，在求解 Corona 问题时，我们有必要（从数学上说，“充分”）考虑 Gleason 可解性。另一方面，尽管我们没有明确说明，但在求解 Gleason 问题时，我们已将冠定理作为一个假设（见 [P4]的定理 4.3 和推论 4.4）。此外，Kerzman 和 Nagel 在求解某些域 $\mathbb{C}^n$ 上某些函数代数的 Gleason 问题时，使用了 Koszul 复形。如今，这些进展都促使我们思考这两个问题是否等价，并尝试仅利用巴拿赫代数 $A(G)$ 和$H^\infty(G)$ 的（极大）理想结构，给出一个简短而优雅的证明（也就是说，我们尽量避开分析层面的问题，例如这些代数的谱中的 Gleason 部分）。

本文的主要目标之一，是将 [Cl] 在第 2 节中的定理 4 推广如下。首先，我们证明，若 G 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个伪凸域，则它具有命题 2.2 中的 Gleason $A(G)$ 性质。利用这一点，我们证明 G 确实具有 Gleason $H^\infty(G)$ 性质（此外，这还表明 G 在 $M(H^\infty(G))$ 中关于盖尔范德拓扑是开集）。然后，我们引入 Arens 的结果（在巴拿赫情形下），证明 B´ezout 方程可解，从而确立了 $\mathbb{C}^n$ 中这类域的 Corona 问题，包括球和多圆盘。

在 [CI]，中， [be]，对于

关于盖尔范德拓扑的条件，即 Gbe 在 $M(H^\infty(G))$（或 $M(A(G))$）中为开集，与 G be 为 L^∞-伪凸域这一条件之间的关系并不明显。不过，Clos 证明了一个方向的蕴含关系（见 [Cl] 的定理 4，以及 [CI], 中的讨论：如果 G 具有 Gleason $H^\infty(G)$-性质，那么它在 $M(H^\infty(G))$ 中是开集）。对此问题感兴趣的原因之一，源于它在研究 $\mathbb{C}^n$ 中伪凸域上的 Bergman 空间的对易 Toeplitz 算子问题时的一项应用（参见 [Cl，第 2] 页中的评论）。这一问题将在后续论文中讨论。

值得一提的是，有一些工作与本文的研究有一定（间接）关联（详见 [ACG、ADLM、AFGM、CGJ、Re] ）。事实上，这些工作专门研究某些代数的谱中（局部）解析结构的存在性；这些代数由复 Banach 空间 X 的开单位球 B_X 上的有界全纯函数构成。例如，在 $X = c_0$ 属于[ADLM] 的情形下，他们研究了这些代数的谱的 Gleason 部分。为探讨他们的工作与本文的关联，我们在 [P4] 的 4.4 节提出了两个问题。

2 两个问题的等价性。

如上所述，我们首先证明，对于 Banach 代数 $A(G)$， G 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个伪凸域时， [Cl] 的定理 4 成立。这得益于 [Cl] 的定理5以及以下

引理2.1. 设 G 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个伪凸域。那么 $A(G)$ 是伯格曼空间 $A^2(G)$ 的一个巴拿赫子空间。

证明. 由于 $A(G)$ 是伪凸域 G （位于 $\mathbb{C}^n$ 中）上由一致连续的全纯函数构成的巴拿赫代数，因此，关于通常的紧开拓扑， $A(G) \subset H^\infty(G) \subset \mathrm{Hol}(G)$。这意味着

$$A(G)\bigcap L^2(G) \subset H^\infty(G)\bigcap L^2(G) \subset \mathrm{Hol}(G)\bigcap L^2(G) = A^2(G),$$

其中 $A^2(G)$ 是伪凸域 G 上的伯格曼空间。由于 $A^2(G)$ 与加权空间 $\ell^\infty((\mathbb{Z}^+)^n, \frac{1}{|N|+1})$ 等距同构（参见 [P3] ，其中给出了权类型的贝尔林-巴拿赫代数 $\ell^1((\mathbb{Z}^+)^n, \omega)$ 的类似概念）， $z_1, \ldots, z_n$ 中的多项式在 $A^2(G)$ 中稠密。由于 $A(G)$ 中的每个函数在 G 上一致连续，因此它可以唯一地延拓为 $\overline{G}$ 上的连续函数，且范数保持不变（见 §1 ）；显然，它在 $\overline{G}$ 上平方可积。因此，当 $f \in A(G)$ 时， $f \in L^2(G)$，从而 $f \in A^2(G)$。于是， $A(G)$ 是伯格曼空间的一个巴拿赫子空间

$A^2(G)$（显然，出于显而易见的原因，$A(G)$ 不是 $A^2(G)$ 的闭子空间）。□

因此，我们得到以下命题，它推广了 [Cl, KN] 的结果。

命题 2.2. 设 G 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个伪凸域。假设 $f \in A(G)$ 且 $f(\alpha) = 0$，其中某个 $\alpha \in G$。那么存在 $f_1, f_2, \ldots, f_n$ 属于 $A(G)$，使得 $f = \sum_{j=1}^{n}(z_j - \alpha_j)f_j$。特别地，对于 $A(G)$，G 是 Gleason 可解的。

证明。由 $f \in A(G)$，根据引理 2.1 可得 $f \in A^2(G)$。然后，由 [Cl, 定理5],，存在 $f_1, f_2, \ldots, f_n$ 属于 $A^2(G)$，使得 $f = \sum_{j=1}^{n}(z_j - \alpha_j)f_j$。由于$f \in A(G)$，且对于 $j = 1, 2, \ldots, n$，平移坐标函数 $z_j - \alpha_j$ 属于 $A(G)$，显然 $f_1, f_2, \ldots, f_n$ 也属于 $A(G)$。□

作为上述结果的一个应用，我们将 [Cl] 的定理 4 推广如下。下文中，$\mathbb{C}^n$ 中的“伪凸”域是指 $\mathbb{C}^n$ [HS] 中的光滑（严格）伪凸域（考虑具有（强）Stein 邻域基 [Ro, Sa] 的伪凸域也足够；例如，$\mathbb{C}^n$ 中的 Stein 域）。此外，我们还指出，若 G 是黎曼曲面 M 中的相对紧域，则极大理想空间 $M(A(G))$ 是 $\overline{G}$；对于复解析流形 M 中满足 $\overline{G}$ 为 S_δ 集（等价地，G 具有 Stein 邻域基）的相对紧域 G，结论也成立（见 [Ro，定理 2.12]）。

定理 2.3. 设 G 是 $\mathbb{C}^n$ 中的“伪凸”域或多圆柱域。则 G 对于 $H^\infty(G)$ 是 Gleason 可解的。

证明。首先，我们回顾一下，巴拿赫代数 $A(G)$ 是巴拿赫代数 $H^\infty(G)$ 的闭子代数（相对于由上确界范数诱导的紧开拓扑），且 z_1，.....， z_n 中的多项式在 $A(G)$ 中稠密，但在 $H^\infty(G)$ 中不稠密。事实上，在： $A(G) \hookrightarrow H^\infty(G)$ 中，后者是一个连续的单射同态。因此，*： $M(H^\infty(G)) \to M(A(G)) = \overline{G}$ 中的伴随谱映射是满射，且相对于盖尔范德拓扑连续。事实上，它在 G 上的限制是一一对应的，因此，逆映射将 G 同胚地映到 $M(H^\infty(G))$ 的一个开子集上（见 [A、ACG、CGJ]）。事实上，我们指出，在 [ACG], 中，解释了 G 为开单位圆盘时的一维情形， [Ho], 并声称，同样的结论很可能成立，而且至少在 G 是 $\mathbb{C}^n$ 中的开单位球或多圆盘时可以证明；关于后一个断言的证明，见 [A], ，该证明也可用于 G 为伪凸域或 $\mathbb{C}^n$ 中的多圆域的情形。

接下来，我们证明， $H^\infty(G)$ 的极大理想 $M_\alpha, \alpha \in G$ 确实是代数有限生成的。为此，我们注意到，根据命题 2.2， $A(G)$ 的极大理想 $M_\alpha, \alpha \in G$ 是代数有限生成的。回顾

当 G 是 $\mathbb{C}^n$ 中的多圆域时，通过在 §1 中讨论过的类似分解，并采用固定除一个变量之外的所有变量的方法，可以容易地得到 Gleason 可解性。于是，根据上面的讨论，其逆像（再次记为 M_α ）也是 $H^\infty(G)$ 的一个极大理想。为了证明它确实是有限生成的，我们注意到， $A(G)$ 的有限生成极大理想 M_α 实际上是 $H^\infty(G)$ 的一个理想。根据 Zorn 引理， $\mathcal{I}$ 的族中包含 $H^\infty(G)$ 的有限生成理想、且由 $H^\infty(G)$ 中在 G 的 α 处消失的函数组成的最大元素，是一个代数有限生成的极大理想（注意，由于 $M_\alpha \in \mathcal{I}$, $\mathcal{I}$ 非空）。事实上，这个最大元素不仅是一个 primary 理想，而且显然包含于 $H^\infty(G)$ 的极大理想 M_α 中。由此我们得出结论：该最大元素确实是 $H^\infty(G)$ 的极大理想 M_α 。□

我们指出，在 $\mathbb{C}^n$ 中存在一些光滑伪凸域，使得 $\perp L^\infty -$ 对 ∂ 的估计不成立（参见 [B、FS、S2]），因此，上述定理是对 [Cl] 中定理 4 的重要推广。为了确立 Corona 问题与 Gleason 问题之间的等价性，我们首先证明，上文得到的 Gleason 可解性意味着 Corona 问题有肯定答案，见下述定理。我们指出，在 $\mathbb{C}^n$、 $n = 2$、3 中存在一些光滑伪凸域，使得 Corona

定理不成立 [FS、S1]。不过，下文所说的 $\mathbb{C}^n$ 中的伪凸域，是指 $\mathbb{C}^n$ 中相对紧的光滑（严格）伪凸域，且其闭包是一个 S_δ 集（即它具有一个（强）Stein 邻域基） [Ro，第5节，定义 2]，以及 [Sa，引言]。这样的 $\mathbb{C}^n$ 中的伪凸域具有（严格）伪凸边界，且属于类型 HL^∞；也就是说，它是一个全纯凸域 [K6，命题 6]。此外，我们还指出，如果 G 是复流形 M 中相对紧的光滑（严格）伪凸域，且 $\overline{G}$ 是一个 S_δ 集（等价地， G 具有 Stein 邻域基），那么它具有（严格）伪凸边界。定理 2.4。设 G 或为 $\mathbb{C}^n$ 中的伪凸域，或为多重圆盘域。那么 Corona 问题在 $H^\infty(G)$ 中成立。也就是说，谱 $M(H^\infty(G))$ 是 G（其规范像）的盖尔范德闭包。证明。根据定理 2.3， G 是 Gleason 可解的。为证明 Corona 问题在 G 中有肯定解，我们采用其在第1节讨论过的等价表述：有限 Corona 数据意味着存在 B´ezout 方程的解。事实上，我们证明，如果 B´ezout 方程不存在解，那么就没有有限 Corona 数据。为此，我们回顾一下，巴拿赫代数 A 的极大理想与其谱中的元素之间存在一一对应关系。

