关于广义 Drazin 逆与 GD-star矩阵

Amit Kumar[μ, a]、Vaibhav Shekhar[†, b] 和 Debasisha Mishra[*, a]

[a]数学系，赖布尔国家理工学院，恰蒂斯加尔邦，印度。[b]数学系，印度理工学院德里分校，印度。电子邮箱[μ]: amitdhull513@gmail.com 电子邮箱[†]: vaibhav@maths.iitd.ac.in 电子邮箱[*]: kapamath@gmail.com。

arXiv:2302.03445v1 [math.RA] 7 Feb 2023

摘要

受 Wang 和 Liu 的研究启发 [《线性代数及其应用》，488 (2016年) 235-248；MR 3419784] 以及 Mosi´c [《数学结果》，75(2) (2020年) 1-21；MR4079761],我们进一步探讨 GD 逆，并利用矩阵的 GD 逆，为方阵引入两个新类别，分别称为 GD-star（广义 Drazin-star）和 GD-star-one（广义 Drazin-star-one）。随后，我们探究它们的各种性质，并用各种广义逆对其进行刻画。我们利用核-幂零分解和 Hartwig-Spindelb¨ock 分解，给出了 GD-star矩阵的一种表示。我们还利用这类矩阵定义了一种称为 GD-star 序的二元关系。此外，我们为 star-GD 矩阵类推导出了一些类似结果。此外，我们还获得了 GD 逆的逆序律和正序律，以及其单调性判据。

关键词：广义逆；GD逆；广义Drazin-星矩阵；Drazin 星矩阵；偏序。

数学主题分类：15A09，15A24，15A21。

1. 引言与动机

由于广义逆在多个领域具有广泛的应用，相关文献数量相当庞大。这些广义逆被用于解决数值分析、统计学、神经计算、化学方程、编码理论、机器人学等领域中的问题。感兴趣的读者可参阅 [3], [6], [9], [25], [26], [28], [32], [34], 和 [37] ， 了解矩阵广义逆的若干应用。

本文中，我们用 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 表示所有 $m\times n$ 复矩阵的集合。对于给定的 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 记号 A^*, $R(A)$, $N(A)$ 和 P_A 分别表示 A 的共轭转置、 A 的值域、 A 的零空间, 以及到 A 的值域上的正交投影。对于每个 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 满足以下四个矩阵方程的唯一矩阵 $X\in\mathbb{C}^{n\times m}$:

$$(1)AXA=A,\ (2)XAX=X,\ (3)(AX)^*=AX,\ \text{ and }\ (4)(XA)^*=XA$$

称为 A 的 Moore-Penrose 逆 [35], 记作 $A^\dagger$。Moore-Penrose 逆可用于求解不相容线性系统 [6] 的最小范数最小二乘解。满足上述四个矩阵方程任意组合的矩阵 $X\in\mathbb{C}^{n\times m}$ 的集合记为 $A\{i,j,k,l\}$, 其中$i,j,k,l\in\{1,2,3,4\}$。例如， $A\{1\}$ 表示矩阵方程 (1) 的所有解 X 的集合。满足方程 (1) 的 X 称为 A 的第一逆或内逆，记作 A^- 或 $A^{(1)}$。类似地， $A\{1,3\}$ 表示满足第一个和第三个矩阵方程的所有解的集合。我们将 $A\{1,3\}$ 中的一个元素记为 $A^{(1,3)}$。对于$A\in\mathbb{C}^{m\times m}$, 使得 $rank(A^k)=rank(A^{k+1})$ 成立的最小非负整数称为矩阵 A 的指标，记作 $ind(A)$。设 $A\in\mathbb{C}^{m\times m}$, 满足方程 $XAX=X, XA=AX$ 和 $A^{k+1}X=A^k$ 的唯一矩阵$X\in\mathbb{C}^{m\times m}$ 称为矩阵 A 的 Drazin逆 [6] ， 记作 A^D。这里， k 表示矩阵 A 的指标。Drazin逆用于求解奇异微分方程[6]。若 $ind(A)=1$, 则满足相同矩阵方程的唯一 X 称为群逆。更准确地说，对于指标为 $k=1$ 的 $A\in\mathbb{C}^{m\times m}$ ， 存在唯一矩阵X，称为 A 的群逆，满足 $XAX=X$, $XA=AX$ 和 $A^2X=A$。矩阵 A 的群逆记作 $A^\#$。群逆有助于解决涉及马尔可夫链 [6] 的统计问题（例如平稳概率等）。1978年，Campbell 和 Meyer [10] 通过引入弱 Drazin 逆，对经典 Drazin逆作了一些修改。例如，作者指出，如果有一个分块三角矩阵，计算弱 Drazin 逆会比计算 Drazin逆更容易。下面的结果是弱 Drazin 逆的一个应用。

定理 1.1. (*[10]*) 如果 T 是一个 m 状态遍历链的转移矩阵，并且

$A = I - T$，那么对于 A的任意广义 Drazin 逆， $I - A^{WD}A$ 的各行都等于 T 的唯一固定概率向量w^* ，其中 A^{WD} 表示 A的一个弱 Drazin 逆。

此后，又引入了若干其他广义逆，例如 Bott-Duffin 逆 [6], 核逆 [3] 和 MPCEP 逆 [34], 等。

接下来回顾 Wang 和 Liu [38] 于 2016年 引入的一类特殊弱 Drazin 逆的定义，称为广义 Drazin（或 GD）逆。对于 $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$，满足以下矩阵方程的矩阵 $X \in \mathbb{C}^{m\times m}$

$$AXA = A,\ (6)XA^{k+1} = A^k \text{ and } (7)A^{k+1}X = A^k$$

称为 A的 GD 逆，其中 $ind(A) = k$。记作 $X = A^{GD}$。与 Drazin逆 不同，矩阵的 GD 逆不一定唯一。矩阵 A的所有 GD 逆组成的集合记为 $A\{GD\}$。2020年，Hern´andez 等人 [24] 引入了一种新的广义逆，称为 GDMP 逆，它也不唯一。下面给出 GDMP 逆的定义。设 $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 和 $ind(A) = k$。对于每个 $A^{GD} \in A\{GD\}$， A的一个 GDMP 逆记作 $A^{GD\dagger}$，它是一个 $m \times m$ 矩阵 $A^{GD\dagger} = A^{GD}AA^{\dagger}$。符号 $A\{GD\dagger\}$ 表示 A的所有 GDMP 逆组成的集合。

对于两个可逆矩阵 A 和 B，乘积 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$和 $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ 的逆分别称为逆序律和正序律。对于可逆矩阵，逆序律总是成立，而正序律并非总是成立。此外，这些定律通常不适用于广义逆。在广义逆理论中，一个重要的基础研究主题是考察逆序律、正序律和加法性质等。早在1966年，Greville [21] 就给出了一些充分条件，使得 Moore-Penrose 逆满足逆序律，即 $(AB)^{\dagger} = B^{\dagger}A^{\dagger}$。近些年来，若干作者也针对不同的广义逆探讨了同一问题。例如，Xiong 和 Zheng [40], 以及 Liu 和 Xiong [29] 分别针对 {1,2,3}-逆和 {1,2,4}-逆给出了逆序律和正序律。2016年，Wang 等人 [39] 给出了一些关于 Drazin逆的逆序律结果。Deng [15] 研究了希尔伯特空间上群逆的逆序律。2018年，Castro-Gonz´alez 和 Hartwig [11] 给出了一些关于 Moore-Penrose 逆正序律的结果，即 $(AB)^{\dagger} = A^{\dagger}B^{\dagger}$. 最近，Kumar 等人 [27] 为 GD逆和 GDMP 逆的逆序律与正序律提出了若干充分条件。逆序律在 Karmarkar 算法中有应用，也用于分析马尔可夫链（见 [30, 11]）。关于正序律的若干应用

的广义数值线性代数中广义逆的应用，可参阅 [1], [20] 和 [41].

广义逆在矩阵偏序和预序的研究中发挥着重要作用。这些序关系对于短算子的研究至关重要，而短算子的研究源于对 n 端口电气网络阻抗矩阵的研究（更多详情见 [32]）。下面回顾偏序的定义。若二元关系 x（例如）具有自反性、反对称性和传递性，则称其为偏序。偏序最初由环论提出 [7]。在矩阵情形下，若矩阵 A 在偏序 x 下小于 B，则记为 $A \leq^x B$。若二元关系具有自反性和传递性，则称其为预序。在矩阵情形下，当矩阵为幂零矩阵时，预序与偏序一致。偏序和预序理论也应用于模糊集理论，例如用于刻画连续三角范数类 [19]。关于偏序在统计学、电气网络等诸多领域中的不同应用，请参阅 [4], [5], [32] 和 [37]。下面回顾文献中提出的一些重要矩阵偏序和预序。

(a) $A \leq^- B$，即 $AA^- = BA^-$ 和 $A^-A = A^-B$ 称为减偏序 [17]。(b) $A \leq^\# B$，即 $AA^\# = BA^\#$ 和 $A^\#A = A^\#B$ 称为群偏序 [31]。(c) $A \leq^* B$，即 $AA^* = BA^*$ 和 $A^*A = A^*B$ 称为星偏序 [16]。(d) $A \leq^D B$，即 $AA^D = BA^D$ 和 $A^DA = A^DB$ 称为 Drazin预序 [32]。

近年来，文献中引入了一些新的矩阵类，用于求解某些矩阵方程，并定义了若干偏序。沿着这一方向，Mosi´c [33] 引入了一种新的矩阵类，称为 Drazin 星矩阵，具体如下。设 $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 的指标为 k，Drazin 星矩阵记为 $A^{D,\ *}$，它是一个 $m \times m$矩阵 $A^{D,\ *} = A^DAA^*$。受这项工作的启发，我们引入两种新的矩阵类，分别称为广义 Drazin-star（或 GD-star）矩阵和 GD-star-one 矩阵。随后，我们研究它们的性质。我们证明，所提出的矩阵类可用于求解某些矩阵方程和线性方程组。此外，我们还获得了这些矩阵类与一些著名的广义逆及矩阵类重合的充分条件。另外，我们基于所提出的矩阵类引入一种二元运算，并给出其若干刻画。

本文旨在提出两类新的矩阵并研究其性质。全文组织如下。第2节分为两个小节。首先，我们利用核-幂零

分解重构矩阵 ¨of $*_1$ 的表示，并给出GD逆延拓的一些结果（即GDMP 逆的相关结果）。随后，我们获得了GD逆和GDMP 逆的谱结果。第二个小节，即小节2.2，确立了GD逆的逆序律与正序律。第3节进一步分为四个小节，以便更好地进行阐述。小节3.1提出了一类新的矩阵，我们称之为GD-star矩阵。之后，我们利用核-幂零分解和Hartwig-Spindelb¨ock分解，找到了GD-star矩阵的不同表示。利用第2节的结果，我们获得了一些关于GD-star矩阵的结果。在第3.2节中，我们引入了一种称为GD-星序的二元运算，并讨论其刻画。小节3.3给出了关于对偶GD-star的一些结果，这些结果类似于小节3.1中所建立的结果。最后，在第3.4节中，我们引入了另一类称为GD $*_1$ 矩阵的矩阵，并研究其性质。

