arXiv:2302.03454v1 [math.NT] 7 Feb 2023

p—进 σ 函数与亏格 2 曲线的雅可比簇上的高度

FRANCESCA BIANCHI

Abstract. 设 C 是数域 K 上的一条亏格2超椭圆曲线，在无穷远点 ∞ 处有一个 Weierstrass 点；设 J 是其雅可比簇，设 Θ 是关于 ∞的 theta 除子，并令 p 为任意素数。我们通过 p-进 N´eron 函数（除子为 2Θ）的类比，给出一个 p-进高度 $h_p\colon\ J(\overline{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{Q}_p$ 的显式构造。我们使用除法多项式以及形式群 J上的 Blakestad p-进 sigma 函数的推广，定义这类 N´eron 函数。我们证明，在 K 的一个非阿基米德赋值 v 处，我们的 p-进 N´eron 函数 λ_v 是某个对称 v-进格林函数（除子为 Θ `，由 Colmez 定义）在适当迹映射下的像。借此，我们将 λ_v 和 h_p 与局部及全局扩展的 Coleman–Gross（从而也是 Nekov´aˇr） p-进高度配对联系起来。我们给出了实现示例，其中包括一个素数 p 大于 10^6, 的例子，并说明类似技术如何用于计算 C 上的 p-进第一类、第二类和第三类微分积分，而不依赖于约化类型。作为应用，我们还给出了一个显式的二次 Chabauty 函数，它在某些亏格4双超椭圆曲线的有理点上为零。

Contents

1. 引言 2 1.1. 椭圆曲线类比 5 1.2. 记号 6 致谢 6 2. 预备知识 7 2.1. 形式群律 7 2.2. 亏格 2 曲线的雅可比簇：代数、解析与射影观点 9 2.3. Grant 的形式群律 13 3. v-进 σ 函数 15 3.1. 朴素西格玛函数 15 3.2. 无穷多个 σ 函数及 Blakestad 的典范 σ 函数 17 4. p-进高度 21 4.1. p-进 N´eron 函数 22 4.2. 全局高度 24 5. 局部 p-进 N´eron 函数与 Colmez 的格林函数 24 5.1. Colmez 的 p-进积分理论与格林函数 25 5.2. Colmez 在曲线和雅可比簇上的理论 26 5.3. Colmez 的阿代尔高度 28 5.4. p-进 N´eron 函数、格林函数与 Coleman–Gross 高度 33 6. 实现与示例 36 6.1. 形式群与 σ 函数 36 6.2. 典范 σ 函数 37 6.3. 除法多项式 38

Date: 2023年2月8日。

6.4. p-进 N´eron 函数 39 6.5. 示例：一个大于
10^6 39 的素数 6.6. 示例：通过 N´eron 函数计算 Coleman–Gross 局部高度 41 6.7. 第一类、第二类和第三类微分的积分 42 7. 应用：双超椭圆曲线的二次 Chabauty 43 附录 47 A. theta 除子之外的点的倍数 47 B. 形式群参数展开 48 C. σ 函数展开式 49 参考文献 50

1. Introduction

设 C 是数域 K 上的一条亏格 2 曲线， J 是其雅可比簇。假设 C由如下形式的仿射方程给出：$y^2 = f(x)$，其中 $f(x)$是次数为 5、系数属于 K 的整数环 $\mathcal{O}$ 的首一多项式，且没有重根。令 ι: $C \hookrightarrow J$ 为相对于 C 唯一无穷远点的嵌入，并令 Θ 为 J 对应的 theta 除子。固定一个（任意）有理素数 p 以及连续幂等类特征 χ: $\mathbb{A}_K^\times/K^\times \to \mathbb{Q}_p$。基于这些数据，我们在 K的每个非阿基米德赋值 v 处，显式构造实值 N´eron 函数相对于 2Θ 的 p-进类比（§4.1）。令

$$\lambda_v \colon J(K_v) \setminus \mathrm{Supp}(\Theta) \to \mathbb{Q}_p$$

设其为 v处这样的 p-进 N´eron 函数。我们通过将 $J(K)$ \Supp(Θ)上的下列函数以二次方式延拓至 $J(K)$，得到一个二次型 h_p: $J(K) \to \mathbb{Q}_p$：

$$h_p(P) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_v n_v \lambda_v(P),$$

其中 $n_v = [K_v\colon \mathbb{Q}_\ell]$ 当 $v \mid \ell$时；我们称 h_p 为一个整体 p-adic 高度。

为定义 λ_v，我们使用 Grant [Gra90] 给出的从 J 到 $\mathbb{P}^8$ 的显式嵌入，以及 Kanayama [Kan05,Kan10] 和 Uchida [Uch11b], 给出的亏格 2 双曲椭圆除法多项式；后者是椭圆曲线上标准除法多项式的推广（见 §2.2）。如果 χ 在 v处是非分歧的，即局部分量 χ_v 在 $\mathcal{O}_v^\times$ [1]上恒为零，那么这已足以定义 v 处的 N´eron 函数（参见定义 4.5）。此外，除一个乘法常数外，这与 Uchida [Uch11a]显式构造的 v处的实值 N´eron 函数相同。

在 χ 发生分歧的赋值点 v 处， p-adic N´eron 函数 λ_v 取决于 $H^1_{\mathrm{dR}}(C/K_v)$ 的一个子空间 W_v 的选择；该子空间与全纯形式空间互补，并且关于杯积配对是各向同性的。特别地，我们为 W_v 附加了一个唯一的 v-adic 类比物 σ_v ，即 C 的复双曲椭圆 σ 函数的类比物（见第 3 节）。这拓展了 Blakestad 的工作。事实上，设 K_v 是 $\mathbb{Q}_p$的非分歧扩张， C在 v 处具有良约化，在 J 处具有普通约化，并且 $p \geq 5$。那么，与 $H^1_{\mathrm{dR}}(C/K_v)$ 的弗罗贝尼乌斯自同态的单位根子空间相联系的 v-adic σ 函数，就是 [的“典范” v-adic σ 函数 Bla18] （见定理 3.6、注 3.7 和命题 3.8）。事实上，Blakestad 的论文正是本文工作的动机：对于椭圆曲线，Mazur–Tate$p$-adic 高度 [MT83] 可以利用 v-adic 类比物显式描述，这些类比物是 Weierstrass sigma 函数 [MT91,MST06] （见 §1.1）。我们最初的目标是将其推广到亏格 2。我们将在与 Kaya 和 M¨uller [BKM23] 的后续工作中证明，在典范情形下，我们对 h_p 的显式定义确实恢复了 J的典范 Mazur–Tate p-adic 高度。

复西格玛函数是一个全纯函数 $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$，它依赖于解析同构 $J(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^2/\Lambda$ (§2.2)。一般而言，我们无法在

[1]注意，分歧处 属于 K ab 的赋值点的子集 ove p。

v-adic 情形下使用一致化定理；然而， J 模 v 的约化核（记作 $J_1(K_v)$）是与定义在 $\mathcal{O}_v$ 上的二维交换形式群律 $F(T_1,T_2)$ 相关联的群。经基变换到 K_v 后，形式群律 F 同构于加法群 $\mathbb{G}_a^2$（见 §2.1,2.3）。

利用一个适当的同构，我们可以仿照复理论，将 sigma 函数定义为形式群上的微分方程组 σ_v的解[2]。得益于 Grant 对形式群参数的描述，这一切都可以显式写出 T_1 以及T_2 [Gra90], 和形式幂级数 $\sigma_v(T) := \sigma_v(T_1, T_2)$ 在一个有限指数子群 H_v上 $J_1(K_v)$ 收敛，因此也在 $J(K_v)$ 上收敛（命题 3.4）。在存在的情况下，Blakestad 的函数是唯一一个可表示为关于 v与 T_1 的幂级数、且具有 T_2 系数 v在 -阿迪克意义下整性的 -阿迪克 sigma 函数。
复西格玛函数与取实值的 N´eron 函数之间的联系由 Yoshitomi 证明 [Yos98] (另见 [Uch11b] 关于任意亏格推广的论述）。根据构造， v-阿迪克 sigma 函数 σ_v 满足与复函数类似的性质；因此，它可用于定义 N $p$eron 函数的 -阿迪克类比：对于´， $P \in J(K_v) \setminus \mathrm{Supp}(\Theta)$，令

$$n_v\lambda_v(P) = -\frac{2}{m^2}\cdot\chi_v\left(\frac{\sigma_v(T(mP))}{\phi_m(P)}\right),$$

其中 $m = k[J(K_v): H_v]$ ，对某个 $k \in \{1,2\}$ 而言， ϕ_m 是第 m 个除法多项式（见定义 4.2）。

一个自然的问题是，全局高度 h_p 和 p-进 N´eron 函数 λ_v 与适用于一般曲线的雅可比簇的知名全局和局部 p-进高度理论有何关系。我们针对 Coleman–Gross[CG89] 的 p-进高度配对（以及 Colmez [Col98] 和 Besser [Bes05,Bes22] 对坏约化情形所作的扩展）探讨这个问题；根据 [Bes04,Bes22]，若曲线在 p 之上的每个素数处均具有半稳定约化，则该配对等于 Nekov´aˇr [Nek93] 的 p-进高度。
针对 C 的扩展 Coleman–Gross 高度，其定义方式与我们的 h_p 有根本区别。特别是，该理论的局部部分由 C 上支集不相交的零次除子之间的配对给出；在 χ 的分歧处，它通过在 C 上进行 Coleman–Colmez–Vologodsky 积分来定义，而在其他赋值点则通过算术交理论定义。

仅在本引言中，我们用 $\langle D_1, D_2\rangle_v$ 表示 v 处扩展的 Coleman–Gross 局部高度配对，其取值对象为一对具有不相交支集的 K_v-有理零次除子 D_1, D_2。与 h_p 的情形一样， χ 的分歧素点 v 处的局部配对 $\langle D_1, D_2\rangle_v$ 取决于 $H^1_{\mathrm{dR}}(C/K_v)$ 中一个各向同性子空间的选取，该子空间与 $H^0(C/K_v, \Omega^1)$ 互补。

我们证明，只要在分歧素点处对各向同性子空间作出相同的选取，全局高度 h_p 就与 C 的扩展 Coleman–Gross 高度相同（推论 5.35）；而在任意 v 处，局部 Coleman–Gross 高度配对等于 λ_v 到 C 的拉回的某个适当线性组合。精确表述见推论 5.32。为方便读者，我们在此陈述局部与全局比较的简化版本：

定理 1.1。设 P_1、P_2、Q_1、$Q_2 \in C(K_v)$，使得 $Q_i \neq P_j$对所有 i、$j \in \{1,2\}$均成立。则存在一个有限点集 $S \subset C(K_v)$，使得对于所有 $R \in C(K_v) \setminus S$，我们有：

$$\langle P_1 - P_2, Q_1 - Q_2\rangle_v = -\frac{n_v}{2}\sum_{1\le i,j\le 2}(-1)^{i+j}\lambda_v(\iota(Q_i) - \iota(P_j) - \iota(R)).$$

此外，

$$\sum_v \langle P_1 - P_2, Q_1 - Q_2\rangle_v = \frac{1}{2}(h_p([P_1 + Q_1 - P_2 - Q_2]) - h_p([P_1 - P_2]) - h_p([Q_1 - Q_2])).$$

注 1.2. 这本质上是 Faltings p实值定理的一个 [Fal84]与 Hriljac [Hri85]（专门针对亏格 2 的奇次数超椭圆曲线的情形）。

[2]对于熟悉 v-进椭圆曲线上的 sigma 函数（§1.1）的读者而言，这并不令人意外：参见[PR84、Ber81、MT91]。[3]即“扩展到坏约化情形”。

为了证明这些比较结果，我们绕道探讨 Colmez 理论中的曲线上 p-进积分，以及其雅可比簇上 theta 除子的对称 p-进格林函数 [Col98]，并将其应用于 C 以及除子 Θ 在 J上的情形。它与上述问题的联系如下。在 Coleman–Gross [CG89], 的原始论文中，对于 v 的一个分歧赋值， χ局部高度配对 $\langle D_1, D_2\rangle_v$ 由下式给出：

$$\langle D_1, D_2\rangle_v = t_v\left(\int_{D_2}\omega_{D_1}\right),$$

其中，整性是一个 K_v-值的（Coleman [Col82, Col85, CdS88]）微分在 C上的积分，且 $t_v\colon\ K_v \to \mathbb{Q}_p$ 是迹映射。迹映射由 χ唯一确定，因此积分所依赖的 p-进对数的分支也随之确定（对于某些除子的选取）。

v-进积分对 p-进对数分支的依赖性，在 Colmez 理论中以另一种方式得到解决（与 Coleman 的理论不同，该理论不对约化作任何假设）：将对数在 p 处的值 $\operatorname{Log} p$ 视为变量。事实上， ω_{D_1} 的 Colmez 积分取值于 $\mathscr{L}(K_v) \coloneqq K_v \oplus \mathbb{Q}\operatorname{Log} p$。采用这种约定，Colmez 给出了（扩张的）Coleman–Gross 局部高度配对的统一理论：根据其积分理论，对于任意 v（包括非分歧素数），我们有

$$\langle D_1, D_2\rangle_v = T_v\left(\int_{D_2}\omega_{D_1}\right), \tag{1.1}$$

对于某个 $\mathbb{Q}$-线性映射 $T_v\colon\ \mathscr{L}(K_v) \to \mathbb{Q}_p$，它由 χ唯一确定。在非分歧素数$v \mid q$处，该迹映射 T_v 满足 $T_v(a + b \text{ 对数 } q) = b\chi_v(q)$。换言之，在此类素数处，Coleman–Gross 对 $\langle D_1$ 的定义中出现的交数 $D_2\rangle_v$，被一个 v-进积分的对数 q 的系数所取代；该积分的构造方式类似于在 χ 的分歧素点处出现的积分。

此外，Colmez 构造了阿贝尔簇上格林函数的 v-进类比。他证明，(1.1) 中出现的积分可以用适当的对称[4] v-进格林函数 G_Θ 在 J 上的除子 Θ 的拉回到 C 来表示。在分歧素数 v 处， G_Θ 的选择取决于 W_v。我们证明（更精确的陈述见定理 5.30）：

定理 1.3。存在一个对称的 v-进格林函数 G_Θ，其除子为 Θ，使得 at

$$n_v\lambda_v = -2T_v(G_\Theta).$$

Mor此外，若 χ 在 v 处分歧，且 λ_v 对应于对 $W_v \subset H^1_{\mathrm{dR}}(C/K_v)$ 的选取，那么 G_Θ也如此 .

由此很容易推出定理 1.1 以及更一般的推论 5.32 和 5.35。

现在我们转向本文的计算方面（第 6 节）。我们的`SageMath` [实现22]可在此处获取：[Bia23]。近年来， p-adic 高度算法因其在 Chabauty–Kim 方法显式版本中的关键作用而备受关注[Kim05、Kim09]，尤其是用于确定曲线上有理点的开创性工作 [BD18]和 [BDM+19]关于二次 Chabauty 的研究。因此，我们相信，局部p-adic N´eron 函数的实现可能还有本文所述应用之外的其他用途。

给定一个子空间 W_v，计算与之相关的 v-adic σ 函数需要显式运用 J的形式群律。特别是，需要计算形式群参数下函数的展开式，以及J_1 到 K （或 K_v）的基变换所得形式群与二维形式加法群之间的形式群同构。所有这些基本上都可以通过实现 [Gra90]的显式结果来完成。

例如，我们可以计算一个“朴素的” v-进 σ 函数（§3.1），它是椭圆曲线上的 Bernardi的σ函数在亏格 2 情形下的类比 [Ber81]。这个 σ 函数在计算中相当有用，因为它作为 T_1， T_2 的幂级数的系数属于 K，且与素数 v无关，因此我们可以考虑较大的素数。

How然而，如果 J 在 χ的所有分歧赋值点 v 处都有良好普通约化，则存在一些实例 es
whe因此，人们可能希望改为计算 Blakestad 的规范 v-adic σ 函数。事实上 d,

[4]在我们的情形中，“对称”是“偶”的同义词（参见 §5.4）

如上文所述，我们证明了 Blakestad 的 v-adic σ 函数对应于 Frobenius 的单位根子空间；根据其与扩展 Coleman–Gross 高度的比较结果（推论 5.35），相对于这一选择的全局高度 h_p 与 p-adic 类 Birch–Swinnerton-Dyer 猜想 [BMS16]相关联。此外，鉴于其整性，Blakestad 的 v-adic σ 函数比其他任何函数都具有更好的收敛性质，这可能使其成为各种计算情形下更理想的选择。在 §6.2 中，我们讨论了如何在 $K_v \cong \mathbb{Q}_p$ 利用 Kedlaya 算法 [Ked01]计算它。

计算 p-进 N´eron 函数所需的最后几项是除法多项式、连续幂等类特征以及指数 $[J(K_v) : J_1(K_v)]$。对于除法多项式，我们改进了 de Jong–M¨uller [dJM14] (§6.3) 中的实现；对于特征，我们可以使用[BBBM21] 处理一般情形（但目前实现仅限于圆分特征）；对于指数，我们采用了 Bruin–Stoll [BS10] 的工作（详见 §6.4）。

为展示我们的实现，我们给出两个例子。在 §6.5 中，我们考虑曲线 $C\colon y^2 = x^5 - 1$（定义在 $\mathbb{Q}$ 上），并计算一个非挠点在 $J(\mathbb{Q})$ 中的典范圆分 p- 进高度，其中 $p = 10^6 + 81$ 是一个良好普通素数。之所以能够考虑如此大的素数，同时仍能计算典范 p-进高度（精度达到 p-进 20 位，约需 15 秒），是因为在这种情形下，我们无需借助 Kedlaya 算法便可求出单位根子空间；这是由于 C 在 $\mathbb{Q}(\zeta_5)$ 上具有额外自同构。

在 §6.6 中，我们考察一条曲线，文献 [BBM16]曾对其典范 Coleman–Gross 高度进行过计算。我们利用比较结果，改用p-adic N´eron 函数代替 Coleman 积分和交叉重数，重复这些计算。

我们选取的两个例子都是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的曲线，并且在 p处具有良好普通约化。若在实现中用任意明确给定的各向同性补子空间替代 Frobenius 的单位根子空间，则良好约化和普通约化这两个假设均可取消（也可只取消其中一个）。在与 Kaya 和 M¨uller [BKM23] 即将开展的工作中，我们将探讨在半稳定普通情形下计算典范西格玛函数的问题。最后，曲线定义在 $\mathbb{Q}$ 上的假设对于算法而言也并非必要（不过，若我们的选择需要使用 Kedlaya 算法计算 Frobenius 的单位根特征子空间，则必须假设 $K_v \cong \mathbb{Q}_p$ 在每个 v 的分歧素数 χ处满足该条件，这是由于当前 `SageMath` [的22] 实现所存在的限制）。