由此事实可轻易得知，由 $f_1, \ldots, f_n \in A$ 生成的代数有限生成理想是正理想，当且仅当

$$\{\phi \in M(A) : \phi(f_j) = 0,\ j = 1, \ldots, n\} \neq \emptyset. \tag{2.1}$$

在我们的情形中，由于 G 是 Gleason 可解的，因此 M_α, $\alpha \in G$ 是代数有限生成极大理想，当且仅当方程 2.1 成立；这又当且仅当不存在 $g_1, \ldots, g_n \in H^\infty(G)$ 使得 $\sum_{j=1}^n f_j g_j = 1$，其中 f_j, $j = 1, \ldots, n$ 是 M_α 的生成元。因此，不存在 B´ezout 方程的解，当且仅当没有有限 Corona 数据可用（也就是说，$\alpha \in G$ 满足：对于每个 $\delta > 0$,$\sum_{j=1}^n |f_j(\alpha)| < \delta$，这意味着 $\sum_{j=1}^n |f_j(\alpha)| = 0$ 当且仅当 $f_j(\alpha) = 0$）。因此，Corona 问题在 $H^\infty(G)$ 中成立，其中 G 是 $\mathbb{C}^n$ 中的伪凸域或多圆域。□

备注 A。以下是关于上述证明中我们所采用的巴拿赫代数技巧的一些说明。

1. 关于 Krantz 定理 1 和注记 2 [K5], ，我们注意到，如果采用逆否法证明 Krantz 定理 1，就必须证明：冠定理不成立意味着要么不存在 Corona 数据，要么 Corona 数据的零点不分离。然而，显然，当且仅当

如上文证明所述，Corona 数据中函数的零点不分离时，不存在 Corona 数据。这意味着，为了进一步简化 Krantz 定理 1，可以去掉其中设定的几何假设。现在，如果采用逆否法证明简化后的 Krantz 定理 1，就可以得到冠定理（我们在上文对有限 Corona 数据的证明中正是这样做的）。

2. 上述证明中采用的巴拿赫代数技巧也适用于经过适当处理的无限 Corona 数据（即具有无限多个生成元 $f = （f_1、 f_2，.....）$）（参见 [DKSTW，第3节5] 中关于 $\mathbb{C}$的圆盘的内容），这归功于 [Go、Brook 定理，第 136] 页；请注意，我们不仅在某种意义上重新得到 Rosenblum 和 Tolokonnikov 定理 5，还将其推广到了 $\mathbb{C}^n$中更一般的 G 。

3. 值得一提的是，作者直到最近（即在完成初稿期间）才了解到理想问题，该问题在 Corona 问题的历史部分有所阐述（见 [DKSTW, §7]）。因此，我们的巴拿赫代数技巧完全基于 Banach 代数理论中的常规结果，以及作者近期关于 [P4] 中 Gleason 问题的研究。不过，还有一些补充说明。容易看出，我们在此采用的方法与 Xiao 定理中关于单位圆盘内 Dirichlet 空间乘子的处理方法相似（见 $\mathcal{D}$in the unit disc（参见 [DKSTW, p. 22] or, [X]），其中讨论了

Corona 定理成立所必需的 Corona 数据（另见关于一种替代证明的备注，该证明也处理了无限多个生成元；见 [DKSTW] 第 23 页），而在下文的定理 4.1 中，我们证明仅有 Corona 数据就足以保证 Corona 定理成立（见 [KL1, K5]）。此外，容易看出，我们实际上已经解决了函数 $\phi \equiv 1$ in $H^\infty(G)$ 的 Rubel 和 Shields 问题，其中 G 与上文相同（包括下文推论中的球和多圆盘） [DKSTW, §7, Questions 1, 2 and 3]；对于问题 2 和 3，我们在上述定理中分别取 $h \equiv 1$ on $[0, \infty]$ 和 $\phi \equiv 1$ （请注意，为回答问题 3，我们在上述定理中考虑由 $f_1, \ldots, f_n$ 生成的极大理想 M_α，$\alpha \in G$）。

因此，由于球是我们所说的这类伪凸域中（本质上唯一的）基本例子，我们得到如下

推论 2.5. 设 G 是 $\mathbb{C}^n$ 中的开单位球或多圆盘。那么，Corona 问题在 $H^\infty(G)$ 中成立。□

我们已在定理 2.3 中证明，如果 G 是 $\mathbb{C}^n$ 中的光滑（严格）伪凸域，或是 $\mathbb{C}^n$ 中具有（强）Stein 邻域基的伪凸域（例如 $\mathbb{C}^n$ 中的 Stein 域），或是 $\mathbb{C}^n$ 中的多圆域，那么 G 是 Gleason 可解的。然而，为了实现我们的目标——确立这两个问题之间的等价性——在反向命题中，我们有

如下

定理 2.6. 设 G 是 $\mathbb{C}^n$ 中一个相对紧的光滑（严格）伪凸区域，并且具有（强）Stein 邻域基；或者设它是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个多圆域。那么，如果 $H^\infty(G)$ 中的 Corona 问题成立，则 G 是 Gleason 可解的。

证明. 设 $H^\infty(G)$ 中的 Corona 问题成立。应用 [P4] 定理 4.1 中由 (ii) 推出 (i) 的证明，容易证明 $H^\infty(G)$ 是一个半单局部 Stein- 巴拿赫代数。因此，根据 [P4] 的定理 4.3（应用于 $H^\infty(G)$ 时），我们看到 Gleason 问题是可解的，因为 G 在谱 $M(H^\infty(G))$ 中稠密。□

注 B.1. 根据定理 2.4 和 2.6，我们看到，多复变函数论中的两个重要问题是等价的。事实上，Corona 问题具有拓扑性质（即，区域 G 在谱 $M(H^\infty(G))$ 中是否稠密；等价地，Corona 是否为空），而 Gleason 问题具有代数性质（即，极大理想 M_α, $\alpha \in G$ 是否在 $H^\infty(G)$ 中代数有限生成；等价地， G 是否具有 Gleason $H^\infty(G)$–性质）。Corona 问题还具有代数性质（即，给定有限 Corona 数据，B´ezout 方程是否成立）。在自动连续性理论中，我们感兴趣的是

底层结构的拓扑性质与代数性质之间的相互作用（见 [DPR，P1，P3]）。

2. 由于我们在上述定理中将冠定理作为假设，因此我们在 $\mathbb{C}^n$ 中得到了一类有限区域上的 Gleason 可解性（参见定理 2.4 前的段落），而在定理 2.3 中，我们在 $\mathbb{C}^n$ 中得到了更大一类区域上的同样结果。

3 巴拿赫空间中全纯函数的 Gleason 问题。

3.1 [FO] 是很好的参考文献；在 §1 的最后一段，作者指出，只需将 $A(G)$ 换成各种全纯的 H¨older 空间和 Lipschitz 空间，并将坐标函数生成元换成这些空间中极大理想的任意生成元，仍然可以证明主定理。他们提到会有一篇后续论文，但据我们所知，该论文从未发表。关于这一点，我们可以考察 [P4], 定理 4.3 的下述应用；该定理对半单局部 Stein 代数确立了类似的结论。事实上，我们证明，对于指数 $\alpha \in (0, 1]$, ，由所有有界复值、 α–Lipschitz 连续

（又称 H¨older 连续）的全纯函数组成的巴拿赫代数 Lip$_H(G,d)$，其中 (G,d) 中的 G 是 $\mathbb{C}^n$ 中的有界域，d 是 $\mathbb{C}^n$ 上的通常度量，在通常的“$\alpha-$Lipschitz”范数（下文定义）下是半单局部 Stein-巴拿赫代数。因此，若 $\alpha = 1$，它确实就是由 (G, d) 上所有有界复值、Lipschitz 连续的全纯函数组成的巴拿赫代数 Lip$_H(G,d)$。下文将以更强的意义确立冠定理，并以此为应用，证明 $\mathbb{C}^n$ 中某些有界伪凸域对这些巴拿赫代数具有 Gleason 可解性（见引理 3.2 和定理 3.13），从而肯定地解决 Fornæss 和 Øvrelid 留下的未决问题。

此外，对于 $\alpha = 1$，Sherbert 在 [Sh1-2]，中研究了度量空间 (X, d') 上所有利普希茨连续函数构成的巴拿赫代数 Lip(X, d')；对于每个 $\alpha \in (0, 1)$，巴拿赫代数 lip$^{\alpha}(X, d')$ 则在 [Sh2] 中得到了研究。据我们所知，对于每个 $\alpha \in (0, 1]$，，巴拿赫代数 Lip$^{\alpha}_H(G, d)$ 从未得到研究；与其超代数 Lip$^{\alpha}(G, d)$ 相比，它确实是一个重要的代数，尤其是在进一步发展全纯函数的巴拿赫代数理论时（请注意，对于每个 $\alpha \in (0, 1)$，度量空间 (X, d') 上所有 α 阶利普希茨连续函数构成的巴拿赫代数 Lip$^{\alpha}(X, d')$ 也

从未被 Sherbert 研究过）。因此，在本小节中，我们从多复变函数论中的两个问题（例如 Gleason 问题，见 [P4]）出发，研究巴拿赫代数 $\mathrm{Lip}_H^\alpha(G, d)$。由此，我们的结果推广了 [Sh1-2] 中的结果。我们可以将这些代数称为全纯函数的利普希茨代数。我们考察这些巴拿赫代数的一些基本性质。

首先，我们将讨论 $\mathrm{Lip}_H^\alpha(G, d)$ 的盖尔范德理论，其中 $\alpha \in (0, 1]$，并证明每个交换半单巴拿赫代数 A（由全纯函数构成；也就是说，对于每个 $x \in A$，$\hat{}x$ 在其极大理想空间 $M(A)$ 的内部关于盖尔范德拓扑都是全纯的）都同构于阶数为 α 的利普希茨代数 $\mathrm{Lip}^\alpha(M(A), \sigma)$ 的一个子代数，其中 σ 是极大理想空间 $M(A)$ 从下文定义的对偶空间 A^* 作为子集所继承的度量。该表示源自盖尔范德表示。我们使用度量拓扑，取代 $M(A)$ 通常采用的盖尔范德拓扑。我们还证明，当且仅当对于 $\mathbb{C}^n$ 中的有界域 G，$A = \mathrm{Lip}_H^\alpha(G, d)$ 时，这个同构才是满射。也就是说，$\mathrm{Lip}_H^\alpha(G, d)$ 在盖尔范德映射下的像，恰好是 $\mathrm{Lip}^\alpha(M(A), \sigma)$ 中那些在 $M(A)$ 上连续、且在盖尔范德拓扑下于 $\mathrm{Int}\ M(A)$ 上全纯的函数（因此，这些函数在 $M(A)$ 上也连续，并且在 $\sigma-$ 拓扑下于 $\mathrm{Int}\ M(A)$ 上全纯）。