2. 关于 GD 和 GDMP 逆的一些结果

本节分为两个小节。第一个小节讨论 GD 逆的一种表示。随后，我们给出一些关于 GD 和 GDMP 逆的谱结果。此外，我们还建立了 GD 逆的单调性条件。在第二个小节中，我们讨论 GD 逆的逆序律与正序律。

2.1. 关于 GD 和 GDMP 逆的进一步结果

设 $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$。众所周知， A 可以酉相似于一个分块三角矩阵，其对角块中包含一个非奇异分量和一个幂零分量。非奇异分量称为核，因此这种分解称为核-幂零分解。 A 的核-幂零分解为

$$A = P\begin{bmatrix} C & S \\ O & N \end{bmatrix} P^*, \tag{2.1}$$

其中， P 是一个酉矩阵， S 是某个适当大小的矩阵。核-幂零分解用于定义矩阵的偏序（例如，减序、群序和 Drazin序）（见 [32]）。现在，我们利用式（2.1）重构矩阵 A 的 A^{GD} 表示。下面的结果与此相关。

定理2.1. 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 具有(2.1)的形式，其中 $ind(A) = k$。那么，

$$A^{GD} = P\begin{bmatrix} C^{-1} & C^{-(k+1)}(\widehat{T}' - \widehat{T}N^-) \\ O & N^- \end{bmatrix} P^*, \tag{2.2}$$

$_{k-1}$其中 P是酉矩阵，且 $\widehat{T}' - \widehat{T}N^- = -C^k SN^- + \sum C^j SN^{k-j-1}(I - NN^-)$。
$_{j=0}$

在下一个结果中，我们证明 $A^{GD}AA^D = A^D$。

定理 2.2. 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 和 $ind(A) = k$。那么，方程组

$$XA = AX,\ XAX = X,\ and\ A^{k+1}X = A^k$$

有一个形如 $X = A^{GD}AA^D$ 的解，即 $A^{GD}AA^D = A^D$。

证明。假设 $X = A^{GD}AA^D$。那么， $AX = AA^{GD}AA^D = AA^D$。此外，

$$\begin{aligned} XA &= A^{GD}AA^DA \\ &= A^{GD}A^{k+1}(A^D)^{k+1}A \\ &= A^k(A^D)^{k+1}A \\ &= A^{k+1}(A^D)^{k+1} \\ &= AA^D. \end{aligned}$$

因此， $AX = XA$。此外，

$$\begin{aligned} XAX &= A^{GD}AA^DAA^{GD}AA^D \\ &= A^{GD}AA^DAA^D \\ &= A^{GD}AA^D \\ &= X, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} A^{k+1}X &= A^{k+1}A^{GD}AA^D \\ &= A^kAA^D \\ &= A^{k+1}A^D \\ &= A^k. \end{aligned}$$

因此， $X = A^{GD}AA^D$ 是 A的Drazin逆。根据Drazin逆的唯一性，可得 $X = A^{GD}AA^D = A^D$。 □

同样， A^DAA^{GD} 也是 Drazin逆。Hern´andez 等人 [24] 证明，GDMP 逆是方程组 $XAX = X$、 $AX = AA^\dagger$ 和 $XA^k = A^{GD}A^k$的一个解。受这一结果启发，我们将证明 GDMP 逆是 A的 $\{1,2,3,6\}$-逆。

定理 2.3. 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 和 $ind(A) = k$。那么，方程组

$$(AX)^* = AX,\ AXA = A,\ XAX = X,\ and\ XA^{k+1} = A^k$$

具有形如 $X = A^{GD}AA^{\dagger}$ (GDMP) 的解。

证明。令 $X = A^{GD}AA^{\dagger}$。现在， $AX = AA^{GD}AA^{\dagger} = AA^{\dagger}$。因此，$(AX)^* = AX$。进一步地，

$$\begin{aligned} AXA &= AA^{GD}AA^{\dagger}A \\ &= AA^{\dagger}A \\ &= A, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} XAX &= A^{GD}AA^{\dagger}AA^{GD}AA^{\dagger} \\ &= A^{GD}AA^{GD}AA^{\dagger} \\ &= A^{GD}AA^{\dagger} \\ &= X, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} XA^{k+1} &= A^{GD}AA^{\dagger}A^{k+1} \\ &= A^{GD}AA^{k} \\ &= A^{GD}A^{k+1} \\ &= A^{k}. \end{aligned}$$

□

下面的结果可以通过与上述定理类似的步骤证明。

定理 2.4。设 $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 和 $ind(A) = k$。则，方程组

$$(XA)^* = XA,\ AXA = A,\ XAX = X,\ and\ A^{k+1}X = A^k$$

具有形如 $X = A^{\dagger}AA^{GD}$ (MPGD) 的解。

注记 2.1。由于 GDMP 逆也是一个 $\{1,3\}$-逆，因此 $A^{GD,\ \dagger}b$ 给出方程组 $Ax = b$ 的最小二乘解。类似地， $Ax = b$ 的最小范数解由 $x = A^{\dagger,\ GD}b$给出，其中 $A^{\dagger,\ GD} \in A\{\dagger, GD\}$。

若矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 满足 $R(A) = R(A^*)$，则称其为 EP 矩阵（或值域厄米矩阵）。EP 矩阵类包含若干特殊矩阵类，例如“厄米”矩阵、“正规”矩阵和“非奇异”矩阵等。EP 矩阵出现在压缩

[23], 微分方程 [13] 和差分方程 [12], 等的研究中。以下是 EP 矩阵的一个重要刻画：矩阵 A是 EP 矩阵，当且仅当它与其 Moore-Penrose 逆交换，即 $AA^{\dagger} = A^{\dagger}A$。此外，对于这类矩阵，Moore-Penrose 逆、群逆和 Drazin逆彼此相同（见 [6]）。设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的指标为 $k = 1$。由于 A 是 EP 矩阵，因此 $A^{\dagger} = A^{\#}$，但存在 $A^{GD} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$使得 $A^{GD} \neq A^{\#}$ 对 $a \neq 0$成立。接下来，我们将证明 GD逆的单调性；

但首先回顾 Coll等人给出的以下结果 [14]。

推论2.5。（推论2.*1, [14]*）设 A、$X \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 和 ind（A）$= k$。则，以下条件等价:

（i） $X \in A\{GD\}$。（ii） $AXA = A$ 和 $A^kX = XA^k$。（iii） $AXA = A$、$XA^{k+1} = A^k$和 $A^{k+1}X = A^k$。

Mitra等人 [32] 将矩阵 A 的核-幂零分解重新表述如下 :

$$A = P \begin{bmatrix} C & O \\ O & N \end{bmatrix} P^{-1}, \tag{2.3}$$

其中， P 是非奇异矩阵。Wang和Liu [38] 给出了由（2.3）确定的矩阵 A 的GD逆的表示，现陈述如下。设 $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$。则， A^{GD} 是 A 的GD逆，当且仅当

$$A^{GD} = P \begin{bmatrix} C^{-1} & O \\ O & N^{-} \end{bmatrix} P^{-1}. \tag{2.4}$$

接下来，我们回顾Stewart的一个众所周知的结果 [36], ，该结果给出了矩阵（$I_m + A$）$^{-1}$的范数界。

定理 m 2.6. (*[36]*) 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$，且满足 $||A|| \leq 1$。那么， $I_m + A$ 是非奇异的，且

$$||(I_m + A)^{-1}|| \leq (I_m - ||A||)^{-1}.$$

借助上述定理，我们现在给出一个扰动结果。

定理 2.7. 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 和 $B = A + E \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 满足 $ind(A) = k$。若扰动 E 满足 $A^kE = E$ 和 $||A^{GD}E|| < 1$, 则

$$(I_m + A^{GD}E)^{-1}A^{GD} \in B\{1\}.$$

证明。假设 $E = P\begin{bmatrix} E_1 & E_2 \\ E_3 & E_4 \end{bmatrix} P^{-1}$ 和 $rank(A) = r$。由 (2.3) 和 (2.4)，我们分别得到 $A = P\begin{bmatrix} C & O \\ O & N \end{bmatrix} P^{-1}$ 和 $A^{GD} = P\begin{bmatrix} C^{-1} & O \\ O & N^{-} \end{bmatrix} P^{-1}$。现在，$A^k = P\begin{bmatrix} C^k & O \\ O & N^k \end{bmatrix} P^{-1} = P\begin{bmatrix} C^k & O \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1}$。于是，

$$A^k E = P\begin{bmatrix} C^k & O \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1} P\begin{bmatrix} E_1 & E_2 \\ E_3 & E_4 \end{bmatrix} P^{-1} = P\begin{bmatrix} C^k E_1 & C^k E_2 \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1}.$$

若 $A^k E = E$，则有 $E_3 = O$ 和 $E_4 = O$。此外，

$$I_m + A^{GD} E = I_m + P\begin{bmatrix} C^{-1} & O \\ O & N^{-} \end{bmatrix} P^{-1} P\begin{bmatrix} E_1 & E_2 \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$\begin{aligned} &= I_m + P\begin{bmatrix} C^{-1}E_1 & C^{-1}E_2 \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= P\begin{bmatrix} I_r + C^{-1}E_1 & C^{-1}E_2 \\ O & I_{m-r} \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= P\begin{bmatrix} C^{-1}(C + E_1) & C^{-1}E_2 \\ O & I_{m-r} \end{bmatrix} P^{-1}. \end{aligned}$$

由定理 2.6，$\|A^{GD}E\| \leq 1$ 可知 $I_m + A^{GD}E$ 可逆。因此，
$(I_m + A^{GD}E)^{-1} = P\begin{bmatrix} (C + E_1)^{-1}C & -(C + E_1)^{-1}E_2 \\ O & I_{m-r} \end{bmatrix} P^{-1}$. Furthermore,

$$(I_m + A^{GD}E)^{-1} A^{GD} = P\begin{bmatrix} (C + E_1)^{-1} & -(C + E_1)^{-1}E_2 N^{-} \\ O & N^{-} \end{bmatrix} P^{-1},$$

以及 $B = A + E = P\begin{bmatrix} C + E_1 & E_2 \\ O & N \end{bmatrix} P^{-1}$。现在，我们验证 $(I_m + A^{GD}E)^{-1}A^{GD} \in B\{1\}$。

显然,

$$
\begin{aligned}
B(I_m + A^{GD}E)^{-1}A^{GD}B = P\begin{bmatrix} C+E_1 & E_2 \\ O & N \end{bmatrix} P^{-1} P \begin{bmatrix} (C+E_1)^{-1} & -(C+E_1)^{-1}E_2N^- \\ O & N^- \end{bmatrix} \\
P^{-1}P\begin{bmatrix} C+E_1 & E_2 \\ O & N \end{bmatrix} P^{-1} \\
= P\begin{bmatrix} C+E_1 & E_2 \\ O & N \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & (C+E_1)^{-1}E_2(I_{m-r} - N^-N) \\ O & N^-N \end{bmatrix} P^{-1} \\
= P\begin{bmatrix} C+E_1 & E_2(I_{m-r} - N^-N) + E_2N^-N \\ O & NN^-N \end{bmatrix} P^{-1} \\
= P\begin{bmatrix} C+E_1 & E_2 \\ O & N \end{bmatrix} P^{-1} = B.
\end{aligned}
$$

因此，$(I_m + A^{GD}E)^{-1}A^{GD} \in B\{1\}$。 □

注 2.2. 如果在 (2.4) 中，我们将 N^- 替换为 $N^\dagger$，那么 B^- 就变为 $B^\dagger$.

