arXiv:2302.03451v1 [cs.DS] 7 Feb 2023

团结覆盖问题

Eran Rosenbluth亚琛工业大学，德国
rosenbluth@informatik.rwth-aachen.de

摘要

许多现实问题都涉及将一组位置划分为若干不相交子集，每个子集以某种方式分布，使其能以给定半径覆盖整个集合。给定一个有限集合 S、一个度量 d和一个半径 r，定义子集 $S' \subseteq S$ 为 r-覆盖，当且仅当 $\forall s \in S\ \exists s' \in S' :\ d(s,\ s') \leq r$。我们研究是否存在 m 个两两不相交的 r-覆盖，并将此问题命名为团结覆盖问题（SCP）。我们还考虑相关的优化问题：最大化 r-覆盖的数量（称为划分大小），以及最小化半径。我们分析 SCP 与一个称为支配数问题（DNP）的图问题之间的关系；这两个问题在一般情形下都很难。我们证明，即使在二维欧几里得空间情形下，SCP 仍然是困难的，这意味着即使在单位圆盘图情形下，DNP 也已是困难问题。据我们所知，后者尚未有相关结果。我们利用 U. Feige、M. Halldórsson、G. Kortsarz 和 A. Srinivasan 在 SIAM 计算杂志（2002年）中证明的 DNP 一般情形下紧确的近似界（$1 - o(1))/\ln(n)$，推导出在欧几里得空间情形下，SCP 的划分大小近似也具有相同的界。我们证明，在 SCP 的不同情形下，最小半径近似的上界为 3，下界为 2 和 $\sqrt{2}$。最后，在二维欧几里得空间情形下，我们给出一个通用的双准则近似方案，允许在半径最优性与划分_大小近似质量之间进行多种权衡，反之亦然。我们展示该方案的一种用法，可分别对划分大小和半径实现（1 16，2）的近似。

2012年 ACM 学科分类 计算理论 → 问题、归约与完备性；计算理论 → 装箱与覆盖问题；计算理论 → 设施选址与聚类

关键词与短语 支配数、支配划分、覆盖问题、近似算法、困难性证明

资助 德国研究基金会（DFG）通过研究生培训组 2236（UnRAVeL）提供资助

1 引言

设 (S, d) 是一个度量空间，由有限点集 $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ 和度量d：$S \times S \to \mathbb{R}_+$组成，并令 $B_r(v) = \{u \in S \mid d(u, v) \leq r\}$表示与元素 $v \in S$的距离为$r \in \mathbb{R}$ 的元素集合。给定参数 $m \in [n], r \in \mathbb{R}$，团结覆盖问题（SCP）要判定是否存在 m 个互不相交的 S 子集，使得每个子集都以半径 r覆盖 S；也就是说，是否存在 $S_1, \ldots, S_m$，$S_i \subseteq S$，$i \neq j \Rightarrow S_i \cap S_j = \emptyset$，满足$\forall i \in [m] \bigcup_{v \in S_i} B_r(v) = S$。我们将这样的划分称为一个 m-团结-r-覆盖，将以半径 r 覆盖 S 的子集 $S' \subseteq S$ 称为一个 r-覆盖，并将被 k 个互不相交子集以半径 r 覆盖的点称为 k-r-覆盖。我们将划分中子集的数量称为划分大小。由此自然引出两个优化问题：给定半径时最大化划分大小，以及给定划分大小时最小化半径。

该问题类似于已经研究过的支配数问题（DNP）。无向图 $G = (V,\ E)$的支配集是满足以下条件的子集 $S' \subseteq V$：$\forall v \in V\ \exists w \in S'\ \{v,\ w\} \in E$。给定一个无向图 $G = (V,\ E)$和参数 $m \in [|V|]$，DNP 要确定是否存在 m 个互不相交的支配集 V，也就是说，是否存在S_1、……、S_m，$S_i \subseteq V$，$i \neq j \Rightarrow S_i \cap S_j = \emptyset$，使得 $\forall i \in [m]\ S_i$是一个支配集。该

2 团结覆盖问题

问题首次以这一名称被提及于 [2], ，并在 [4,第 190] 页中声称对于 $m \geq 3$ 它是 NP 完全的，但其中没有给出明确证明；在 [1]中可以找到一个证明。DNP 经过充分研究的优化版本旨在最大化划分大小。对于 SCP 和 DNP，当 $m = 1$ 时，答案显然是“是”。对于 $m = 2$ ，不难验证：当且仅当每个元素至少有一个邻居时，答案为“是”；也就是说，在 SCP 中，每个元素在半径 r 内至少有另一个元素，而在 DNP 中，每个顶点至少有一个相邻顶点。将 DNP 归约到 SCP 最一般的设定并不困难，而 SCP 也可以直接归约到 DNP。然而，与 DNP 相比，SCP 允许度量空间不是具有最短边路径距离函数的图，并增加了一个半径参数。这些扩展引出了关于欧几里得空间中复杂度的问题，尤其是二维欧几里得空间中的复杂度问题，以及关于相对于半径的可近似性问题。它们也符合 DNP 的现实世界动机，例如网络资源分配 [10] 和设施分配 [3]。另一个相关场景是传感：假设有一组位置，需要由位于这些位置的传感器反复测量某项数据。假设每个传感器的读数在某个半径 r内都是良好的估计，并且每个传感器可被查询的频率受到限制，即 f_s。最后，假设要求以频率 $f_r > f_s$估计每个位置的数据。令 $m = \frac{f_r}{f_s}$，则该传感器集合的一个 m-团结性-r-覆盖将允许通过交替查询 m 个覆盖子集中的每一个，以所需频率估计所有位置的数据。