由此结果可知，这些代数是半单的，因此它们有唯一的完备范数。

我们回顾一下，曾以冠定理为假设，来解决局部 Stein 代数中的 Gleason 问题。然而，冠定理与 Gleason 问题的可解性之间究竟有何关系，并不明确；也就是说，尚不清楚这两个问题是否有一方能推出另一方。上文第 2 节探讨了这两个问题是否等价，并解决了关于巴拿赫代数 $H^\infty(G)$ 的最负盛名、历史悠久且最初提出的 Corona 问题，其中 G 是 $\mathbb{C}^n$ 中的某个有界域（包括单位球和多圆盘）。下文各（子）节将讨论在 $\mathbb{C}^n$ 中各类有界域（包括单位球和多圆盘）上的有界全纯函数的各种巴拿赫空间（例如全纯均值 Besov-Lipschitz 空间、Besov-Lipschitz 空间、Hardy-Sobolev 空间和一个加权 Bergman 空间）中，这两个问题的可解性。最后，我们指出这两类利普希茨代数之间的两个重要差异：对于每个 $\alpha \in (0, 1]$,$\mathrm{Lip}^\alpha(X, d')$ 都是正则、自伴（对复共轭封闭）的巴拿赫代数，而 $\mathrm{Lip}_H^\alpha(G, d)$ 既非正则，也非自伴。

全纯函数利普希茨代数的盖尔范德理论。对于每个 $\alpha \in (0,1],$，记 $\mathrm{Lip}_H^\alpha(G, d)$ 为定义在 $\mathbb{C}^n$ 中有界域 (G, d) 上的所有有界复值 $\alpha-$ Lipschitz 连续（亦称 H¨older 连续）全纯函数的集合，其中 d 是由最大范数或平方范数在 $\mathbb{C}^n$ 上诱导的通常度量。因此，对于固定的 $\alpha \in (0, 1],$，$\mathrm{Lip}_H^\alpha(G, d)$ 由所有定义在 (G, d) 上且满足以下两项条件的 f 构成:

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(z)| : z \in G\}$$

and

$$\|f\|_\alpha := \sup\{\frac{|f(z) - f(w)|}{\|z - w\|^\alpha} : z, w \in G, z \neq w\}$$

是有限的。容易看出，在范数 $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}^\alpha}$（由 $\|f\|_{\mathrm{Lip}^\alpha} = \|f\|_\infty + \|f\|_\alpha$ 定义）下，$\mathrm{Lip}_H^\alpha(G, d)$ 是一个带单位元的交换巴拿赫代数（注意，也可以采用其他等价代数范数，例如取 $\|f\|_\infty$ 和 $\|f\|_\alpha$ 的最大值，或者取 $\{|f(z_0)|, \frac{|f(z) - f(w)|}{\|z-w\|^\alpha} : z_0, z, w \in G, z \neq w\}$ 的上确界；此外，我们将看到，由于 [F, Ch, CZ, JP] 中讨论的各种刻画，巴拿赫空间 $\mathrm{Lip}_H^\alpha(G, d) = H\Lambda(\alpha/n, \infty, \infty) = \Lambda_\alpha = \Lambda^\infty{}_{,\alpha}{}^\infty$ 上存在若干等价范数）。事实上，它是巴拿赫代数 $\mathrm{Lip}^\alpha(G, d)$ 的一个闭子代数，该代数由 $\alpha-$ 利普希茨（又称霍尔德）连续函数构成（相应地，当 $\alpha = 1$ 时，它是由利普希茨连续函数构成的巴拿赫代数 $\mathrm{Lip}(G, d)$）。我们有时会将这类代数称为

有界全纯函数的霍尔德代数（相应地，当 $\alpha = 1$ 时，称为有界全纯函数的利普希茨代数）。对于指数 $\alpha \in (0, 1]$, ，显然

$$\mathrm{Lip}_H(G) \subset \mathrm{Lip}_H^{\alpha}(G) \subset A(G) \subset H^{\infty}(G),$$

其中， G 是 $\mathbb{C}^n$中的有界域。

除非另有说明，本小节始终假设（G, d）是 $\mathbb{C}^n$ 中的相对紧度量空间。因此我们看到，由于 $\mathrm{Lip}_H^{\alpha}(G, d)$ 的每个元素在（G, d）上都是强一致连续的（当 $\alpha = 1$ 时，在（G, d）上一致连续），所以它都可以唯一地、连续地且保范地延拓为 $\mathrm{Lip}^{\alpha}(\overline{G}, d)$ 的一个元素。因此，作为巴拿赫代数，$\mathrm{Lip}_H^{\alpha}(G, d)$ 及其在 $\mathrm{Lip}^{\alpha}(\overline{G}, d)$ 中的像是等距同构的（等价地，$\mathrm{Lip}_H^{\alpha}(G, d)$ 也可以看作巴拿赫代数 $\mathrm{Lip}^{\alpha}(\overline{G}, d)$ 的一个闭子代数）。

设 A 是一个由全纯函数构成、范数为 $\|\cdot\|_A$ 的交换半单巴拿赫代数。根据标准巴拿赫空间理论，极大理想空间 $M(A)$ 位于对偶空间 A^* 的单位球面上。因此，作为 A^* 的子集， $M(A)$ 继承了盖尔范德拓扑以及相对范数拓扑（或度量拓扑）。交换巴拿赫代数的盖尔范德理论采用盖尔范德拓扑。当 A 有单位元时， $M(A)$ 是紧的

关于盖尔范德拓扑而言。对于每个 $f \in A$，函数 f 定义在 $M(A)$ 上，其定义为 $f(\phi) = \phi(f)$ $\phi \in M(A)$。每个 f 在 $M(A)$ 上连续，并且关于盖尔范德拓扑在 Int $M(A)$ 上全纯。事实上，盖尔范德拓扑是 $M(A)$ 上使函数族 $\{f\colon f \in A\}$ 在 $M(A)$ 上连续（并在 Int $M(A)$ 上全纯）的最弱拓扑。令 $C(M(A))$ 表示关于盖尔范德拓扑、赋予上确界范数的 $M(A)$ 上复值连续函数构成的代数。那么，盖尔范德映射 $f \to f$ 是从 A 到 $C(M(A))$ 的连续同构。

现在考虑 $M(A)$ 的度量拓扑。由对偶空间 A^* 的范数 $\|\cdot\|_A^*$ 在 $M(A)$ 上诱导的度量 σ 定义为

$$\sigma(\phi, \psi) = \|\phi - \psi\|_A^*, \ \phi, \psi \in M(A).$$

ˆ 用函数 f、 $f \in A$ 表示时，度量 σ 可表示为

$$\sigma(\phi, \psi) = \sup\{|\hat{f}(\phi) - \hat{f}(\psi)| : f \in A, \|f\|_A \leq 1\}, \ \phi, \psi \in M(A).$$

$M(A)$ 的度量拓扑强于盖尔范德拓扑。因此，由于 $M(A)$ 关于弱星拓扑在 A^* 中是闭的，它关于度量拓扑也闭。因此，$(M(A)\ \sigma)$ 是一个完备度量空间。度量 σ 有界，因为 $M(A)$ 位于 A^* 的单位球面上。

对于固定指数 $\alpha \in (0, 1],$，我们取度量空间 $(M(A)\ \sigma)$

构造利普希茨代数 $\mathrm{Lip}^{\alpha}(M(A),\ \sigma)$，其范数 $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}^{\alpha}}$ 定义为

$$\|g\|_{\mathrm{Lip}^{\alpha}} = \|g\|_{\infty} + \|g\|_{\alpha},\ g \in \mathrm{Lip}^{\alpha}(M(A), \sigma).$$

现在我们证明，盖尔范德映射将 A 映入这个利普希茨代数，从而得到如下“阶为 α 的利普希茨表示”

命题 3.1。设 A 是一个全纯函数的含幺交换半单巴拿赫代数。那么，盖尔范德映射是从 A 到 $\mathrm{Lip}^{\alpha}(M(A),\ \sigma)$ 的某个子代数上的连续同构。此外，对每个 $\hat{}\hat{}f \in A$，$\|f\|_{\alpha} \leq \|f\|_{A}$ 和 $\|f\|_{\infty} \leq \|f\|_{A}$。

证明。首先，对于固定的指数 $\alpha \in (0,\ 1],$ ，我们讨论 $\mathrm{Lip}^{\alpha}(M(A),\ \sigma)$ 的一个重要子集 $\mathrm{lip}^{\alpha}(M(A),\ \sigma)$，它由所有满足以下性质的函数 $f \in \mathrm{Lip}^{\alpha}(M(A),\ \sigma)$ 组成

$$\frac{|f(z) - f(w)|}{\sigma(z,\ w)^{\alpha}} \to 0 \text{ as } \sigma(z,\ w)^{\alpha} \to 0.$$

它显然是 $\mathrm{Lip}^{\alpha}(M(A),\ \sigma)$ 的一个闭子代数；Mirkil [M] 在 $X = [0,\ 2\pi]$ 的情形以及 $d(x,\ y)^{\alpha} = |x - y|^{\alpha},\ 0 < \alpha < 1$ 中证明了这一点，但他的证明普遍适用。

接下来，很容易证明，对于每个 $\alpha \in (0,\ 1)$，

$$\mathrm{Lip}(M(A),\ \sigma) \subset \mathrm{lip}^{\alpha}(M(A),\ \sigma) \subset \mathrm{Lip}^{\alpha}(M(A),\ \sigma)$$

巴拿赫代数 lip$^{\alpha}$($M(A)$ σ)（因此 Lip$^{\alpha}$($M(A)$ σ) 也一样）能分离 $M(A)$ 中的点（见 [Sh2，命题 1.6]）。此外，这些包含映射是连续的。现在，根据 [Sh1]，的命题 2.1，证明是直接的。ˆ 此外，Lip$^{\alpha}$($M(A)$ σ) 的子代数 A 由这样的函数组成：它们在 ($M(A)$ σ) 上连续，并在 (Int $M(A)$ σ) 上全纯，因为它们相对于盖尔范德拓扑在 $M(A)$ 上连续，并在 Int $M(A)$ 上全纯。
□

接下来，我们研究巴拿赫代数$A = \text{Lip}_H^{\alpha}(G, d)$的极大理想空间 $M(A)$，因为该代数具有一些重要性质，有助于建立冠定理和 Gleason 可解性，具体如下。首先要指出的是，它包含单位元，即恒等于 1 的函数。它还包含坐标函数，因此能够分离 G 中的点，但它不是自伴的。因此，每个 $z \in G$ 都可以对应于 $M(A)$中的点求值泛函ϕ_z，其中 $\phi_z(f) = f(z)$。更确切地说，单射$z \to \phi_z$ 是从 G 到 $M(A)$的一一映射，我们可以将 G 视为$M(A)$的子集。将度量 σ 限制在 G上时，它在 G 上的表达式为$\sigma(z, w) = \sup\{|f(z) - f(w)| : f \in \text{Lip}_H^{\alpha}(G, d) \ \|f\|_{\text{Lip}^{\alpha}} \leq 1\}$, $z, w \in G$.