$_r$定理 2.8. (*[8]*) 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 是一个非零矩阵，且 $AA^* = \sum_{i=1} \alpha_i E_i$ 是 AA^* 的谱表示，其中 $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r\}$ 是 AA^* 的不同特征值集合， E_i 是相应的自伴谱投影。则有

$$
A^\dagger = \sum_{i=1,\ \alpha_i \neq 0}^{r} \frac{1}{\alpha_i} A^* E_i.
$$

借助上述定理，我们给出了关于 GDMP 逆的谱结果。

$_r$定理 2.9. 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 是一个非零矩阵，且 $AA^* = \sum_{i=1} \alpha_i E_i$ 是 AA^* 的谱表示，其中 $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r\}$ 是 AA^* 的不同特征值集合， E_i 是相应的自伴谱投影。则有

$$
A^{GD,\dagger} = \sum_{i=1}^{r} A^{GD} E_i = A^{GD}.
$$

2.2. 逆序律与正序律

逆序律和正序律是广义逆理论中的基本课题。Kumar 等人 [27] 讨论了 GD逆的逆序律、正序律和加法性质。本节将给出 GD逆的逆序律与正序律的更多结果。我们首先给出一个关于 GD逆逆序律的结果。

定理 2.10. 设 $A, B \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 满足 $AB = BA$ 且 $max\{ind(A)\ ind(B)\} = k$。若 $R(A^{GD}) \subseteq R(B)$，则 $(AB)^{GD} = B^{GD}A^{GD}$。

证明。假设 $R(A^{GD}) \subseteq R(B)$ 意味着对于某个矩阵 Y，有 $A^{GD} = BY$。在 $A^{GD} = BY$ 中左乘 BB^{GD}，得到 $BB^{GD}A^{GD} = A^{GD}$。令 $X = B^{GD}A^{GD}$。现在，

$$\begin{aligned} ABXAB &= ABB^{GD}A^{GD}AB \\ &= AA^{GD}AB \ (\text{since } BB^{GD}A^{GD} = A^{GD}) \\ &= AB, \end{aligned} \tag{2.5}$$

and

$$\begin{aligned} X(AB)^{k+1} &= B^{GD}A^{GD}A^{k+1}B^{k+1} \ (\text{since } AB = BA) \\ &= B^{GD}A^{k}B^{k+1} \\ &= B^{GD}B^{k+1}A^{k} \\ &= B^{k}A^{k} \\ &= (AB)^{k}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

类似地，$(AB)^{k+1}X = (AB)^{k}$。因此，$(AB)^{GD} = B^{GD}A^{GD}$。 □

下一个结果可用与上述定理类似的步骤证明。

定理 2.11。设 A、$B \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 满足 $AB = BA$ 且 $max\{ind(A)\ ind(B)\} = k$。如果 $R(B^{GD}) \subseteq R(A)$，则 $(AB)^{GD} = A^{GD}B^{GD}$。

下面列出 GD逆满足三重逆序律的一些充分条件。

定理 2.12。设 A、B、$C \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 满足彼此交换，且 $max\{ind(A)\ ind(B)\ ind(C)\} = k$。如果以下条件之一成立：

(i) $R(B^{GD}B) \subseteq R(C)$ 和 $A^{GD}BC = BCA^{GD}$,
(ii) $R(A^{GD}A) \subseteq R(B)$ 和 $C^{GD}AB = ABC^{GD}$,
(iii) $C^{GD}AB = ABC^{GD}$ 和 $A^{GD}AB = BA^{GD}A$,
(iv) $A^{GD}BC = BCA^{GD}$ 和 $CC^{GD}B = BCC^{GD}$,

则 $(ABC)^{GD} = C^{GD}B^{GD}A^{GD}$。

证明。为证明这一结果，设 $X = C^{GD}B^{GD}A^{GD}$。我们将根据 GD逆的定义证明 X 是 ABC 的 GD 逆。

(i) $R(B^{GD}B) \subseteq R(C)$ 意味着 $B^{GD}B = CY$。在 $B^{GD}B = CY$ 中左乘 CC^{GD}，得到 $CC^{GD}B^{GD}B = B^{GD}B$。现在,

$$\begin{aligned} ABCXABC &= ABCC^{GD}B^{GD}A^{GD}ABC \\ &= ABCC^{GD}B^{GD}BCA^{GD}A \text{ (since } A^{GD}BC = BCA^{GD}) \\ &= ABB^{GD}BCA^{GD}A \\ &= ABCA^{GD}A \\ &= BCAA^{GD}A \\ &= BCA \\ &= ABC, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(ABC)^{k+1} &= C^{GD}B^{GD}A^{GD}(ABC)^{k+1} \\ &= C^{GD}B^{GD}A^{GD}A^{k+1}B^{k+1}C^{k+1} \\ &= C^{GD}B^{GD}A^{k}B^{k+1}C^{k+1} \\ &= C^{GD}B^{GD}B^{k+1}C^{k+1}A^{k} \\ &= C^{GD}C^{k+1}B^{k}A^{k} \\ &= C^{k}B^{k}A^{k} \\ &= (ABC)^{k}, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} (ABC)^{k+1}X &= (ABC)^{k+1}A^{GD}B^{GD}C^{GD} \\ &= A^{k+1}B^{k+1}C^{k+1}C^{GD}B^{GD}A^{GD} \\ &= A^{k+1}B^{k+1}C^{k}B^{GD}A^{GD} \\ &= C^{k}A^{k+1}B^{k+1}B^{GD}A^{GD} \\ &= C^{k}B^{k}A^{k+1}A^{GD} \\ &= C^{k}B^{k}A^{k} \\ &= (ABC)^{k}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

因此，$(ABC)^{GD} = C^{GD}B^{GD}A^{GD}$。

(ii) $X(ABC)^{k+1} = (ABC)^{k}$ 以及 $(ABC)^{k+1}X = (ABC)^{k}$ 这两个条件的证明与(i)部分类似。 $R(A^{GD}A) \subseteq R(B)$意味着 $A^{GD}A = BZ$。左乘

$BB^{GD}\ A^{GD}A = BZ$，得到 $BB^{GD}A^{GD}A = A^{GD}A$。

$$\begin{aligned}
ABCXABC &= ABCC^{GD}B^{GD}A^{GD}ABC \\
&= CC^{GD}ABB^{GD}A^{GD}ABC \text{ (since } C^{GD}AB = ABC^{GD}) \\
&= CC^{GD}AA^{GD}ABC \\
&= CC^{GD}ABC \\
&= CC^{GD}CAB \\
&= CAB \\
&= ABC.
\end{aligned}$$

(iii) $X(ABC)^{k+1} = (ABC)^k$ 和 $(ABC)^{k+1}X = (ABC)^k$ 这两个条件的证明与 (i) 部分类似。此外，

$$\begin{aligned}
ABCXABC &= ABCC^{GD}B^{GD}A^{GD}ABC \\
&= CC^{GD}ABB^{GD}A^{GD}ABC \text{ (since } C^{GD}AB = ABC^{GD}) \\
&= CC^{GD}ABB^{GD}BA^{GD}AC \text{ (since } A^{GD}AB = BA^{GD}A) \\
&= CC^{GD}BAA^{GD}ABC \\
&= CC^{GD}ABC \\
&= CC^{GD}CAB \\
&= CAB \\
&= ABC.
\end{aligned}$$

(iv) $X(ABC)^{k+1} = (ABC)^k$ 和（ABC）$^{k+1}X = (ABC)^k$ 的证明与第(i)部分类似。此外，

$$\begin{aligned}
ABCXABC &= ABCC^{GD}B^{GD}A^{GD}ABC \\
&= ABCC^{GD}B^{GD}BCA^{GD}A \text{ (since } A^{GD}BC = BCA^{GD}) \\
&= ACC^{GD}BB^{GD}BCA^{GD}A \text{ (since } CC^{GD}B = BCC^{GD}) \\
&= ACC^{GD}CBA^{GD}A \\
&= ABCA^{GD}A \\
&= BCAA^{GD}A \\
&= BCA \\
&= ABC.
\end{aligned}$$

□

三重正序律的证明与下文所述 GD逆的三重反序律的证明类似，故略去证明。

定理2.13. 设 A、 B、 $C \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 两两交换，且$max\{ind(A)\ ind(B)\ ind(C)\}$=k。若以下条件之一成立：

(i) $R(C^{GD}C) \subseteq R(B)$且 $A^{GD}BC = BCA^{GD}$,
(ii) $R(B^{GD}B) \subseteq R(A)$且 $C^{GD}AB = ABC^{GD}$,
(iii) $C^{GD}AB = ABC^{GD}$ 且 $A^{GD}AB = BA^{GD}A$,
(iv) $A^{GD}BC = BCA^{GD}$ 且 $CC^{GD}B = BCC^{GD}$,

则$(ABC)^{GD} = A^{GD}B^{GD}C^{GD}$。

3. GD-star矩阵与GD-星序

本节讨论本文的一些主要结果。具体而言，我们首先提出一类新的矩阵，并研究其各种性质。我们还基于这一类矩阵引入一种二元关系。此外，我们还提出一类新的矩阵，并将其称为GD-star-one。

3.1. GD-star矩阵

我们首先定义GD-star矩阵。

定义3.1. 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 和 $ind\ (A) = k$。对于每个 $A^{GD} \in A\{GD\}$， A的GD-star矩阵记为 $A^{GD,*}$，是一个 $m \times m$ 矩阵

$$A^{GD,*} = A^{GD}AA^{*}.$$

上述定义的提出受Drazin-星矩阵和GDMP广义逆定义的启发，并且 proposed 矩阵类似乎包含于这些矩阵的类中。为反驳这一点，我们给出两个例子。第一个例子表明，一个矩阵的GD-star矩阵并不唯一。此外，该类矩阵不同于众所周知的Drazin-星矩阵。类似地，第二个例子说明，GDMP逆不同于GD-star矩阵。

例3.1。 对于 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，其指标为 $k = 2$。我们有 $A^{GD} = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & c \end{bmatrix}$，其中$a$， b，$c \in \mathbb{C}$。进一步地， $A^{D} = O$， $A^{GD,*} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，并且 $A^{D,*} = O$。因此，$A^{GD} \neq A^{D}$ 和$A^{GD,*} \neq A^{D,*}$.