—

对于 DNP 的优化版本，即最大化划分大小，已知一般图上的紧确近似界为 $(1 - o(1))/\ln(n)$ [3]。对于区间图上的 DNP（它与欧几里得一维 SCP 一致），已有线性时间算法 [7]。在单位圆盘图这一特殊且有趣的情形下， [9], 提出了一种概率常数因子近似算法，其近似因子超过 500。然而，目前尚未证明该情形存在下界。据我们所知，甚至尚未证明单位圆盘图上的 DNP 是 NP难问题。

有几种经过深入研究的覆盖问题在某些方面与 SCP 相似，但我们发现它们差异过大，其研究结果无法直接用于分析 SCP。其中包括最小集合覆盖问题和 k-中心问题。不过，关于后者的一些研究 [6] 启发了第3.2节中使用的贪心技术。

在第2节中，我们证明了欧几里得二维空间中 SCP 的 NP 完全性。该问题等价于单位圆盘图上的 DNP，因此据我们所知，这是首次证明单位圆盘图上的 DNP 是 NP难问题。在第3节中，我们重点讨论可近似性结果。我们考察了关于划分大小参数的 SCP 可近似性。我们展示了欧几里得空间中的 SCP 与 DNP 之间的关系，该关系意味着 SCP 具有与 DNP 已知结果相同的紧近似界，即 $(1 - o(1))/\ln(n)$ [3]。在第3.2节中，我们考察了关于半径参数的 SCP 可近似性。我们提出了一种 3-近似算法，将 [6], 中的思想加以推广；同时，我们证明了一般度量空间情形下的 2-可近似性下界，以及即使在二维欧几里得情形下也成立的 $\sqrt{2}$-可近似性下界。在第3.3节中，我们针对二维欧几里得情形引入了一种双准则近似方案，该方案允许牺牲半径的最优性，以换取对划分大小更好的近似，反之亦然。我们应用该方案，分别针对划分大小和半径，得到了一种示例性的（1 16，2）-近似算法。

—

下表总结了我们关于 SCP 的结果，以及可直接由先前关于 DNP 的结果推得的结果。后者以灰色标出。“L”和“U”分别表示下界和上界。

	判定问题	部分大小近似	半径近似	双准则
一般度量空间	NP 完全[4]	$(1-o(1))/\ln(n)$[3]	L:2, U:3	-
欧几里得空间	NP 完全	$(1-o(1))/\ln(n)$	L:$\sqrt{2}$, U:3	-
欧几里得二维空间	NP 完全	O(1) [9]	L:$\sqrt{2}$, U:3	$\frac{1}{16}$, 2

2 判定问题的困难性

我们首先证明，即使在欧几里得二维情形下，SCP 也已是 NP难问题；而由于证明其属于 NP 相对直接，因此其 NP 完全性得以证明。困难性证明给出了从平面正交图 $G=(V,\ E)$ 的 3-着色问题到 SCP 的归约，其中该图绘制在面积为 $O(|V|^2)$ 的区域内。当且仅当一个图是平面图，且其边由连接整数网格点的水平线和垂直线组合而成时，它才是平面正交图。任何度数至多为 4 的平面图 $G=(V,\ E)$ 都存在面积为 $O(|V|^2)$ 的平面正交嵌入，且该嵌入可在多项式时间内计算 [11, 定理 2]。因此，由于已知度数至多为 4 的平面图的 3-着色问题是 NP难的 [5, 定理 2。1]在面积为 $O(|V|^2)$ 的区域内绘制的平面正交图的 3-着色问题同样是 NP难的。

▶ **引理 1.** 设 $G=(V,E)$ 是一个图，满足：
i. G是平面正交的。*ii.* G 在平面上的面积为 $O\left(|V|^2\right)$ 。那么，存在一个可在多项式时间内计算的点集 $S\subseteq\mathbb{R}^2$ ，使得：对于每个$1\le r<\sqrt{2}$ ，存在 S的*3*-团结-*r*-覆盖，当且仅当 G 是*3*-可着色的。

证明。以下形式化描述的示例见图1。令 $G'=(V',E')$ $V'\subseteq\mathbb{Z}^2$ 为 G 的缩放，使坐标为 $(i,j)\in\mathbb{Z}^2$ 的每个顶点都移至$(6i,6j)$，并相应地延长边线段。另假设“ $<$ ”是 V' 上的任意全序，并且根据(i)，每条连接$u<v\in V'$的边 $e_{uv}\in E'$ 都定义为由 $k_{uv}\in\mathbb{N}$个相距1步的网格点组成的序列 $e_{uv}=(e_1^{uv}=u,\ldots,e_{k_{uv}}^{uv}=v)\in(\mathbb{Z}^2)^{k_{uv}}$。定义以下子集：