定义在集合 X 上的函数代数 B 称为逆封闭的

如果对于满足 $|f(x)| \geq \epsilon > 0$ 对所有 $x \in X$ 都成立的每个函数 $f \in B$， $f^{-1} \in B$ 也成立。显然，很容易看出，对于每个 $\alpha \in$，$0, 1]$,$\mathrm{Lip}_H^\alpha(G, d)$ 都是逆封闭代数（例如参见 [Sh2] 中的命题 1.7）。我们指出，$\mathrm{Lip}_H^\alpha(G, d)$ 是一个巴拿赫代数，且 $\mathrm{Lip}_H^\alpha(G, d) \subsetneq A(G)$（并且此包含也是连续的）。由于 $z_1, z_2, \ldots, z_n$ 中的多项式在 $A(G)$ 中稠密，且它们也属于 $\mathrm{Lip}_H^\alpha(G, d)$，因此 $\mathrm{Lip}_H^\alpha(G, d)$ 是 $A(G)$ 的稠密巴拿赫子代数。根据 [P4], 中的引理 3.1，$\mathrm{Lip}_H^\alpha(G, d)$ 是半单的局部 Stein- 巴拿赫代数，因为 $\mathrm{Lip}_H^\alpha(G, d)$ 在上确界范数下的完备化是 $A(G)$；这里在巴拿赫情形下应用 [P4] 中定理 4.1 的证明（由 (ii) 推出 (i)）即可。此外， $A(G)$ 的极大理想空间是联合谱 $\mathrm{sp}(z_1, \ldots, z_n)$。又由于根据 [BO 命题 1], ， $\mathrm{Lip}_H^\alpha(G, d)$ 在 $A(G)$ 中也是逆封闭的，因此有 $M(A) = \mathrm{sp}(z_1, \ldots, z_n)$。此外，如果 G 是 $\mathbb{C}^n$ [HS], 中的光滑（严格）伪凸域，或者，如果 G 是具有 Stein 邻域基 [Ro] 的伪凸域（例如 $\mathbb{C}^n$ 中的 Stein 域），那么 $\mathrm{sp}(z_1, \ldots, z_n) = \overline{G}$。因此，在这种情况下，$M(A) = \overline{G}$。由此得到以下

引理 3.2. 设 $M(A)$ 是 $\mathrm{Lip}_H^\alpha(G, d)$ 的极大理想空间。那么$M(A)$ 在盖尔范德拓扑下 $= \overline{G}$，前提是 G 是 $\mathbb{C}^n$ 中的光滑（严格）伪凸域，或者是具有

Stein 邻域基。特别地，若 (G, d) 在$\mathbb{C}^n$ 中相对紧，则盖尔范德拓扑与 G 的 d-拓扑一致。□

备注 C. 1. 存在一些 $\mathbb{C}^n$ 中的有界域，它们既不具有光滑边界（例如 Hartogs 三角形），也不具有 Stein 邻域基（例如虫域） [DF]。对于 Hartogs 三角形，我们可能没有 $M(A(G)) = \text{sp}(z_1, \ldots, z_n) = \overline{G}$，但对于虫域，我们有。2. 通过证明上述引理，我们实际上解决了交换半单巴拿赫代数 $\text{Lip}_H^\alpha(G, d)$ 的 Corona 问题，其中 $\alpha \in (0, 1]$（此处 G 也可以是 $\mathbb{C}^n$ 中相对紧的多圆域；见下文定理 3.13）。事实上，在这种情况下，我们得到了更好的结果，即 G 的相对 Gel'fand 拓扑等价于 $d-$ 和 $\sigma-$ 在 G 上的拓扑（见下文命题 3.3 、 3.9 和推论 3.12 ）。

3. 请注意，要使盖尔范德拓扑与 G 的 d-拓扑等价，并不需要 G 相对紧。事实上，我们有以下命题，其证明从略（参见 [Sh1] 的命题 3.3）。

命题 3.3. 设 G 是 $\mathbb{C}^n$ 中一个光滑（严格）伪凸域，或是一个具有 Stein 邻域基的伪凸域。那么 G 的相对 Gel'fand 拓扑与 G 的 d-拓扑等价。□

现在我们转向 $A = \text{Lip}_H^\alpha(G, d)$ 的 Gel'fand 表示，其中

ˆ$\alpha \in (0, 1]$。命题 3.1 告诉我们，盖尔范德映射 $f \mapsto f$ 将ˆ $\mathrm{Lip}_H^\alpha(G,$ $d)$ 同构地映入 $\mathrm{Lip}^\alpha(M(A)\ \sigma)$，并且满足 $|||f|||_\infty \leq \|f\|_{\mathrm{Lip}^\alpha}$ˆ和 $|||f|||_\alpha \leq \|f\|_{\mathrm{Lip}^\alpha}$，对所有 $f \in \mathrm{Lip}_H^\alpha(G, d)$ 均成立。这些结论可由一般性考量推出。对于特殊情形 $A = \mathrm{Lip}_H^\alpha(G, d)$，还可以进一步加强如下

ˆ 定理 3.4。盖尔范德映射 $f \mapsto f$ 是 $\mathrm{Lip}_H^\alpha(G, d)$ 到 $\mathrm{Lip}^\alpha(M(A)\ \sigma)$ 的闭子代数上的同构，该闭子代数由 $\mathrm{Lip}^\alpha(M(A)\ \sigma)$ 中满足以下条件的函数组成：它们在 $M(A)$ 上连续，并且相对于盖尔范德拓扑在 Int $M(A)$ 上全纯。特别地，对于每个$\alpha \in (0, 1]$, $\mathrm{Lip}_H^\alpha(G, d)$ 都是交换半单巴拿赫代数。

证明。如果 $f \in \mathrm{Lip}_H^\alpha(G, d)$ 且 $\|f\|_{\mathrm{Lip}^\alpha} \leq 1$，那么 $\|f\|_\alpha \leq 1$，因此对所有 $z, w \in G$，有$|f(z) - f(w)| \leq d(z, w)^\alpha$。于是对所有 $z,$ $w \in G$， $\sigma(z, w) \leq d(z, w)^\alpha$ˆ。因而对于任意 $f \in \mathrm{Lip}_H^\alpha(G, d)$, $\|f\|_\alpha \leq |||f|||_\alpha$。由于ˆ每个 f, $f \in \mathrm{Lip}_H^\alpha(G, d)$ 都相对于盖尔范德拓扑在 $M(A)$ 上连续，并且根据引理 3.2， G 关于盖尔范德拓扑在 $M(A)$ 中稠密，ˆ所以我们有 $\|f\|_\infty = |||f|||_\infty$。因此对于所有 $f \in \mathrm{Lip}_H^\alpha(G, d)$,

$$\hat{}\,\hat{}\,\hat{}\|f\|_{\mathrm{Lip}^\alpha} = \|f\|_\infty + \|f\|_\alpha \leq |||f|||_\infty + |||f|||_\alpha = |||f|||_{\mathrm{Lip}^\alpha}.$$

结合 [Sh1] 的命题 2.1 中的不等式可得

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}^\alpha} \leq |||\hat{f}|||_{\mathrm{Lip}^\alpha} \leq 2\|f\|_{\mathrm{Lip}^\alpha}.$$

ˆ 因此，映射 $f \to f$ 是双连续同构，所以 $\mathrm{Lip}_H^\alpha(G, d)$ 的像是 $\mathrm{Lip}^\alpha(M(A)\ \sigma)$ 的闭子代数。

设 $g \in \mathrm{Lip}^\alpha(M(A)\ \sigma)$ 在 $M(A)$ 上连续，并且相对于盖尔范德拓扑在 Int $M(A)$ 上全纯；令 $f = g|G$ 表示 g 在 G 上的限制。则对所有 $z, w \in \hat{G}$，有 $f \in \mathrm{Lip}_H^\alpha(G, d)$，因为 $\sigma(z, w) \leq d(z, w)^\alpha$；又由于二者在 $M(A)$ 上连续，相对于盖尔范德拓扑在 Int $M(A)$ 上全纯，并且根据引理 3.2，它们在稠密子集 G 上相等，所以有 $f = g$。因此，那些在 $M(A)$ 上连续、且相对于盖尔范德拓扑在 Int $M(A)$ 上全纯的 $g \in \mathrm{Lip}^\alpha(M(A)\ \sigma)$，属于映射 $f \to f$ 从 $\mathrm{Lip}_H^\alpha(G, d)$ 得到的值域。由于每个 f 在 $M(A)$ 上连续，且相对于盖尔范德拓扑在 Int $M(A)$ 上全纯，故 $\mathrm{Lip}_H^\alpha(G, d)$ 在映射 $f \to f$ 下的像，恰好是 $\mathrm{Lip}^\alpha(M(A)\ \sigma)$ 中在 $M(A)$ 上连续、且相对于盖尔范德拓扑在 Int $M(A)$ 上全纯的函数所构成的集合。□

自动连续性理论的根源是“范数唯一性”问题，它探讨哪些巴拿赫代数具有唯一的完备范数。我们指出，Rickart 在1950年提出了一个具有重要历史意义的问题：

每个半单巴拿赫代数是否都具有唯一的完备范数 [Ri]。Johnson 在 1967 [J1]解决了这个问题；同年，他还证明了幂级数巴拿赫代数的完备范数唯一 [J2]。对于更一般的弗雷歇代数情形，作者在 [P1] 证明了幂级数弗雷歇代数的弗雷歇代数拓扑的唯一性（关于多个变量的幂级数弗雷歇代数的这一结果，另见 [P3] ）。在 [DPR], 中，我们为幂级数弗雷歇代数得到了其他有趣的自动连续性结果，包括以更强的意义肯定地解决了 Dales-McClure问题（1977年），并在最受瞩目的 Michael问题（1952年）上取得了进一步进展：该问题的测试代数确实是一个幂级数弗雷歇代数。作为上述定理的一个简单推论，我们有以下结果

推论3.5。对于每个 $\alpha \in (0,1], \mathrm{Lip}_H^{\alpha}(G,d)$ 都有一个唯一的完备范数。□

巴拿赫代数 A 称为正则的，如果对于 $M(A)$ 的每个真闭子集K以及每个点 $\phi \in M(A) - K$，都存在一个 $f \in A$，使得 $\hat{f}(\phi) = 1$且 $\hat{f}(K) = 0$。对于每个 $\alpha \in (0,1],)$，巴拿赫代数 $\mathrm{Lip}^{\alpha}(X,d')$ 是正则的，这可由以下命题推出。该命题由 J. Lindberg（未发表）提出；证明见 [Sh1]。空间 X 上的函数代数 A在截断下是闭的