例 3.2。设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的指标为 $k = 1$。则，$A^{\dagger} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}$ 和 $A^{GD} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{bmatrix} \in A\{GD\}$，其中 $a + b = 1$。现在，$A^{GD\dagger} = A^{GD}AA^{\dagger} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 和 $A^{GD,*} = A^{GD}AA^{*} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，即 $A^{GD\dagger} \neq A^{GD,*}$。显然，GD-星矩阵类不同于 GDMP 逆类。

注记 3.1. 由于 $A^{GD}AA^{*} = A^{GD}A(AA^{\dagger}A)^{*} = A^{GD}AA^{\dagger}AA^{*} = A^{GD,\dagger}AA^{*}$，若将 GD 逆替换为 A 的 GDMP 逆，即将 A^{GD} 替换为 $A^{GD,\dagger}$，定义 3.1 仍然不受影响。类似地，可以观察到，A 的 Drazin 星矩阵定义，即 $A^{D,*}$，在将 A^{D} 替换为 $A^{D,\dagger}$ 后仍保持不变。

现在，我们证明 GD-star矩阵是矩阵方程 $X(A^{\dagger})^{*}X = X$、$A^{k}X = A^{k}A^{*}$ 和 $X(A^{\dagger})^{*} = A^{GD}A$ 的解。

定理 3.1. 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$。那么，对于 $k \geq 1$，方程组

$$X(A^{\dagger})^{*}X = X,\ A^{k}X = A^{k}A^{*},\ and\ X(A^{\dagger})^{*} = A^{GD}A$$

存在一个形如 $X \in A\{GD,*\}$ 的解，其中 $A\{GD,*\}$ 是 A 的所有 GD-star矩阵构成的集合。

证明。我们将证明 $X \in A\{GD,*\}$ 满足给定的矩阵方程。首先可以看到

$$\begin{aligned} X(A^{\dagger})^{*}X &= A^{GD}AA^{*}(A^{\dagger})^{*}A^{GD}AA^{*} \\ &= A^{GD}A(A^{\dagger}A)^{*}A^{GD}AA^{*} \\ &= A^{GD}AA^{\dagger}AA^{GD}AA^{*} \\ &= A^{GD}AA^{GD}AA^{*} \\ &= A^{GD}AA^{*} \\ &= X. \end{aligned} \tag{3.1}$$

当 $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} A^{k}X &= A^{k}A^{GD}AA^{*} \\ &= A^{k-1}AA^{GD}AA^{*} \\ &= A^{k-1}AA^{*} \\ &= A^{k}A^{*}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

and

$$\begin{aligned} X(A^{\dagger})^{*} &= A^{GD}AA^{*}(A^{\dagger})^{*} \\ &= A^{GD}A(A^{\dagger}A)^{*} \\ &= A^{GD}AA^{\dagger}A \\ &= A^{GD}A. \end{aligned} \tag{3.3}$$

因此，由 (3.1)、(3.2) 和 (3.3) 可知，$X \in A\{GD,*\}$ 满足给定的矩阵方程。

□

接下来，我们陈述矩阵 A 的 GD-star 矩阵所具有的一些性质。

引理 3.2. 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$，且 $ind(A) = k$。若 $A^{GD} \in A\{GD\}$，则矩阵 A 的 GD-star 矩阵X 满足以下性质：

(i) $AX(A^{\dagger})^{*} = A$. (ii) $A^{k}X = A^{k+1}A^{GD}A^{*} = A^{GD}A^{k+1}A^{*}$. (iii) $A^{\dagger}AX = A^{*}$. (iv) $A^{k}X(A^{\dagger})^{*} = A^{k}$. (v) $X(A^{\dagger})^{*}A^{GD} = A^{GD}AA^{GD}$. (vi) $X($ $A^{\dagger})^{*}A^{k} = A^{k}$. (vii) $A^{\dagger}AX^{2} = A^{*}X$. (viii) $A^{\dagger}AX^{2}AA^{\dagger} = A^{*}X$. (ix) $XAX = A^{GD}(AA^{*})^{2}$. (x) $XAA^{\dagger}X = X^{2}$. (xi) $(AX)^{*} = AX$. (xii) $(A^{\dagger})^{*}X(A^{\dagger})^{*} =(A^{\dagger})$ *.(xiii) $(A^{\dagger})^{*}X = AA^{\dagger}$. (xiv) $(X(A^{\dagger})^{*})$ $^{2} = X(A^{\dagger})^{*}$. (xv) $X \in (A^{\dagger})^{*}\{2,3\}$.

证明。（i）我们有 $AX(A^{\dagger})^{*} = AA^{GD}AA^{*}(A^{\dagger})^{*} = A(A^{\dagger}A)^{*} = AA^{\dagger}A = A$。因此，$AX(A^{\dagger})^{*} = A$。

（ii）注意到 $A^{k}X = A^{k}A^{GD}AA^{*} = A^{GD}A^{k+1}A^{GD}AA^{*} = A^{GD}A^{k}AA^{*} = A^{GD}A^{k+1}A^{*} = A^{k}A^{*} = A^{k+1}A^{GD}A^{*}$。因此，$A^{k}X = A^{k+1}A^{GD}A^{*} = A^{GD}A^{k+1}A^{*}$。

(iii) 显然，$A^{\dagger}AX = A^{\dagger}AA^{GD}AA^{*} = A^{\dagger}AA^{*} = A^{*}(A^{*})^{\dagger}A^{*} = A^{*}$，即 $A^{\dagger}AX = A^{*}$。

(iv) 由 (ii) 可得 $A^{k}X = A^{k+1}A^{GD}A^{*}$，因此，$A^{k}X(A^{\dagger})^{*} = A^{k+1}A^{GD}A^{*}(A^{\dagger})^{*} =A^{k}(A^{\dagger}A)$ $^{*} = A^{k-1}AA^{\dagger}A = A^{k}$.

(v) 由定理 3.1 可得 $X(A^\dagger)^*=A^{GD}A$，从而 $X(A^\dagger)^*A^{GD}=A^{GD}AA^{GD}$。(vi) 再次应用定理 3.1，得到 $X(A^\dagger)^*A^k=A^{GD}AA^k=A^{GD}A^{k+1}=A^k$，即 $X(A^\dagger)^*A^k=A^k$。(vii) 由 $A^\dagger AX^2=A^\dagger AA^{GD}AA^*X=A^\dagger AA^*X=A^*X$ 可知，这显而易见。(viii) 由 (vii) 可得 $A^\dagger AX^2=A^*X$。现在，$A^\dagger AX^2AA^\dagger=A^*XAA^\dagger=A^*A^{GD}AA^*(A^*)^\dagger A^*$

$=$

$A^*A^{GD}AA^*$。因此，$A^\dagger AX^2AA^\dagger=A^*X$。(ix) 显然，
$XAX=A^{GD}AA^*AA^{GD}AA^*=A^{GD}AA^*AA^*=A^{GD}(AA^*)^2$。(x) 我们有
$XAA^\dagger X=A^{GD}AA^*AA^\dagger X=A^{GD}AA^*(A^*)^\dagger A^*X=A^{GD}AA^*X=XX=X^2$。因此，
$XAA^\dagger X=X^2$。(xi) 这显而易见，因为 $AX=AA^{GD}AA^*=AA^*$，即 $(AX)^*=AX$。
(xii) 根据定理 3.1，我们有 $X(A^\dagger)^*=A^{GD}A$。由于，$(A^\dagger)^*X(A^\dagger)^*=(A^\dagger)^*A^{GD}A=(A^\dagger AA^\dagger)^*A^{GD}A=(A^\dagger)^*A^\dagger AA^{GD}A=(A^\dagger)^*A^\dagger A=(A^\dagger)^*$。因此，$(A^\dagger)^*X(A^\dagger)^*=(A^\dagger)^*$.

(xiii) 我们有

$$\begin{aligned}(A^\dagger)^*X&=(A^\dagger)^*A^{GD}AA^*\\&=(A^\dagger AA^\dagger)^*A^{GD}AA^*\\&=(A^\dagger)^*A^\dagger AA^{GD}AA^*\\&=(A^\dagger)^*A^\dagger AA^*\\&=(A^\dagger)^*A^*(A^*)^\dagger A^*\\&=(A^\dagger)^*A^*\\&=AA^\dagger.\end{aligned}\tag{3.4}$$

(xiv) 显然，$(X(A^\dagger)^*)^2=X(A^\dagger)^*X(A^\dagger)^*=A^{GD}AA^*(A^\dagger)^*A^{GD}AA^*(A^\dagger)^*=A^{GD}AA^{GD}AA^*(A^\dagger)^*=A^{GD}AA^*(A^\dagger)^*=X(A^\dagger)^*$.
(xv) 由 (3.4) 和引理 3.2 的 (xiii) 部分可容易得到。

□

注记 3.2. 根据 (xiii)，我们有 $(A^\dagger)^*X$ 是到 $R(A)$ 上的正交投影算子。

在某些条件下，GD-星矩阵与某些众所周知的广义逆重合。下面证明相同的结果。

定理 3.3. 设 $A\in\mathbb{C}^{m\times m}$ 和 $ind(A)=k$. 对于每个 $A^{GD}\in A\{GD\}$，矩阵 A 的一个 GD-星矩阵 X 满足以下性质：

(i) 若 $A^*=A$，则 $X\in A^\dagger\{1,2,3\}$。

(ii) 若 $A^{GD} = A^{\#}$，则 $X = A^{\#,*}$.(iii) 若 A 是偏等距，则 $X = A^{GD,\dagger}$，因此 $AX = P_{R(A)}$。

证明. (i) 由于， $A^{\dagger}X = (A^{\dagger})^{*}X = AA^{\dagger}$ 由方程（3.4）和 $A^{*} = A$可得。我们有 e

$$\begin{aligned} XA^{\dagger}X &= A^{GD}AA^{*}A^{\dagger}A^{GD}AA^{*} \\ &= A^{GD}AAA^{\dagger}A^{GD}AA \\ &= A^{GD}AA^{GD}AA \ (A^{*} = A \text{ implies } AA^{\dagger} = A^{\dagger}A) \\ &= A^{GD}AA \\ &= A^{GD}AA^{*} \\ &= X, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} A^{\dagger}XA^{\dagger} &= (A^{\dagger})^{*}A^{GD}AA^{*}(A^{\dagger})^{*} \ (\text{since } A^{*} = A) \\ &= (A^{\dagger}AA^{\dagger})^{*}A^{GD}A \\ &= (A^{\dagger})^{*}A^{\dagger}AA^{GD}A \\ &= (A^{\dagger})^{*}A^{\dagger}A \\ &= A^{\dagger}. \end{aligned}$$

(ii) 我们有 $A^{GD} = A^{\#}$。因此， $k = 1$。接着， $A^{GD,*} = A^{GD}AA^{*} = A^{\#}AA^{*} = A^{\#,*}$.
(iii) 由于 A 是偏等距，因此 $A^{*} = A^{\dagger}$。于是， $A^{GD,*} = A^{GD}AA^{*} = A^{GD}AA^{\dagger} = A^{GD,\dagger}$. 因此， $AA^{GD,*} = AA^{\dagger} = P_{R(A)}$。 □

接下来，我们总结 EP 矩阵类中 GD-星矩阵的一些性质。

定理 3.4. 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 是一个 EP矩阵。对于每个 $A^{GD} \in A\{GD\}$，矩阵 A 的 GD-star 矩阵 X 满足以下性质：