- 对于每个 $v=(v_x,v_y)\in V'$，如果 $deg(v)\ge2$，则定义 $S_v^*=\{v\}$。否则，如果 v 是孤立顶点，或有一条从右侧连接到它的单边，则定义 $S_v^*=\{v,\ p_1^v=(v_x-1,v_y)\ \ p_2^v=(v_x-0.5,v_y+0.5)\}$；否则，定义 S_v^*，使其包含 v 以及考虑该单边方向后的等价两个点。由于缩放，对于每条边 $e_{uv}=(e_1^{uv}=u,\ldots,e_{k_{uv}}^{uv}=v)$， e_4^{uv} 必须属于垂直线段或水平线段的一部分，但不能同时属于两者，也就是说，它不能是角点。不失一般性地，假设它属于水平线段的一部分，则定义$S_{uv}^*=\{p_u^{uv}=(e_{4_x}^{uv}-0.5,e_{4_y}^{uv}+0.5)\ p_v^{uv}=(e_{4_x}^{uv}+0.5,e_{4_y}^{uv}+0.5)\ p_{uv}^{uv}=(e_{4_x}^{uv},e_{4_y}^{uv}+1)\}$。其思路是， S_{uv}^* 中的三个点彼此的距离都在半径 1 以内，但它们与我们不希望其距离在半径 1 以内的点之间的距离为 $\ge\sqrt{2}$ ，如证明后文所述。对于每个 $e_{uv}\in E'$， $e_{uv}=(e_1^{uv}=u,\ldots,e_{k_{uv}}^{uv}=v)$，定义 $S'_{uv}=\{e_2^{uv},e_3^{uv},e_5^{uv},\ldots,e_{k_{uv}-1}^{uv}\}$，以及 $S_{uv}=S'_{uv}\cup S^*_{uv}$。

最后，定义 $S=\{\bigcup_{v\in V'}S_v^*\}\cup\{\bigcup_{e_{uv}\in E'}S_{uv}\}$。由于 (ii)，所描述的 S 构造可以在关于 $|G|$的多项式时间内执行。由于 (i) 以及上述缩放，与一条边相关联的点与和另一条边相关联的点之间的距离均不小于半径 $<\sqrt{2}$ 。该构造的第二个重要性质是：对于每条边 $e_{uv}\in E'$，对于每个点 $p\in S'_{uv}$， p 在 S中半径为 1 的范围内恰好有两个相邻点。此外，对于 S 中的任意两个点，它们要么彼此之间的距离不超过 1，要么它们之间至少相距 $\sqrt{2}$ _

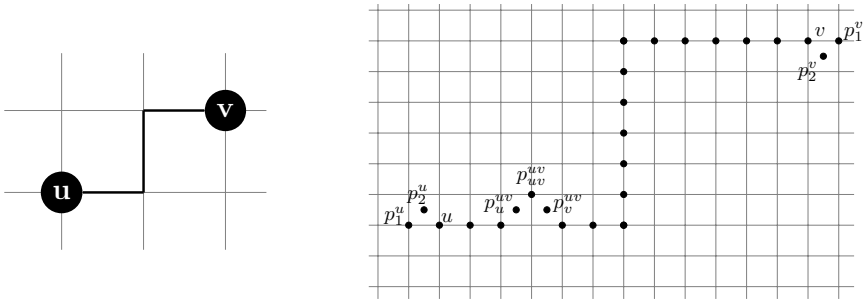

图1 一个由 S 构造 G 的示例。左侧描绘了一个平面正交图 G，由两个顶点 u、v 以及连接它们的一条边组成。右侧描绘了假设顶点排序为 $u < v$ 时，由 G 构造的点集 S。在两幅图中，相邻网格线之间的距离均为 1。

该距离。接下来，我们将证明 S的 3-团结-1 覆盖与 G的 3着色之间所需的关系；该关系的示例请参见图2。

对于第一个方向，假设 S_1、S_2、$S_3 \subseteq S$ 构成 S 的 3-团结-1 覆盖。令 $e_{uv} \in E'$，并假设 $u \in S_i$ 和 $v \in S_j$，我们希望证明 $i \neq j$。注意，必然有 $p_u^{uv} \in S_i$、$p_v^{uv} \in S_j$，并且对于每个 $4 < k < k_{uv}$，$(k-4)$ 模 $3 = 0$，都有 $e_k^{uv} \in S_j$。这些结论源于半径1邻接性质，以及 e_{uv} 中的点数；后者由 G 的缩放和 S 的定义保证。最后，p_{uv}^{uv} 实现 3-1 覆盖的唯一方式是 p_{uv}^u 和 p_{uv}^v 被赋值给不同的子集，即 $S_i \neq S_j$。因此，根据顶点点的团结覆盖分配为 G' 的顶点着色，会得到一个有效的 3着色；由于 G 只是 G' 的空间缩小，该着色对其同样有效。