与其他显式计算 p-进高度的方法相比，例如 [BB12、BMS16]针对 Coleman–Gross 高度的算法，我们的方法有一个明显的缺点，即假设 C 的亏格为 2。另一方面，我们认为，在亏格 2 情形下，我们的方法具有一些可能使其更具优势的特点。例如，它对素数 $v \mid p$处的约化类型基本不敏感。这一点继承自 N´eron 函数的定义。具体而言， ´处的 N v eron 函数首先定义在依赖于模型的约化核上 $J_1(K_v)$上，然后通过结合以下事实将其延拓至 $J(K_v)$: $[J(K_v): J_1(K_v)]$ 是有限的，并且 λ_v 是一个“几乎”二次函数（命题 4.7）。

根据定理 1.1（更一般地，根据推论 5.32），我们随后可以计算任意约化情形下的局部 Coleman–Gross 高度。在 §6.7 中，我们解释了如何通过将准二次性替换为关于在 J 上乘法运算的适当变换性质，也可以将 J 上第一类和第二类微分的微分积分（因而通过拉回也可将 C 上的微分积分）表示为 $J_1(K_v)$ 上的积分。总之，可以将用于高度计算的相同或类似技术应用于计算 C 上第一类、第二类和第三类微分的微分积分，而无需对约化作任何假设。

最后一节（第 7 节）专门讨论一种初等的二次 Chabauty 型判据，用于研究某些亏格 4 超椭圆曲线上的有理点。这些曲线存在到两条亏格 2 曲线的二次映射（如 C），且每条曲线的雅可比簇秩均为 2。参见命题 7.6。

1.1. 椭圆曲线类比。本文几乎所有结果都有椭圆曲线类比，这些类比要么已见于文献，要么可以用与亏格 2 情形类似的方法推导得出。我们在 §3.1 中介绍的亏格 2 朴素西格玛函数的构造及其收敛性质分析，基于 Bernardi 关于椭圆

曲线 [Ber81]；Blakestad 的西格玛函数（§3.2）是 Mazur–Tate 典范西格玛函数的类比 [MT91]。椭圆曲线的典范西格玛函数与 E/K_v 的单位根特征子空间相关 $H^1_{\mathrm{dR}}(E/K_v)$ 这一点可由 [MT91，命题 3] 以及 [Kat73，Kat76] 得出，并应用于 Mazur–Stein–Tate 的算法 [MST06，§3。2] 以及 Harvey [Har08，第 3,4]节。

利用 p-adic σ 函数构造的椭圆曲线上的p-adic 高度，也是 Ber81、MT91、MST06、Har08] 和 p-adic 高度的研究主题，具体定义见 MT83]。另见 PR83、PR84、Wu04]。通常，这类 σ 函数用于定义全局 p-adic 高度。将其分解为相对于由两倍无穷远点给出的除子的局部 p-adic N´eron 函数之和，这种观点往往不被采用。或许这是因为 v-adic σ 函数（对于 $v \mid p$）的自然定义域是形式群的一个子群。因此，如果我们只关心全局 p-adic 高度的取值，那么利用二次性扩展后者，比利用涉及除法多项式的公式扩展每个局部 N´eron 函数更方便。

不过，采用 p-adic N´eron 函数的观点是自然的，因为它直接类比于实值情形（例如参见 [Sil94，第VI章]），而且在 Chabauty–Kim 方法的语境下也很方便。因此， [BDCKW18] 在不等于p的素数处，以及 [Bia20、§§2.A, 4.A] 在所有素数处均采用了这种观点。

据我们所知，文献中尚未明确陈述§5.4 中局部比较结果的直接类似结论，但可以用类似的方法推导出来。不过，有几点值得说明。Colmez 格林函数与 Mazur–Tate 的工作之间的联系，Colmez 本人在 [MT91] 之前已有所暗示，参见 [Col98，命题 II.2。20]。全局 Coleman–Gross 高度与 Mazur–Tate 高度相等，这一点已为人所知，至少在良好普通约化的情形下如此 [Col91，Bes04] （另见 [BB15]的引言）。[BB15的推论 4 提供了良好普通情形下另一种类型的局部比较。2]。

1.2. 记号。 $\mathbb{N}$ 包含 0。给定一个数域 K 和一个非阿基米德赋值 v，记号 ord_v 表示 $K_v^\times$上的 v-进赋值，归一化为 $\mathrm{ord}_v(K_v^\times) = \mathbb{Z}$。若 v 位于 ℓ之上，则 K_v 上的 v-进绝对值 $|\cdot|_v$ 延拓了标准的 ℓ-进绝对值。本文中出现了各种“对数”。为帮助读者避免可能的混淆，我们在此编列了一份清单：

- 我们在对数导数中使用符号 log。也就是说，若 f 是某个域上的幂级数，且 D 是一个微分算子，则 $D(\log(f))$ 表示 $\frac{Df}{f}$。我们也用 log 表示实对数。
- Log 和 Log_v 是 Colmez 意义下的对数（第 5 节，公式 (5.1) 及第 5.3.1 节）。
- $\log_p$ 是 p-进对数在 p 处取值为零的分支（第 6.4 节）。
- $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n)$ 是一个形式群对数，通常是严格形式群对数（定义 2.6）。
- 在 p-进域 K 上的阿贝尔簇 X 的单对数，是一个局部解析群同态 $X(K) \to K$ （第 5.1 节）。
- 设 X 是 p-进域 K 上的光滑、射影、几何不可约曲线，其雅可比簇为 J。对数 $\mathrm{Log}\,\tilde{\jmath}$是从 X 上模去对数微分后的第三类微分到 X 的第一德拉姆上同调的典范同态 $T(K)/T_\ell(K) \to H^1_{\mathrm{dR}}(X)$（定义 5.13，备注 5.15）。

致谢。首先，我衷心感谢 Steffen M¨uller 提出将 Blakestad 关于 p-进 σ 函数的工作应用于高度研究的建议，并在本项目的各个阶段与我进行了有益的讨论、给予了慷慨的反馈。我还要感谢 Clifford Blakestad 分享他工作的见解，感谢 Stevan Gajovi´c 提出引理 A.3 并提供有益的意见，感谢 Enis Kaya 对早期稿件给予宝贵的反馈，并就 p-进高度进行了启发性的交流，也感谢 Remco Wouts 协助进行计算。本工作由 NWO Vidi 基金资助。

2. Preliminaries

2.1. 形式群律。 本小节回顾形式群律的一些定义和性质。我们主要关注某些形式群律与适当维数的形式加法群之间同构的显式描述：见下文定理 2.5、命题 2.7 和引理 2.8。主要参考文献为 [Fre93，Zin84，CF96]。特别是，直到并包括定义 2.6 的部分，我们都紧密遵循 [Fre93] ；随后，命题 2.7 是对 [CF96]中结果的加强；最后，关于不变导子的讨论以 [Zin84]为基础。

设 R是一个带单位元的交换环，设 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，设 $X = (x_1, \ldots, x_n)$，并设 $R[[X]]$是以 $x_1, \ldots, x_n$为变量、系数环为 R的幂级数环。

定义 2.1. 在 R上，维数为 n的形式群律 $F(X,Y)$是一个由幂级数$F_i(X,Y)$组成的 n元组，满足

(i) $F(X,Y) = X + Y + O(X,Y)^2,$，其中 $O(X,Y)^2$表示总次数至少为 2 的项；(ii) $F(X,F(Y,Z)) = F(F(X,Y)\ Z)$。

如果形式群律 $F(X,Y)$满足 $F(Y,X) = F(X,Y)$，则称其为交换的。

由形式群公理可知，存在唯一的形式逆元，即一个由幂级数组成的 n元组 $i(X) \in R[[X]]^n$，使得 $F(X,i(X)) = F(i(X)\ X) = 0$且 $i(X) = -X + O(X)^2$。此外， $F(X,0) = F(0,X) = X$。

定义 2.2. 给定维数分别为 n 和 m、定义在 R 上的形式群律 $F(X,Y)$和 $G(X,Y)$，形式群同态 $\alpha\colon F \to G$ 是一个由幂级数组成的 m元组 $\alpha_i(X) \in XR[[X]]$，满足$\alpha(F(X,Y)) = G(\alpha(X)\ \alpha(Y))$。若存在形式群同态 $\beta\colon G \to F$，使得 $\alpha(\beta(Y)) = Y$ 且 $\beta(\alpha(X)) = X$，则同态 α 是一个同构。

一个维数为 n的交换形式群律的例子是加法群 $\mathbb{G}_a^n(X,Y) = X+Y$。如果 R是一个 $\mathbb{Q}$-代数，那么任何定义在 R上的维数为 n的交换形式群律都同构于 $\mathbb{G}_a^n$：参见下文定理 2.5。

为了明确描述这个同构，我们先回顾定义在任意含单位元的交换环R 上的维数为 n的交换形式群律 $F(X,Y)$上的不变微分的概念。

我们将 $R[[X]]$-模的微分 1-形式定义为 $\Omega = \sum_{i=1}^n R[[X]]dx_i$，并定义相应的全导数映射 d：$R[[X]] \to \Omega$，$d(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$。如果一个微分属于 d的像，则称其为恰当微分。给定 $\omega = \sum_{i=1}^n \varphi_i(X)dx_i \in \Omega$，其中 $\varphi_i(X) \in R[[X]]$，若 ω 满足以下条件，则称其为（平移）不变：

$$\omega(F(X,T)) := \sum_{i=1}^n \varphi_i(F(X,T))dF_i(X,T) = \omega;$$

这里在 $dF_i(X,T)$ 中，我们将 T 固定，并对 X 求偏导数。

形式群律的定义意味着，矩阵 $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(0,X)\right)$ 在 $R[[X]]$上可逆，并且我们有：

引理 2.3. 微分 $\omega = \sum_{i=1}^n \varphi_i(X)dx_i \in \Omega$ 是不变微分，当且仅当

$$\omega = (a_1, \ldots, a_n)\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(0,X)\right)^{-1}\begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$$

对于某个 $(a_1, \ldots, a_n) \in R^n$。特别地， $F(X,Y)$ 的不变微分构成一个秩为 n 的 R-模。

证明。 例如参见 [Fre93，第 243]。 □

引理 2.4 ([**Hon70**，命题 1.3，引理 1.4])。若 R 是一个 $\mathbb{Q}$-代数，且 F 是定义在 R上的交换形式群律，则每个不变微分形式都是恰当的。

由这两个引理可推出

定理 2.5. 设 F是定义在 $\mathbb{Q}$-代数 R上的交换形式群律，且 $\omega_1, \ldots, \omega_n$是 F的不变微分形式的一组 R-基。设 $\mathcal{L}_i(X) \in R[[X]]$ 是满足下列条件的唯一幂级数

$$d\mathcal{L}_i = \omega_i, \qquad \mathcal{L}_i(0) = 0.$$

那么， $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n)$: $F \to \mathbb{G}_a^n$是一个形式群同构。反过来，任意同构$F \to \mathbb{G}_a^n$ 都具有这种形式。

证明. 第一条结论可参见例如 [Fre93，定理 1]。对于第二条结论，若$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$: $F \to \mathbb{G}_a^n$是一个同态，则 $\alpha_i(F(X,Y)) = \alpha_i(X) + \alpha_i(Y)$，因此 $d\alpha_i$是不变微分形式。根据 [Zin84，引理 1.4]， α 是同构，当且仅当雅可比矩阵 $\left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}(0)\right)$ 在 R上可逆。由引理 2.3 可知，这当且仅当 $d\alpha_1, \ldots, d\alpha_n$ 是 R- 模的不变微分形式的一组基。□

定义 2.6。定理 2.5 中的同构称为 F 的对数。严格对数是对应于基 $\omega_1, \ldots, \omega_n$ 的对数，其中，对于 $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\omega_k = (\delta_{ik}) \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(0, X)\right)^{-1} \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}.$$

这里 δ_{ik} 是克罗内克 δ。形式群对数的逆称为形式群指数；严格对数的逆称为严格指数。

根据定理 2.5，若 R 是特征零的整环，且 F 是定义在 R 上的交换形式群律，那么将基变换到 R 的分式域后，我们可以考虑到某个适当维数的加法群的同构。对于我们预期的应用，我们希望了解严格形式对数和指数的级数展开式中可能出现哪些分母。

命题 2.7。设 R 是特征零的最大公因子整环， K 是其分式域。设 F 是定义在 R 上的交换形式群律，且 F_K 是其基变换到 K 后所得的形式群律。那么， F_K 的严格对数 $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n)$ 和严格指数 $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n)$ 具有如下形式：

$$\mathcal{L}_i = x_i + \sum_{\substack{j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{N} \\ j_1 + \cdots + j_n \geq 2}} \frac{a_{j_1, \ldots, j_n}}{\gcd(j_1, \ldots, j_n)} x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n}, \qquad \textit{where } a_{j_1, \ldots, j_n} \in R;$$

$$\mathcal{E}_i = x_i + \sum_{\substack{j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{N} \\ j_1 + \cdots + j_n \geq 2}} \frac{b_{j_1, \ldots, j_n}}{j_1! \cdots j_n!} x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n}, \qquad \textit{where } b_{j_1, \ldots, j_n} \in R.$$

证明。令 $\mathcal{L}_i = \sum c_{j_1, \ldots, j_n} x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n}$表示 $c_{j_1, \ldots, j_n} \in K$。对每个 $k \in \{1, \ldots, n\}$，我们有 $\frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial x_k} \in R[[X]]$，因此

$$j_k c_{j_1, \ldots, j_n} \in R.$$

若 $c_{j_1, \ldots, j_n}$ 非零，令 $c_{j_1, \ldots, j_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ 表示互素的 $\alpha, \beta \in R$，我们推得 $\beta \mid j_k$ 对每个 k都成立（根据最大公因子整环中的欧几里得引理），因此 $\beta \mid$最大公因子$(j_1, \ldots, j_n)$。关于首项的断言由 $\mathcal{L}$ 是严格对数这一事实得出。关于 $\mathcal{E}_i$的系数，参见 [CF96，第 68]页。□

设 F 是定义在 $\mathbb{Q}$-代数 R 上的交换形式群律。定理 2.5 通过选择 F 的不变微分所成的 R-模的一组基，刻画了任意形式群同构 $\mathcal{L}$: $F \to \mathbb{G}_a^n$ 。现在我们将看到， $\mathcal{L}$ 的逆映射可以借助相关 R-模的一组适当基得到显式描述：该模由 F 的不变导子构成。导子是一个 R-线性映射 D: $R[[X]] \to R[[X]]$，满足 $D(fg) = gDf + fDg$；若导子 D 满足以下条件，则称其对 F 不变

$$D(f(F(X,T))) = (Df)(F(X,T)) \qquad \text{for all } f \in R[[X]].$$

根据定义可知，任意导子 D 都满足

$$D = \sum_{i=1}^{n} Dx_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}; \tag{2.1}$$

因此， D 是一个不变对象，当且仅当对每个 $j \in \{1, \dots, n\}$，都有

$$\sum_{i=1}^{n} Dx_i \cdot \frac{\partial F_j(X,T)}{\partial x_i} = (Dx_j)(F(X,T)).$$

根据 [Zin84，定理 1。15], 不变导子构成一个 R-模，其秩为 n。此外，记 $\mathrm{Der}\, R[[X]]^{\mathrm{inv}}$ 为不变导子的 R-模，记 Ω^{inv} 为不变微分的 R-模，根据 [Zin84，定理 1，19] 存在一个完美配对

$$(\cdot,\cdot)\colon \mathrm{Der}\, R[[X]]^{\mathrm{inv}} \times \Omega^{\mathrm{inv}} \to R, \qquad (D, gdf) = gDf. \tag{2.2}$$

特别地，若 $\mathcal{L}$ 是严格对数，则与 $d\mathcal{L}_i$ 对偶的对象为

$$D_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(0,X)\frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{2.3}$$

引理 2.8. 设 R 是一个 $\mathbb{Q}$-代数， F 是定义在 R上的交换形式群律。设 $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n)$是一个形式对数 $F \to \mathbb{G}_a^n$，其逆为 $\mathcal{E}\colon \mathbb{G}_a^n \to F$。假设 $\mathcal{L}$ 对应于 Ω^{inv} 的一组基，该基与 $\mathrm{Der}\, R[[X]]^{\mathrm{inv}}$ 的一组基 $(D_1, \dots, D_n)$ 对偶。那么

$$\frac{\partial f(\mathcal{E}(T))}{\partial t_i} = (D_i f)(\mathcal{E}(T)) \qquad \textit{for all } f \in R[[X]].$$

证明。令 $\gamma^{(i)}(t_i) = \mathcal{E}(T)|_{t_j=0,\ j\neq i}$。则 $\gamma^{(i)}$ 定义了一个形式群同态 $\mathbb{G}_a \to F$。因此，根据 [Zin84，定理 1，26], 下式定义了一个不变导子

$$(\tilde{D}_i x_j)(X) = \frac{\partial F_j(X, \gamma^{(i)}(t_i))}{\partial t_i}\bigg|_{t_i=0} = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial y_\ell}(X,0)\frac{\partial \mathcal{E}_\ell}{\partial t_i}(T)\bigg|_{T=0} = \frac{\partial \mathcal{E}_j}{\partial x_i}(X)\bigg|_{X=\mathcal{L}(X)} \tag{2.4}$$

（最后一个等式由对 Y 求导 $\mathcal{E}(X+Y) = F(\mathcal{E}(X)\ \mathcal{E}(Y))$，并在 $Y=0$ 和 $X = \mathcal{L}(X)$ 处取值可得。）因此，对于每个 $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$(\tilde{D}_i, \omega_k) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial x_j}\tilde{D}_i x_j = \frac{\partial \mathcal{L}_k(\mathcal{E}(X))}{\partial x_i}\bigg|_{X=\mathcal{L}(X)} = \delta_{ik},$$

˜因为 $\mathcal{L}(\mathcal{E}(X)) = \mathcal{E}(\mathcal{L}(X)) = X$。这表明 $D_i = D_i$。由 (2.4) 和 (2.1) 即得引理。□

注 2.9。沿用引理 2.8 及其证明中的记号，特别有 $\gamma^{(i)}(t_i)$ 是 D_i 的积分曲线（参见 [Zin84，定理 1.23、1。26]）。

2.2. 亏格 2 曲线的雅可比簇：代数、解析与射影观点。设 C 是域 K 上特征不为 2 的一条亏格 2 超椭圆曲线，它由加权射影空间$\mathbb{P}_{1,\ 3,\ 1}$ 中一条光滑仿射曲线的闭包显式给出

$$y^2 = x^5 + b_1x^4 + b_2x^3 + b_3x^2 + b_4x + b_5, \qquad b_i \in K. \tag{2.5}$$