(i) $A^{\dagger}X = A^{\dagger}A^{*}$。
(ii) $AA^{\dagger}XAA^{\dagger} = A^{*}$。
(iii) $X = A^{*}$。

证明。(i) 我们有

$$\begin{aligned} A^{\dagger}X &= A^{\dagger}A^{GD}AA^{*} \\ &= A^{\dagger}AA^{\dagger}A^{GD}AA^{*} \\ &= A^{\dagger}A^{\dagger}AA^{GD}AA^{*} \\ &= A^{\dagger}A^{\dagger}AA^{*} \\ &= A^{\dagger}AA^{\dagger}A^{*} \\ &= A^{\dagger}A^{*}. \end{aligned}$$

（ii）再次,

$$\begin{aligned} AA^{\dagger}XAA^{\dagger} &= A^{\dagger}AA^{GD}AA^{*}AA^{\dagger} \\ &= A^{\dagger}AA^{*}(A^{*})^{\dagger}A^{*} \\ &= A^{\dagger}AA^{*} \\ &= A^{*}(A^{*})^{\dagger}A^{*} \\ &= A^{*}. \end{aligned}$$

（iii）我们知道 $ind(A) = 1$，因为 A 是EP矩阵，所以，根据 $AA^{GD} = A^{GD}A$ 推论2.5（ii）。现在，我们有 $X = A^{GD}AA^{*} = AA^{GD}(AA^{\dagger}A)^{*} = AA^{GD}A^{\dagger}AA^{*} = AA^{GD}AA^{\dagger}A^{*} = AA^{\dagger}A^{*} = A^{*}$. 因此，如果 A 是EP矩阵，那么 $A^{GD,\,*} = A^{*}$。

□

注记3.3。1. 如果 A 是EP-厄米矩阵，那么 $A^{GD,\,*} = A$。

2. 由于 A 是EP矩阵，因此 $AA^{\dagger} = A^{\dagger}A$。再次利用推论2.5（ii），我们有 $A^{GD}A = AA^{GD}$。因此， $A^{GD\dagger} = A^{GD}AA^{\dagger} = AA^{GD}A^{\dagger}AA^{\dagger} = AA^{GD}AA^{\dagger}A^{\dagger} = AA^{\dagger}A^{\dagger} = A^{\dagger}$。类似地，可以证明 $A^{D,\,*} = A^{\dagger}$。因此，只要 A 是EP，就有 $A^{GD\dagger} = A^{\dagger} = A^{D,\,*}$。

现在，我们建立 GD-star 矩阵的一种表示。

定理 3.5. 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 具有 (2.1) 的形式，其中 $ind(A) = k$。若 $A^{GD} \in A\{GD\}$, 则

$$A^{GD,*} = P\begin{bmatrix} C^{*} + C^{-1}SS^{*} + C^{-(k+1)}(\widehat{T}' - \widehat{T}N^{-})NS^{*} & C^{-1}SN^{*} + C^{-(k+1)}(\widehat{T}' - \widehat{T}N^{-})NN^{*} \\ N^{-}NS^{*} & N^{-}NN^{*} \end{bmatrix} P^{*}, \tag{3.5}$$

其中 P是酉矩阵，且 $\widehat{T}' - \widehat{T}N^{-} = -C^{k}SN^{-} + \sum_{j=0}^{k-1} C^{j}SN^{k-j-1}(I - NN^{-})$。

If $S = O$ 在定理 3.5 中，上述定理便归结为以下推论 .

推论 3.6. 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$。若 (2.3) 中的 P 是酉矩阵，则

$$A^{GD,*} = P \begin{bmatrix} C^* & O \\ O & N^- NN^* \end{bmatrix} P^*.$$

证明. 根据 GD-星矩阵的定义，我们有

$$\begin{aligned} A^{GD,*} &= A^{GD} AA^* \\ &= P \begin{bmatrix} C^{-1} & O \\ O & N^- \end{bmatrix} P^* P \begin{bmatrix} C & O \\ O & N \end{bmatrix} P^* P \begin{bmatrix} C^* & O \\ O & N^* \end{bmatrix} P^* \\ &= P \begin{bmatrix} C^{-1}CC^* & O \\ O & N^- NN^* \end{bmatrix} P^* \\ &= P \begin{bmatrix} C^* & O \\ O & N^- NN^* \end{bmatrix} P^*. \end{aligned}$$

□

注 3.4. 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 是一个 EP矩阵。则,

$$A = P \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^*,$$

其中 P 是酉矩阵。因此,

$$A^{GD} = P \begin{bmatrix} C^{-1} & O \\ O & M \end{bmatrix} P^*,$$

其中 M 是一个适当大小的任意矩阵，并且

$$A^{GD,*} = P \begin{bmatrix} C^* & O \\ O & O \end{bmatrix} P^*.$$

任意秩为 r 的矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 的 Hartwig-Spindelb¨ock 分解 [22, 23] 为

$$A = U \begin{bmatrix} \sum K & \sum L \\ O & O \end{bmatrix} U^*, \tag{3.6}$$

其中， $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 是一个酉矩阵， $\sum = diag\ (\sigma_1 I_{r_1}、\ \sigma_2 I_{r_2}、\ ...、\ \sigma_t I_{r_t})$ 是 A的非零奇异值构成的对角矩阵， $\sigma_1 > \sigma_2 > ... > \sigma_t、\ r_1 + r_2 + ... + r_t = rK \in \mathbb{C}^{r\times r}$ 和 $L \in \mathbb{C}^{r\times n-r}$ 满足

$$KK^* + LL^* = I_r.$$

Hartwig-Spindelb¨ock分解有助于获得各种已知矩阵类的刻画。在处理广义投影和超广义投影时，这种分解易于应用。此外，该表示还用于研究奇异周期矩阵的性质。Hern´andez等人 [24]利用Hartwig-Spindelb¨ock分解提出了GD逆的典范形。下面回顾这一形式。

定理3.7. ([24]) 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 具有 (3.6) 的形式，且 $ind(A) = k$。那么，矩阵 A 的一个 GD逆为 $A^{GD} = U \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} U^*$，其中 X_i 满足以下条件:

(a) $\sum KX_1 + \sum LX_3 = I_r$，(b) $X_1(\sum K)^k = (\sum K)^{k-1}$，(c) $X_3(\sum K)^{k-1} = O$，(d) $(\sum K)^{k+1}X_2 + (\sum K)^k X_4 = (\sum K)^{k-1} \sum L$。

现在，我们利用 Hartwig-Spindelb¨ock 分解给出 GD-星矩阵的一种表示。

定理3.8. 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 具有 (3.6) 中所示的形式，且 $ind(A) = k$。若 $A^{GD} \in A\{GD\}$ 具有定理3.7中所示的形式，则

$$A^{GD,*} = U \begin{bmatrix} X_1 \sum \sum^* & O \\ X_3 \sum \sum^* & O \end{bmatrix} U^*.$$

证明。由 (3.6) 和定理3.7，我们得到 GD-星矩阵的如下计算表达式:

$$\begin{aligned} A^{GD,*} = A^{GD}AA^* &= U \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} U^*U \begin{bmatrix} \sum K & \sum L \\ O & O \end{bmatrix} U^*U \begin{bmatrix} (\sum K)^* & O \\ (\sum L)^* & O \end{bmatrix} U^* \\ &= U \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum K(\sum K)^* + \sum L(\sum L)^* & O \\ O & O \end{bmatrix} U^* \\ &= U \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum KK^* \sum^* + \sum LL^* \sum^* & O \\ O & O \end{bmatrix} U^* \\ &= U \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum (KK^* + LL^*) \sum^* & O \\ O & O \end{bmatrix} U^* \\ &= U \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum \sum^* & O \\ O & O \end{bmatrix} U^* \\ &= U \begin{bmatrix} X_1 \sum \sum^* & O \\ X_3 \sum \sum^* & O \end{bmatrix} U^*. \end{aligned}$$

□

偏等距矩阵是一类重要的矩阵，在压缩 [18, 23]的研究中发挥着重要作用。如果 A 是偏等距，则有以下结果。

定理 3.9. 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 是偏等距。以下条件等价:

(i) $X(A^{\dagger})^{*}X = X$ 且 $AX = AA^{*}$，(ii) 存在 $A^{GD} \in A\{GD\}$ 使得 $X = A^{GD}AA^{*} + (I_m - A^{GD}A)AA^{*}$，(iii) $X(A^{\dagger})^{*}X = X$ 且 $AX = AA^{\dagger}$。

证明. (i) $\Longleftrightarrow$(ii) 令 $A^{GD} \in A\{GD\}$。现在,

$$\begin{aligned} AX &= A(A^{GD}AA^{*} + (I_m - A^{GD}A)AA^{*}) \\ &= AA^{GD}AA^{*} + (A - AA^{GD}A)AA^{*} \\ &= AA^{*}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} X(A^{\dagger})^{*}X &= X(A^{\dagger}AA^{\dagger})^{*}X \\ &= X(A^{\dagger})^{*}A^{\dagger}AX \\ &= X(A^{\dagger})^{*}A^{\dagger}AA^{*} \\ &= (A^{GD}AA^{*} + (I_m - A^{GD}A)AA^{*})(A^{\dagger})^{*}A^{*} \\ &= A^{GD}AA^{*} + (I_m - A^{GD}A)AA^{*} \\ &= X. \end{aligned} \tag{3.8}$$

(ii) $\Longleftrightarrow$(iii) 证明与上面的部分类似。

□

注 3.5. 1. 若 A 既是 EP 矩阵又是偏等距，则 $A^{GD,\ *} = A^{\dagger}$。

2. 若 A 是偏等距，则 GD-星矩阵也是一个 $\{1, 3\}$-逆，因此 $A^{GD,\ *}b$给出了方程组 $Ax = b$的最小二乘解。

我们以 GD-star 矩阵的一个应用结束本节。

Th定理 3.10。设 $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 满足 $ind(A) = k$ 且 $b \in \mathbb{C}^{m}$。则，方程

$$Ax = AA^{*}b \tag{3.9}$$

是相容的，其通解为

$$x = A^{GD,*}b + (I_m - A^{GD}A)z,$$

其中 $z \in \mathbb{C}^{m\times 1}$ 是任意的。

证明。令 $x = A^{GD}AA^*b$。则,

$$\begin{aligned} Ax &= AA^{GD}AA^*b \\ &= AA^*b. \end{aligned}$$

因此，方程组 (3.9) 是相容的。现在， $Ax = AA^{GD,\ *}b + A(I_m - A^{GD}A)z = AA^*b$。此外，若 x是 (3.9) 的一个解，则 $x = A^{GD,\ *}b+(I_m-A^{GD}A)x$。因此，方程组 (3.9) 的通解为 $x = A^{GD,\ *}b + (I_m - A^{GD}A)z$。 □