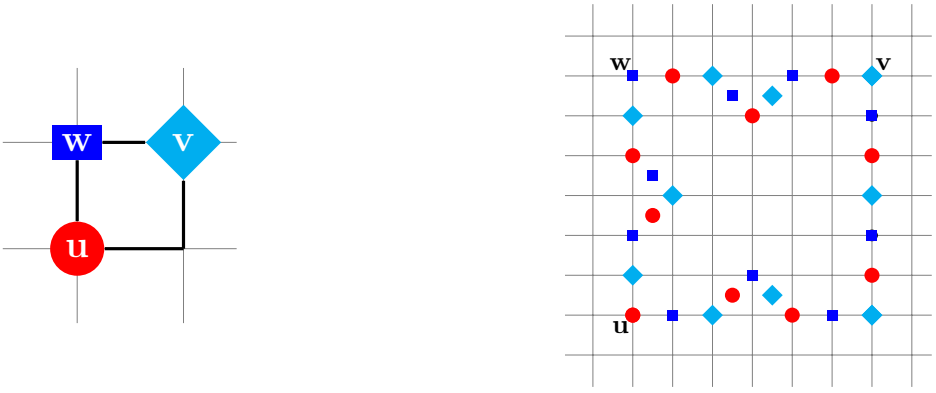

图2 平面正交图的 3着色 G 以及由此构造的点集 S对应的 3-团结-1 覆盖示例。左侧是经过平面正交化的 3 着色三角形图 G。着色以 3 种颜色和 3 种匹配的形状表示。右侧是由 G构造的点集 S，并划分为三个不相交子集——分别以颜色和形状表示。该划分构成一个 3-团结-1 覆盖。在两个示意图中，相邻网格线之间的距离均为 1。

对于第二个方向，假设 $\tau: V \to \{1, 2, 3\}$ 是 G的一个有效 3着色，那么 τ 就是 G'的一个有效 3着色。我们定义一个赋值 $\psi: S \to \{S_1, S_2, S_3\}$，将 S 中的点分配到 S 的三个子集，具体如下：

- 对于每个 $v \in S$，使得 $v \in V'$ 集合 $\psi(v) = \tau(v)$。如果 S_v^* 另外包含两个点

至 v，则将它们分配给剩余的两个子集，从而得到这三个点各自都被 3-1 覆盖。否则，至少有两条边连接到 v，将前两个边点（它们不是 v）分配给剩下的两个子集，从而得到 v 被 3-1 覆盖。对于每个 $e_{uv} \in E'$:

a) 根据假设以及 $\psi(w)$ $w \in S$ 的定义，我们有 $\psi(u) \neq \psi(v)$。令 $\psi(p_u^{uv}) = \psi(u)$ $\psi(p_v^{uv}) = \psi(v)$，将剩余的子集设为 $\psi(p_{uv}^{uv})$，由此可知，这三个点中的每一个都被 3-1 覆盖。

b) $\forall 4 < k < (k_{uv} - 3)$ $\psi(e_k^{uv}) = \begin{cases} \psi(v) & (\text{k-4}) \bmod 3{=}0 \\ S_q \neq \psi(v) & (\text{k-4}) \bmod 3{=}1 \\ S_r \neq \psi(v),\ r \neq q & (\text{k-4}) \bmod 3{=}2 \end{cases}$

E h将此述点视为半径为 的圆内恰有两个邻居的点，并且这3个点的赋值各不相同，因此每个点都被 3-1 覆盖。

c) 对于每个 $1 < k < 4$ 和 $(k_{uv} - 3) < k < k_{uv}$，将 $\psi(e_k^{uv})$ 设为一个子集，使得 e_k^{uv}, u, v 均被 3-1 覆盖。根据目前 S 和 ψ 的定义，可以很快验证这样的赋值总是存在。

总之，ψ 诱导出 S 的一个 3-团结-1 覆盖。 ◀

▶**定理 2**。 即使对于欧几里得二维空间中的 *3-团结-1 覆盖*问题，*SCP* 也是 *NP* 完全的。

证明。 由引理 1 以及如下问题的困难性可知，该问题具有困难性：在面积大小为 $O(|V|^2)$ 的区域内绘制的平面正交图的 3-着色问题。属于 NP 的证明在于，可以用一个划分描述作为证据，以多项式时间验证是否存在一个 m-团结性-r-覆盖。 ◀

3 近似界

本节考察 SCP 的近似变体。我们首先讨论最大化划分大小这一目标，接着讨论最小化半径这一目标，最后考虑二维设置下同时优化这两个目标。

3.1 划分大小近似

已证明，对于 DNP，在假设 NP $\not\subseteq$ DTIME($n^{O(\log\log(n))}$) 的条件下，其近似界为紧确的 $(1 - o(1))/\ln(n)$ [3]。我们证明，在欧几里得空间设置下，SCP 也适用相同的近似界。