若 K 是 $\mathbb{C}$ 或代数闭域，则任何亏格为 2 的光滑、射影、几何不可约曲线都与 K 上的这种形式双有理等价；对于其他域 K，情况则并非如此；例如参见 [CF96，第 1]节。

C 上有且仅有一个点不属于给定的仿射图；我们将此点记为 ∞。给定一点 P，我们用 P^- 表示 P 在超椭圆 involution 下的像；该 involution 将 (x,y) 映射到 $(x,-y)$，并将 ∞ 映射到自身。C 的（代数）雅可比簇 J 是定义在 K 上的二维阿贝尔簇，其 K-有理点对应于 K-有理零次除子的线性等价类

C 模线性等价。每个这样的等价类都可以由如下形式的 K-有理除子表示

$$P_1 + P_2 - 2\infty, \qquad \text{for some} \quad P_1, P_2 \in C.$$

事实上，对于 $J(K)\setminus\{0\}$ 中的每个点，这样的除子都是唯一的，而零类则由

$$P + P^- - 2\infty, \qquad \text{for every} \quad P \in C.$$

因此，从 C的对称平方到 $C^{(2)}$存在一个满射，记作 J，并且我们可以将 J 与 $C^{(2)}$ 在原点处吹下后的空间等同起来（例如，参见 [Mum07b，IIIa，§2]中的情形$K=\mathbb{C}$）。我们还考虑 Θ 上的 J除子，其支集为

$$\mathrm{Supp}(\Theta) = \{[P-\infty] : P \in C\}.$$

虽然我们最终感兴趣的是研究定义在 $\mathbb{Q}_p$的有限扩张上的曲线的雅可比簇，其中 p是一个素数，但出于多种原因，先回顾一些复解析理论既有启发性又有实用价值。现在假设 $K=\mathbb{C}$。我们主要参考 [Gra90、Uch11b、Bak07、Mum07a、Mum07b]。空间 $H^0(C/\mathbb{C},\ \Omega^1)$ 的一组基为 C 上的全纯1-形式

$$\omega_1 = \frac{dx}{2y}, \qquad \omega_2 = \frac{xdx}{2y}; \tag{2.6}$$

利用霍奇过滤，我们将其识别为 $C/\mathbb{C}$ 的第一代数德拉姆上同调中的一个 2 维子空间，记作 $H^1_{\mathrm{dR}}(C/\mathbb{C})$。在此识别下，我们有

$$H^1_{\mathrm{dR}}(C/\mathbb{C}) \cong H^0(C/\mathbb{C},\Omega^1) \oplus W_0,$$

其中 W_0 是由第二类微分的类张成的空间

$$\eta_1 = (-3x^3 - 2b_1x^2 - b_2x)\frac{dx}{2y}, \qquad \eta_2 = -\frac{x^2dx}{2y}. \tag{2.7}$$

空间 W_0 关于代数杯积配对是各向同性的；此外，$[\eta_1]$ 和 $[\eta_2]$是 $[\omega_1]$、$[\omega_2]$的对偶基，即 $[\eta_i]\cup[\omega_j]=\delta_{ij}$，其中 δ_{ij} 是克罗内克 δ，因此$[\omega_1]$、$[\omega_2]$、$[-\eta_1]$、$[-\eta_2]$ 是 $H^1_{\mathrm{dR}}(C/\mathbb{C})$ 关于杯积配对的辛基。类似地，我们也选取 $H_1(C,\mathbb{Z})$ 的辛基 A_1、A_2、B_1、B_2，其对应于循环的交积。文献 [Mum07b, IIIa, §5] 说明了如何利用 C 是 $\mathbb{P}^1$ 的双覆盖这一事实来完成这一构造。

接下来定义周期矩阵

$$\Omega = (\Omega_{ij}) = \left(\int_{A_j}\omega_i\right), \qquad \Omega' = (\Omega'_{ij}) = \left(\int_{B_j}\omega_i\right).$$

矩阵 $\tau := \Omega^{-1}\Omega'$ 是良定义的、对称的，且其虚部正定；也就是说，τ属于二维西格尔上半空间。令 $\Lambda = \Omega\mathbb{Z}^2 + \Omega'\mathbb{Z}^2$。$C$ 的解析雅可比簇为 $\mathbb{C}^2/\Lambda$。代数雅可比簇与解析雅可比簇之间的同构由积分映射诱导。

$$\Phi\colon C^{(2)} \to \mathbb{C}^2/\Lambda, \qquad (P_1,P_2) \mapsto \int_\infty^{P_1}(\omega_1,\omega_2) + \int_\infty^{P_2}(\omega_1,\omega_2) \bmod \Lambda. \tag{2.8}$$

对于上述的 τ 以及任意的 a、$b\in\mathbb{Q}^2$，我们可以赋予一个所谓的带特征的θ函数：

$$\theta\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^2}\exp(\pi i(n+a)^T\tau(n+a) + 2\pi i(n+a)^T(z+b)), \qquad z\in\mathbb{C}^2.$$

根据 [Mum07a，II，命题 1.1 和第 123], 这是定义在 $\mathbb{C}^2$上的全纯函数。此外，关于 $\Omega^{-1}\Lambda$，它在 [Mum07a第 123]页所述的意义下是拟周期的：对每个 $m\in\mathbb{Z}^2$,

$$\theta\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}(z+m) = \exp(2\pi i a^T m)\cdot\theta\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}(z) \tag{2.9}$$

$$\theta\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}(z+\tau m) = \exp(-2\pi i b^T m - \pi i m^T\tau m - 2\pi i m^T z)\cdot\theta\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}(z). \tag{2.10}$$

由拟周期性 (2.9)-(2.10) 可立即得出，记作 $z=(z_1,z_2)$，对每个 $i,j\in\{1,2\}$，以下是定义在 $\mathbb{C}^2/\Lambda$ 上的亚纯函数:

$$\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial z_j}\log\left(\theta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(\Omega^{-1}z)\right). \tag{2.11}$$

在 $\mathbb{C}^2/\Lambda$ 上的其他亚纯函数也可用同样的方式得到，只需将 $\theta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(z)$ 替换为其与一个关于 z_1、z_2 的次数至多为 2 的多项式的指数相乘所得的函数。在这类多项式以及向量 a、$b\in\mathbb{Q}^2$ 的选择中，有一些特别有用。首先，当

$$a=\delta:=(1/2,1/2)\qquad\text{and}\qquad b=\delta':=(1,1/2),$$

theta 函数是奇函数 [Mum07a，II，命题 3。14] 并且恰好在以下点处一阶消失$z\in\mathbb{C}^2$ 满足 Ωz 模 $\Lambda=\Phi(P,\infty)$ 的某个 $P\in C$，也就是说，在解析 theta 除子经 $\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2/\Omega^{-1}\Lambda\xrightarrow{\sim}\mathbb{C}^2/\Lambda$ 拉回所得的除子上。参见 [Mum07b，3.80–3.85，3。89]。

其次，如果我们设

$$\tilde\sigma(z)=\exp\left(\frac{1}{2}z^TH\Omega^{-1}z\right)\theta\begin{bmatrix}\delta\\\delta'\end{bmatrix}(\Omega^{-1}z),\qquad\text{where}\quad H=(H_{ij})=\left(\int_{A_j}\eta_i\right),$$

then $\tilde\sigma$的二阶对数导数，视为定义在 $C^{(2)}$上的函数，可以描述为

商
中元素的 $\mathbb{Z}[b_1,\dots,b_5][x_1,x_2,y_1,y_2]$；参见 [Bak07，第 38]页。

最后，我们将 C 的双曲椭圆西格玛函数定义为

$$\sigma(z)=c\tilde\sigma(z), \tag{2.12}$$

其中，$c\in\mathbb{C}^\times$ 满足 $\sigma(z)$在 0 附近的泰勒展开具有如下形式

$$\sigma(z)=z_1+O(z_1,z_2)^3.$$

采用这样的归一化后，泰勒展开的系数属于 $\mathbb{Q}[b_i]$（例如参见 [Uch11b，命题 2.1]）。

对于 $i,j,\dots,k\in\{1,2\}$，令

$$\wp_{ij\cdots k}(z)=-\frac{\partial}{\partial z_i}\frac{\partial}{\partial z_j}\cdots\frac{\partial}{\partial z_k}\log(\sigma(z))\qquad\text{and}\qquad\wp=\wp_{11}\wp_{22}-\wp_{12}^2. \tag{2.13}$$

由上可知，$\wp_{ij\cdots k}$ 和 $\wp$ 是 $\mathbb{C}^2/\Lambda$上的亚纯函数。在 Φ的像上，它们可以表示为依赖于 C的系数的有理函数；当 $\mathbb{C}$ 替换为任意特征不为 2 的域 K 时，这些定义也同样适用。例如，若 $z=\Phi((x_1,y_1),(x_2,y_2))$，则

$$\wp_{12}(z)=-x_1x_2,\qquad\wp_{22}(z)=x_1+x_2. \tag{2.14}$$

其他 [Gra90，(1.4)] 中给出了其余的 $\wp_{ij}$ 以及 $\wp_{ijk}$的内容。

遵循 Kanayama [Kan05的做法，Kan10] 和 Uchida [Uch11b]，，我们还在雅可比簇上引入以下函数:
对于 $m\geq1$，m次除法多项式 定义为

$$\phi_m(z)=\frac{\sigma(mz)}{\sigma(z)^{m^2}}. \tag{2.15}$$

根据 [Uch11b，定理 5.8，例 5。9]，$\phi_m(z)$ 是一个关于 $\wp_{ij}$ 和 $\wp_{ijk}$ $(1\leq i,\ j,\ k\leq2)$ 的多项式，其系数属于 $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2},b_1,\dots,b_5\right]$，且据推测也属于 $\mathbb{Z}[b_1,\dots,b_5]$ [Uch11b，猜想 4。14]。特别地，除法多项式在特征不为 2 的任意域上也有意义；给定定义在此类域上的一条曲线，我们将 ϕ_m 视为其雅可比簇上的一个函数 J，满足

$$\operatorname{div}(\phi_m)=[m]^*\Theta-m^2\Theta. \tag{2.16}$$

我们需要的除法多项式的其他性质如下（参见 [Uch11b，命题 4.9，例 2。16]）：

$$\phi_{mn}(z) = \phi_m(nz)\phi_n(z)^{m^2} \tag{2.17}$$

$$\frac{\phi_m(u+v)\phi_m(u-v)}{\phi_m(u)^2\phi_m(v)^2} = \frac{-\wp_{11}(mu)+\wp_{11}(mv)-\wp_{12}(mu)\wp_{22}(mu)+\wp_{22}(mu)\wp_{12}(mv)}{(-\wp_{11}(u)+\wp_{11}(v)-\wp_{12}(u)\wp_{22}(v)+\wp_{22}(u)\wp_{12}(v))^{m^2}}. \tag{2.18}$$

我们所概述的解析理论与定义 p-adic 高度的目标至少有两方面的关联。首先，设 K 是一个数域，且 v 是 K的一个阿基米德赋值。那么，在赋值 v处与 2Θ相关联的实值 N´eron 函数（除一个加法常数外唯一）可用双曲椭圆西格玛函数 σ给出显式公式：参见[Yos98，推论 2.5]。此外，这样的 N´eron 函数在雅可比簇上的标量乘法与加法下满足变换性质，分别可用除法多项式和函数 $\wp_{ij}$ 来描述，参见 [Uch11b，定理 7.5]。在第 3 节中，我们扩展 Blakestad[Bla18], 的工作，构造亏格 2 复西格玛函数的 p-adic 类比；在第 4 节中，我们利用这些函数定义 p-adic N´eron 函数。

注2.10。 超椭圆西格玛函数、除法多项式及其在实值 N´eron 函数中的应用，都可以推广到任意亏格的超椭圆曲线：参见[Uch11b]。关于椭圆曲线，参见 [Sil94，第VI章]。

我们感兴趣的解析理论的第二个应用，是给出一组显式方程，将雅可比簇表示为 $\mathbb{P}^8$中的一个簇。这一结果见于 [Gra90]：对于任意特征不等于 2, [Gra90，推论215] 给出一组由13个齐次方程组成的方程组[5]，位于 $K[X_0, X_{11}, X_{12}, X_{22}, X_{111}, X_{112}, X_{122}, X_{222}, X]$中，并在 $\mathbb{P}^8$ 中定义了一个曲线的雅可比簇，该曲线由形如（2.5）的方程描述，且其系数属于域 K。在此嵌入下， J 的单位元映射为

$$O = (0:0:0:0:1:0:0:0:0).$$

在 [Gra90，定理 3.3，§4] Grant 还给出了关于 J 相对于此嵌入的群律的显式公式 $\mathbb{P}^8$。

注意，射影坐标 X_0, X_{ij}, X_{ijk}, X 与 $C^{(2)}$ 上的函数 $\wp_{ij}, \wp_{ijk}, \wp$ 之间的关系为

$$\frac{X_{ij}}{X_0} = \wp_{ij}, \qquad \frac{X_{ijk}}{X_0} = \frac{1}{2}\wp_{ijk}, \qquad \frac{X}{X_0} = \frac{1}{2}(\wp + b_2\wp_{12} - b_4); \tag{2.19}$$

为方便记号，从现在起我们相对于 X_0 去齐次化，即令

$$X_0 := 1.$$

我们以关于 J 上的不变微分和导子的一条注结束本小节。复解析同构 $J \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^2/\Lambda$ 是利用 C 上全纯微分空间的基 (2.6)，以及嵌入 ι 定义的： $C \hookrightarrow J$ 将 ∞ 映到 J 的单位元。

(2.6) 中的微分 ω_1, ω_2 是 $H^0(C/K, \Omega^1)$ 的一组基（也就是说，不仅在 $K = \mathbb{C}$ 时如此），并且嵌入 ι 诱导出同构 ι^*： $H^0(J/K, \Omega^1) \to H^0(C/K, \Omega^1)$，它是 J 与 C 上全纯微分空间之间的同构。 J 上的全纯微分是平移不变的，并且通过对偶性，它们对应于平移不变导子。

定义 2.11. 对于每个 $i \in \{1, 2\}$，令 Ω_i 为 J 上满足以下条件的不变微分形式

$$\iota^*\Omega_i = \omega_i,$$

并令 ∂_i 为与 Ω_i 对偶的不变导子。

[5] f_{10} 中存在一个拼写错误：第一项应为 X_{112}^2，而不是 X_{122}^2。

引理 2.12。

（1）定义 2.11 中 $H^0(J/K,\Omega^1)$ 的基 $\{\Omega_1,\Omega_2\}$ 明确表示为

$$\Omega_1=\frac{1}{2(X_{111}X_{122}-X_{112}^2)}(X_{122}\cdot dX_{11}-X_{112}\cdot dX_{12});$$
$$\Omega_2=\frac{1}{2(X_{111}X_{122}-X_{112}^2)}(X_{111}\cdot dX_{12}-X_{112}\cdot dX_{11}).$$

(2) 对偶不变导子 ∂_1 and ∂_2 满足

$$\partial_1(X_{ij})=2X_{1ij},\qquad \partial_2(X_{ij})=2X_{ij2}.$$

证明。（2）由 [Bla18，第 64], 页证明。（1）则由此以及一个明确的计算得到。□

2.3. Grant 的形式群律。现在，我们将 §2.1 中介绍的形式群律一般理论应用于 §2.2 的情形。特别地，我们回顾 §2.2 中 Grant 对雅可比簇原点处一对局部参数的描述（在适当的域上），以及由此诱导的形式群律。此外，我们将相应的严格对数与定义 2.11 中的不变微分的基联系起来。最后，我们考察一个与该形式群律相关的群。

设 R 为数域的整数环，或为一个特征零且关于某个非阿基米德赋值完备的环。在这两种情形下，令 K 为 R 的分式域。如 §2.2 中一样，我们考虑 K 上由形如（2.5）的方程定义的超椭圆曲线 C，但进一步假设 b_1、.....、$b_5\in R$。我们将 §2.2 中定义的 $\mathbb{P}^8$ 中的射影簇记为 J，并考虑以下函数

$$T_1=-\frac{X_{11}}{X_{111}},\qquad T_2=-\frac{X}{X_{111}}. \tag{2.20}$$

定理 2.13（[**Gra90**，定理 4.2]）。函数 $\frac{1}{X_{111}}=\frac{X_0}{X_{111}}$、$\frac{X_{ij}}{X_{111}}$、$\frac{X_{ijk}}{X_{111}}$可以展开为关于 T_1、T_2 的形式幂级数，其系数属于 $\mathbb{Z}[b_1,\dots,b_5]$。

特别地，我们有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{X_{111}}&=\sum_{i,j}\alpha_{ij}T_1^iT_2^j=T_1^3\Bigg(-1+\sum_{\substack{i\geq 3\\ i+j>3}}\alpha_{ij}T_1^{i-3}T_2^j\Bigg)\\
\frac{X_{22}}{X_{111}}&=\sum_{i,j}\beta_{ij}T_1^iT_2^j=T_1\Bigg(-2T_1T_2+\sum_{\substack{i\geq 1\\ i+j>3}}\beta_{ij}T_1^{i-1}T_2^j\Bigg)\\
\frac{X_{12}}{X_{111}}&=\sum_{i,j}\gamma_{ij}T_1^iT_2^j=T_1\Bigg(T_2^2+\sum_{\substack{i\geq 1\\ i+j>3}}\gamma_{ij}T_1^{i-1}T_2^j\Bigg),
\end{aligned} \tag{2.21}$$

其中，α_{ij}、β_{ij}、$\gamma_{ij}\in\mathbb{Z}[b_1,\dots,b_5]$ 可以通过以下递归方式求得。假设对于所有满足 $r+s<m$ 的 r、s，我们已计算出 α_{rs}、β_{rs}、γ_{rs}。那么，利用射影簇 J 的定义方程，我们可以计算出所有满足$i+j=m$ 的 i、j 对应的 α_{ij}、β_{ij}、γ_{ij}。类似的递归可以得到以下展开式：

$$\begin{aligned}
\frac{X_{112}}{X_{111}}&=\sum_{i,j}\delta_{ij}T_1^iT_2^j=-T_2^2+\sum_{i+j\geq 4}\delta_{ij}T_1^iT_2^j\\
\frac{X_{122}}{X_{111}}&=\sum_{i,j}\epsilon_{ij}T_1^iT_2^j=T_1T_2+\sum_{i+j\geq 4}\epsilon_{ij}T_1^iT_2^j\\
\frac{X_{222}}{X_{111}}&=\sum_{i,j}\zeta_{ij}T_1^iT_2^j=-T_1^2+\sum_{i+j\geq 4}\zeta_{ij}T_1^iT_2^j,
\end{aligned} \tag{2.22}$$

对于某些 δ_{ij}、ϵ_{ij}、$\zeta_{ij}\in\mathbb{Z}[b_1,\dots,b_5]$。

注记 2.14。函数

$$T_1 = -\frac{X_{11}}{X_{111}}, \quad \frac{1}{X_{111}}, \quad \frac{X_{22}}{X_{111}}, \quad \frac{X_{12}}{X_{111}}, \quad T_2 = -\frac{X}{X_{111}}$$