关于 GD-star 矩阵的谱结果的证明与定理 2.9 的证明类似。因此，我们略去证明。

$_r$定理 3.11. 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 是一个非零矩阵，且 $AA^* = \sum \alpha_i E_i$ 是 AA^*的$_{i=1}$谱表示，其中 $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r\}$ 是AA^* 的不同特征值集合， E_i 是相应的自伴谱投影。那么，我们有

$$A^{GD,*} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i A^{GD} E_i.$$

记 $A^{GD,*} \in A\{GD\}AA^*$。现在我们给出使得 $(AB)^{GD,*} = B^{GD,*}A^{GD,*}$ 成立的充分条件。

定理 3.12. 设 $A, B \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 满足 $AB = BA$ 且 $max\{ind(A)\ ind(B)\} = k$。若 $R(A^{GD}) \subseteq R(B)$ 且 $A^{GD}ABB^* = BB^*A^{GD}A$，则 $(AB)^{GD,*} = B^{GD,*}A^{GD,*}$。

证明. 由 $A^{GD}ABB^* = BB^*A^{GD}A$ 和定理 2.10 可得

$$\begin{aligned} (AB)^{GD,*} &= (AB)^{GD}AB(AB)^* \\ &= B^{GD}A^{GD}ABB^*A^* \\ &= B^{GD}BB^*A^{GD}AA^* \\ &= B^{GD,*}A^{GD,*}. \end{aligned}$$

□

下面给出正序律成立的一些充分条件。

定理 3.13. 设 $A, B \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 满足 $AB = BA$ 和 $max\{ind(A)\ ind(B)\} = k$。若 $R(B^{GD}) \subseteq R(A)$ 且 $B^{GD}BAA^* = AA^*B^{GD}B$，则 $(AB)^{GD,*} = A^{GD,*}B^{GD,*}$。

证明. 由 $B^{GD}BAA^* = AA^*B^{GD}B$ 和定理 2.11，得

$$\begin{aligned}(AB)^{GD,*} &= (AB)^{GD}AB(AB)^* \\ &= A^{GD}B^{GD}BAB^*A^* \\ &= A^{GD}B^{GD}BAA^*B^* \\ &= A^{GD}AA^*B^{GD}BB^* \\ &= A^{GD,*}B^{GD,*}.\end{aligned}$$

□

Kumar 等人 [27]给出了 GD逆的加法性质。

定理 3.14. ([27]) 设 $A, B \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 满足 $AB = BA = O$ 且 $max\{ind(A)\ ind(B)\} = k$. 若 $A^{GD}B = BA^{GD} = O$ 且 $B^{GD}A = AB^{GD} = O$，则 $(A+B)^{GD} = A^{GD} + B^{GD}$.

借助前面的结果，我们描述 GD-星矩阵的加法性质。

定理 3.15. 设 $A, B \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 满足 $AB = BA = BA^* = O$ 且 $max\{ind(A)\ ind(B)\} = k$. 若 $A^{GD}B = BA^{GD} = O$ 且 $B^{GD}A = AB^{GD} = O$，则 $(A+B)^{GD,*} = A^{GD,*} + B^{GD,*}$.

证明。利用 GD-星矩阵的表达式。

$$\begin{aligned}(A+B)^{GD}(A+B)(A+B)^* &= (A^{GD}+B^{GD})(AA^*+AB^*+BA^*+BB^*) \\ &= A^{GD}AA^* + A^{GD}AB^* + A^{GD}BA^* + A^{GD}BB^* + B^{GD}AA^* \\ &+ B^{GD}AB^* + B^{GD}BA^* + B^{GD}BB^* \\ &= A^{GD,*} + A^{GD}AB^* + B^{GD}BA^* + B^{GD,*} \\ &= A^{GD,*} + B^{GD,*}.\end{aligned}$$

□

定理 3.16. 设 $A, B \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 满足 $max\{ind(A)\ ind(B)\} = k$. 若 $A^{GD,*}((A^*)^\dagger + (B^*)^\dagger)B^{GD,*} = A^{GD,*} + B^{GD,*}$，则

(i) $AA^*BB^\dagger = AA^*$。

(ii) $A^{GD}AB^{GD}B = B^{GD}B$。

证明。(i) 我们有

$$A^{GD,*}((A^*)^\dagger + (B^*)^\dagger)B^{GD,*} = A^{GD,*} + B^{GD,*}. \tag{3.10}$$

将 (3.10) 左乘 A，得到 $AA^{GD,*}((A^*)^\dagger + (B^*)^\dagger)B^{GD,*} = AA^{GD,*} + AB^{GD,*}$，即 $AA^*((A^*)^\dagger + (B^*)^\dagger)B^{GD,*} = AA^* + AB^{GD,*}$，即 $AA^*(A^*)^\dagger B^{GD,*} + AA^*(B^*)^\dagger B^{GD,*} = AA^* + AB^{GD,*}$，即 $AB^{GD,*} + AA^*(B^*)^\dagger B^\dagger BB^{GD}BB^* = AA^* + AB^{GD,*}$，即 $AA^*BB^\dagger = AA^*$。因此，$AA^*BB^\dagger = AA^*$。

(ii) 现在，将 (3.10) 右乘 $(B^*)^\dagger$，得到 $A^{GD,*}((A^*)^\dagger+(B^*)^\dagger)B^{GD,*}(B^*)^\dagger = A^{GD,*}(B^*)^\dagger + B^{GD,*}(B^*)^\dagger$，即 $A^{GD,*}((A^*)^\dagger + (B^*)^\dagger)B^{GD}B = A^{GD,*}(B^*)^\dagger + B^{GD}B$，即 $A^{GD}AB^{GD}B+A^{GD,*}(B^\dagger)^*B^\dagger BB^{GD}B = A^{GD,*}(B^*)^\dagger+B^{GD}B$。利用 $BB^{GD}B=B$，得到 $A^{GD}AB^{GD}B+A^{GD,*}(B^\dagger)^*B^\dagger B = A^{GD,*}(B^*)^\dagger+B^{GD}B$，即 $A^{GD}AB^{GD}B+A^{GD,*}(B^*)^\dagger = A^{GD,*}(B^*)^\dagger + B^{GD}B$，即 $A^{GD}AB^{GD}B = B^{GD}B$。

□

3.2. GD-星序

本节介绍一种称为 GD-星序的二元关系及其性质。我们将从 GD-星序的定义开始。

定义 3.2. 设 $A, B \in \mathbb{C}^{m\times m}$。若存在 A 的 GD-星逆 $A^{GD,*}$，使得 A 在 GD-星序下不高于 B，则称 A 在 GD-星序下不高于 B，

$$A^{GD,*}A = A^{GD,*}B, \text{ and } AA^{GD,*} = BA^{GD,*}.$$

记作 $A \leq^*_{GD} B$。

接下来，我们描述 GD-星序的一种刻画。

定理 3.17. 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 满足矩阵 P 是 (2.3) 中的酉矩阵。那么，$A \leq^*_{GD} B$ 当且仅当

$$B = P\begin{bmatrix} C^* & O \\ O & B_4 \end{bmatrix}P^*,$$

其中 $B_4N^-N = N$ 和 $N^*B_4 = N^*N$。

证明。设 $B = P\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}P^*$。假设 $A \leq^*_{GD} B$。因此，

$$A^{GD,*}A - A^{GD,*}B = \begin{bmatrix} C^*C - C^*B_1 & -C^*B_2 \\ -N^-NN^*B_3 & N^-NN^*N - N^-NN^*B_4 \end{bmatrix} = O$$

and

$$AA^{GD,*} - BA^{GD,*} = \begin{bmatrix} CC^* - B_1C^* & -B_2N^-NN^* \\ -B_3C^* & NN^-NN^* - B_4N^-NN^* \end{bmatrix} = O$$

由以上两个等式，我们得到 $C = B_1$, $B_2 = O$, $B_3 = O$, $N^-NN^*N = N^-NN^*B_4$和 $NN^-NN^* = B_4N^-NN^*$。在 $N^-NN^*N = N^-NN^*B_4$中用 $N^\dagger N$左乘，我们有 $N^*N = N^*B_4$。在 $NN^-NN^* = B_4N^-NN^*$中用 $(N^\dagger)^*$右乘，

我们得到 $N = B_4N^-N$。反过来，由等式 $N^*B_4 = N^*N$，我们得到 $N^{GD,\ *}N = N^{GD,\ *}B$。此外， $N^{GD} \in N\{1\}$和 $B_4N^-N = N$推出 $B_4N^{GD}N = N$。用 N^*右乘，我们得到 $B_4N^{GD}NN^* = NN^{GD}NN^*$，即 $B_4N^{GD,\ *} = NN^{GD,\ *}$。因此，$N \leq^*_{GD} B_4$。于是， $A \leq^*_{GD} B$。 □

我们知道，矩阵 N的一个 $\{1,4\}$-逆也是矩阵 N的一个 $\{1\}$-逆。

注3.6. 在等式 (2.3) 中，用 $N_{(1,4)}$替换 N^-。那么， $A \leq^*_{GD} B$当且仅当

$$B = P\begin{bmatrix} C^* & O \\ O & B_4 \end{bmatrix}P^*,$$

其中 $N \leq^* B_4$。

定理3.18. 设 $A, B, C \in \mathbb{C}^{m\times m}$。则，

(i) GD-星序具有自反性。(ii) 若 $A \leq^*_{GD} B$ 且 $B \leq^*_{GD} A$，则 $A = B$，即 GD-星序具有反对称性。(iii) 若 $A \leq^*_{GD} B$ 且 $B \leq^*_{GD} C$，则 $A^{GD,*}A = A^{GD,*}CB^{GD}B$ 且 $AA^{GD,\ *} = CB^{GD}BA^{GD,*}$。

证明。(i) 这是显而易见的。

(ii) 由 $A \leq^*_{GD} B$，我们得到 $A^{GD,\ *}A = A^{GD,\ *}B$ 和 $AA^{GD,\ *} = BA^{GD,\ *}$。由最后一个等式 $AA^{GD,\ *} = BA^{GD,\ *}$，可得 $AA^{GD}AA^* = BA^{GD}AA^*$，即 $AA^* = BA^{GD}AA^*$。在 $AA^* = BA^{GD}AA^*$ 中右乘 $(A^\dagger)^*$，得到 $A = BA^{GD}A$。同样地，由 $B \leq^*_{GD} A$ 可推出 $B = AB^{GD}B$。现在，将 $A^{GD,\ *}A = A^{GD,\ *}B$ 左乘 A，得到 $AA^*A = AA^*B$，进而推出 $A^*A = A^*B$。同样地，将 $A^*A = A^*B$ 左乘 $(A^\dagger)^*$，得到 $A = AA^\dagger B$。利用 $B = AB^{GD}B$，可得 $A = AA^\dagger AB^{GD}B$，即$A = AB^{GD}B$。因此，$A = B$。