如果对于所有实值 $f \in A$，函数 $\min(f, 1) \in A$。

命题 3.6. 设 X 是一个紧豪斯多夫空间，A 是 $C(X)$ 的一个自伴子代数，它分离 X 中的点并包含常值函数。若 A 在截断下封闭，则 A 是正则的。

由此可得以下结论

推论 3.7. 对每个 $\alpha \in (0, 1],$，巴拿赫代数 $A = \mathrm{Lip}^{\alpha}(X, d')$ 都是正则的。

证明。对于每个 $\alpha \in (0, 1],$，令 $f \in \mathrm{Lip}^{\alpha}(X, d')$ 为定义在 X 上的实值距离函数，其中固定点为 $t \in X$，并令 $Tf = \min(f, 1)$。那么，对于所有 $x, y \in X$，都有 $|(Tf)(x) - (TF)(y)| \leq |f(x) - f(y)|$；比较 f和 Tf的图像，或逐一检查给定 x 和 y时的各种可能情形，即可看出这一点。由此可立即得出，$\mathrm{Lip}^{\alpha}(X, d')$ 在截断运算下封闭。因此，$\mathrm{Lip}^{\alpha}(X, d')$ 是 X上的点分离函数代数。于是，每个 $x \in X$ 都可与极大理想空间 $M(A)$ 中的点求值泛函 ϕ_x相对应，其中 $\phi_x(f) = f(x)$。因此，单射映射 $x \to \phi_x$ 是从 X 到 $M(A)$ 的一一映射，我们可以将 X视为 $M(A)$ 的子集。显然，它包含常数函数，且是自伴的。此外，容易证明它是一个逆封闭代数。根据

函数代数一般理论，关于盖尔范德拓扑， X 在 $M(A)$ 中稠密。由此可知，$\mathrm{Lip}^{\alpha}(X, d')$ 在截断运算下封闭，当且仅当 $\{\hat{}f : f \in \mathrm{Lip}^{\alpha}(X, d')\}$ 在截断运算下封闭。因此，对于 $\alpha \in (0, 1]$,$\mathrm{Lip}^{\alpha}(X, d')$ 是正则的。稍加思考也会发现， X 的相对 Gel'fand 拓扑与 X 的原始 d–拓扑也等价。□

我们注意到，巴拿赫代数 $\mathrm{Lip}_H^{\alpha}(G, d)$ 肯定不是正则的，因为它们不是自伴的。事实上，这可由命题 3.6 的以下逆命题以及众所周知的实与复 Stone-Weierstrass 定理的证明方法推出。

命题 3.8. 设 X 是一个紧豪斯多夫空间， A 是 $C(X)$ 的一个在截断运算下封闭且包含常值函数的闭子代数。若 A 是正则的，则 A 分离 X 的点，并且是自伴的。□

作为 $M(A)$ 的子集， G 继承了 $M(A)$ 的盖尔范德拓扑和度量拓扑。现在，我们将 G 所继承的这些拓扑与其原有的 d-拓扑进行比较。根据上面的引理 3.2 和命题 3.3，我们首先看到， G 的相对盖尔范德拓扑与 d-拓扑下的 G 是等价的。

现在我们比较 G的两种度量拓扑。接下来的几个命

题探讨 d与 σ 在 G上的关系；在我们的情形中，我们省略证明，因为论证几乎相同（关于相关概念、定义、相互关系及等价性质，参见 [Sh1，第3] 节；此外，第5节中关于同态和自同构的结果（定理 5.1 和推论 5.2）在我们的情形中同样成立：(1) 对于 $\alpha \in (0, 1]$, $\mathrm{Lip}^{\alpha}(X, d')$，其中 X是紧豪斯多夫空间；以及 (2) 对于 $\alpha \in (0, 1]$, $\mathrm{Lip}_H^{\alpha}(G, d)$，其中 G 在 $\mathbb{C}^n$中相对紧。）

由于 $M(A)$ 位于 $A = \mathrm{Lip}_H^{\alpha}(G, d)$ 的对偶空间的单位球面上（事实上，当 G 是 $\mathbb{C}^n$ 中的有界对称域时，由 [Ch] 可知，该对偶空间就是空间 $\Lambda^*(\alpha, \infty, \infty)$），因此 $(M(A)\ \sigma)$ 的直径至多为二。所以 σ 始终是有界度量。此外，由于 G 是 $\mathbb{C}^n$ 中的有界域，(G, d) 的直径有限，我们得到以下

P命题 3.9。 σ 在 G 上与 d 有界等价。□

因此，我们得到以下

推论 3.10。设 d_1 和 d_2 是 G 上的有界度量。那么， $A_1 = \mathrm{Lip}_H^{\alpha}(G, d_1)$ 与 $A_2 = \mathrm{Lip}_H^{\alpha}(G, d_2)$ 具有相同的元素，当且仅当 d_1 与 d_2 有界等价。□

此外，我们有如下

命题 3.11. 给定度量空间 (G, d)，巴拿赫代数 $\mathrm{Lip}_H^\alpha(G, d)$ 和 $\mathrm{Lip}_H^\alpha(G, d')$（其中 $d' = \frac{d}{1+d}$）具有相同的元素，且它们的范数等价。□

因此，我们得到以下

推论 3.12. G 上的度量 d 和 σ 总是一致等价的。□作为上述结果的一个应用，我们得到以下

定理 3.13. 设 G 是$\mathbb{C}^n$中的光滑（严格）伪凸域，或具有 Stein 邻域基的伪凸域，或 $\mathbb{C}^n$中的多重圆盘域。则 G 对于巴拿赫代数 $\mathrm{Lip}_H^\alpha(G, d)$ 是 Gleason 可解的，其中 $\alpha \in (0, 1]$。

证明. 显然，对每个 $\alpha \in (0, 1]$, $\mathrm{Lip}_H^\alpha(G, d)$ 都是$A^2(G)$的巴拿赫子空间（见上文引理 2.1）。于是，根据命题 2.2，存在 $f_1, \ldots, f_n$，属于$A(G)$，使得 $f = \sum_{j=1}^n (z_j - \alpha_j) f_j$。事实上， $f_1, \ldots, f_n$属于 $\mathrm{Lip}_H^\alpha(G, d)$，因为它们满足利普希茨条件，且在 (G, d) 上一致连续；此外，$\mathrm{Lip}_H^\alpha(G, d)$，其中 $\alpha \in (0, 1]$，是 $A(G)$的一个包含单位元的真子代数（因此，它不可能是 $A(G)$的理想）。

或者，我们注意到，对于每个 $\alpha \in (0, 1]$, $\mathrm{Lip}_H^\alpha(G, d)$，按照通常的 $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}^\alpha}$ 范数，如

引理 3.2 之前的段落所述，它是一个半单的局部 Stein-巴拿赫代数。因此，根据 [P4] 的定理 4.3（应用于 $\mathrm{Lip}^{\alpha}_{H}(G, d)$ 时），我们看到 Gleason 问题是可解的，因为根据引理 3.2，其极大理想空间是 $\overline{G}$。□

备注 D. 1. 作为 Corona 问题可解性（见引理 3.2）的一项应用，我们在此证明了 G 全纯 H¨older 空间和 Lipschitz 空间中的 Gleason 可解性，从而对 Fornæss 和 Øvrelid 在 [FO] 中针对 $\mathbb{C}^2$ 有限型伪凸域提出的未解问题给出了肯定答案（尤其是具有实解析边界的此类域）。

2. 我们研究了 Fr´echet 代数的谱中局部解析结构的存在性，并且作为一个意外收获，我们刻画了 [P2], 中的局部黎曼代数，为刻画局部 Stein 代数提供了路线图，从而在 [P4] 中获得这些代数的 Gleason 可解性。3.2 在解决了全纯 H¨oder 空间和 Lips- chitz 空间上的 Gleason 问题之后，我们接下来利用这一结果，进一步解决其他全纯函数的 Banach 空间中的这一问题，例如有界对称域上的全纯函数的 Lipschitz 空间（包括全纯平均 Lipschitz 空间），以及单位球上的 Hardy-Sobolev 空间（见 $\mathbb{C}^n$ [CZ], ），还有一些特殊类的混合范数（Bergman）空间（包括加权

Bergman 空间），即单位球上的全纯函数空间（见 $\mathbb{C}^n$ [JP]）。我们注意到，在众多全纯函数的 Banach 空间中，分析学家对同一个全纯函数的 Banach 空间使用了不止一个名称；例如，Cho 和 Zhu 所称的特殊类混合范数空间（如全纯（平均）Lipschitz空间），与 Jevti´c 和 Pavlovi´c 命名的特殊类混合范数Bergman空间（如全纯（平均）Besov-Lipschitz空间）完全相同（见 [JP]），这一点从 [CZ、CKK、JP] 中对这些空间所得出的各种刻画中可以清楚看出。

回顾一下，Carleson 在 [C] 中采用插值（通过 H^∞–函数）方法，解决了 $\mathbb{C}$开单位圆盘上的 corona 问题。Dronov 和 Kaplitskii 在 [DK] 中结合经典死端空间方法与插值方法（通过某些巴拿赫空间上的锥上的有界算子），解决了核 Fr´echet 空间理论中的 Mityagin 基问题。我们将采用这种结合方法，不过通过插值方法（利用某些有界全纯函数的巴拿赫空间）来确立下文的 Gleason 可解性和冠定理。事实上，我们采用经典死端空间方法，证明 $\mathbb{C}^n$中的这些各类（多重）区域所对应的空间具有 Gleason 可解性。该方法的核心思想如下：我们构造全纯函数的巴拿赫空间三元组（F_0, F_∞, F）

这些空间是 $\mathbb{C}^n$ 中某个（多重）区域 G 上的全纯函数空间，使得 G对于 F_0 和 F_∞ 是 Gleason 可解的，且 $F_\infty \subset F \subset F_0$ 连续地并且$F_0 \cong F_\infty$。此外，选取适当的、具有 Gleason 可解性的 G上的全纯函数巴拿赫空间，我们总能使 $F_0 \subset E_0$ 连续、 $F_\infty \subset E_\infty$ 连续、 $E_\infty \subset E_r \subset E_0$ 连续，并且对于每个 r，三元组（E_0, E_∞, E_r）都是 G上的、具有 Gleason 可解性的全纯函数巴拿赫空间的插值三元组。如此构造的巴拿赫空间系统始终是一个“完备极小”系统，并夹逼着 F。因此，只要相应的 F_0 和 F_∞ 具有 Gleason 可解性， F就具有 Gleason 可解性。我们指出，经典死端空间方法已被用于肯定地解决泛函分析中的一些著名且长期悬而未决的分析问题，例如 Mityagin 基问题（Pelczy´nski 基问题仍未解决，而 Grothendieck 基问题是核 Fr´echet 空间理论中所有基问题里最具声望、最一般的问题） [DK]。