都是 J 上的奇函数，而

$$\frac{X_{112}}{X_{111}}, \quad \frac{X_{122}}{X_{111}}, \quad \frac{X_{222}}{X_{111}}$$

是偶函数。因此

$$\begin{aligned} &\alpha_{ij} = \beta_{ij} = \gamma_{ij} = 0 && \text{for all } i+j \in 2\mathbb{Z}; \\ &\delta_{ij} = \epsilon_{ij} = \zeta_{ij} = 0 && \text{for all } i+j \in 1+2\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

J 上的群律在 T_1、T_2 中诱导出一个 R 上的二维形式群律，如下所示。给定点 u、$v \in J$、[，根据 Gra90 定理 3.3]， $X_{ij}(u+v)$ $X_{ijk}(u+v)$ $X(u+v)$ 中的每一个都可表示为 $\mathbb{Z}[b_1,\dots,b_5][X_{ij}(u)\ X_{ij}(v)\ X_{ijk}(u)\ X_{ijk}(v)]$ 中多项式的商。

令 $T=(T_1,T_2)$ 和 $S=(S_1,S_2)$ 分别为 u 和 v 的局部参数 (2.20)。那么，可以将其中每一个表示为

$$F_1(u,v) = -\frac{X_{11}(u+v)}{X_{111}(u+v)}, \qquad F_2(u,v) = -\frac{X(u+v)}{X_{111}(u+v)}.$$

属于 Frac$(\mathbb{Z}[b_1,\dots,b_5][T_1,T_2,S_1,S_2])$ 的元素。要看出这一点，首先必须用同一个适当的有理函数分别乘以 $F_i(u,v)$ 的分子和分母。

定理 2.15（[**Gra90**，定理 4.6]）。对于每个 $i \in \{1,2\}$，我们有

$$F_i(T,S) = T_i + S_i + O(T,S)^2 \in R[[T,S]].$$

因此， $F(T,S) = (F_1,F_2)(T,S)$ 是定义在 R 上的交换形式群律。

由于 T_1 和 T_2 是雅可比簇上的奇函数，形式群逆为

$$i(T) = -T;$$

ther因此，对于每个 $i \in \{1,2\}$，我们有 $F_i(-T,-S) = -F_i(T,S)$，从而展开式 of F_i o仅包含总次数为奇数的项。

注 2.16。严格来说， [Gra90定理 4.6]中的证明假设 R 是一个（特征不为 2 的）环，并且在某个非阿基米德赋值下完备。这个假设保证了定义在 $K = \mathrm{Frac}(R)$上的雅可比簇是一个解析群，因此在局部上是定义在 K上的形式群。随后利用高斯引理的一个版本证明，形式群律实际上定义在 R 上。当 R 是数域的整数环时，证明仍能给出我们所需的结果，因为如果两个幂级数之商在某个 $R[[T,S]]$ 非阿基米德赋值 $K_v[[T,S]]$ 对应的一个非阿基米德赋值 v下属于 $K[[T,S]]$，那么它属于 $R_v[[T,S]]$ ；并且如果它还对每个非阿基米德赋值 v 的 K都属于 $R[[T,S]]$。

还应该能够证明群律实际上定义在 $\mathbb{Z}[b_1,\dots,b_5]$ 上。然而，如何做到这一点并不显而易见。例如，我们可以尝试将 $F_i(T,S)$ 重写为 $\frac{G}{H}$，其中 G 和 H 是以 (T,S) 为变量、系数属于 $\mathbb{Z}[b_1,\dots,b_5]$ 的幂级数，而 $H = 1+O(T,S)$。在这方面，值得一提的是 Flynn 在 [Fly90,Fly93] 中描述的类似情形：由方程 $y^2 = f_6x^6+f_5x^5+f_4x^4+f_3x^3+f_2x^2+f_1x+f_0$ 给出的亏格 2 曲线。在这种情形下，[Fly90] Flynn 描述了雅可比簇在 $\mathbb{P}^{15}$ 中的显式嵌入（以此取代 $\mathbb{P}^8$），以及定义在关于非阿基米德赋值完备的环上的形式群律。与 Grant 一样，Flynn 借助分式域上雅可比簇的解析群结构来构造形式群律，并运用高斯引理。另一方面，在随后的文章 [Fly93], 中，他通过显式描述雅可比簇上的群律（用双二次型表示），更直接地证明了该群律实际上定义在 $\mathbb{Z}[f_1,\dots,f_6]$ 上。

令 F 为定理 2.15 中定义在 R 上的形式群律。根据 §2.1 的一般理论，它基变换到 K 后同构于二维加法形式群。特别地，令 $\mathcal{L}=(\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2)$ 为相对于 T_1,T_2 的严格对数，令 $\mathcal{E}=(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)$ 为其逆，并令

(D_1, D_2) 为与 $(d\mathcal{L}_1, d\mathcal{L}_2)$ 对偶的不变导子之基（参见定理 2.5、定义 2.6 和 (2.2)）。

不变微分形式 Ω_1 和 Ω_2（定义 2.11）在 T_1, T_2 中的展开式 $\Omega_1(T)$ 和 $\Omega_2(T)$，对于 F也都是不变微分形式。

引理 2.17. 对每个 $i \in \{1, 2\}$，有

$$d\mathcal{L}_i(T) = \Omega_i(T).$$

证明. 只需证明与 $\Omega_i(T)$ 对偶的不变导子是 D_i。将 D_i 扩张到 $\operatorname{Frac} K[[T_1, T_2]]$，并使其仍满足莱布尼茨法则后，根据引理 2.12 (2)，只需证明

$$\alpha D_1(X_{12}) + \beta D_2(X_{12})$$

对所有满足 $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ 的情形，它都不同于 $2X_{112}$；且对所有满足 $(\alpha, \beta) \neq (0, 1)$ 的情形，它都不同于 $2X_{122}$。由 (2.21) 和 (2.22)，有

$$X_{12} = -T_1^{-2}T_2^2 + O(T_1, T_2), \qquad X_{112} = T_1^{-3}T_2^2 + O(1), \qquad X_{122} = -T_1^{-2}T_2 + O(1);$$

对于整数 i，$O(T_1, T_2)^i$ 表示总次数为 $\geq i$ 的项，这里允许赋值为负：例如，$T_1^{-1}T_2^3$是 $O(T_1, T_2)^2$。此外，由 (2.3) 可得，

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + O(T_1, T_2)^2 & O(T_1, T_2)^2 \\ O(T_1, T_2)^2 & 1 + O(T_1, T_2)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial T_1} \\ \frac{\partial}{\partial T_2} \end{pmatrix}.$$

因此，

$$D_1(X_{12}) = 2T_1^{-3}T_2^2 + O(1), \qquad D_2(X_{12}) = -2T_1^{-2}T_2 + O(1),$$

这就证明了该引理。 □

到目前为止，我们只讨论了形式群律。现在，若 R 是一个在非阿基米德绝对值 $|\cdot|_v$ 下完备的特征零环，其极大理想为 $\mathfrak{m}$，则可以考虑与定理 2.15 的形式群律相关联的群 $F(\mathfrak{m})$:

$$F(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m} \times \mathfrak{m}, \qquad t + s := F(t, s), \text{ for all } t = (t_1, t_2), s = (s_1, s_2) \in F(\mathfrak{m}).$$

令 $\tilde{J}$ 为 $\mathbb{P}^8$ 中的簇，它是将定义 J 的方程的系数模 $\mathfrak{m}$ 约化后得到的；它可能是也可能不是剩余域 $R/\mathfrak{m}$ 上的阿贝尔簇。尽管如此，我们~仍有一个约化映射 ~: $J(K) \to J(R/\mathfrak{m})$。由定理 2.13 以及 $F(\mathfrak{m})$ 上群律的定义可知，我们有如下群的同构

$$F(\mathfrak{m}) \cong J_1(K) := \{u \in J(K) : \tilde{u} = \tilde{O}\}. \tag{2.23}$$

（参见[Gra90，推论 4.5，定理 4.6]）。注意，这一定义依赖于模型。

3. v-Adic sigma functions

3.1. 朴素西格玛函数。本小节中，我们假设亏格 2 曲线 C 定义在数域 K上，其整数环为 $\mathcal{O}$，且定义方程 (2.5) 的所有系数 $b_1, \ldots, b_5$ 均属于 $\mathcal{O}$，该方程定义了 C。

设 ρ 是 K 到 $\mathbb{C}$ 的一个嵌入，并设 $\sigma(z)$ 为 $\mathbb{C}^2$ 上的双曲椭圆西格玛函数（取 §2.2 中 (2.12) 的意义），它对应于通过 ρ从 C 得到的、定义在 $\mathbb{C}$ 上的曲线。特别地，$\sigma(z)$ 是一个奇函数，并满足微分方程 (2.13)。此外，它在 0 附近关于 $z = (z_1, z_2)$ 有泰勒展开，其系数属于 $\mathbb{Q}[\rho(b_i)]$。

我们希望利用复σ 函数在 0 附近的泰勒展开系数的代数性，来定义一个 v-阿基米德赋值上的 v-阿基米德 σ 函数，从而将 Bernardi 对椭圆曲线上的 v-阿基米德 σ 函数的定义推广到亏格 2 曲线 [Ber81]。我们将这种 v-阿基米德 σ 函数称为朴素的，因为它是根据复函数特设构造的；此称呼也用来将它与我们将在 v-阿基米德 σ 函数区分开来，后者将在§3.2 中讨论。

根据 §2.3，我们得到了形式群参数 T_1, T_2 的显式描述，以及由此得到的 $\mathcal{O}$ 上的形式群律 F。考虑到 K 的基变换、相对于 T_1, T_2 的严格对数 $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ 及其逆 $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$，并令 (D_1, D_2) 为与 (T_1, T_2) 对偶的不变导子的基

（参见定理 2.5、定义 2.6 和 (2.2)）。我们将 D_i 延拓到 Frac $K[[T_1,T_2]]$，使其继续满足莱布尼茨法则；对于 $f(T) \in K[[T]]$，我们定义 $D_i(\log(f(T))) \in$Frac $K[[T_1,T_2]]$，从而引理 2.8 对 $\log(f(T))$ 成立。

我们还考虑 F 到 $\mathbb{C}$ 经由 ρ的基变换。根据 [Bos20，§10.9。3][6]，存在形式群对数 $\tilde{\mathcal{L}}\colon F_{\mathbb{C}} \to \mathbb{G}_a^2$ 其逆 $\tilde{\mathcal{E}}\colon \mathbb{G}_a^2 \to F_{\mathbb{C}}$ 延拓为满同态$\mathbb{C}^2 \to J$，诱导出 $\Phi\colon J \to \mathbb{C}^2/\Lambda$ 的逆（见 (2.8)）。

Le ˜ ˜理 3.1。对数 $\mathcal{L}$ 和指数 $\mathcal{E}$ 是 $\mathbb{C}$ 上 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{E}$的基变换。因此 *e,*

$$X_{ij}(\mathcal{E}(z)) = \wp_{ij}(z), \qquad X_{ijk}(\mathcal{E}(z)) = \frac{\wp_{ijk}}{2}(z),$$

其中 $\wp_{ij}(z)$（分别为 $\wp_{ijk}(z)$）是由 σ 的泰勒展开以及 (2.13) 得到的关于 z_1、z_2 的级数之商。

证明。这由 Φ (2.8) 的定义和引理 2.17 得出。 □

现在令 v 为 K 中位于固定有理素数 p上方的一个素数，令 K_v 为 K 关于 v的完备化，$\mathcal{O}_v$ 为其整数环，且有唯一的极大理想 $\mathfrak{m}_v$。令 ord$_v$ 为K_v 上对应于 v的赋值。回顾§2.3末尾的内容，存在$F(\mathfrak{m}_v)$（作为集合，它是 $\mathfrak{m}_v \times \mathfrak{m}_v$）与群 $J_1(K_v)$ 之间的群同构，其中后者由模 $\mathfrak{m}_v$约化到 O 的点构成。我们希望利用这一点，通过在 $\sigma(z)$ 的泰勒级数展开中代入 $\mathcal{L}(T)$，在 $J_1(K_v)$ 上得到一个 v-进 σ 函数。
与椭圆曲线的情形类似 [Ber81]，不一定总能在整个 $J_1(K_v)$ 上得到一个函数：我们需要了解 $\sigma(\mathcal{L}(T))$ 如何收敛 v-进。我们先给出一个辅助引理。

引理 3.2. 设 $f(T_1,T_2) \in \mathcal{O}_v[[T_1,T_2]]$. 那么 $f(\mathcal{E}(z))$ 具有如下形式

$$f(\mathcal{E}(z)) = \sum_{i_1,i_2 \in \mathbb{N}} \frac{a_{i_1,i_2}}{i_1!i_2!} z_1^{i_1} z_2^{i_2}, \qquad where\ a_{i_1,i_2} \in \mathcal{O}_v.$$

特别地，对所有满足 $\min_i\{\text{ord}_v(z_i)\} > \text{ord}_v(p)\ p-1$ 的 z，该式都收敛。此外，对于这样的 z，我们有

$$\min_i\{\text{ord}_v(\mathcal{E}_i(z))\} = \min_i\{\text{ord}_v(z_i)\}.$$

类似地，若 $\min_i\{\text{ord}_v(T_i)\} > \text{ord}_v(p)\ p-1$，则

$$\min_i\{\text{ord}_v(\mathcal{L}_i(T))\} = \min_i\{\text{ord}_v(T_i)\}.$$

证明. 第一部分由命题 2.7 以及以下事实推出：若 $j_1, j_2 \in \mathbb{N}$ 满足 $j_1 + j_2 = n$，则由勒让德公式可得 $\text{ord}_v(j_1!j_2!) \le \text{ord}_v(n!)$。同理，对于第二部分，只需证明：若 $\min_i\{\text{ord}_v(z_i)\} > \text{ord}_v(p)$ $p-1$ 且 $n \ge 2$，则

$$n \min_i\{\text{ord}_v(z_i)\} - \text{ord}_v(n!) > \min_i\{\text{ord}_v(z_i)\}. \tag{3.1}$$

令 $s_p(n)$ 为 n 的基 p 数位之和。则

$$\text{ord}_v(n!) = \frac{n - s_p(n)}{p-1}\,\text{ord}_v(p) \le \frac{n-1}{p-1}\,\text{ord}_v(p),$$

因此 (3.1) 得证。 $\mathcal{L}_i$ 的证明完全相同。 □

令 $[n]T$ 由 $[1]T = T$ 归纳定义，并令 $n \ge 2$、$[n]T = F([n-1]T, T)$，再令 $\phi_n(T)$ 为 T 中第 n 个除法多项式的展开式（见 (2.15) 及其前后段落）。
定理 3.3. 设 $\sigma(z) = z_1 + O(z_1,z_2)^3 \in K[[z_1,z_2]]$ 为复西格玛函数在 0 附近的泰勒展开，并设

$$\sigma_v^{(0)}(T) := \sigma(\mathcal{L}(T)) \in K[[T]].$$

[6]严格来说，这条引文讨论的是椭圆曲线，但正如作者所说，这些结果“实际上可以直接推广到特征为零的（局部）域上的交换代数群”。

(i) $\sigma_v^{(0)}(T)$ 满足以下微分方程组

$$D_iD_j\log(\sigma_v^{(0)}(T)) = -X_{ij}(T), \qquad \text{for all } i,j \in \{1,2\} \qquad (\text{where } X_{21} := X_{12}).$$

(ii) $\sigma_v^{(0)}(T)$ 对所有满足 $\min_i\{\mathrm{ord}_v(T_i)\} > \mathrm{ord}_v(p)\,p-1$ 的 $T=(T_1,T_2) \in K_v^2$ 均收敛。

(iii) 当所有项都有定义时，我们有

$$\frac{\sigma_v^{(0)}(F(T,S))\sigma_v^{(0)}(F(T,-S))}{\sigma_v^{(0)}(T)^2\sigma_v^{(0)}(S)^2} = -X_{11}(T)+X_{11}(S)-X_{12}(T)X_{22}(S)+X_{22}(T)X_{12}(S);$$

$$\frac{\sigma_v^{(0)}([n]T)}{\sigma_v^{(0)}(T)^{n^2}} = \phi_n(T).$$

证明。由引理 2.8，我们有

$$(D_iD_j\log(\sigma_v^{(0)}(T)))(\mathcal{E}(z)) = \frac{\partial^2}{\partial z_i\partial z_j}\log(\sigma_v^{(0)}(\mathcal{E}(z))) = \frac{\partial^2}{\partial z_i\partial z_j}\log(\sigma(z)) = -\wp_{ij}(z),$$

由此根据引理 3.1 得到 (i)。

由于 σ 的除子是 Θ 在 $\mathbb{C}^2 \to J$ 下的原像，且 T_1 在原点的一个邻域内表示 Θ [Bla18，引理 32] 并且由于 $\sigma(z) = z_1 + O(z_1,\ z_2)^3$，我们有

$$\sigma(z) = \mathcal{E}_1(z)u(z), \qquad \text{for some} \quad u(z) = 1+O(z_1,z_2) \in K[[z_1,z_2]].$$

结合 (i) 以及 σ 是奇函数这一事实，我们得到

$$\sigma_v^{(0)}(T) = T_1u_v(T),$$

其中 $u_v(T) = 1+O(T_1,T_2)^2 \in K[[T_1,T_2]]$ 满足

$$D_iD_j\log(u_v(T)) = -X_{ij}(T) - D_iD_j\log(T_1).$$

由于该等式左边是幂级数，右边也必然是幂级数。此外，很容易看出后者的系数属于 $\mathcal{O}$。在 $\mathcal{E}(z)$ 处求值并应用引理 3.2，可得

$$\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial z_j}\log(u(z)) = \sum_{i_1+i_2\geq 0}\frac{a_{i_1,i_2}}{i_1!i_2!}z_1^{i_1}z_2^{i_2}, \qquad \text{for some } a_{i_1,i_2} \in \mathcal{O}_v.$$

根据积分的性质，级数 $\log(u(z))$ 具有相同的形式；又由于 $u_v(T)$ 的首项为 1，它的常数项为零。因此，若 $z_i = \mathcal{L}_i(T)$，且 $\min_i\{\mathrm{ord}_v(T_i)\} > \mathrm{ord}_v(p)\,p-1$，则 $\mathrm{ord}_v(\log(u(z))) \geq \min_i\{\mathrm{ord}_v(z_i)\} > \mathrm{ord}_v(p)\,p-1$，故 $\log(u(z))$ 属于 p-进指数函数的定义域（参见引理 3.2）。应用 [Mat55, §2 代换定理]，，我们发现 $u(z)$ 在 $\min_i\{\mathrm{ord}_v(z_i)\} > \mathrm{ord}_v(p)\,p-1$ 时收敛。因此 $\sigma(z)$ 在该处也收敛，这就是命题 (ii)。

第 (iii) 部分中陈述的恒等式由复西格玛函数满足的恒等式（(2.15) 和 [Uch11b，例 2。16]）推出。□

3.2. 无穷多个 σ 函数与 Blakestad 的典范 σ 函数。沿用 §3.1 中的记号。对于 $1 \leq i,j \leq 2$，令 $c_{ij} \in K_v$，其中 $c_{12} = c_{21}$，并令 $c = (c_{ij})_{i,\ j}$。则以下方程组

$$D_iD_j(\log(\sigma_v^{(c)}(T))) = -X_{ij}(T) + c_{ij}, \qquad \text{for all } 1 \leq i,j \leq 2,$$

存在唯一的奇解 $\sigma_v^{(c)}(T) \in K_v[[T]]$，其形式为 $T_1(1+O(T_1,T_2))$：若 $c=0$ 是零矩阵，则 $\sigma_v^{(0)} = \sigma_v^{(c)}$ 是我们在 §3.1 中研究过的朴素西格玛函数；一般而言，我们有

$$\sigma_v^{(c)}(T) = \sigma_v^{(0)}(T)\exp\left(\frac{1}{2}\sum_{1\leq i,j\leq 2}c_{ij}\mathcal{L}_i(T)\mathcal{L}_j(T)\right). \tag{3.2}$$

S关于形式幂级数 $\sigma_v^{(c)}(T$ 中总次数不超过 8 的项，参见附录 C).