（iii）由 $A \leq^*_{GD} B$ 和 $B \leq^*_{GD} C$，可得 $A^{GD,\ *}A = A^{GD,\ *}B$，$AA^{GD,\ *} = BA^{GD,\ *}$，$B^{GD,\ *}B = B^{GD,\ *}C$ 和 $BB^{GD,\ *} = CB^{GD,\ *}$。现在，

$$\begin{aligned} A^{GD,*}A &= A^{GD,*}B \\ &= A^{GD,*}BB^{GD}B \\ &= A^{GD,*}BB^{GD}BB^\dagger B \\ &= A^{GD,*}BB^{GD}BB^*(B^\dagger)^* \\ &= A^{GD,*}BB^{GD,*}(B^\dagger)^* \\ &= A^{GD,*}CB^{GD,*}(B^\dagger)^* \\ &= A^{GD,*}CB^{GD}BB^*(B^\dagger)^* \\ &= A^{GD,*}CB^{GD}B. \end{aligned}$$

同样， $AA^{GD,\ *} = CB^{GD}BA^{GD,\ *}$。 □

下一个结果给出了 GD-星序与群偏序之间的等价关系。

定理 3.19. 设 $A, B \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 满足 $ind(A) = 1$ 且 $AB = BA$。则下列条件等价:

(i) $A \leq^*_{GD} B$, (ii) $A^{GD}AA^* = A^{GD,*}BA^\dagger$ 且 $A = BA^{GD}A$, (iii) $AA^* = AA^*BA^\dagger$ 且 $A^{k+1} = BA^k$, (iv) $A^* = A^*BA^\dagger$ 且 $A^2 = BA$, (v) $R(A^*) = R(A^*B)$ 且 $A^2 = BA$。

证明. (i)⇒(ii) $A \leq^*_{GD} B$ 蕴含 $A^{GD,*}A = A^{GD,*}B$, 以及 $AA^{GD,*} = BA^{GD,*}$. 。在 $A^{GD,*}A = A^{GD,*}B$ 中将 $A^\dagger$ 右乘, 得到 $A^{GD}AA^* = A^{GD,*}BA^\dagger$。再次将 $AA^{GD,*} = BA^{GD,*}$ 右乘以 $(A^\dagger)^*$, 得到 $AA^{GD}AA^*(A^\dagger)^* = BA^{GD}AA^*(A^\dagger)^*$, 这意味着 $AA^\dagger A = BA^{GD}AA^\dagger A$, 即 $A = BA^{GD}A$。

(ii)⇒(iii) 在 $A^{GD}AA^* = A^{GD,*}BA^\dagger$ 中左乘 A, 得到 $AA^* = AA^*BA^\dagger$。将 $A = BA^{GD}A$ 右乘 A^k, 得到 $A^{k+1} = BA^k$。

(iii)⇒(iv) 将 $AA^* = AA^*BA^\dagger$ 左乘 $A^\dagger$, 有 $A^* = A^*BA^\dagger$。将 $A^{k+1} = BA^k$ 右乘 $(A^\#)^kA$, 得到 $A^2 = BA$。

(iv)⇒(v) $R(A^*) = R(A^*BA^\dagger) \subseteq R(A^*B) \subseteq R(A^*)$, 即 $R(A^*) = R(A^*B)$。

(v)⇒(i) A 的指标为 1。因此, $A^{GD}A^2 = A$, 且 $A^2 = BA$ 意味着 $AA^{GD}A^2 = BA^{GD}A^2$。将 $AA^{GD}A^2 = BA^{GD}A^2$ 右乘 $A^\#A^*$, 得到 $AA^{GD}AA^* = BA^{GD}AA^*$, 即 $AA^{GD,*} = BA^{GD,*}$。我们有 $AB = BA$ 和 $A^2 = BA$。因此, $A^2 = AB$。类似地, 我们得到 $A^{GD,*}A = A^{GD,*}B$。因此, $A \leq^*_{GD} B$。

□

为简便起见, 若 $A^{D,\dagger}A = A^{D,\dagger}B$ 和 $AA^{D,\dagger} = BA^{D,\dagger}$, 则记作 $A \leq^\dagger_D B$。假设 A 在 GD-star 序下低于 B, 则 A 和 B 满足下述一些性质。

定理 3.20. 设 $A, B \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 满足 $ind(A) = k$。若 A 在 GD-star 序下低于 B, 则有以下结论:

(i) $A^*A = A^*B$。
(ii) $A = AA^\dagger B$。
(iii) $A^{k+1} = BA^k$。
(iv) $AA^D = BA^D$。
(v) $A \leq^\dagger_D B$。

(vi) $A^{GD,\dagger}A = A^{GD,\dagger}B$ 和 $BA^{GD,\dagger} = AA^{GD,\dagger}$.

证明。我们有 A 在 GD-star 序下小于 B，即:

$$A^{GD,*}A = A^{GD,*}B, \text{ and } AA^{GD,*} = BA^{GD,*}.$$

(i) 在 $A^{GD,*}A = A^{GD,*}B$ 中左乘 A，得到 $AA^{GD}AA^*A = AA^{GD}AA^*B$，即 $AA^*A = AA^*B$。再次在 $AA^*A = AA^*B$ 中左乘 $A^\dagger$，得到 $A^\dagger AA^*A = A^\dagger AA^*B$，即 $A^*(A^*)^\dagger A^*A = A^*(A^*)^\dagger A^*B$，即 $A^*A = A^*B$。

(ii) 在 (i) 式左乘 $(A^\dagger)^*$，易得 $AA^\dagger A = AA^\dagger B$，即 $A = AA^\dagger B$。

(iii) 在 $AA^{GD,*} = BA^{GD,*}$ 中右乘 $(A^\dagger)^*$，得到 $AA^{GD}AA^*(A^\dagger)^* = BA^{GD}AA^*(A^\dagger)^*$，即 $A(A^\dagger A)^* = BA^{GD}A(A^\dagger A)^*$，即 $A = BA^{GD}A$。再次在$A = BA^{GD}A$中右乘 A^k，得到 $A^{k+1} = BA^k$。

(iv) 每个方阵都是 Drazin可逆。因此，将 $A^{k+1} = BA^k$ 右乘 $(A^D)^{k+1}$，得到 $AA^D = BA^D$。

(v) 在 (iv) 中右乘 $AA^\dagger$，得到 $AA^{D,\dagger} = BA^{D,\dagger}$。在 A^{GD}中左乘 $A^\dagger A$，得到 $A^*A = A^*B$。再次将 $A^*A = A^*B$ 左乘$A^DAA^\dagger(A^\dagger)^*$，得到 $A^{D,\dagger}A = A^{D,\dagger}B$。因此，$A \leq^\dagger_D B$。

(vi) 将 $A^{GD,*}A = A^{GD,*}B$ 左乘 $(A^\dagger)^*A$，得到 $A^*A = A^*B$。再次在 $A^*A = A^*B$ 中右乘 $A^{GD}AA^\dagger(A^\dagger)^*$，得到 $A^{GD,\dagger}A = A^{GD,\dagger}B$。将 $AA^{GD,*} = BA^{GD,*}$ 右乘 $(A^\dagger)^*A^\dagger$，得到 $AA^{GD,\dagger} = BA^{GD,\dagger}$。 □

若 A 在减偏序和 $*$ 偏序下均不高于 B，则 A 在 GD-star 序下不高于 B。

定理 3.21. 设 A、$B \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 满足 $ind(A) = k$。若 $A \leq^- B$ 且 $A \leq^* B$，则 $A \leq^*_{GD} B$。

证明. 假设 $A \leq^- B$ 意味着

$$AA^- = BA^-, \tag{3.11}$$

and

$$A^-A = A^-B. \tag{3.12}$$

我们知道 $A^{GD} \in A\{1\}$。由 (3.11) 和 $A^{GD} \in A\{1\}$，可得 $AA^{GD,*} = AA^{GD}AA^* = BA^{GD}AA^* = BA^{GD,*}$，即 $AA^{GD,*} = BA^{GD,*}$。类似地，由 $A \leq^* B$，可得 $A^{GD,*}A = A^{GD,*}B$。因此，$A \leq^*_{GD} B$。

□

采用与上文类似的步骤，可以证明下一个结果。

推论 3.22. 设 $A, B \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 满足 $ind(A) = k$。若 $A \leq^{GD} B$ 且 $A \leq^{*} B$，则 $A \leq^{*}_{GD} B$。

由 $A \leq^{GD} B$，我们有 $A^{GD}A = A^{GD}B$ 和 $AA^{GD} = BA^{GD}$。将 $A^{GD}A = A^{GD}B$ 左乘 $(A^D)^{k+1}A^{k+1}$，得到 $(A^D)^{k+1}A^{k+1} = (A^D)^{k+1}A^kB$，即 $A^DA = A^DB$。类似地，将 $AA^{GD} = BA^{GD}$ 右乘 $A^{k+1}(A^D)^{k+1}$，得到 $AA^D = BA^D$。因此，$A \leq^{D} B$。我们以以下注记结束本节。

注记 3.7. 若 $A \leq^{GD} B$，则 $A \leq^{D} B$。

3.3. 对偶GD-star 矩阵或 star-GD 矩阵

本节讨论 GD-星矩阵的对偶。对偶 GD-星矩阵的证明与 GD-星矩阵的证明类似。鉴于这种相似性，我们仅讨论对偶 GD-星矩阵的一些重要结果。本节将从对偶 GD-星矩阵的定义开始。

定义 3.3. 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 和 $ind(A) = k$。设 $A^{GD} \in A\{GD\}$，它是 A 的对偶 GD-星矩阵，记作 $A^{*,\ GD}$，是一个 $m \times m$ 矩阵

$$A^{*,GD} = A^*AA^{GD}.$$

定理 3.23. 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$。则，方程组

$$X(A^\dagger)^*X = X,\ XA^k = A^*A^k,\ and\ (A^\dagger)^*X = AA^{GD}$$

对于每个非负整数 k，都有一个形如 $X = A^*AA^{GD}$ 的解。

引理 3.24. 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$，且 $ind(A) = k$。若 $A^{GD} \in A\{GD\}$，则矩阵 A 的对偶 GD-星矩阵 X 满足以下性质：

(i) $(A^\dagger)^*XA = A$。 (ii) $XA^k = A^*A^{k+1}A^{GD} = A^*A^{GD}A^{k+1}$。 (iii) $XAA^\dagger = A^*$。 (iv) $(A^\dagger)^*XA^k = A^k$。 (v) $A^{GD}(A^\dagger)^*X = A^{GD}AA^{GD}$。 (vi) $X(A^\dagger)^*A^k = A^k$。 (vii) $X^2AA^\dagger = XA^*$。 (viii) $XAX = (A^*A)^2A^{GD}$。

(ix) $XA^{\dagger}AX = X^2$。
（x）$(XA)^* = XA$。（
xi）$(A^{\dagger})^*X(A^{\dagger})^* = (A^{\dagger})^*$.
（xii） $X(A^{\dagger})^* = A^{\dagger}A$.