▶ **引理 3**。 设 $G = (V, E)$ $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ 为一个无向图，并设 (S, d) $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ $r \in \mathbb{R}$ 为一个度量空间和一个半径，且满足 $\{v_i, v_j\} \in E \Leftrightarrow d(s_i, s_j) \leq r$，那么 G 存在大小为 m 的支配划分，当且仅当 S 存在一个 m-团结性-r-覆盖。

证明。 该假设意味着，对于每个 $k \in [n]$，$\{i_j\}_{j \in [k]}$ 都有 $\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\}$ 是 G 的支配集，当且仅当 $\{s_{i_1}, \ldots, s_{i_k}\}$ 是 S的 r-覆盖。此外，显然，V 的任意两个子集互不相交，当且仅当 S 中与它们按索引对应的子集互不相交。因此，大小为 m 的 G 的支配划分对应于一个 m-团结性-r-覆盖 S，反之亦然。 ◀

▶ **定理4**。 在欧几里得空间中的 *SCP* 对划分大小近似满足紧下界 $(1 - o(1)/\ln(n))$，假设 NP $\not\subseteq$ DTIME $(n^{O(\log\log(n))})$。

证明。对于下界，我们展示从 DNP 到欧几里得空间中 SCP 的归约。令 ρ 表示欧几里得距离函数。给定 $G=(V,E)$ $V=\{v_1,\ldots,v_n\}$，我们可以在多项式时间内计算出一个集合 $S=\{s_1,\ldots,s_n\}\subseteq\mathbb{R}^n$ 和一个半径 $r\in\mathbb{R}$，使得$\rho(s_i,s_j)\leq r\Leftrightarrow\{v_i,v_j\}\in E$ [8, 定理 1]。根据引理 3，上述过程是一个有效的归约。

对于上界，我们可以直接将 SCP 归约为 DNP。给定一个度量空间 $(S,\ d)$ $S=\{s_1,\ \ldots,\ s_n\}$ $r\in\mathbb{R}$，定义 $V=\{v_1,\ \ldots,\ v_n\}$ $E=\{\{v_i,\ v_j\}\mid d(s_i,\ s_j)\leq r\}$。根据引理 3，上述归约是有效的。◀

3.2 半径近似

设 $(S,\ d)$ $|S|=n$ 是一个有限度量空间。对于任意给定的 $m\in[n]$，都存在一个半径 $r\in\mathbb{R}$，使得存在一个 m-solidarity-r-cover，因为总可以令 $r=\max(\{d(s_1,\ s_2)\ |s_1,\ s_2\in S\})$。设 $m\in[n]$，并令 $r^*=\min(\{r\mid$ 存在一个 m-solidarity-r-cover$\})$。我们描述一种多项式时间算法，用于寻找一个 m-solidarity-$3r^*$-cover。算法的主体是子程序 GreedySC（见下方伪代码），其灵感来自 [6] 中的一些思想；在该文献中，这些思想被用于 k-中心聚类近似。该子程序的输入为度量空间、划分大小和半径 r。如果 r 是一个 m-solidarity-r-cover 的可行半径，那么 GreedySC 会输出一个划分；如果 GreedySC 输出一个划分，那么它就是一个 m-solidarity-$3r$-cover。因此，令

$$\hat{r}=\min(\{d(s_i,s_j)\ \mid s_i,s_j\in S,\textsc{GreedySC}((S,d),m,d(s_i,s_j))\neq\ \text{`false'}\}$$

然后是 $\hat{r}\leq 3r^*$。由于 $\hat{r}$ 的候选数量为 $|\{d(s_i,\ s_j)\ |s_i,\ s_j\in S|\leq\frac{1}{2}(n^2-n)$，且 GreedySC 在多项式时间内运行，因此我们可以在多项式时间内找到 $\hat{r}$ 及其对应的划分。

算法 1 GreedySC

输入：有限度量空间 (S,d)，划分大小 $m\in[|S|]$，半径 r输出：一个 m-团结性-$3r$-覆盖或“false” 初始化：设置 $S_1,\ldots,S_m,P:=\emptyset$，任意选择 $p_1\in S$，设置 $i:=1$，以及 $r_1:=\infty$当 $r_i>2r$ 时执行 更新 $P:=P\cup\{p_i\}$ 若 P=S，则中断；选择与 P 中所有点的距离最大的 p_{i+1}，即 $p_{i+1}\in\operatorname{argmax}_{p\in(S\setminus P)}\left\{\min_{v\in P}d(v,p)\right\}$ 设置 $r_{i+1}:=\min_{v\in P}d(v,p_{i+1})$；设置 $i:=i+1$；设置 $i:=i-1$对于 $k=1$ 到 i 执行 令 $B_{p_k}(r)$ 表示以 p_k 为中心、半径为 r 的球内的点 若 $|B_{p_k}(r)|<m$，则返回 false 将 $B_{p_k}(r)$ 中的点分配到全部 m 个不同子集 $S_1,\ldots,S_m$将 $(S\setminus\bigcup_{k=1}^{i}B_{p_k}(r))$ 中的点任意分配到 $S_1,\ldots,S_m$返回 $\{S_1,\ldots,S_m\}$