命题 3.4.

(i) 形式幂级数 $\sigma_v^{(c)}(T) \in K_v[[T_1,T_2]]$ 在 $J(K_v)$ 的有限指数子群 H_v 上诱导出一个函数。

(ii) 对于 $P \in H_v$， $\sigma_v^{(c)}(T(P))$ 当且仅当 $T_1(P) = 0$ 时为零，也就是说，它仅在 t 上为零 he theta 除子，并且在该处它的一阶消失。
(iii) 当所有项都有定义时，我们有

$$\frac{\sigma_v^{(c)}(F(T,S))\sigma_v^{(c)}(F(T,-S))}{\sigma_v^{(c)}(T)^2\sigma_v^{(c)}(S)^2} = -X_{11}(T) + X_{11}(S) - X_{12}(T)X_{22}(S) + X_{22}(T)X_{12}(S);$$
$$\frac{\sigma_v^{(c)}([n]T)}{\sigma_v^{(c)}(T)^{n^2}} = \phi_n(T).$$

证明。

(i) 与 [CF96, 第7章, §5] （另见 [Mat55, III, §6]）中相同的论证表明，$J_1(K_v)$ 在 $J(K_v)$ 中具有有限指数（无需对约化作任何假设），并且对每个正整数 n， $F(\mathfrak{m}_v^n)$ 在 $F(\mathfrak{m}_v)$ 中具有有限指数 $\cong J_1(K_v)$。因此，只需证明存在 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$，使得 $\sigma_v^{(c)}(T)$ 对所有 $T \in \mathfrak{m}_v^n \times \mathfrak{m}_v^n$ 都收敛。由定理 3.3，存在 $n_1 \in \mathbb{Z}_{>0}$，使得 $\sigma_v^{(0)}$ 在 $F(\mathfrak{m}_v^{n_1})$ 上收敛。由引理 3.2，存在 $n_2 \in \mathbb{Z}_{>0}$，使得 $\exp\left(\frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le 2} c_{ij}\mathcal{L}_i(T)\mathcal{L}_j(T)\right)$ 在 $F(\mathfrak{m}_v^{n_2})$ 上收敛。由 [Mat55, §2 乘法定理]，结论对 $n = \max\{n_1, n_2\}$ 成立。

(ii) 对于某个形式幂级数 $f_{(c)}(T)$，我们有 $\sigma_v^{(c)}(T) = T_1 \cdot \exp(f^{(c)}(T))$。此外，我们定义 H_v 的方式使得 $f^{(c)}(T)$ 和 $\exp(f^{(c)}(T))$ 在 H_v 上收敛。因此，唯一的零点是 $T_1 = 0$。(iii) 这由定理 3.3(iii)、方程 (3.2) 以及 $\mathcal{L}_i$ 这一事实推出： $F \to \mathbb{G}_a$ 是一个同态。

□

换言之，对于 K_v 上的任意 2×2 对称矩阵 c，我们都能在 $J(K_v)$ 的某个有限指数子群上得到一个取值于 v-进数的函数，它满足与复西格玛函数类似的性质。给定这样的 c，我们还将 $W^{(c)}$ 定义为 $H^1_{\mathrm{dR}}(C/K_v)$ 的子空间，该子空间由以下微分的类生成（与 (2.7) 比较）：

$$\eta_1^{(c)} = (-3x^3 - 2b_1x^2 - b_2x + c_{12}x + c_{11})\frac{dx}{2y},$$
$$\eta_2^{(c)} = (-x^2 + c_{22}x + c_{12})\frac{dx}{2y}. \tag{3.3}$$

命题 3.5. 映射

$$c = (c_{ij}) \mapsto W^{(c)}$$

在 K_v 上的 2×2 对称矩阵集合与 $H^1_{\mathrm{dR}}(C/K_v)$ 的子空间集合 $\mathrm{Is}(C/K_v)$ 之间给出一个双射；这些子空间与 $H^0(C/K_v, \Omega^1)$ 互补，且关于杯积是各向同性的。此外， $[\omega_1], [\omega_2], [-\eta_1^{(c)}], [-\eta_2^{(c)}]$ 是 $H^1_{\mathrm{dR}}(C/K_v)$ 的一组辛基。

证明. 众所周知， $\left\{[\omega_1], [\omega_2], \left[\frac{x^i dx}{2y}\right] : i = 2, 3\right\}$ 是 $H^1_{\mathrm{dR}}(C/K_v)$ 的一组基，并且$H^0(C/K_v, \Omega^1) \subset H^1_{\mathrm{dR}}(C/K_v)$ 由 $[\omega_1]$ 和 $[\omega_2]$生成。因此，由 $[\eta_1^{(c)}]$和 $[\eta_2^{(c)}]$ 生成的空间与全纯形式空间互补；对无穷远处的留数作简单计算可知，该空间关于杯积是各向同性的，并且 $[\omega_i] \cup [-\eta_j^{(c)}] = \delta_{ij}$。另一方面，若 $W \in \mathrm{Is}(C/K_v)$，且 W 的一组基为 $[\xi_1], [\xi_2]$，满足 $[\omega_i] \cup [-\xi_j] = \delta_{ij}$，则必有

$$[\xi_i] = [\eta_i^{(0)}] + \sum_{j=1}^{2} b_{ij}[\omega_j]$$

对于某个对称矩阵 (b_{ij})。 □

Blakestad [Bla18] 并未考虑由（3.2）定义的无穷多个 v-adic σ 函数；他只考虑了其中一个，不过可以说，这个函数比其他函数更有趣。将其结果转换到我们的语境中，可表述如下。

定理 3.6（[**Bla18**，命题 34、27、推论 **37**[7]]）。设 $p \geq 5$ 并假设 C在 $v \mid p$ 处具有良约化，且 J 在 v处具有良好普通约化。则

（i）存在唯一的 v-进 σ 函数 $\sigma_v^{(c)}(T)$，其具有 v-进整系数。令 b为相应的对称矩阵。

（ii）微分 $\eta_i^{(b)}$ 由以下性质唯一确定：在 ∞ 处关于局部参数 $t = -\frac{x^2}{y}$ 的展开式 $\int \eta_i^{(b)}$ 的系数属于 $\mathcal{O}_v$。（iii）矩阵 b 的系数属于 $\mathcal{O}_v$，并且可通过适当函数在 $t = -\frac{x^2}{y}$ 中的显式展开式，模 p^n 计算得到；这些函数属于 $p^n\infty$ 和 $3p^n\infty$的黎曼–罗赫空间。

注 3.7。下面说明一些关于我们对 Blakestad 结果措辞的注记。首先，定理 3.6（ii）和（iii）假设某个 2×2 矩阵 H_1在剩余域上可逆，该矩阵定义于[Bla18，第 54]页。Blakestad 在 §4.2 的开头提到，上述文献中的这一条件与 J的普通性有关。更确切地说，我们在 [BKM23] 中证明：如果 C 的方程具有半稳定约化，那么 J 为半稳定普通，当且仅当 H_1 可逆。

其次，Blakestad 允许 $p = 3$。不过，在这种情况下，需要对 §3.2.1 中的构造稍作修改，例如，在第 52 页为 $n \geq 2$ 定义 ϕ_n 和 ψ_n，而不是 $n \geq 1$。这样一来，关于 H_1 可逆的条件便可替换为 H_2 可逆。为简便起见，我们将定理 3.6 表述为适用于 $p \geq 5$。

接下来，我们要证明与 Blakestad 的 $W^{(b)} \subset H^1_{\mathrm{dR}}(C/K_v)$ 对应的子空间是 Frobenius 的单位根子空间（定义见下文）；其中，Blakestad 的 v-进 σ 函数。我们通过比较定理 3.6(ii) 的性质与 [Kat81，推论 5.9.6 (1)]给出的单位根子空间刻画来证明这一点。我们发现，文章 [vdB08] 是了解各种上同调理论的理论结果和显式结果的极有用参考资料，详细内容请参阅该文。

保留定理 3.6 的假设，并假设 K_v 是 $\mathbb{Q}_p$的非分歧扩张。定义 C 的方程也定义了 $\mathcal{O}_v$上一个超椭圆曲线的仿射部分，我们将其记为 $\mathcal{C}/\mathcal{O}_v$；用 $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{C}/\mathcal{O}_v)$ 表示 $\mathcal{C}/\mathcal{O}_v$的第一上同调。根据 [Ber74], , 存在典范同构 $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{C}/\mathcal{O}_v) \xrightarrow{\sim} H^1_{\mathrm{cris}}(\tilde{\mathcal{C}}/\mathcal{O}_v)$，其中 $\tilde{\mathcal{C}}$ 表示 $\mathcal{C}/\mathcal{O}_v$的特殊纤维， $H^1_{\mathrm{cris}}(\tilde{\mathcal{C}}/\mathcal{O}_v)$是其第一晶体上同调。此同构赋予 $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{C}/\mathcal{O}_v)$一个$\mathcal{O}_v$-线性的 Frobenius 自同态。由同构 [vdB08, 命题 2.2]

$$H^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{C}/\mathcal{O}_v) \otimes_{\mathcal{O}_v} K_v \xrightarrow{\sim} H^1_{\mathrm{dR}}(C/K_v),$$

我们还得到一个 K_v-线性的 Frobenius 自同态，作用于 K_v-向量空间 $H^1_{\mathrm{dR}}(C/K_v)$。Frobenius 的单位根特征子空间是 $H^1_{\mathrm{dR}}(C/K_v)$中 Frobenius 作用下的斜率 0 子空间。由于我们假设 J 在 v 处有普通约化，此空间的维数等于 J的维数，也就是 2 [Yui78，定理 3.1]。

设 P 是 $\mathcal{C}(\mathcal{O}_v)$ 中任意一点。设 $\hat{}\,\mathcal{C}_P$ 是 $\mathcal{C}/\mathcal{O}_v$ 沿 P 的形式完备化。那么 $\hat{}(\mathcal{C}_P, P)$ 是一个定义在 $\mathcal{O}_v$ [上、维数为 1 的带基点李簇 Kat81，第 5.1、5.9] 节。令 t 为它的一个坐标。第一德拉姆上同调 $H^1_{\mathrm{dR}}(\hat{}\,\mathcal{C}_P/\mathcal{O}_v)$ 是由 $\mathcal{O}_v[[t]]dt$ 中的（闭）微分一形式模去恰当一形式[所得的 $\mathcal{O}_v$-模 Kat81，第 5.1] 节。由于任何闭微分形式在基变换到 K_v 后都会变成恰当形式，应用 d 可得 $\mathcal{O}_v$-模的一个同构：

$$M_P := \frac{\{f \in K_v[[t]] : f(0) = 0 \text{ and } df \in \mathcal{O}_v[[t]]dt\}}{\{f \in \mathcal{O}_v[[t]] : f(0) = 0\}} \xrightarrow{\sim} H^1_{\mathrm{dR}}(\hat{\mathcal{C}}_P/\mathcal{O}_v). \tag{3.4}$$

（这是 [Kat81，引理 5.1 的一个特例。2]）

[7] 37 *loc. cit.* $3\delta - 3b_1\gamma + 3b_3$ $c_{12} = b_2 + \alpha - b_1\beta$ c_{11} c_{12} $c_{11} = 2b_1b_2 - b_1\alpha + b_1^2\beta +$ Corollary of 中有一些排印错误。和 的正确公式为：，。

根据 [Kat81，推论 5.9，Frobenius 的单位根特征子空间是将 $H^1_{\mathrm{dR}}(C/K_v)$ 与 K_v 形式展开于P 映射的核

$$\beta_P\colon H^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{C}/\mathcal{O}_v)\to H^1_{\mathrm{dR}}(\hat{\mathcal{C}}_P/\mathcal{O}_v). \tag{3.5}$$

我们用上标 $^-$ 表示双曲 involution 作用下的 (-1)-特征子空间。回想一下，利用以下 K_v-向量空间的同构，我们可以将 $\eta_1^{(b)}$ 和 $\eta_2^{(b)}$ 视为 $H^1_{\mathrm{dR}}(C/K_v)$ 的元素

$$H^1_{\mathrm{dR}}(C/K_v)\cong H^0(C/K_v,\Omega^1_{C/K_v}(4\infty))^-; \tag{3.6}$$

例如，参见[vdB08，§5]。

命题 3.8. 假设定理 3.6 的条件成立，且 K_v 是 $\mathbb{Q}_p$的非分歧扩张。那么，微分 $\eta_1^{(b)}$ 和 $\eta_2^{(b)}$ 张成 $H^1_{\mathrm{dR}}(C/K_v)$ 中 Frobenius 的单位根特征子空间。

证明。为简便起见，我们也用 ∞ 表示 $\mathcal{C}/\mathcal{O}_v$的无穷远截面。根据 [vdB08，命题 3.2]，， $\mathcal{O}_v$-模 $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{C}/\mathcal{O}_v)$ 是 $H^1_{\mathrm{dR}}(C/K_v)$ 中的一个格；鉴于假设 $p\geq 5$ 且亏格为 2，根据 [vdB08，(3.9)，定理 4.2 (ii)]，，在 (3.6) 下，我们可以将其识别为$H^0(\mathcal{C},\Omega^1_{\mathcal{C}/\mathcal{O}_v}(4\infty))^-\hookrightarrow H^0(C/K_v,\Omega^1_{C/K_v}(4\infty))^-$。根据 [vdB08，命题 5.2]，，$\mathcal{O}_v$-模 $H^0(\mathcal{C},\Omega^1_{\mathcal{C}/\mathcal{O}_v}(4\infty))^-$ 是自由的，并由 $x^i\frac{dx}{2y}$ 张成，其中 $0\leq i\leq 3$。

参数 $t=-\frac{x^2}{y}$是 $(\hat{\mathcal{C}}_\infty,\infty)$ 的一个坐标。令 M_∞ 如 (3.4) 中所述，并相对于 t。假设 $p\geq 5$ 也意味着存在一个 $\mathcal{O}_v$-模同构

$$\begin{aligned} M_{\infty,(4\infty)}:=\frac{\{f=\sum_{n=-3}^{\infty}a_nt^n\in t^{-3}K_v[[t]]:a_0=0 \text{ and } df\in\mathcal{O}_v((t))dt\}}{\{f=\sum_{n=-3}^{\infty}a_nt^n\in t^{-3}O_v[[t]]:a_0=0\}}&\xrightarrow{\sim} M_\infty\\ \sum_{n=-3}^{\infty}a_nt^n&\mapsto\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n. \end{aligned} \tag{3.7}$$

我们得到一个映射

$$H^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{C}/\mathcal{O}_v)\xrightarrow{\sim}H^0(\mathcal{C},\Omega^1_{\mathcal{C}/\mathcal{O}_v}(4\infty))^-\xrightarrow{\alpha_\infty}M_{\infty,(4\infty)}\xrightarrow{\sim}M_\infty\xrightarrow{\sim}H^1_{\mathrm{dR}}(\hat{\mathcal{C}}_\infty/\mathcal{O}_v), \tag{3.8}$$

其中 α_∞ 是形式展开为 t 的映射，随后进行形式积分。微分 $\eta_1^{(b)}$ 和 $\eta_2^{(b)}$ 属于 α_∞的核。令 $\mathcal{C}'$ 为由 $\mathcal{C}$ 相对于 x 去齐次化得到的 $\mathcal{O}_v$ 上的仿射曲线。于是，复合映射 (3.8) 与将限制映射 $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{C}/\mathcal{O}_v)\to H^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{C}'/\mathcal{O}_v)$ 和展开为 t 的映射 $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{C}'/\mathcal{O}_v)\to H^1_{\mathrm{dR}}(\hat{\mathcal{C}}_\infty/\mathcal{O}_v)$ 复合相一致，因此也与 β_∞ 相一致。比较维数即可得到该命题。□

推论 3.9。在命题 3.8 的假设下，设 $P\in C(\mathcal{O}_v)$ 和 t 是 $(\hat{C}_P,P)$ 的一个坐标。那么形式积分 $\int\eta_1^{(b)}(t)$ 和 $\int\eta_2^{(b)}(t)$ 的展开式的系数属于 $\mathcal{O}_v$。

注 3.10。我们将定理 3.6 中的 v-进 σ 函数称为典范 v-进 σ 函数。我们关注命题 3.8 有两个原因。首先，它使典范 v-进 σ 函数的计算效率大大提高（至少在$K_v\cong\mathbb{Q}_p$时如此），因为我们可以使用 Kedlaya 算法计算单位根子空间：详情参见 §6.2。其次，在下一节中，我们将使用 v-进 σ 函数来定义 $J(\overline{\mathbb{Q}})$ 上的 p-进高度。文献中还有其他依赖于在每个 $v\mid p$ 处选择空间 $W_v\in\mathrm{Is}(C/K_v)$ 的 p- 进高度构造。例如，Coleman–Gross [CG89] 的 p- 进高度。在这种情况下，Frobenius 的单位根特征子空间是“典范”的子空间选择，相应的高度出现在 Birch 和 Swinnerton-Dyer 猜想的 p-进类比中 [BMS16]。在第 5 节中，我们将比较以 σ 函数定义的 p-进高度与 Coleman–Gross 的 p-进高度。鉴于命题 3.8，这种比较可归结为对典范高度的比较。另见注 5.36。