定理 3.25. 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 为式 (2.1) 的形式，且 $ind(A) = k$。若 $A^{GD} \in A\{GD\}$，则

$$A^{*,GD} = P\begin{bmatrix} C^* & C^*C^{-k}(\widehat{T}' - \widehat{T}N^-) + C^*SN^- \\ S^* & S^*C^{-k}(\widehat{T}' - \widehat{T}N^-) + N^*NN^- \end{bmatrix} P^*, \tag{3.13}$$

其中 P是酉矩阵，且 $\widehat{T}' - \widehat{T}N^- = -C^kSN^- + \sum_{j=0}^{k-1} C^jSN^{k-j-1}(I - NN^-)$。

3.4. GD-star-one 矩阵

本小节定义一类新的矩阵，称为 GD $*_1$，并探讨其若干性质。首先，我们如下定义 GD $*_1$ 矩阵。

定义 3.4. 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 且 $ind(A) = k$。对于 $A^{GD} \in A\{GD\}$，A的 GD $*_1$ 矩阵，记为 $A^{GD,*_1}$，是一个 $m \times m$ 矩阵

$$A^{GD,*_1} = A^{GD}A^*A.$$

有一个例子表明，GD-star 矩阵与 GD $*_1$ 矩阵不同。显然，矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 的 GD $*_1$ 也不是唯一的。
例 3.3。由例 3.2 可知，$A^{GD} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{bmatrix}$ 是 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$的 GD逆。现在，$A^{GD,*_1} = A^{GD}A^*A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+a & 1+a \\ b & b \end{bmatrix}$，$A^{GD,*} = A^{GD}AA^* = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 以及 $A^*AA^{GD} = \begin{bmatrix} 1 & a+b \\ 1 & a+b \end{bmatrix}$。显然，$A^{*,GD} \neq A^{GD,*_1} \neq A^{GD,*}$.

下面给出 GD $*_1$ 逆的一些性质。

引理 3.26。设 $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$，且 $ind(A) = k$。若 $A^{GD} \in A\{GD\}$，则矩阵 A 的 GD $*_1$ 逆X 满足以下性质：

(i) $A^{k+1}X = A^kA^*A$。
（ii） $XA^{\dagger} = A^{GD}A^*$。
（iii） $A^{k+1}XA^{\dagger} = A^kA^*$。

(iv) 若 A 是 EP，则 $AXA^{\dagger} = A^{*}$。（v） $XA^{GD}A = X$。（vi） $XY = A^{GD}A^{*}$，其中 $Y \in A\{GD, \dagger\}$。（vii） $XZ = A^{GD}A^{*}A^{GD}$，其中 $Z \in A\{\dagger, GD\}$。（viii） $A^{k+1}XY = A^{k}A^{*}$，其中 $Y \in A\{GD, \dagger\}$。

证明。(i) $A^{k+1}X = A^{k+1}A^{GD}A^{*}A = A^{k}A^{*}A$。(ii) $XA^{\dagger} = A^{GD}A^{*}AA^{\dagger} = A^{GD}A^{*}(A^{*})^{\dagger}A^{*} = A^{GD}A^{*}$。(iii) $A^{k+1}XA^{\dagger} = A^{k+1}A^{GD}A^{*}AA^{\dagger} = A^{k}A^{*}(A^{*})^{\dagger}A^{*} = A^{k}A^{*}$。(iv) 我们有 $AA^{\dagger} = A^{\dagger}A$。于是，$AXA^{\dagger} = AA^{GD}A^{*}AA^{\dagger} = AA^{GD}A^{\dagger}AA^{*}AA^{\dagger} = AA^{GD}AA^{\dagger}A^{*}AA^{\dagger} = AA^{\dagger}A^{*} = A^{\dagger}AA^{*} = A^{*}$。(v) 显然。(vi) 设 $Y = A^{GD}AA^{\dagger}$。于是，$XY = A^{GD}A^{*}AA^{GD}AA^{\dagger} = A^{GD}A^{*}AA^{\dagger} = A^{GD}A^{*}$。(vii) 与上述部分类似。(viii) 由 (vi) 可得 $XY = A^{GD}A^{*}$。现在，$A^{k+1}XY = A^{k+1}A^{GD}A^{*} = A^{k}A^{*}$.

□

我们以一个开放问题结束本节。

问题：设 $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ with $ind(A) = k > 1$。接下来，考虑矩阵方程

$$AXA = A$$
$$XAX = X$$
$$A^{k+1}X = XA^{k+1} = A^{k}.$$

在什么条件下上述矩阵方程存在解？解的形式如何?

4. 结论

本文介绍了 GD-star 矩阵的概念及其对方阵的表示，并阐述了 GD-星序的一些性质。本文还给出了一些充分条件，使 GD 逆和 GD-star广义逆的三重逆序与正序律成立。所讨论的结果有助于计算吸收律并求解线性系统。这些理论也可以在带对合的环和张量框架中进行研究。未来的研究还可以探讨 GD逆和 GD-星矩阵的积分表示。

5. 致谢

第一作者感谢印度科学与工业研究委员会-大学拨款委员会的资助。

参考文献

[1] D. Ahmed、M. Hama、K.H.F. Jwamer 和 S. Shateyi。计算广义 Drazin 逆的七阶格式。《Mathematics》，7:622，2019年。[2] O.M. Baksalary、G.P.H. Styan、G. Trenkler。论 Hartwig 和 Spindleb¨ock 的一种矩阵分解。《线性代数及其应用》，430:2798-2812，2009年。[3] O.M. Baksalary 和 G. Trenkler。矩阵的核逆。《Linear Multilinear Algebra》，58(6):681-697，2010年。[4] J.K. Baksalary、J. Hauke 和 G.P.H. Styan。论正态变量二次型的若干分布性质及相关的矩阵偏序。《Lecture Notes-Monograph Series》，24:111-121，1994年。[5] J.K. Baksalary 和 S. Puntanen。利用矩阵偏序刻画一般高斯-马尔可夫模型中的最佳线性无偏估计量。《线性代数及其应用》，127:363-370，1990年。[6] A. Ben-Israel 和 T.N.E. Greville。《广义逆：理论与应用》。第2版。纽约：施普林格出版社，2003年。[7] G.W. Brumfiel。《偏序环与半代数几何》。剑桥大学出版社，1979年。[8] J.C.A. Barata 和 M.S. Hussein。Moore–Penrose 伪逆：理论教程综述。《Braz. J. Phys.》，42(1):146-165，(2012)。[9] S.L. Campbell 和 C.D. Meyer。《线性变换的广义逆》。SIAM，2009年。[10] S.L. Campbell 和 C.D. Meyer。弱 Drazin 逆。《线性代数及其应用》，20:167-178，1978年[11] N. Castro-Gonz´alez 和 R.E. Hartwig。乘积的 Moore–Penrose 逆的扰动结果与正向序律。《Electron. J. Linear Algebra》，34:514-525，2018年。[12] S.L. Campbell。具有奇异系数的线性微分方程组。《SIAM J. Appl. Math.》，8:1057-1066，1977年。[13] S.L. Campbell。奇异差分方程解的极限行为。《线性代数及其应用》，23:167-178，1979年。[14] C. Coll、M.B. Lattanzi 和 N. Thome。加权 G-Drazin 逆与矩形矩阵上的一种新预序。《Appl. Math. Comput.》，317:12-24，2018年。[15] C.Y. Deng。群逆的逆序律。《J. Math. Anal. Appl.》，382:663-671，2011年。[16] M.P. Drazin。带对合的半群上的自然结构。《Bull. Amer. Math. Soc.》，84(1):139-141，1978年。[17] R.E. Hartwig。如何对正则元进行偏序。《Math. Japon.》，25(1):1-13，1980年。[18] P.R. Halmos 和 J.E. McLaughlin。偏等距算子。《Pacific J. Math.》13:585-596，1963年。[19] V.K. Gupta 和 B. Jayaram。模糊逻辑联结词所诱导的 Clifford 序。《印度理工学院海得拉巴分校》博士论文，2022年。

[20] W. Guo、M. Wei 和 Z. Jianli。两个矩阵乘积的群逆的正向序律。《Appl. Math. Comput.》，189:1749-1754，2007年。[21] T.N.E. Greville。关于矩阵乘积的广义逆的注记。《SIAM Rev.》，8:518-521，1966年。[22] R.E. Hartwig、K. Spindleb¨ock。使 A^* 和 $A^\dagger$ 交换的矩阵。《Linear Multilinear Algebra》，14:241-256，1984年。[23] R.E. Hartwig 和 K. Spindleb¨ock。偏等距算子、压缩算子与 EP 矩阵。《Linear Multilinear Algebra》，13:295-310，1983年。[24] M.V. Hern´andez、M.B. Lattanzi 和 N. Thome。矩阵的 GDMP 逆及其对偶。《Linear Multilinear Algebra》，2020年，DOI：10.1080/03081087.2020.1857678。[25] A. Hern´andez、M.B. Lattanzi 和 N. Thome。论由加权 Drazin 逆定义的若干新预序。《Appl. Math. Comput.》，282:108-116，2016年。[26] A. Hern´andez、M.B. Lattanzi、N. Thome 和 F. Urquiza。星偏序与 EP 矩阵在 0 处的特征投影。《Appl. Math. Comput.》，218:10669-10678，2012年。[27] A. Kumar、V. Shekhar 和 D. Mishra。矩形矩阵的 W-加权 GDMP 逆。《Electron J. Linear Algebra》，38:632-657，2022年。[28] I.I. Kyrchei。四元数斜域上 W-加权 Drazin 逆的行列式表示。《Appl. Math. Comput.》，264:453-465，2015年。[29] Z. Liu 和 Z. Xiong。三矩阵乘积的 $\{1, 2, 3\}$-逆和 $\{1, 2, 4\}$-逆的正向序律。《Filomat》，32(2):589-598，2018年。[30] C.D.Jr. Meyer。有限马尔可夫链的条件数及极限概率的扰动界。《SIAM J. Algebr. Discrete Methods》，1:273-283，1980年。[31] S.K. Mitra。论群逆与锐序。《线性代数及其应用》，92:17-37，1987年。[32] S.K. Mitra、P. Bhimasankaram 和 S.B. Malik。《矩阵偏序、短算子及其应用》。World Scientific Publishing Company，2010年。[33] D. Mosi´c。Drazin-星矩阵与星-Drazin矩阵。《数学结果》，75:1-21，2020年。[34] D. Mosi´c、I.I. Kyrchei 和 P.S. Stanimirovi´c。MPCEP 逆的表示与性质。《J. Appl. Math. Comput.》，67:101-130，2021年。[35] R. Penrose。矩阵的一种广义逆。《Cambridge Philosoph. Soc.》，51:406-413，1955年。[36] G.W. Stewart。广义逆的连续性。《SIAM J. Appl. Math.》，17:33-45，1969年。[37] C. Stepniak。非负定矩阵的排序及其在线性模型比较中的应用。《线性代数及其应用》，70:67-71，1987年。[38] H. Wang 和 X. Liu。基于核-幂零分解的偏序。《线性代数及其应用》，488:235-248，2016年。[39] X. Wang、A. Yu、T. Li 和 C. Deng。Drazin 逆的逆序律。《J. Math. Anal. Appl.》，444:672-689，2016年。[40] Z. Xiong 和 B. Zheng。二矩阵乘积的 $\{1, 2, 3\}$-逆和 $\{1, 2, 4\}$-逆的逆序律。《Appl. Math. Lett.》，21:649-655，2008年。[41] Z. Xiong 和 B. Zheng。多矩阵乘积的广义逆的正向序律。《J. Appl. Math. Comput.》，25:415-424，2007年。