▶ **引理5.** 令 (S,d) $|S|=n$ 为一个有限度量空间， $m\in[n], r\in\mathbb{R}$，则：
1）如果 S 具有 m-团结性-r-覆盖，则 *GreedySC*$((S,d)\ m,r)$ 将返回一个划分。*2*）如果 *GreedySC*$((S,d)\ m,r)$ 返回一个划分，则该划分是一个 m-团结性-$3r$-覆盖。

证明。 请注意，当引用子程序中的变量，即集合变量时，它们被视为最终状态——即子程序终止之前的状态。

首先，我们证明，如果存在一个 m-团结性-r-覆盖，则该子程序不会以“false”终止。反设并令 w.l.o.g. $|B_{p_1}|<m$，这意味着在 S 中不存在距离 r 以内的 m 点。因此，不可能存在以半径 r 覆盖 p_1 的 m 个不相交子集，这与存在一个 m-团结性-r-覆盖相矛盾。

接下来，我们证明 $(S_1,\dots,S_m)$ 是不相交的。反设并令 $p\in S$ 使得 $p\in S_j, p\in S_k$, $j\neq k$。根据子程序的第二部分（该部分将点分配给子集），必然有 $p\in B_{p_j}(r)$ $p\in B_{p_k}(r)$, 从而 $d(p_j,p_k)\leq 2r$，这与子程序第一部分中的 while 条件相矛盾。

最后，我们证明每个 S_i 都是一个 $3r$-覆盖。反设不然，不失一般性，假设 S_1 不是一个 $3r$-覆盖，并令 $w\in S$ 满足 $\forall q\in S_1\ d(w,\ q)>3r$。根据将点分配给子集的子程序第二部分， $w\notin P$ 且 $\forall u\in P\ \exists v\in S_1:\ d(u,\ v)\leq r$。因此，必有 $\forall u\in P\ d(w,\ u)>2r$，这与子程序在未将 w 加入 P的情况下终止相矛盾。◀

▶ **定理6.** 设(S,d) $|S|=n$ 是一个有限度量空间，设 $m\in[n]$，且设 $r^*=\min(\{r\ |$存在一个 m-团结性-r-覆盖$\})$。那么，可以在多项式时间内找到一个 m-团结性-$3r^*$-覆盖。

证明。 共有 $O(|S|^2)$ 个可能的半径，因此我们可以在多项式时间内搜索使 $GreedySC$ 返回一个划分的最小半径。根据引理5，该划分必然是一个m-团结性-$3r^*$覆盖。◀

▶**定理 7**。 除非 P=NP，否则在一般度量空间设定下，不存在针对 *SCP* 半径的多项式时间 *c*-近似算法，其中$c<2$。

证明。我们证明，否则可以在多项式时间内求解 DNP，这与其为 NP难问题相矛盾。反设存在一个 c-近似算法A，其中某个 $c<2$。给定一个 DNP 实例 $G=(V,E)$ $V=\{v_1,\dots,v_n\}$ $m\in[n]$，我们可以在多项式时间内构造一个度量空间 (S,d) $S=\{p_1,\dots,p_n\}$， $d(p_i,p_j):=\min(\{|P|\ |P\subseteq E$ 是 G 中的一条 v_i-v_j 路径 $\})$；也就是说，两点之间的距离定义为它们在图中对应顶点之间最短路径的长度（按边数计算）。显然，对于 G，存在大小为 m 的支配划分，当且仅当对于 S，存在一个 m-团结性-1-覆盖；换言之，参数为 m 的 solidarity 覆盖的最小可行半径为 1。因此，如果存在支配划分，那么 A 必须返回“$r<2$”，结果将表明最小可行半径实际上为 1，因为根据我们对 d 的定义，可能的最小可行值是离散的。反过来，如果近似算法返回“$r<2$”，那么根据同样的推理，这表明对于 G，存在大小为 m 的支配划分。◀

▶ **定理 8.** 不存在针对半径的多项式时间 *c*-近似算法， $c<\sqrt{2}$，
*f*也不存在针对维度为 $n\geq 2$ 的欧几里得空间中的 *SCP* 的此类算法，除非 P=NP。

证明。 我们证明，否则，对于绘制在 $G=(V,E)$面积内的 $O(|V|^2)$ 平面正交图的 3-着色问题可以在多项式时间内求解，这与该问题是

NP难。根据引理 1，给定上述着色问题的一个实例，我们可以构造一个点集 $S \subseteq \mathbb{R}^2$，使其对任意 $1 \leq r < \sqrt{2}$ 都存在一个 3-团结-r-覆盖，当且仅当存在一个 3着色。假设存在一个 c-近似算法 $c < \sqrt{2}$，那么给定点集和大小为 3 的划分，该算法将返回一个 3-团结-r-覆盖，其 $r < \sqrt{2}$ 当且仅当该图存在一个 3着色。◀