另一方面，有些情况下，考虑朴素的 v-进 σ 函数更为可取。事实上，与典范的 v-进 σ 函数不同，朴素版本不需要任何

关于 C 和 J 在 v处约化的假设。此外，它更容易计算。最后，它与复亏格2σ函数联系紧密，因此在证明中很有用，因为它的许多性质都可以形式地从复西格玛函数的性质推出。

注 3.11. 类比椭圆曲线的情形 [Ber81], , 我们可以问：在 J 具有复乘的特殊情形下，矩阵 b 的元素是否为代数数，且与 p 和 v 无关。关于这方面的结果，参见 [BK10，命题 2.1、2.14] 。事实上，在上述文献的假设下，令 $q(z)$ 为唯一的二次型，使得 $\theta(z) = \sigma(z)e^{2\pi i q(z)}$ 是 [Lan82，第 87] 页意义下的归一化 theta 函数。那么，由 [BK10，命题 2.1], 可知， $\theta(z)$ 在 0 附近的泰勒展开系数是代数数。但由于 $\sigma(z)$ 也具有代数系数，因此可得 $2\pi i q(z) = \frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le 2} c_{ij} z_i z_j$，其中 $c_{12} = c_{21}$ 和 c_{ij} 均为代数数。最后，由 [BK10，命题 2.14], 可知， $\theta(\mathcal{L}(T))$ 的系数均为整数。一个具体例子见 §6.5。

4. p-ADIC HEIGHTS

We 沿用第 3 节的记号： K 是一个数域，且定义方程的系数 n
for C 属于其整数环。固定一个素数 p 和一个连续幂等类特征

$$\chi = \sum_v \chi_v \colon \mathbb{A}_K^\times / K^\times \to \mathbb{Q}_p.$$

根据连续性，若 v 是一个阿基米德赋值，则 χ_v 恒等于零；若 v 是一个不整除 p的非阿基米德赋值，则 χ_v 在 $\mathcal{O}_v^\times$上恒等于零。关于更多性质，以及如何为给定的 K构造所有此类 χ所组成的有限维 $\mathbb{Q}_p$-向量空间，参见 [BBBM21，§2.1] 若 L 是 K的有限扩张，我们将 L 对应的连续幂等类特征记为 χ_L ，它由 χ 与幂零范数 $N_{L/K}$复合得到： $\mathbb{A}_L^\times \to \mathbb{A}_K^\times$ 。注意，若 w 是 L 中位于 K 的赋值 v 之上的赋值，且 $x \in K_v^\times$，则 $\chi_{L,\,w}(x) = [L_w : K_v]\chi_v(x)$。
令 $J_\Theta := J \setminus \mathrm{Supp}(\Theta)$。本节的目标是定义一个二次型

$$h_p \colon J(\overline{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{Q}_p,$$

依赖于 χ 的二次型。我们将按以下方式进行。设 P 是 $J_\Theta(L)$ 中的一个点，其中 L 是 K 的某个有限扩张。给定 L 的一个非阿基米德赋值 w ，记 $L_w/\mathbb{Q}_\ell$ 这一域扩张的次数为 n_w ，其中 ℓ 是 w 下的有理素数。于是

$$h_p(P) = \frac{1}{[L:\mathbb{Q}]} \sum_w n_w \lambda_w(P),$$

其中求和遍历所有非阿基米德赋值 w 的 L 以及 λ_w： $J_\Theta(L_w) \to \mathbb{Q}_p$ 是一个依赖于 $\chi_{L,\,w}$的“准二次”函数，我们称其为 p-进 N´eron 函数（定义）在 w 关于 2Θ。这一术语的缘由将在 [BKM23] 中解释；另见下文的注 4.6。在开始定义 p-进 N´eron 函数之前，我们先陈述一个有用的引理。关于更一般的相关结果，另见附录A。

引理 4.1. 设 $P \in J(L_w)$ 是一个非挠点，且 H 是 $J(L_w)$ 的有限指数子群。那么存在一个正整数 m ，使得 $mP \in H \setminus \mathrm{Supp}(\Theta)$。

证明. 由于 H 在 $J(L_w)$ 中的指数有限，且 P 是非挠点，因此存在 m' 使得 $Q := m'P \in H \setminus \{0\}$。若 $Q \in \mathrm{Supp}(\Theta)$，则对于一个非 Weierstrass 点 $Q_1 \in C(L_w)$，有 $Q = [Q_1 - \infty]$ 。因此，
$2Q = [2Q_1 - 2\infty] \in H \setminus \mathrm{Supp}(\Theta)$。□

若 v 是位于 p 之上的 K 赋值，且 $w \mid v$，则 p-进 N´eron 函数 λ_w 将根据 §3.2 中的一个 v-进 σ 函数来定义。回顾命题 3.5， v-进 σ 函数的集合与集合 $\mathrm{Is}(C/K_v)$ 之间存在双射。因此，我们一劳永逸地固定：对每个 $v \mid p$，选定子空间 $W_v \in \mathrm{Is}(C/K_v)$。

4.1. p-进 N´eron 函数。设 L 是 K 的有限扩张，v 是 K 的一个赋值，且 w 是位于 v 之上的 L 的一个赋值。
首先假设 $v \mid p$。我们对子空间 W_v 的选择导出了 v-进 σ 函数 σ_v 的选择。根据命题 3.4，σ_v 在子群 H_v 上收敛；该子群依赖于 W_v，且在 $J(K_v)$ 中具有有限指数。显然，它也在 $J(L_w)$ 的有限指数子群 H_w 上收敛。

定义 4.2. 相对于除子 2Θ、特征 χ 和子空间 W_v，在 $w \mid v \mid p$ 处的（局部） p-进 N´eron 函数定义为

$$\lambda_w \colon J_\Theta(L_w) \to \mathbb{Q}_p,$$

定义如下。若 $P \in J_\Theta(L_w)$ 是一个非挠点，且 m 是满足 $mP \in H_w \setminus \mathrm{Supp}(\Theta)$ 的正整数，则

$$\lambda_w(P) = -\frac{2}{n_w m^2} \cdot \chi_{L,w}\left(\frac{\sigma_v(T(mP))}{\phi_m(P)}\right);$$

通过连续性，我们可以将 λ_w 的定义延拓到 $J_\Theta(L_w)$ 中的挠点。

根据引理 4.1，总存在满足定义 4.2 条件的整数 m；根据命题 3.4 (iii) 和公式 (2.17)，λ_w 的定义与 m 的选择无关。此外，根据命题 3.4 (ii) 和公式 (2.16)，$\sigma_v \circ T \circ m$ 和 ϕ_m 在 J_Θ 上具有相同的零点。这使得我们能够将定义延拓到挠点。

现在假设 $v \nmid p$。顾名思义，我们要寻找一个 $\mathbb{Q}_p$ 值的类比物，对应于经典的实值 N´eron 函数，其除子为 2Θ on $J_\Theta(L_w)$（依照 [Lan83, Chapter11], [HS00, §B.9], [Uch11b, §7], ，尤其是 [Uch11a] 中关于亏格 2 情形的论述）。在这种情形下（即当 $w \nmid p$ 时），可以从一个合适的实值函数出发构造这样的 p-adic 函数，只需将实值连续同态 $L_w^\times \to \mathbb{R}$ 替换为 $\chi_{L,w}$。详情参见 [BKM23]。
这里我们采用一种略有不同的方法。记 $J_{1,w}(L_w)$ 为 J over L_w 的依赖于模型的约化核（如 (2.23) 中所示）。
引理 4.3. 对于 $P \in J_{1,w}(L_w) \setminus \mathrm{Supp}(\Theta)$，令 $\lambda_w(P) = -\frac{2}{n_w}\chi_{L,w}(T_1(P))$。则

$$\lambda_w(P) = -\frac{1}{n_w}\chi_{L,w}(\max_{i,j}\{|X_{ij}(P)|_w, 1\}). \tag{4.1}$$

证明。对于这样的 P,

$$\chi_{L,w}(T_1(P)) = \chi_{L,w}(|T_1(P)|_w^{-1}) = \frac{1}{2}\chi_{L,w}(\max_{i,j}\{|X_{ij}(P)|_w, 1\}),$$

（参见展开式 (2.21)。） □

推论 4.4. 设 λ_w: $J_{1,\ w}(L_w) \setminus \mathrm{Supp}(\Theta)$，如引理 4.3 中所示。则

(i) 对所有满足 $mP \notin \mathrm{Supp}(\Theta)$ 的整数 m，

$$\lambda_w(mP) = m^2\lambda_w(P) - \frac{2}{n_w}\chi_{L,w}(\phi_{|m|}(P)).$$

(ii) 对所有满足 $P+Q, P-Q \notin \mathrm{Supp}(\Theta)$ 的 $P,Q \in J_{1,\ w}(L_w) \setminus \mathrm{Supp}(\Theta)$,

$$\lambda_w(P+Q) + \lambda_w(P-Q) = 2\lambda_w(P) + 2\lambda_w(Q)$$
$$-\frac{2}{n_w}\chi_{L,w}(-X_{11}(P) + X_{11}(Q) - X_{12}(P)X_{22}(Q) + X_{22}(P)X_{12}(Q)).$$

证明。结合 [Sto02，定理 41] (另见 [Uch11a，推论 72])，[dJM14，命题 62] 以及 [Uch11b，定理 75]，引理 4.3 中的等式即得此结论。□

定义 4.5. 关于除子 2Θ 和特征 χ，在 $w \mid v \nmid p$处的（局部） p-进 N´eron 函数是函数

$$\lambda_w \colon J_\Theta(L_w) \to \mathbb{Q}_p,$$

定义如下。若 $P \in J_\Theta(L_w)$ 是一个非挠点，且 m 是一个正整数，使得$mP \in J_{1,\, w}(L_w) \setminus \mathrm{Supp}(\Theta)$，则

$$\lambda_w(P) = -\frac{2}{n_w m^2} \cdot \chi_{L,w}\left(\frac{T_1(mP)}{\phi_m(P)}\right); \tag{4.2}$$

通过连续性，我们可以将 λ_w 的定义扩展到 $J_\Theta(L_w)$ 中的挠点。

与定义 4.2 类似，在此情形下，引理 4.1 也保证了 m 的存在，因此将定义扩展到挠点是有意义的。由推论 4.4 和公式 (2.17)，该定义与 m的选择无关。

注 4.6。

(i) 对所有 $P \in J_\Theta(L_w)$，都有 $\frac{n_w \lambda_w}{(p)}\, \chi_{L,w}(\ell) =: \lambda'_w(P) \in \mathbb{Q}$，其中 ℓ 是w下方的有理素数。事实上，除子 2Θ 的实值 N´eron 函数在 [Uch11a] 的 P处为 $\lambda'_w(P) \log |\ell|_w$，其中 log 表示实对数。(ii) 若 C 在 w处有良约化，则引理 4.3 的等式对所有 $P \in J_\Theta(L_w)$ 都成立，因为在此情形下，(4.1) 右端定义了一个在整个 $J_\Theta(L_w)$ 上满足推论 4.4 的函数（对于 $K = L = \mathbb{Q}$ 的情形，参见 [FS97，引理 1]；一般情形参见 [Sto02，命题 5.2]；另见第 7 节，尤其是定理 7.1）。(iii) 等价地，我们也可以用定义 4.2 来定义 $v \nmid p$情形下的局部 p-进 N´eron 函数，因为 $\chi_{L,w}$ 在 $\mathcal{O}_w^\times$ 上为零，且 $\sigma_v(T) = T_1(1 + O(T_1, T_2))$。我们倾向于陈述这个简化公式，因为它不涉及对子空间W_v的选择。反过来，若 $v \mid p$ 且 χ 在 v处非分歧，则定义 4.2 可简化为定义 4.5。

现在我们陈述局部 p-进 N´eron 函数在 w处满足的性质，无论w 是否整除 p。这些性质与取实值的 N´eron 函数的性质完全类似：亏格 2 情形见 [Uch11a，定理 5.3 、定理 5.6] ；任意亏格情形见 [Uch11b，定理 7.5] （后者中的 N´eron 函数是相对于 Θ而非 2Θ定义的）。

命题 4.7. 对于 L 的任意赋值 w，局部 p-进 N´eron 函数在 w 处具有以下性质：

(i) 若 F 是 L 的有限扩张，且 w' 是 F 上方的一个赋值，则 $\lambda_{w'}$ 在 $J_\Theta(L_w)$ 上限制为 λ_w。(ii) 对所有 $P \in J_\Theta(L_w)$，以及所有满足 $mP \in J_\Theta(L_w)$ 的整数 m，

$$\lambda_w(mP) = m^2 \lambda_w(P) - \frac{2}{n_w} \chi_{L,w}(\phi_{|m|}(P)).$$

(iii) 对于所有满足 $P + Q, P - Q \in J_\Theta(L_w)$ 的 $P, Q \in J_\Theta(L_w)$，

$$\lambda_w(P+Q) + \lambda_w(P-Q) = 2\lambda_w(P) + 2\lambda_w(Q)$$
$$-\frac{2}{n_w} \chi_{L,w}(-X_{11}(P) + X_{11}(Q) - X_{12}(P)X_{22}(Q) + X_{22}(P)X_{12}(Q)).$$

证明。(i) 显然。由命题 3.4 (iii) 和推论 4.4，性质 (ii) 和 (iii) 在有限指数子群 H_w 中成立。由于我们利用 (ii) 将 λ_w 扩展到该子群之外，根据 (2.17)，(ii) 在处处都成立。至于 (iii)，假设 P, Q，$P + Q, P - Q$ 均为非挠点。由于 H_w 在 $J(L_w)$ 中具有有限指数，我们可以找到一个正整数 m，使得对每个 $R \in \{P, Q, P + Q, P - Q\}$，$mR \in H_w \setminus \{0\}$。由引理 A.3，我们还可以确保，必要时将 m 替换为其倍数后，每个 mR 都不落在 Θ上。于是，当 P 和Q 分别替换为 mP 和 mQ时，(iii) 成立。最后，由 (2.18)，等式 (iii) 对 P, Q成立。挠的情形由连续性得出。 □

4.2. 全局高度。

定义 4.8. 关于特征 χ 和子空间$W_v \in$Is(C/K_v)（在 $v \mid p$ 处）， J 的全局 p-进高度是函数

$$h_p \colon J(\overline{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{Q}_p,$$

定义如下。若 P 属于 $J_\Theta(L)$，其中 L 是 K的某个有限扩张，则

$$h_p(P) = \frac{1}{[L:\mathbb{Q}]} \sum_w n_w \lambda_w(P), \tag{4.3}$$

其中求和遍历 L 的所有非阿基米德赋值点；若 $w \mid p$ ，则 λ_w 是定义 4.2 中的局部 p-进 N´eron 函数；若 $w \nmid p$，则是定义 4.5 中的局部 p-进 N´eron 函数。由于根据命题 4.7(ii)，对于 P，$h_p(mP) = m^2 h_p(P)$， $mP \in J_\Theta(L)$，我们利用引理 4.1 将 h_p扩展到 $J(L)$，并要求

$$h_p(mP) = m^2 h_p(P) \qquad \text{continues to hold and} \qquad h_p(0) = 0.$$

根据注 4.6(ii)，(4.3) 中的和是有限和；根据命题 4.7(i)，它与 L的选取无关。我们将 p-进 N´eron 函数扩展到挠点，并结合 χ_L 在 $L^\times$ 上的消失，也保证了对于挠点 $P \in J_\Theta(L)$， $h_p(P) = 0$ 。因此，扩展到 $J(L)$ 是良定义的。

由命题 4.7 (iii)，全局 p-进高度也满足平行四边形定律：

$$h_p(P+Q) + h_p(P-Q) = 2h_p(P) + 2h_p(Q).$$

因此，它诱导出一个对称双线性配对 $J(\overline{\mathbb{Q}}) \times J(\overline{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{Q}_p$。

注 4.9. 根据 [BKM23], 若 p 和 C 满足定理 3.6 的假设，并且对每个 v 使得 χ 发生分歧的地方，我们选取 Blakestad 的典范 v-进 σ 函数，则 p-进高度h_p 与典范全局 Mazur–Tate 高度 [MT83]相同。

注 4.10. 假设 $K = \mathbb{Q}$。Trip 最近将 Perrin–Riou 对椭圆曲线 [PR83,PR84], 的研究推广，定义了一个二次型 $h_p^{\mathrm{naive}} \colon J(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}_p$，它是朴素高度的极限：参见 [Tri22，定理 3.3.1、定义 3.3.17、定理 3.3.19]（在她的学位论文中， h_p^{naive}记作 h_p）。令 χ 为 $\mathbb{Q}$ 的圆分特征（参见 §6.4），令 $W_p \in$ Is$(C/\mathbb{Q}_p)$ 为对应于朴素 σ 函数的子空间，并令 h_p 为根据上述选择得到的全局 p-进高度。于是 Trip 证明，对所有 $u \in J(\mathbb{Q})$，都有 $h_p(u) = h_p^{\mathrm{naive}}(u)$ [Tri22，定理 3.3.25]。

5. Local p-adic Néron functions vs Colmez's Green functions

本节的第一部分（§§5.1–5.3）回顾 Colmez 的一些结果 [Col98]。更具体地说，在 §5.1 中，我们概述 Colmez 如何在 p-进域上的光滑代数簇上构造一种 p-进积分理论。该理论满足一些“自然”性质，且不要求对约化作任何假设。类似的技巧可用于为阿贝尔簇上的除子赋予某些 p-进格林函数；本质上，这些格林函数是双重 p-进积分。在 §5.2 中，曲线上的第三类微分的单重 p-进积分，与其雅可比簇上除子 Θ 的 p-进格林函数联系起来。§5.1 和 §5.2 完全是综述性的。§5.2 的结果在 §5.3 中用于定义数域 K 上曲线的雅可比簇上的阿代尔高度，其在 p 处的分量与 Coleman–Gross 和 Besser 的 p-进高度一致 [CG89,Bes22]。这类阿代尔高度在 [Col98], 中已有定义，但我们将 Colmez 的结果表述为稍一般的形式：特别是，我们的阿代尔高度取决于在 $\mathbb{Q}$ 的每个赋值 p 处，为 K 选取一个连续的、取值于 $\mathbb{Q}_p$ 的幂等类特征。

在 §5.4 中，我们随后将情形限制为第 4 节的情形，并将我们的局部 N´eron 函数与 Colmez 关于除子 Θ 的格林函数进行比较：见下文定理 5.30。鉴于 §5.3，在我们的奇数次二属情形下，我们还得到一个公式，将点 v 处的 Coleman–Gross 局部 p-adic 高度与我们在 v 处的 p-adic N´eron 函数联系起来（推论 5.32）。