我们首先指出，对于 $\alpha \in (0, 1]$ 和 G 是 $\mathbb{C}^n$ 中的有界对称域），上文讨论的巴拿赫代数 $\mathrm{Lip}_H^\alpha(G, d)$ 是经典全纯 Lipschitz 空间 $\Lambda_\alpha = H\Lambda(\alpha/n, \infty, \infty)$；Chen [Ch，定理 10] 讨论了这些空间，而它们实际上与 $_\alpha{}^\infty$所讨论的空间相同。

Cho 和 Zhu [CZ] 针对单位球讨论了这些空间（注意，此处我们还包括全纯函数的 Lipschitz 代数 Lip$_H$(G, d)，即空间$\Lambda_1 = \Lambda^{\infty}_{,1}{}^{\infty}$；Cho 和 Zhu [CZ], 讨论了该空间，而它实际上与 Chen [Ch，定理 4 和 10]讨论的空间 $H\Lambda(1/n, \infty, \infty)$ 相同）。Krantz 在 [K1-2, KL1-2]中将 Λ_α 称为全纯 Zygmund 空间。此外，由 [Ch], 的引理 2 可知，函数 $f \in H\Lambda(\alpha/n, \infty, \infty)$ 在 $G \bigcup b$ 上连续，其中 b 是 G 的 Bergman-$\breve{}$Silov 边界（即，根据 [A], f 在 G 上一致连续）；并且由 [Ch], 的定理 6 可知，对于 $1 \le p < \infty$ 和 $q = \infty$，$\Lambda_\alpha \subset H\Lambda(\alpha, p, \infty) \subset \Lambda_{\alpha-1/p}$（这些包含关系是连续的）。由于$\Lambda_\alpha \cong \Lambda_{\alpha-1/p}$，根据 [Ch], 的定理 4，我们可通过上文讨论的经典死端空间方法，得到 G 对$H\Lambda(\alpha, p, \infty)$ 是 Gleason 可解的（注意，应适当选取 E_0、E_∞ 和 E_r 为经典全纯 Lipschitz 空间（它们是 Gleason 可解的），因为对于 $0 < \alpha < \beta \le 1$，我们有 $\Lambda_\beta \subset \Lambda_\alpha$ 连续）。同理，对于 $1 \le q < \infty$，由 [Ch], 的定理 5 可知，对 $\alpha < 1$、$p = \infty$ 和 $1 \le q < s < \infty$，$\Lambda_1 \subset H\Lambda(\alpha, \infty, q) \subset H\Lambda(\alpha, \infty, s) \subset \Lambda_\alpha$（这些包含关系是连续的），因此 G对 $H\Lambda(\alpha, \infty, q)$ 是 Gleason 可解的。

关于 Cho 和 Zhu 在 [CZ], 中讨论的全纯平均 Lipschitz 空间的 Gleason 可解性，我们首先指出，对于 $0 < \alpha_1 < \alpha_2 <$

∞、 $1 \leq p$、 $q_1 < \infty$ 和 $q_2 = \infty$，我们有

$$\Lambda^{p,q_1}_{\alpha_2} \subset \Lambda^{p}_{\alpha_2} \subset \Lambda^{p,q_1}_{\alpha_1} \subset \Lambda^{p}_{\alpha_1}, \tag{3.1}$$

根据 [CZ] 的命题 3.6 中的 (i) 和 (ii)，所有这些包含关系都是连续的；此外，请回顾全纯平均 Lipschitz 空间 $\Lambda^{p,q}_{,\alpha}$ 中指标 α、 p 和 q 的作用如下：指标 p 表示所使用的基本范数，指标 α 给出所涉及的光滑阶，而指标 q 则表示对光滑阶的一种相当微妙的修正； [CZ] 的命题 3.6 对这些说明作了更精确的阐述。事实上，根据 [CZ], 的定理 3.12，这些空间彼此同构。此外，容易看出，[CZ] 的定理 3.12 对于 $\alpha > 0$、 $s = q = \infty$ 和带有 $1 \leq p < \infty$ 的 $\beta = 1/p$ 的情形也成立；即 $\Lambda_\alpha \cong \Lambda_{\alpha-1/p}$。 在 [Ch], 的定理 6 中，Chen 讨论了经典全纯 Lipschitz 空间与全纯积分 Lipschitz 空间（即 $p < \infty$）之间的某些包含关系。经典全纯平均（积分）Lipschitz 空间的情形也类似，因此我们有

$$\Lambda_\alpha \subset \Lambda^{p}_{\alpha} \subset \Lambda_{\alpha-1/p} \tag{3.2}$$

（这些嵌入都是连续的。）因此，空间 Λ^{p}_{α} 介于两个经典全纯平均 Lipschitz 空间之间。综上所述，

我们看到，对于所有全纯平均（积分）Lipschitz 空间，单位球都是 Gleason 可解的（这包括对角全纯 Besov 空间 $B_p = \Lambda^p_{\frac{n}{p}}{}^p$ 且 $p < \infty$ 和 $\frac{n}{p} < 1$ 的特殊情形）。

关于 Hardy-Sobolev 空间的 Gleason 可解性，Cho 和 Zhu 在 [CZ], 中讨论了两种情况：（1） $p \in (1, 2]$, 和（2） $p \in [2, \infty)$。对于情况（1），根据命题 3.6 的（i）以及[CZ], 的定理 5.2 的（c）和（b），我们有 $\Lambda^{p,\alpha}{}^p \subset H^p_\alpha \subset \Lambda^p_{,\alpha}{}^2 \subset \Lambda^p_\alpha$。对于情况（2），根据命题 3.6 的（i）以及 [CZ], 的定理 5.2 的（a）和（d），我们有 $\Lambda^{p,}{}^2_\alpha \subset H^p_\alpha \subset \Lambda^{p,}{}_\alpha{}^p \subset \Lambda^p_\alpha$。因此，对于所有 Hardy-Sobolev 空间，单位球也具有 Gleason 可解性。

接下来，我们证明 Jevti´c 和 Pavlovi´c 在[JP]中讨论的某些全纯（平均）Besov-Lipschitz特殊类具有 Gleason 可解性。为此，我们注意到，对于 $0 < \alpha < n$，若 ϕ 是 $(0, 1]$, 上的递增正连续函数，则空间 $\Lambda^p_{n,\phi}$ 包含 Hardy-Sobolev 空间 H^p_n，而空间 $\Lambda^{p,}{}_n{}^q{}_{,\phi}$ 包含 Besov-Hardy-Sobolev 空间 $H^{p,}{}_n{}^q$。此外，若函数 $x \mapsto \phi(x)/x^\alpha$ 在 $(0, 1]$, 上递增，则有 $\Lambda^p_{n,\phi} \subset \Lambda^p_\alpha$；事实上，根据 [JP]中的推论 1.9、(1.12) 和 (1.16)，我们有 $\Lambda^p_{n,\phi} \cong \mathrm{Lip}^p_{n,\phi}$。根据 [JP]中的推论 1.10、(1.11)、(1.18) 和 (1.19)，积分空间 $\Lambda^{p,}{}_n{}^q{}_{,\phi}$, $\Lambda^{p,}{}_\alpha{}^q$以及 $\mathrm{Lip}^{p\,q}_n{}_{,\phi}$也具有同样的性质。由于空间 $\Lambda^p_{n,\phi}$ 和$\Lambda^{p,}{}_n{}^q{}_{,\phi}$ 介于（Besov-）Hardy-Sobolev 空间与全纯

平均（Besov-）Lipschitz 空间（它们具有 Gleason 可解性）之间，因此可知，对于这些全纯（平均）Besov-Lipschitz特殊类，单位球具有 Gleason 可解性。

最后，容易得到 Hardy-Sobolev 空间和 Besov-Hardy-Sobolev空间中 (4.1)、(4.2) 以及 [Ch] 定理 4 的类似结果，从而说明单位球对于 Besov-Hardy-Sobolev空间（包括加权 Bergman 空间）是 Gleason 可解的，因为 Hardy-Sobolev 空间也是如此。

因此，总结上述讨论，我们得到以下

定理3.14。设 G 是 $\mathbb{C}^n$中的有界域。那么， G 对于 G上的以下全纯函数的Banach空间是 Gleason 可解的。

(i) G中的有界对称域上的全纯（Besov-）Lipschitz 空间；

(ii) $\mathbb{C}^n$中单位球上的全纯平均（Besov-）Lipschitz 空间和 Hardy-Sobolev 空间；

(iii) $\mathbb{C}^n$中单位球上的某些特殊类全纯混合范数（Bergman）空间（包括加权 Bergman 空间）；以及

(iv) 全纯（平均）Besov-Lipschitz空间的一些特殊类，例如空间$\Lambda^p_{n,\phi}$ 以及积分空间 $\Lambda^{p,q}_{n,\phi}$，其中函数 ϕ 是

如上，在 $\mathbb{C}^n$ 的单位球上。 □

4 有界全纯函数巴拿赫空间的 Corona 问题。

本节中，我们将像上一节处理 Gleason 可解性那样，求解各种有界全纯函数巴拿赫空间中的 corona 问题。我们采用多种（泛函分析）方法给出这些解，并针对 $\mathbb{C}^n$ 中若干合适的有界域，包括球和多圆盘。我们回顾一下，前文的定理 2.4（和推论 2.5）已经讨论了原始 Corona 问题在巴拿赫代数 $H^\infty(G)$ 中的解，其中G 是 $\mathbb{C}^n$ 中的某个伪凸域，也是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个多圆域（包括开单位球和多圆盘）；我们利用 Gleason 可解性和巴拿赫代数技巧得到了这一解。

我们注意到，Krantz 和 Li 用某个有界算子的语言重新表述了 Corona 问题：若要解决原问题 [KL1], ，该算子必须是满射。采用这种方法，他们成功解决了伯格曼空间上的 Corona 问题 $A^p(G)$ $0 < p < \infty$, 其中 G

是单位球，也是 $\mathbb{C}^n$ 中具有 C^3–边界的有界严格伪凸域（但不包括范围 $1 < p < \infty$）；对于 Hardy空间$H^p(G)$ $0 < p < \infty$，其中 G 是 $\mathbb{C}^n$ 中具有 C^3–边界的有界严格伪凸域；以及对于全纯 Zygmund 空间 $H\Lambda_\alpha(G)$ $0 < \alpha < \infty$，其中 G 是 $\mathbb{C}^n$ 中具有C^3–边界的有界严格伪凸域（参见 [KL1] 中的定理 1.1–1.4）。我们指出，在定理 1.1–1.3 中，Corona 数据 $f = (f_1, \ldots, f_m)$ 属于 $H^\infty(G)$，但很容易看出，他们也可以将 Corona 数据取自相应的巴拿赫空间，因为对于 $1 \leq p < \infty$，$H^\infty \hookrightarrow H^p$ 连续。我们还指出，他们未能解决原始的 Corona 问题（参见 [KL1]的注 1）；此外，他们使用了$\overline{\partial}$–技巧来证明这些定理，而该技巧并非总能用于任意严格伪凸域（另见[V]）。实际上，我们证明有界算子 S_f 是满射，从而在以下情形中解决原始的 Corona 问题