3.3 欧几里得二维情形下的双准则近似

仿照 [9, 第3.1] 节，我们给出一个适用于欧几里得二维情形的确定性双准则近似方案，从而可以在保持划分大小最优的前提下提高半径的可近似性，反之亦然。该方案支持两种近似因子之间的一系列权衡，而非仅支持某一种特定权衡。在本节中，我们假设度量空间的距离函数 d为欧几里得距离。与第3.2节类似，我们依赖于待考虑半径集合的多项式规模。设 $S \subset \mathbb{R}^2, |S| = n$ 为平面上的有限点集。设 $m \in [n]$，且令 $r^* = \min(\{r \mid$存在一个 m-团结性-r-覆盖$\})$。假设平面被划分为直径为r'的正方形，并令 $f(r, r')$表示在该平面任意位置放置一个半径为 r 的圆时，与该圆相交的正方形的最大数量。我们描述一种多项式时间算法：给定所需的半径近似因子 β，该算法可求得一个$f\ r\ ^{1}(,(\beta-1)r)m$-团结性-βr^*-覆盖。算法的主要部分是子程序 SquaresSC（见下方伪代码）。其输入为点集、划分大小、所需的半径近似因子 β以及一个半径 r。如果存在一个 m-团结性-r-覆盖，则 SquaresSC 输出一个划分；如果 SquaresSC 输出一个划分，则该划分是一个$f\ r\ ^{1}(,(\beta-1)r)m$-团结性-βr-覆盖。因此，令

$$\hat{r} = \min(\{d(s_i, s_j) \mid s_i, s_j \in S,\ \textsc{SquaresSC}((S, d), m, \beta, d(s_i, s_j)) \neq \text{‘false’}\})$$

然后是 $\hat{r} \leq \beta r^*$。由于 $\hat{r}$ 的候选数量为 $|\{d(s_i,\ s_j)\ |s_i,\ s_j \in S| \leq \frac{1}{2}(n^2 - n)$,-且 SquaresSC 在多项式时间内运行，因此我们可以在多项式时间内找到 $\hat{r}$ 及相应的划分。

算法2 SquaresSC

输入：平面上的有限点集 $S \subset \mathbb{R}^2$、划分大小 $m \in [|S|]$、半径近似因子 $1 < \beta \in \mathbb{R}$、半径 $r \in \mathbb{R}$输出：一个$f\ r\ ^{1}(,(\beta-1)r)m$-团结性-βr-覆盖，或“false” 将集合 $m' = f\ r\ ^{1}(,(\beta-1)r)m$, $S_1, \ldots, S_{m'} := \emptyset$; 令 (t, l, b, ρ) 分别为 S 中点的顶部、左侧、底部和右侧极端坐标；将顶点为 (t, l)、(t, ρ)、(b, ρ)、(b, l) 的矩形划分为直径为 $(\beta - 1)r$ 的正方形；对于每个正方形 s，如果 s 至少有 m' 个点，则分配 s 中的点，使每个 m' 个子集至少分配到一个点；否则，将 s 中的点任意分配给 m' 个子集；如果 $\{S_1, \ldots, S_{m'}\}$ 是一个 m'-团结性-βr-覆盖，则返回 $S_1, \ldots, S_{m'}$，否则返回“false”

▶ **引理 9**。 令 $S \subseteq \mathbb{R}^2, |S| = n$ 为平面上的有限点集， $m \in [n], r \in \mathbb{R}, 1 < \beta \in \mathbb{R}$，则：

1）如果 S 存在一个 m-团结性-r-覆盖，那么 *SquaresSC*$((S, d)\ m, \beta, r)$ 将返回一个划分。
2）如果 *SquaresSC*$((S, d)\ m, \beta, r)$ 返回一个划分，那么该划分就是一个 $f\ r\ ^{1}_{(,(\beta-1)r)m}$-团结性-$\beta r$-覆盖。

证明。 假设 S 存在一个 m-团结性-r-覆盖。设 $S_1, \ldots, S_{m'}$ 为 SquaresSC 最后一行之前构造的划分，并设 $p \in S$。那么，假设将平面划分为直径为 $(\beta - 1)r$ 的正方形，无论如何划分，以 p 为圆心、半径为 r 的圆必然与某个正方形相交，而该正方形至少包含 $f\ r\ ^{1}_{(,(\beta-1)r)m}$ 个点。因此，根据子程序中的第一个“对于每个”语句，每个子集 $S_i, i \in [m']$ 都包含一个属于该正方形的点，所以它到 p 的距离至多为 $r + (\beta - 1)r = \beta r$。

根据子程序的最后一行，如果构造出的划分不是一个 $f\ r\ ^{1}_{(,(\beta-1)r)m}$-团结性-$\beta r$-覆盖，则会返回“false”。◀

▶**引理 10**。 假设一个平面被划分为直径为 r 的正方形，那么该平面上与半径为 r 的圆相交的正方形的最大数量恰好为 *16*。

证明。 为了说明 16 是一个上界，我们不考察半径为 r 的圆，而改为考察一个边长为 $2r$ 的正方形（与坐标轴平行），它足以包含该圆。网格正方形的边长为 $\frac{r}{\sqrt{2}}$，因此它在每个维度上最多能与 4 条网格线相交，故最多能与 16 个网格正方形相交。为了说明相交正方形的最大数量至少为 16，我们以原点为圆心、半径为 r 的圆为例进行考察。假设网格与原点对齐，且正方形 Q_{ij} 的左上角坐标为 $(i\frac{r}{\sqrt{2}}, (j+1)\frac{r}{\sqrt{2}})$，不难验证，该圆与正方形 $\{Q_{i,j}\}_{i,j\in\{-2,-1,0,1\}}$ 相交。◀