我们利用这一点证明，定义 4.8 中的全局 p-进高度 h_p 等于 Coleman–Gross 全局 p-进高度（推论 5.35）。

注 5.1。 我们选择花费相当多的篇幅总结 Colmez 的结果，原因有几个。首先，我们在很大程度上会用到这些结果（及其证明）。其次，为了以更一般的方式陈述我们的比较结果，我们需要将 Colmez 的高度构造推广到任意 idele 特征。最后，我们认为，如果读者对 §5.4 的内容不够熟悉，就很难理解 [Col98]。

5.1. Colmez 的 p-进积分理论与格林函数。设 K 是 $\mathbb{C}_p$ 的闭子域（例如 $\mathbb{Q}_p$ 的有限扩张）。存在唯一的局部解析函数 Log: $\mathcal{O}_K^\times \to K$，满足:

$$d\operatorname{Log} t = \frac{dt}{t}, \qquad \text{and} \qquad \operatorname{Log}(xy) = \operatorname{Log}(x) + \operatorname{Log}(y), \quad \text{for all } x, y \in \mathcal{O}_K^\times. \tag{5.1}$$

将 Log 视为变量 p 后，我们可以将 Log 延拓为同态 Log: $K^\times \to K_{\mathrm{st}} := K[\operatorname{Log} p]$。Col [Col98] 的主要成果之一，是发展出一种 K_{st} 取值的 p 进积分理论，用于对 K 上的光滑几何连通代数簇中的闭微分 1-形式进行积分，且不对约化作任何假设。给定这样的簇 X，回顾一下，有理闭微分 1-形式是指

(i) 若其为全纯形式，则称为第一类；(ii) 若其留数除子为零，则称为第二类；(iii) 若其至多有简单极点，且每个极点处的留数都是整数，则称为第三类。

参见 [Col98，引理 I.1.12，注释 I.1.18(ii)] ，以了解留数除子的精确定义。任意闭 1-形式都是第二类和第三类微分的线性组合 [Col98，推论 I.1.16]。

令 $K(X)$ 为 X 上的有理函数域，令 $K(X)_{\mathrm{st}}$ 为由 $K(X)$ 和 $\operatorname{Log}(f)$ 生成的环，其中 $f \in K(X)^\times$。局部对数亚纯函数是指这样一种函数：局部地（相对于 p-adic 拓扑）可写成解析函数的对数的多项式，其系数为亚纯系数。

定理 5.2 ([**Col98**，定´理` 1])。存在一种定义在 K 上的光滑代数簇上的唯一积分理论，该理论满足以下性质：对所有此类簇 X、闭微1-形式 ω， ω_1 以及 ω_2 在 X上的点 a， b， $c \in X(K)$ 及标量 μ_1， $\mu_2 \in K$:

（i） $F(x) = \int_a^x \omega$ 是一个取值于 $K \oplus K\operatorname{Log}$ p、满足 $dF = \omega$ 的 $x \in X(K)$ 的局部对数亚纯函数；（ii） $\int_a^b (\mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2) = \mu_1 \int_a^b \omega_1 + \mu_2 \int_a^b \omega_2$；（iii） $\int_a^c \omega = \int_a^b \omega + \int_b^c \omega$；（iv）若 $\omega = dg$（其中 $g \in K(X)_{\mathrm{st}}$）是恰当的，则 $\int_a^b \omega = g(b) - g(a)$；（v）若 $f\colon X \to Y$ 是定义在 K 上的光滑簇之间的态射， η 是 Y 上的闭 1-微分形式，则 $\int_a^b f^*\eta = \int^{f(b)}_{f(a)} \eta$。

该策略首先考虑 X 是阿贝尔簇的情形，然后利用阿尔巴内塞态射并结合函子性（v）推广到一般簇。鉴于[Col98，注释 2(iv)], ，本质上只需考虑 $K = \mathbb{C}_p$ 的情形。

现在假设 X 是定义在 K 上的阿贝尔簇。我们粗略概述 Colmez 在这种情况下的构造。

全纯微分 ω 在 X 上是平移不变的。因此，根据 (v)，在 0 处取值为零的 ω的原函数必定是群同态 $X(K) \to K$。我们可以按如下方式构造这样的原函数。存在 $X(K)$ 的一个开子群 V，使得满足条件 $\mathcal{L}_\omega(0) = 0$ 的 ω的唯一形式原函数 $\mathcal{L}_\omega$ 在 V 上收敛，并且是群同态 $V \to K$。由于 $X(K)/V$是挠 [Col98, Th´eor`eme II.1.9], ，我们可以将 $\mathcal{L}_\omega$ 扩张为局部解析群同态$\mathcal{L}_\omega\colon X(K) \to K$，并要求对所有整数 n 和点 a， $\mathcal{L}_\omega(na) = n\mathcal{L}_\omega(a)$。反过来，给定一个局部解析群同态 $\mathcal{G}\colon X(K) \to K$，其微分是平移不变的，因而是全纯微分。也就是说，映射 $\mathcal{G} \mapsto d\mathcal{G}$ 在 K- 向量空间与 $X(K) \to K$ 之间诱导了一个同构；前者由局部解析群同态构成（我们称之为 X的单对数），后者为 $H^0(X, \Omega^1)$ [Col98, Lemme II.1.13]。

例 5.3. 当 X 是 §2.3 中曲线 C 的雅可比簇，且对 $i \in \{1,2\}$有 $\omega = \Omega_i$ 时，原函数 $\mathcal{L}_{\Omega_i}$ 是 i 的严格对数第 $\mathcal{L}_i$ 个分量 $\mathcal{L}$在 $J(K)$ 上的扩张。关于 $\mathcal{L}_i$的收敛性质，见命题 2.7（以及引理 3.2）。 X 的单对数构成的 K-向量空间是 2 维的，由 $\mathcal{L}_{\Omega_1}$ 和 $\mathcal{L}_{\Omega_2}$张成。

第二类和第三类微分的情形更为复杂。给定一个正整数 n 和 $\{1,\dots,n\}$ 的一个子集 I，令

$$m_I \colon X^{n+1} \to X, \qquad (x, h_1, \dots, h_n) \mapsto x + \sum_{i \in I} h_i$$

给定 α（ X 上的一个微分形式、函数或除子），设

$$\Delta^{[n]}\alpha = \sum_{I \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{n-|I|} m_I^* \alpha.$$

根据平方定理 [Col98，命题 I.3.14、I.3.15], 若 ω 是 X上的第二类或第三类微分形式，则 $\Delta^{[2]}\omega$ 在 X^3上是恰当的。令 $F_{\Delta^{[2]}\omega}$ 为 $K(X^3)_{\mathrm{st}}$中满足 $dF_{\Delta^{[2]}\omega} = \Delta^{[2]}\omega$和 $F_{\Delta^{[2]}\omega}(x,\ 0,\ 0) = 0$的元素。根据 (v) 以及对 $F_{\Delta^{[2]}\omega}$的选择，我们必有

$$\Delta^{[2]}\left(\int \omega\right) = F_{\Delta^{[2]}\omega}.$$

Colmez 证明了一个充分判据：对于 $X(\mathbb{C}_p)^{n+1}$ 上的局部对数亚纯函数 g ，其可表示为 $\Delta^{[n]}f$ 的形式，其中 f 是 $X(\mathbb{C}_p)$ 上的局部对数亚纯函数；当该条件成立时， f 在 X 的单对数中至多 $n-1$ 次的多项式意义下唯一：精确表述见 [Col98，定理 II.1.´eor`me16] 。将这一技术结果应用于 $g = F_{\Delta^{[2]}\omega}$，即可求出一个原函数 $f = \int \omega$ （见 [Col98，命题 II.1.17]）。当 X 是曲线 C 的雅可比簇时，显式公式见 §6.7。

定理 5.2 只涉及单重积分。不过，Colmez 采用与我们刚才概述的、针对第二类和第三类微分积分的类似策略，也在阿贝尔簇 X 上构造了某些 p-进格林函数；这些函数实际上是二重积分（见下文命题 5.7）。

立方定理陈述如下 :

命题 5.4（[**Col98**，命题 I.3。**18**]）。设 X 是特征为 0 的代数闭域上的阿贝尔簇，且 D 是 X的一个除子，则 $\Delta^{[3]}D$ 是主除子。

令 D 为 X 的一个除子，并令 $f_D^{(4)}$ 为 X^4 上的有理函数，其除子为 $\Delta^{[3]}D$ ，且其在 $(X^3 \times \{0\}) \cup (X^2 \times \{0\} \times X) \cup (X \times \{0\} \times X^2$ 上的限制等于常值函数 1。将 Col98 的上述判据（定理 II.1 ）应用于对数 [Col98，定´理` II.1。16] 应用于对数 $f_D^{(4)}$ 后，便可由 X^4 得到 X:

命题 5.5（[**Col98**，命题 4，命题 II.1。**19**]）。存在一个局部对数亚纯函数 G_D 定义在 X上，取值于 $K \oplus \mathbb{Q}$对数p，使得 $\Delta^{[3]}G_D =$对数 $f_D^{(4)}$。此外， G_D 在加上一个次数至多为2 的多项式（其变量为 X的单对数）后， D 沿 D的支集之外局部解析，并且沿 D 有对数奇点 D。

De定义 5.6. 满足命题 5.5 的函数 G_D 称为除子 D的格林函数 .

下面的命题告诉我们，格林函数 G_D 是一种双重 p-进整性:

命题 5.7（[**Col98**，命题 II.1。**20**]）。设 ∂ 是 X上的一个不变导子。若G_D 是除子 D的格林函数，则 d（∂G_D）是第二类微分形式。

5.2. Colmez 关于曲线与雅可比簇的理论。与第 5.1 节一样，设 K 是 $\mathbb{C}_p$ 的一个闭子域。设 X 是 K 上亏格为正的光滑、射影、几何不可约曲线，且 $X(K)$ 非空；令 J 为其雅可比簇。给定一个固定的 $P_0 \in X(K)$，考虑嵌入 $\iota \colon X \hookrightarrow J$，其基点为 P_0。这诱导出一个同构 $\iota^* \colon H^1_{\mathrm{dR}}(J) \to H^1_{\mathrm{dR}}(X)$。

注 5.8。当 X 是由形如 (2.5) 的方程显式给出的亏格 2 曲线时，我们现在将要引入的许多记号都已引入或固定（例如， ι 是相对于 $P_0 = \infty$ 的嵌入）。由于在此处专门讨论这一情形并无明显优势，我们仍一般性地阐述 Colmez 的结果。回到第 5.4 节的 $X = C$ 情形时，应牢记的原则是，本节中的所有记号都应特化为此前针对 C 所固定的记号。

固定 $H^0(J, \Omega^1)$ 的一组基 $(\Omega_1, \dots, \Omega_g)$，并将其不变导数的对偶基记为 $(\partial_1, \dots, \partial_g)$。考虑函数 ϖ: $X^g \to J$，定义为 $\varpi(P_1, \dots, P_g) = \iota(P_1) + \cdots + \iota(P_g)$。于是 ϖ 是满射，并诱导出 g 的 $X^{(g)}$ 次对称幂与 X 之间的双有理等价。若某点 $u \in J$ 在由 ϖ 诱导的映射下， $X^{(g)}$ 中恰有一个元素映至 u ，且该元素具有互不相同的 P_i，则称该点为一般位置。theta 除子记为 Θ，它是J 的除子，而J 是如下集合的像:

$$X^{g-1} \to J, \qquad (P_1, \dots, P_{g-1}) \mapsto -\iota(P_1) \cdots - \iota(P_{g-1}).$$

对于一般位置的 $u = \iota(P_{1,u}) + \cdots + \iota(P_{g,u})$，我们考虑 X 上的以下除子（参见 [Mil08，引理 6.7]）：

$$X_u = \sum_{P \in \iota^{-1}(u+\Theta)} P = P_{1,u} + \cdots + P_{g,u}.$$

theta 除子是对称的，即存在唯一的 $w \in J$ ，使得 x 属于 Θ 当且仅当 $w - x$ 属于 Θ （依据 [Col98，推论 I.4.7] 及 Lefschetz 原理）。若 G 是除子 Θ 的格林函数，则 $G_w(x) := G(w - x)$ 也是格林函数；若 $G(x) = G_w(x)$，则称 G 是对称的。回忆一下，根据命题 5.7， $d(\partial_i G)$ 是 J 上的第二类微分。

命题 5.9（[Col98，命题 II.2.4]）。将格林函数 G 映射为由 $\iota^* d(\partial_1 G) \dots, \iota^* d(\partial_g G)$ 生成的 $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ 子空间的函数，在除子 Θ 的对称格林函数集合（模去加常数）与 $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ 中和 $H^0(X, \Omega^1)$ 互补且关于杯积为各向同性的子空间集合 $\mathrm{Is}(X)$ 之间诱导出一个双射。

利用这个命题和格林函数的性质，Colmez 将 X 上的第三类微分积分（如定理 5.2 所述）表示为 J 的 theta 除子的对称格林函数的拉回。现在我们来说明其方法。

给定 X 上的第三类微分 ω ，令 $\mathrm{Res}_P(\omega)$ 表示 ω 在 P 处的留数，并且令

$$\mathrm{Div}(\omega) = \sum_{P \in X} \mathrm{Res}_P(\omega) P \in \mathrm{Div}^0(X).$$

特别地，

$$\mathrm{Div}\left(\frac{df}{f}\right) = \mathrm{div}(f),$$

其中后者按通常意义是一个有理函数的除子。
固定一个元素 $W \in \mathrm{Is}(X)$，并令 $G_{\Theta,\, W}$ 为相应的对称格林函数（根据命题 5.9，它在加上一个常数的意义下唯一）；令 $F_{i,\, W} = \partial_i G_{\Theta,\, W}$。给定一般位置的 u、 $v \in J$，考虑微分

$$\omega_u - \omega_v = \iota^* \left(\sum_{i=1}^{g} (F_{i,W}(x - u) - F_{i,W}(x - v)) \Omega_i \right). \tag{5.2}$$

引理 5.10。 $\omega_u - \omega_v$ 是第三类微分，并且

$$\mathrm{Div}(\omega_u - \omega_v) = X_u - X_v.$$

证明。 参见 [Col98，第 92]。 □

我们考虑由形如 $\omega_u - \omega_v$ 的微分生成的 $\mathbb{Z}$-模，其中 u、 $v \in J$ 为一般点；我们称此模中的微分为 (1, 1) 型微分。此定义取决于 $W \in$Is(X) 的选择。

命题 5.11（[Col98，命题 II.2.9]）。设X上的 ω 为第三类微分。则存在唯一的全纯微分 $\omega^{1,\,0}$ 以及唯一的 (1, 1) 型微分 $\omega^{1,\,1}$，使得 $\omega = \omega^{1,\,0} + \omega^{1,\,1}$。此外，

(i) 若 $\omega = \frac{df}{f}$，则 $\omega^{1,\,0} = 0$。(ii) 若 $\omega^{1,\,1} = \sum_i n_i \omega_{u_i}$，则 Div($\omega$) 在 J 中的像是 $\sum_i n_i u_i$ 并且

$$\int^x \omega = \int^x \omega^{1,0} + \sum_i n_i G_{\Theta,W}(\iota(x) - u_i).$$

例 5.12. 若 $\mathrm{Div}(\omega) = P_1 - P_2$，选取 $Q_1, \ldots, Q_{g-1}$，使得 $u = \iota(P_1) + \iota(Q_1) + \cdots + \iota(Q_{g-1})$ 和 $v = \iota(P_2) + \iota(Q_1) + \cdots + \iota(Q_{g-1})$ 均处于一般位置。则

$$\mathrm{Div}(\omega_u - \omega_v) = X_u - X_v = P_1 - P_2;$$

因此

$$\omega - (\omega_u - \omega_v) = \omega^{1,0} \in H^0(X, \Omega^1)$$

and

$$\int^x \omega = \int^x \omega^{1,0} + G_{\Theta,W}(\iota(x) - u) - G_{\Theta,W}(\iota(x) - v).$$

这个例子应能说明，尽管微分 $\omega^{1,\,1}$ 是唯一的，但将其分解为和 $\sum_i n_i \omega_{u_i}$ 的方式并不唯一。一般点 $u_i \in J$ 的选取会影响各项 $G_{\Theta,\,W}(\iota(x) - u_i)$ 的对数奇点；不过总体而言，$\sum_i n_i G_{\Theta,\,W}(\iota(x) - u_i)$ 在 Div(ω) 之外是局部解析的。

对每个 $i \in \{1, \ldots, g\}$，记 $\mathcal{L}_i$ 为 J的单对数，其微分为 $H^0(J, \Omega^1)$ 的基元素 Ω_i。

Defi定义 5.13. 对于 X 上的第三类微分 ω，我们将 $\mathrm{Log}_{\tilde{J}}(\omega) \in H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ 定义为
i微分的

$$\omega^{1,0} + \sum_{i=1}^{g} \mathcal{L}_i(\mathrm{Div}(\omega))\eta_i,$$

其中 $\omega^{1,\,0}$如命题 5.11 中所述，并且对每个 $i \in \{1, \ldots, g\}$，$\eta_i = \iota^* d(\partial_i G_{\Theta,\,W})$。

作为命题 5.11 的推论，并且由于按构造有 $\eta_i \in W$，我们得到

引理 5.14。

(i) 若 ω 全纯，则 $\mathrm{Log}_{\tilde{J}}(\omega) = [\omega]$。(ii) 若相对于 W，ω 为 (1, 1) 型，则 $\mathrm{Log}_{\tilde{J}}(\omega)$ 属于 W。(iii) $\mathrm{Log}_{\tilde{J}}\left(\frac{df}{f}\right) = 0$。

备注 5.15。函数 $\mathrm{Log}_{\tilde{J}}$ 的定义在概念上更为明确，见 [Col98, 定理 II.2。11] 并且随后证明它满足定义 5.13 和引理 5.14。记 $T(K)$为 X上的第三类微分群，记 $T_\ell(K)$为对数微分子群（即形如 $\frac{df}{f}$ 的微分，其中 $f \in K(X)^\times$），可知 $\mathrm{Log}_{\tilde{J}}$ 诱导出一个群同态

$$\mathrm{Log}_{\tilde{J}} \colon T(K)/T_\ell(K) \to H^1_{\mathrm{dR}}(X).$$

事实上，这与 Ψ 的典范同态一致，见 [CG89，命题 2。5] (参见 [Col98，注 II.2。12])。

5.3. Colmez 的阿代尔高度。

5.3.1. 记号与预备选择。设 K 是一个数域。对于 K 的每个赋值 v，我们定义一个 $\mathbb{Q}$-向量空间 $\mathscr{L}(K_v^\times)$ 和一个对数 $\mathrm{Log}_v\colon K_v^\times \to \mathscr{L}(K_v^\times)$，如下所示。
若 v 是非阿基米德赋值，令 p 为 v 下方的有理素数，并令 Log_v 表示域 K_v 的对数 Log，其定义见第 5.1 节开头。则 Log_v 的取值属于 $\mathscr{L}(K_v^\times) := K_v \oplus \mathbb{Q}\mathrm{Log}_v\, p$。元素 $x \in \mathscr{L}(K_v^\times)$ 可唯一写成 $x = x^{(0)} + x^{(1)}\,\mathrm{Log}_v\, p$，其中 $x^{(0)} \in K_v$ 且 $x^{(1)} \in \mathbb{Q}$。我们将按此含义使用上标 (0) 和 (1)。