定理4.1. 设 G 是 $\mathbb{C}^n$ 中具有 C^3- 边界的严格伪凸域，或是 $\mathbb{C}^n$ 中的多圆域。设 $f = (f_1, \ldots, f_m)$ 是来自乘积空间 $H^\infty(G)_m$ 的 Corona 数据。那么 S_f : $H^\infty(G)_m \to H^\infty(G)$ 是满射。特别地，Corona 问题在 $H^\infty(G)$ 中成立。

P证毕。这一证明实际上略微反映了上文定理 2.3 的证明

。首先，我们注意到 $H^\infty(G)$ 是一个以 $\mathcal{F}_n$ 中幂级数构成的半单巴拿赫代数，满足 [P4], 中引理 3.1 的假设，因为根据上文定理 2.3， G 是 Gleason 可解的，并且 $\bigcap_{k\geq 1}\overline{M^k}=\{0\}$。现在，按照 [P4], 中引理 3.1 的 (iii) 的证明，我们看到乘积空间 $H^\infty(G)_m$ 确实是一个带单位元的巴拿赫代数；其代数运算按坐标进行。此外，稍作修改后，我们还可以看到，对于每个 $g=(g_1,\ldots,g_m)\in H^\infty(G)_m$， $T_g:=\oplus_{i=1}^m T_{g_i}$, $\oplus_{i=1}^m h_i\mapsto\sum_{i=1}^m(f_i-g_i)h_i$ 是 $H^\infty(G)_m$ 上的有界线性映射，其中 $T_{g_i}:\ h\mapsto(f_i-g_i)h$ 是 $H^\infty(G)$ 上的有界线性算子。现在，给定 Corona 数据 $f=(f_1,\ldots,f_m)$，令 I 为 $H^\infty(G)$ 中的代数有限生成理想。那么， I 是一个非真理想，当且仅当 I 不包含于 $H^\infty(G)$ 的任何极大理想中，并且对于某个 $h=(h_1,\ldots,h_m)$，有 $\sum_{i=1}^m f_ih_i=1\in H^\infty(G)_m$。也就是说， S_f 是满射（显然，对于 Corona 数据 $f=(f_1,\ldots,f_m)$， S_f 显然是有界线性映射；事实上，$S_f=T_0$）。□

接下来，我们回顾一下：我们已经讨论过半单局部 Stein-巴拿赫代数 $\mathrm{Lip}_H^\alpha(G,d)$ 上的 Corona 问题的解，其中$\alpha\in(0,1]$ 且 G 是 $\mathbb{C}^n$中的相对紧“伪凸”域，如引理 3.2 所述（包括相对紧对称域，特别是单位球）。事实上，在这种情况下，我们得到了更好的结果：

相对 Gel'fand 拓扑与 G 的 $d-$和 $\sigma-$ 拓扑等价。另一种方法是采用定理 2.4 中讨论的巴拿赫代数技巧，或者像上文那样证明 S_f 是满射，从而为这些代数建立冠定理。特别是，我们解决了 Fornæss 和 Øvrelid [FO] 提出的问题：对于 $\mathbb{C}^2$ 中有限型伪凸域的 Gleason 可解性（特别是具有实解析边界的此类域）；见上文定理 3.13。此外，根据引理 3.2，冠定理在 $\mathrm{Lip}^{\alpha}_{H}(G, d)$ 中成立，其中 $\alpha \in (0, 1]$ 且G 是 $\mathbb{C}^n$中的球或多圆盘。这将推广 [KL2]关于多圆盘的结果，为我们提供一个非线性解（参见他们在 [KL2]参考文献之前的评论）。

现在，我们使用 §3.2 中讨论的经典死端空间方法，在 $\mathbb{C}^n$ 中的有界对称域上建立各种有界全纯函数巴拿赫空间的冠定理（包括单位球）。我们不再重复这些空间的论证，但要指出，如果 F 是包含关系中的中间空间，而我们希望针对该空间中的给定 Corona 数据证明冠定理，那么显然我们在 F_0 中也有相同的 Corona 数据（因此在 F_∞ 中也有，因为我们有 $F_0 \cong F_\infty$）。现在，由于冠定理在 F_∞ 和 F_0 中都成立，因此它

在 F 中也成立。因此，我们得到如下

定理 4.2. 设 G 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个有界域。那么，对于 G 上以下有界全纯函数巴拿赫空间， G 的冠定理成立。

(i) G 中有界对称域上的全纯函数（Besov-）Lipschitz空间;

(ii) $\mathbb{C}^n$ 中单位球上的全纯平均（Besov-）Lipschitz空间和 Hardy-Sobolev 空间;

(iii) $\mathbb{C}^n$ 中单位球上的一些特殊类全纯混合范数（Bergman）空间（包括加权 Bergman 空间）；以及

(iv) 多复变函数论中全纯（平均）Besov-Lipschitz空间的若干特殊类, 例如空间$\Lambda^p_{n,\phi}$ 以及积分空间 $\Lambda^{p,q}_{n,\phi}$，其中函数 ϕ 如上所述，定义在 $\mathbb{C}^n$中的单位球上。□

5 关于我们的方法和未解决问题的总结。

正如我们在 §1 中所解释的，给定有限个 Corona 数据，若要在多复变函数论中求解 Corona 问题，就必须求解 B´ezout 方程（代数表述）；而分析学家大多考虑求解∂–方程的方法（经典分析方法）。然而，过去在求解 $H^\infty(G)$ 的原始 Corona 问题时，这种方法未能奏效，即使 G是 $\mathbb{C}^n$ [V]中的开单位球。此后，若要通过考虑其等价表述（拓扑表述）来解决这一问题，可以考虑求解理想问题的方法（该问题具有代数性质）。因此，这种方法清楚地表明了多复变函数论情形下 Corona 问题与 Gleason 问题之间可能存在的联系。然而，据我们所知，直到我们首次在[P4], 的定理 4.3 中考察这种联系之前，没有分析学家采取或考虑过这种方法；显而易见，这并不令人意外。随后，我们对 Clos 的结果的推广也发挥了重要作用：当人们想要利用巴拿赫代数的方法求解理想问题时，它通过某些区域 G 对 $H^\infty(G)$ 的 Gleason 可解性填补了这一空白

技巧（实际上，它给出了理想问题的充要条件 [DKSTW, §7]）。因此，我们通过讨论这两个问题之间的等价性，认为几何函数论中的这两个重要问题存在非常紧密的联系。

此时，人们可能会想，为什么 Krantz 和 Li 的一种非常简短且优雅的思路 [KL1]，在运用经典分析方法求解 ∂–方程时，却无法解决原始的 Corona 问题。答案同样在于，我们通过 [P4] 中引理 3.1 的证明方法（其中 Gleason 可解性是两个假设之一）以及巴拿赫代数技巧，弥补了这一差距。

最后，我们对所采用的方法作一些评论：我们结合巴拿赫代数方法与经典死端空间方法，来解决多复变函数论中关于某些区域上的（有界）全纯函数的各种熟知巴拿赫空间的两个问题。首先，我们指出，由于这两个问题都具有代数性质，显然，对于我们要解决这两个问题的（有界）全纯函数所构成的底层巴拿赫空间，并不需要其具有巴拿赫代数结构；换言之，分析学家确实曾运用各种经典分析方法，解决某些区域上的某些巴拿赫空间的这两个问题。

然而，正如我们上文所指出的，在多复变函数论情形下，这些经典方法既困难又复杂。不过，在 §3 中，我们首先针对某些区域上的有界全纯函数的利普希茨代数 $\mathrm{Lip}^{\alpha}_{H}(G, d)$，在 G 中建立这两个问题，其中 $\alpha \in (0, 1]$。这为经典死端空间方法提供了具体基础，以便讨论多复变函数论中某些区域上的各种熟知巴拿赫空间的（有界）全纯函数的这两个问题的解法（而且，这组巴拿赫空间是互补的，具体而言，我们通常不再重复上文提及的那些已有这两个问题解法的巴拿赫空间）。

未解决问题。接下来，我们将结合本文采用的方法，讨论一些未来的研究方向和未解决问题。

(1) 在本文中，我们仅考虑某些区域 G from $\mathbb{C}^n$。正如第 §1 节所述，我们的抽象（泛函分析）方法 from [P4] 已用于推导定理 4.3 或推论 4.4 中半单局部 Stein-巴拿赫代数的 Gleason A-性质，其中 Y 可以是复流形（有限维）中的一个区域（即一个（约化的）斯坦空间）。此外，巴拿赫代数方法也适用于更一般的情形。因此，我们希望

为定义在这些区域上的各种局部 Stein-巴拿赫代数的有界全纯函数求解这类区域上的 Corona 问题。

(2) 在 [P4], 的 4.4 节中，我们针对无限维情形下的巴拿赫代数 $H^\infty(B_X)$ 和 $\mathcal{A}_u(B_X)$（ $H^\infty(B_X)$ 的一个子代数）提出了 Gleason 问题（以及 Gleason 问题的可解性问题），其中 B_X 是复 Banach 空间 X 的开单位球。进一步发展我们的方法（即抽象的（泛函分析）方法，以及两个问题之间的等价性，从而解决这两个巴拿赫代数中的这两个问题）很有意义。

(3) Hartogs 三角形 T 是否对 $H^\infty(T)$（或 $A(T)$）Gleason 可解? 类似地，对于 $H^\infty(G)$，冠定理是否成立，其中 G 是虫域或 Hartogs 三角形? 请注意，Hartogs 三角形没有光滑边界，而虫域没有 Stein 邻域基 [DF]。

参考文献

[A] R. M. Aron, 《有限维与无限维球上的有界解析函数代数》, 高级泛函分析及其应用研讨会讲座系列, 海得拉巴印度理工学院, 2020 年。

[ACG] R. M. Aron、B. J. Cole 和 T. W. Gamelin, 巴拿赫空间上解析函数代数的谱, 《J. Reine Angew. Math.》415（1991）, 51–93。

[ADLM] R. M. Aron、V. Dimant、S. Lassalle 和 M. Maestre, 无限维全纯函数代数的 Gleason 部分, 《Rev. Mat. Complut.》33（2020）, 415–436。

[AFGM] R. M. Aron、J. Falc´o、D. Garc´ıa 和 M. Maestre, 纤维中的解析结构, 《Studia Math.》240（2018）, 101–121。

[BF] U. Backlund 和 A. F¨allstr¨om, 莱因哈特域的格里森性质, 《Math. Ann.》308（1997）, 85–91。

[Be] F.Beatrous Jr, H ¨older估计：带支集条件的 ∂-方程, Pacific J. Math. 90 (1980), 249-257.