▶ **定理 11.** 给定划分大小 m，设 $r^* = \min(\{r \mid$ 存在一个 m-团结性-r 覆盖$\})$。那么，可以在多项式时间内找到一个 $1\ 16m$-团结性-$2r^*$ 覆盖。

证明。 共有 $O(|S|^2)$ 个可能的半径，因此我们可以在多项式时间内搜索使带有 $\beta = 2$ 的 *SquaresSC* 返回一个划分的最小半径。根据引理 9 和引理 10，该划分必然是一个 $1\ 16$m-团结性-$2r^*$。◀

4 结论与展望

我们已经看到，即使在欧几里得空间情形下，SCP 也是 DNP 的一种推广，并且具有相同的判定问题和划分规模可近似性困难性。即使是在非常特殊但重要的二维欧几里得空间情形中，SCP 与单位圆盘图上的 DNP 重合，但判定 SCP 仍然是困难的。不过，SCP 也带来了新的可能性。引入半径参数后，我们可以在半径达到 3-近似的前提下，实现最优划分大小。可近似性或许还能改进，但在一般情形下只能达到 2 倍因子； $\sqrt{2}$ 在更具体的情形中也可能如此。另一种可能是，在二维欧几里得空间情形下同时放宽两项最优性要求：在降低划分大小近似质量的同时，改进半径近似，甚至可能突破单准则下界。

对 SCP 的研究自然引出了几个问题：
半径近似界。半径可近似性上下界之间的差距或许可以缩小。

10 SolidarityCover问题

双准则近似。半径可近似性与划分规模可近似性之间的权衡或许可以改善。此外，也可以证明双准则困难性结果。

冗余扩展。 我们将点 $p \in S$ 定义为：若子集 $S_i \subseteq S$中至少包含一个距离它较近的点，则该点被覆盖， $p' \in S_i,\ d(p, p') \leq r$。在各种潜在应用中，例如传感，覆盖冗余是有益的；也就是说，只有当子集 $S_i \subseteq S$ 中包含 $\ell > 1$ 个距离点 $p \in S$ 较近的点时，才认为点 $p \in S$ 被该子集覆盖，即存在 $p_1, \ldots, p_\ell \in S_i,\ \forall j \in [\ell]\ d(p, p_j) \leq r$。显然，冗余版本至少同样困难，但这也引出了一个问题：它是否至多同样困难，即它是否具有相同的近似可能性。

离群点。 我们认为，只有当每个点都被每个子集覆盖时，划分才是一个覆盖。在某种程度上类似的 k-中心问题中，人们发现，允许少量离群点可以显著减小半径。因此可以设想，在 SCP 中，只要求每个子集覆盖较高比例的点（而非全部点），便能在多项式时间内找到半径更小的 solidarity 覆盖。

参考文献

1 顾问委员会，G Ausiello、M Broy、CS Calude、A Condon、D Harel、J Hartmanis、T Henzinger、J Hromkovic、N Jones、T Leighton 和 M Nivat。《理论计算机科学文集：EATCS丛书》。2005年。2 E Cockayne 和 Stephen Hedetniemi。图中的最优支配。IEEE电路与系统汇刊，22(11):855–857，1975年。3 Uriel Feige、Magnús M Halldórsson、Guy Kortsarz 和 Aravind Srinivasan。支配数的近似。SIAM 计算杂志，32(1):172–195，2002年。4 Michael R Garey 和 David S Johnson。《计算机与难解性》，第174卷。旧金山：Freeman，1979年。5 Michael R Garey、David S Johnson 和 Larry Stockmeyer。一些简化的 NP 完全问题。载于：第六届 ACM计算理论研讨会论文集，第47–63页，1974年。6 Teofilo F Gonzalez。通过聚类最小化最大簇间距离。理论计算机科学，38:293–306，1985年。7 Tung-Lin Lu、Pei-Hsin Ho 和 Gerard J Chang。区间图中的支配数问题。SIAM离散应用数学杂志，3(4):531–536，1990年。8 Hiroshi Maehara。空间图与球形度。离散应用数学，7(1):55–64，1984年。9 Saurav Pandit、Sriram V Pemmaraju 和 Kasturi Varadarajan。单位圆盘图支配划分的近似算法。载于：《近似、随机化与组合优化：算法与技术》，第312–325页。施普林格，2009年。10 Sriram V Pemmaraju 和 Imran A Pirwani。通过支配划分实现节能。载于：第七届ACM移动自组网与计算国际研讨会论文集，第143–154页，2006年。11 Leslie G Valiant。VLSI电路中的通用性考量。IEEE计算机汇刊，100(2):135–140，1981年。