[BO] A. Beddaa 和 M. Oudadess，关于赋范代数中 A. Wilansky 提出的一个问题，Studia Math. T. XCV (1989), 175-177.[B] B. Berndtsson，一个光滑伪凸域 $\mathbb{C}^2$ ，在该域中L^∞–的估计不成立，Ark. Mat. 31 (1993), 209-218.[BCL] B. Berndtsson、S. Y. Chang 和 K. C. Lin，多圆盘中的插值序列，Trans. Amer. Math. Soc. 302 (1987), 161-169.[Br] A. Brudnyi, 黎曼曲面上 H^∞ 的 Corona 问题，Fields Institute Communications 72 (2014), 31-45.[C] L. Carleson，以有界解析函数插值及 Corona 问题，Ann. Math. (2) 76 (1962), 547-559.[Ca] R. L. Carpenter，F-代数中的主理想，Pacific J. Math. 35 (1970), 559-563.[Ch] W-Y. Chen，有界对称域上 $\mathbb{C}^n$中的全纯函数的 Lipschitz 空间，J. Math. Anal. Appl. 81 (1981), 63-87.

[CZ] H. R. Cho 和 K. Zhu，单位球上的全纯平均 Lipschitz 空间与 Hardy-Sobolev 空间，《复变量与椭圆方程》57（2012），995-1024。

[CKK] H. R. Cho、H. W. Koo 和 E. G. Kwon，$\mathbb{C}^n$ 中单位球上的全纯平均 Lipschitz 空间与 Besov 空间，《韩国数学会志》

[Cl] T. G. Clos，在一类有界伪凸域上 Gleason 问题的可解性，《复分析与算子理论》16，第 58 期（2022），1-9。

[CI] T. G. Clos 和 A. J. Izzo，由全纯函数与共轭全纯函数生成的代数的逼近，《落基山数学杂志》52（2022），1289-1294。

[CGJ] B. J. Cole、T. W. Gamelin 和 W. B. Johnson，《巴拿赫空间单位球上的纤维中的解析圆盘》，《密歇根数学杂志》39 (1992), 551-569.

[DPR] H. G. Dales、S. R. Patel 和 C. J. Read，《幂级数的 Fr´echet 代数》，载于：Loy, R.J.、Runde, V.、Soltysiak, A.（编），《Banach Al-

gebras 2009》，第 123-158 页，Banach Center Publi. 91，波兰科学院，华沙，2010 年。

[DF] K. Diederich 和 J. E. Fornss，伪凸域：具有非平凡邻域壳的一个例子，《数学年刊》225（1977年），275-292。

[DKSTW] R. G. Douglas、S. G. Krantz、E. T. Sawyer、S. Treil 和 B. D. Wick（编），Corona问题：算子理论、函数论与几何学之间的联系丛书，Fields Institute Communications，72（2014），1-29。

[DK] A. K. Dronovand 和 V. M. Kaplitskii，关于核 K¨othe 空间的有补子空间中基的存在性（d_1），（俄文），《数学文集》209（2018年），50-70；译文载于《数学文集》209（2018），1463-1481。

[F] T. M. Flett，《圆与圆盘上函数的 Lipschitz空间》，J. Math. Anal. Appl. 39 (1972), 125-158。

[FO] J. E. Fornæss 和 N. Øvrelid，$A(\Omega)$ 中的有限生成理想，《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔）33（1983年），77-85。

[FS] J. E. Fornæss 和 N. Sibony， $\mathbb{C}^2$ 中满足冠定理和 L^p 估计失效的光滑伪凸域，《复分析与几何》，209-222，大学数学丛书，普莱努姆，纽约，1993年。[G] J. B. Garnett，《有界解析函数》，学术出版社，纽约，1981。[Gl] A. M. Gleason，巴拿赫代数中的有限生成理想，《数学与力学杂志》13（1964年），125-132。[Go] H. Goldmann，《一致 Fr´echet 代数》，NorthHolland 出版公司，阿姆斯特丹，1990。[HS] M. Hakim 和 N. Sibony，弱伪凸正则有界域中 $A(\Omega)$ 的谱，《泛函分析杂志》37（1980），127-135。[H1] G. M. Henkin，严格伪凸域中全纯函数的积分表示及其若干应用，《苏联数学文集》7（1970），597-616（英文）。

[H2] G. M. Henkin, 《严格伪凸域中的函数逼近及 Z.L. Leibenzon 定理》, 《波兰科学院通报》数学、天文学与物理学系列 19（1971年），37-42页（俄文）。[Ho] K. Hoffman, 《解析函数的巴拿赫空间》, Prentice-Hall，恩格尔伍德克利夫斯，新泽西州，1962年。[Hu] Z. Hu, 《凸域中调和混合范数空间和 Bloch 空间的 Gleason 问题》, 《数学通讯》279（2006年），164-178页。[J] P. Jak´obczak, 《严格伪凸集乘积中的延拓算子与分解算子》, 《波兰数学年刊》44（1984年），219-237页。[JP] M. Jevti´c 和 M. Pavlovi´c, 《单位球上全纯函数的 Besov-Lipschitz 空间与平均 Besov-Lipschitz 空间》, 《Potential Analysis》38（2013年），1187-1206页。[J1] B. E. Johnson, 《（完备）范数拓扑的唯一性》, 《美国数学会通报》73（1967年），537-539页。

[J2] B. E. Johnson, 《与连续线性算子可交换的线性算子的连续性》, Trans. Amer. Math. Soc. 128（1967年），88- 102页。[KN] N. Kerzman 和 A. Nagel, 《某些函数代数中的有限生成理想》, 《泛函分析杂志》7（1971年），212-215页。[K1] S. G. Krantz, 《Lipschitz 空间、函数的光滑性与逼近理论》, 《Expositiones Math.》3（1983年），193-260页。[K2] S. G. Krantz, 《关于 Stein 定理》, Trans. Amer. Math. Soc. 320（1990年），625-642页。[K3] S. G. Krantz, 《多复变函数论》, AMS Chelsea Publishing, 罗得岛州普罗维登斯, 2001年, 1992年版重印。[K4] S. G. Krantz, 《几何函数论基石：复分析探索》, Birkh¨auser Publishing, 波士顿, 2006年。[K5] S. G. Krantz, 《含两项数据的 Corona 问题》, Proc. Amer. Math. Soc. 138（2010年），3651-3655页。

[K6] S. G. Krantz, 《多复变数中的 Corona 问题》, Fields Institute Communications 72（2014）, 107-126。[KL1] S. G. Krantz和 S. Y. Li, 《$\mathbb{C}^n$中强拟凸域上的 Corona 问题的一些备注》, Illinois J. Math. 39（1995）, 323-349。

[KL2] S. G. Krantz和 S. Y. Li, 《多圆盘中具有 Lipschitz数据的 Corona 问题的显式解》, Pacific J. Math. 174（1996）, 443-458。

[KL3] S. G. Krantz 和 S. Y. Li, 《子空间中的函数分解及其在 Corona 问题中的应用》, Indiana Univ. Math. J. 45（1996）, 83-102。

[Li] I.Lieb, 《严格伪凸域上的柯西-黎曼微分方程：连续边界值》, 《数学年刊》199 (1972), 241-256.[L] Y. Liu, 混合范数空间上 Bergman 型算子的有界性, Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2002), 2363-2367.

[M] H. Mirkil，Holder 和 Lipschitz 函数的连续延拓，Canad. J. Math. 12 (1960), 674-685.[N] A.Noell，有限型域上的 Gleason 问题，Complex Variables Theory Appl. 4 (1985), 233-241.[O] J. M. Ortega，Bergman-Sobolev空间中的 Gleason 问题，Complex Variables Theory Appl. 20 (1992), 157-170.[P1] S. R. Patel，Fr ´echet 代数、形式幂级数与自动连续性理论，Studia Math. 187 (2008), 125-136.[P2] S. R. Patel，Fr ´echet 代数、形式幂级数与解析结构，J. Math. Anal. Appl. 394 (2012), 468-474.[P3] S. R. Patel，某些 Fr ´echet 代数上的 Fr ´echet 代数拓扑的唯一性，Studia Math. 234 (2016), 31-47.[P4] S. R. Patel，关于多复变函数论中 Gleason 问题的泛函分析方法，Banach J. Math. Anal. 16, article no. 47 (2022), 1-17.[Pr] O. Preda，带有次水平集相对位置限制的 Corona 问题，Arch. Math. (Basel) 105 (2015), 563-569.

[R] E. Ramirez de Arellano，《复分析中的除法问题与边界积分表示》，《数学年刊》184 (1970), 172-187（德文）。[Re] T. T. Read，巴拿赫代数中极大理想的幂与解析结构，Trans. Amer. Math. Soc. 161(1971), 235-248。[RS1] G. Ren 和 J. Shi，混合范数空间上的 Bergman 型算子及其应用，《中国科学：数学》B辑 18 (1997), no. 3, 265-276，中文摘要见《中国科学：数学》A辑 18 (1997), no. 4, 527。[RS2] G. Ren 和 J. Shi, 蛋形域上加权 Bergman 空间中的 Gleason 问题，《中国科学》A辑 41 (1998), no. 3, 225-231。[Ri] C.E. Rickart，巴拿赫代数中的范数唯一性问题，Ann. Math. 51 (1950), 615-628。[Ro] H. Rossi，多复变数中的全纯凸集，Ann. Math 74 (1961), 470-493。[Ru] W. Rudin，$\mathbb{C}^n$上的函数论，《数学经典》，施普林格出版社，柏林，2008年，1980年版重印。

[Sa] S.S.ahut˘oglu，强 Stein 邻域基，《复变函数与椭圆方程》57 (2012), 1073-1085。[S1] N. Sibony，光滑边界伪凸域的 Corona 问题，Ann. Math. (2) 126(1987), 675-682。[S2] N. Sibony，弱伪凸域的若干方面，Proc. Symp. Pure Math. 52 (1991), 199-231。[Sh1] D. R. Sherbert，Lipschitz 函数的巴拿赫代数，Pacific J. Math. 13 (1963), 1387-1399。[Sh2] D. R. Sherbert，Lipschitz 函数巴拿赫代数中理想与点导数的结构，Trans. Amer. Math. Soc. 111 (1964), 240-272。[T] A. Tikaradze，强拟凸域上的 Corona 问题，Analysis Math. 48 (2022), 1209-1212。[V] N. Th. Varopoulos，有界平均振荡函数与 ∂–方程，Pacific J. Math. 71 (1977), 221-273。[X] J. Xiao，Sobolev 空间乘子的 ∂–问题，Manuscripta Math. 97 (1998), 217-232。

[Z] K. H. Zhu, 《Bergman 空间、Bloch 空间与 Gleason 问题》, Trans. Amer. Math. Soc.309（1988年），253-268。

地址：印度古吉拉特邦瓦德万市 C. U. Shah 大学数学系。

电子邮箱：srpatel.math@gmail.com，coolpatel1@yahoo.com