若 v 是阿基米德赋值，我们令 $\mathscr{L}(K_v^\times) = \mathbb{R}$，并令 $\mathrm{Log}_v\colon K_v^\times \to \mathscr{L}(K_v^\times)$ 为映射 $\mathrm{Log}_v\, x = \log|x|_\infty$，其中 $|\cdot|_\infty$ 是 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上的标准绝对值。
于是我们定义 $\mathbb{Q}$-向量空间

$$\mathscr{L}(\mathbb{A}_K^\times) = \prod{}'\mathscr{L}(K_v^\times) = \{(x_v)_v \in \prod \mathscr{L}(K_v^\times) : x_v \in K_v \text{ for almost all } v\}.$$

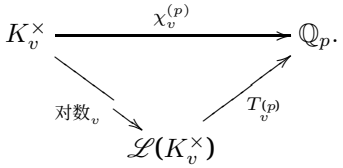
由于 $\mathrm{Log}_v(\mathcal{O}_v^\times) \subset K_v$，逐分量应用 Log_v 可得到良定义的映射 $\mathrm{Log}\colon \mathbb{A}_K^\times \to \mathscr{L}(\mathbb{A}_K^\times)$。记由 $\mathrm{Log}(K^\times)$ 生成的 $\mathbb{Q}$-向量子空间 $\mathscr{L}(\mathbb{A}_K^\times)$ 为 $\mathscr{L}(K^\times)$，则令

$$\mathscr{L}(\mathbb{A}_K^\times/K^\times) := \mathscr{L}(\mathbb{A}_K^\times)/\mathscr{L}(K^\times).$$

接下来，我们定义一个 $\mathbb{Q}$-线性映射 $T\colon \mathscr{L}(\mathbb{A}_K^\times/K^\times) \to \prod_{p\le\infty}\mathbb{Q}_p$（其中 $\mathbb{Q}_\infty := \mathbb{R}$）。映射 T 将取决于在每个 p 处对连续幂等类特征 $\chi^{(p)}\colon \mathbb{A}_K^\times/K^\times \to \mathbb{Q}_p$ 的选择（$p < \infty$ 的情形参见第 4 节）。我们用 $\mathscr{I}(K)$ 表示 $\chi = (\chi^{(p)})_{p\le\infty}$ 的所有可能选择构成的集合。

注 5.16. 在 Colmez 的设定中，不依赖于 $\mathscr{I}(K$中的元素。另一方面，该构造隐含地需要在$p < \infty$ 处选择（某个数乘以）圆分特征（见 [BBBM21，例 2。7]），并选择一个连续的实值幂等类特征。后一个选择等同于选择一个乘法常数。

引理 5.17. 设 $\chi^{(p)}\colon \mathbb{A}_K^\times/K^\times \to \mathbb{Q}_p$ 是一个连续幂等类特征。对于 K 的每个赋值v，存在唯一一个 $\mathbb{Q}$-线性映射 $T_v^{(p)}\colon \mathscr{L}(K_v^\times) \to \mathbb{Q}_p$，使下图交换



此外，除了有限多个 v 外，$T_v^{(p)}$ 在 K_v 上恒为零。

证明. $\mathbb{Q}$-线性保证了唯一性。为证明存在性，

- 若 v和 p都是无限的，则对某个 $\alpha \in \mathbb{R}$，$\chi_{(\infty)_v} = \alpha\,\mathrm{Log}_v$，因此我们令 $T_{(\infty)_v}(x) = \alpha x$ 对所有$x \in \mathscr{L}(K_v^\times) = \mathbb{R}$成立；
- 若 p 有限且 $v \mid p$，则存在唯一的 $\mathbb{Q}_p$-线性映射 $t_{(p)v}$：$K_v \to \mathbb{Q}_p$ 使得$\chi_{(p)v} = t_{(p)v} \circ$ 对数$_v$ 在 $\mathcal{O}_v^\times$ 上（例如，参见[BBBM21，§2。1]）。于是令

$$T_v^{(p)}(x) = t_v^{(p)}(x^{(0)}) + x^{(1)}\chi_v^{(p)}(p), \qquad \text{for all } x \in \mathscr{L}(K_v^\times);$$

- 若 p 有限且 v 无限，则 $\chi_{(p)v}$ 恒等于零，因此 $T_{(p)v}(x) = 0$；
- 在所有其余情形下，$\chi_{(p)v}$ 在 $\mathcal{O}_v^\times$ 上恒等于零，因此

$$T_v^{(p)}(x) = x^{(1)}\chi_v^{(p)}(\ell),$$

其中 ℓ 是 v 下方的有理素数。 □

定义 5.18. 固定 $\chi = (\chi^{(p)})_p \in \mathscr{I}(K)$，并且对于 K 的一个赋值与 $\mathbb{Q}$ 的一个赋值构成的每一对 (v,p)，记 $T_v^{(p)}$ 为引理 5.17 中对应于 $\chi_v^{(p)}$ 的映射。根据该引理，下述映射（其定义取决于 χ）是良定义的，且为 $\mathbb{Q}$-线性的：

$$T\colon \mathscr{L}(\mathbb{A}_K^\times/K^\times) \to \prod_{p\le\infty}\mathbb{Q}_p, \qquad T((x_v))_p = \sum_v T_v^{(p)}(x_v). \tag{5.3}$$

假设 L 是 K 的有限扩张。那么对于 K 的任意赋值 v 以及 L 的任意赋值 $w \mid v$，存在唯一的 $\mathbb{Q}$-线性映射 $\mathrm{Tr}^{L_w/K_v}\colon \mathscr{L}(L_w^\times) \to \mathscr{L}(K_v^\times)$，满足

$$\mathrm{Tr}_{L_w/K_v}(\mathrm{Log}_w(x)) = \mathrm{Log}_v(N_{L_w/K_v}(x)) \qquad \text{for all } x \in L_w^\times.$$

这些局部迹映射诱导出一个 $\mathbb{Q}$-线性映射

$$\mathrm{Tr}_{L/K}\colon \mathscr{L}(\mathbb{A}_L^\times) \to \mathscr{L}(\mathbb{A}_K^\times), \qquad \mathrm{Tr}_{L/K}(\dots, x_w, \dots) = \left(\dots, \sum_{w|v} \mathrm{Tr}_{L_w/K_v}(x_w), \dots\right)$$

它可分解为经由

$$\mathrm{Tr}_{L/K}\colon \mathscr{L}(\mathbb{A}_L^\times/L^\times) \to \mathscr{L}(\mathbb{A}_K^\times/K^\times).$$

因此，给定上述的 $\chi \in \mathscr{I}(K)$，将 T 与 $\mathrm{Tr}^{L/K}$ 复合，得到一个 $\mathbb{Q}$-线性 $\mathscr{L}(\mathbb{A}_L^\times/L^\times) \to \prod_{p\le\infty}\mathbb{Q}_p$。

备注 5.19. 事实上，$T \circ \mathrm{Tr}^{L/K}$ 等于定义 5.18 将特征 $\chi_L \in \mathscr{I}(L)$ 与 $\chi_L^{(p)} = \chi^{(p)} \circ N_{L/K}$ 关联起来的 $\mathbb{Q}$-线性映射 $\mathscr{L}(\mathbb{A}_L^\times/L^\times) \to \prod_{p\le\infty}\mathbb{Q}_p$，其中 $N_{L/K}$ 是 idele 类群上的范数。

5.3.2. 关于 χ的阿代尔高度。现在设 X 是定义在 K上的一条光滑、射影、几何不可约曲线，其亏格大于 0，雅可比簇为 J。假设我们已固定 $\chi \in \mathscr{I}(K)$，根据定义 5.18，它确定了一个 $\mathbb{Q}$-线性映射 $T\colon \mathscr{L}(\mathbb{A}_K^\times/K^\times) \to \prod_{p\le\infty}\mathbb{Q}_p$。提醒读者注意，我们的记号不会体现这一选择。
目标是利用 T 构造一个对称双线性配对 $J(\overline{\mathbb{Q}})\times J(\overline{\mathbb{Q}}) \to \prod_{p\le\infty}\mathbb{Q}_p$。投影到 $\mathbb{Q}_p$，对于选定的素数 p（或投影到 $\mathbb{R}$），我们还将得到一个取值于 $\mathbb{Q}_p$（或取实值）的通常意义下的高度函数。

除选择 $\chi \in \mathscr{I}(K)$ 外，阿代尔高度还取决于对每个非阿基米德赋值 v，选择 $H^1_{\mathrm{dR}}(X/K_v)$ 中的子空间 W_v：它与全纯形式空间互补，且关于杯积是各向同性的；换言之，就是选择集合 $\mathrm{Is}(X/K_v)$ 中的一个子空间 W_v。我们用 $\mathrm{Is}_K(X)$ 表示所有这类选择构成的集合；元素 $W \in \mathrm{Is}_K(X)$ 在 K 的每个有限赋值 v 处都有一个分量 W_v。固定 $W \in \mathrm{Is}_K(X)$；对于任意的 K 的有限扩张 L，我们都可以并且将把 W 视为 $\mathrm{Is}_L(X)$ 中的一个元素。
给定 X/K 上的一个次数为 0 的除子 D 以及一个非阿基米德赋值 v，存在唯一的第三类 (1, 1) 型微分$\omega_{D,\,W_v}$，其相对于 W_v 的留数除子为 D（命题 5.11）。等价地，根据引理 5.14，$\omega_{D,\,W_v}$ 是唯一一个留数除子为 D 且其在对数$\tilde{J}$ 下的像属于 W_v的第三类微分。我们将$G_{D,\,W,\,v}$ 记为$\omega_{D,\,W_v}$的一个原函数；根据命题 5.11 (ii)，它除一个常数外具有如下形式

$$\sum_i n_i G_{\Theta,W_v}(\iota(x) - u_i),$$

其中 $u_i \in J$ 和 $n_i \in \mathbb{Z}$ 取一般位置。
若 v 是阿基米德赋值，则存在唯一的第三类微分$\omega_{D,\,W_v}$，其留数除子为 D，且所有周期均为纯虚数（此处的记号略有误导，因为严格来说 W_∞尚未定义）。我们将$G_{D,\,W,\,v}$ 记为$\omega_{D,\,W_v}$的一个原函数的实部。与 W 相关且相对于 D 的阿代尔格林函数为函数

$$G_{D,W}\colon \prod X(K_v) \to \prod \mathscr{L}(K_v^\times), \qquad G_{D,W}((\dots, x_v, \dots)) = (\dots, G_{D,W,v}(x_v), \dots).$$

格林函数 $G_{D,W}$ 仅在满足以下条件的 $(x_v) \in \prod_v X(K_v)$ 上定义良好：对于任意 v，x_v 不属于 D 的支集。此外，每个 $G_{D,W,v}$ 都只在加上一个常值函数的意义下唯一。若将 $G_{D,W}$ 通过线性延拓视为零次除子上的函数，则这种不唯一性便会消失。

命题 5.20（[Col98，引理 II.2.16]）。若 D_1 与 D_2 是互不相交的次数为0的K上的除子，则

(i) $G_{D_1,W}(D_2) = G_{D_2,W}(D_1)$.

(ii) $G_{D_1,\ W}(D_2) \in \mathscr{L}(\mathbb{A}_K^\times)$。(iii) 若 $D_1 = \mathrm{div}(f)$，则 $G_{D_1,\ W,\ v}(D_2) =$对数$_v(f(D_2))$。特别地，若 D_1或 D_2是主除子，则 $G_{D_1,\ W}(D_2) \in \mathscr{L}(K^\times)$。(iv) 若 L/K是有限扩张，则 Tr $_{L/K}(G_{D_1\otimes L,\ W}(D_2 \otimes L)) = [L\colon K]G_{D_1,\ W}(D_2)$。

定义 5.21. 关于 T 的阿代尔高度是对称双线性配对

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_W\colon J(\overline{\mathbb{Q}}) \times J(\overline{\mathbb{Q}}) \to \prod_{p\le\infty} \mathbb{Q}_p$$

定义如下。给定 x、$y \in J(\overline{\mathbb{Q}})$，选取 D_1、$D_2 \in \in \mathrm{Div}^0(X)$，使得 D_1 和 D_2 的类分别等于 x 和 y。假设 D_1 和 D_2 定义在某个有限次数扩张 L 上，其中 L/K 为某个有限次数的扩张，并且 D_1 与 D_2 的支集互不相交。那么

$$\langle x, y\rangle_W := \frac{1}{[L:\mathbb{Q}]} \cdot T \circ \mathrm{Tr}_{L/K}(G_{D_1,W}(D_2)).$$

注 5.22. 命题 5.20 保证 $\langle x$、$y\rangle_W$ 是对称且定义良好的，也就是说，它与 D_1、D_2 的选取以及 L 无关。由对称性、G_{D_1}的定义 W 以及 $T \circ \mathrm{Tr}^{L/K}$ 关于 $\mathbb{Q}$ 的线性性，可得 $\langle\cdot$、$\cdot\rangle_W$ 的双线性。

我们还可对每个赋值 p 得到一个配对

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{W,p}\colon J(\overline{\mathbb{Q}}) \times J(\overline{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{Q}_p$$

通过取 $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$ 的 p 分量。$\mathbb{Q}_p$ 值配对 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{W,p}$ 可分解为局部高度配对之和。特别地，沿用定义 5.21 的记号，我们有

$$\langle x, y\rangle_{W,p} = \frac{1}{[L:\mathbb{Q}]} \sum_w \langle D_1, D_2\rangle_{p,w,W},$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{p,w,W}$ 是定义在支集包含于 $X(L_w)$ 的互素零次除子上的 $\mathbb{Q}_p$ 值配对，定义如下：

$$\langle D_1, D_2\rangle_{p,w,W} = T_v^{(p)} \circ \mathrm{Tr}_{L_w/K_v}(G_{D_1,W,w}(D_2)); \tag{5.4}$$

这里，v 是 K 在 w 下方的赋值。

Néron–Tate 实高度配对（分别地，p-进高度配对）也通过定义在互素零次除子上的局部高度配对来定义；Coleman–Gross 高度配对亦然。

命题 5.23 ([Gro86, 命题 2.3], [CG89, 命题 1.2])。设 p 是 $\mathbb{Q}$ 的一个赋值，且 $\chi^{(p)}$: $\mathbb{A}_K^\times/K^\times \to \mathbb{Q}_p$ 是连续幂等类特征。设 L 是 K 的有限扩张，且 $\chi_L^{(p)} = \chi^{(p)} \circ N_{L/K}$: $\mathbb{A}_L^\times/L^\times \to \mathbb{Q}_p$。设 L 的一个赋值 w 满足：若 $p \neq \infty$，则 $w \nmid p$。存在唯一的 $\mathbb{Q}_p$ 值配对 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{p,\ w}^N$，定义在支集包含于 $X(L_w)$ 的互素零次除子上，满足：

(i) $\langle D_1, D_2\rangle_{p,w}^N = \langle D_2, D_1\rangle_{p,w}^N$; (ii) $\langle D_1,$ $D_2 + D_3\rangle_{p,w}^N = \langle D_1, D_2\rangle_{p,w}^N + \langle D_1, D_3\rangle_{p,w}^N$; (iii) $\langle$ $\mathrm{div}(f)\ D\rangle_{p,w}^N = \chi_{L\ ,w}^{(p)}(f(D))$; (iv) $\langle(x) - (x_0)D\rangle_{p,\ w}^N$ 是关于 x 的连续函数。

定义 5.24. 关于 idele 特征 $\chi^{(\infty)}$ 的 N ´eron–Tate 实高度配对定义为配对

$$\langle\cdot,\cdot\rangle^{NT}\colon J(\overline{\mathbb{Q}}) \times J(\overline{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{R}$$

定义如下。若 x, y, D_1, D_2, L 如定义 5.21 所述，则

$$\langle x, y\rangle^{NT} = \frac{1}{[L:\mathbb{Q}]} \sum_w \langle D_1, D_2\rangle_{\infty,w}^N.$$

注记 5.25. 除了一个乘法常数之外，连续幂等类特征 $\chi^{(\infty)}$ 的选择是唯一的。

在命题 5.23 的陈述中，我们排除了对 p, w，其中 p 是有限的且 $w \mid p$ 的情形，因为此时唯一性不成立。然而，Coleman–Gross [CG89] 定义了一个依赖于某些辅助数据选择的局部配对。令 v 为 K 在 w下的赋值，令 W_v 为 $H^1_{\mathrm{dR}}(X/K_v)$ 的一个子空间，该子空间关于杯积是各向同性的，并且与 $H^0(X,\Omega^1$互补。展开定义可知，Coleman–Gross 在 w 处的局部高度满足

$$\langle D_1, D_2\rangle^N_{p,w,W_v} = \langle D_1, D_2\rangle_{p,w,W}, \tag{5.5}$$

前提是 v-进分量 W 为 W_v 且 p-进分量 χ 为 $\chi^{(p)}$。严格来说，Coleman–Gross 假设每个 $v \mid p$ 具有良约化，因为他们使用 Coleman 积分定义了 (5.5) 的左侧[Col82，CdS88], 但 Besser [Bes05，第 7] [Bes22] 节将定义扩展到了任意约化类型，使用了 Vologodsky 的 p-进积分理论 [Vol03]。单次 Vologodsky 积分与 Colmez 的积分一致（总结见 §5.1）。在良约化情形下，（单次）Coleman 积分与 Colmez 积分之间唯一的区别在于，前者取决于对数的分支，而后者将 p 处的对数值视为变量。由于我们将相容的迹映射应用于 $\mathbb{Q}_p$，这一差异在 (5.5) 的局部高度配对中消失了。因此，等式 (5.5) 确实成立。

In v在回顾 Besser 的扩张后，我们可以陈述 Colmez 的结果，而不必将其限制在良约化的情形 n.

定义 5.26. 对每个 $v \mid p$，令 W_v 为 $H^1_{\mathrm{dR}}(X/K_v)$的一个子空间，它与$H^0(X, \Omega^1)$互补，并且关于杯积是各向同性的。则相对于 $(W_v)_{v|p}$ 和 $\chi^{(p)}$ 的（扩展）Coleman–Gross$p$-进高度配对为

$$\langle \cdot, \cdot\rangle^{CG}_{(W_v)} \colon J(\overline{\mathbb{Q}}) \times J(\overline{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{Q}_p$$

定义如下。若 x、y、D_1、D_2、L 如定义 5.21 中所述，则

$$\langle x, y\rangle^{CG}_{(W_v)} = \frac{1}{[L:\mathbb{Q}]}\left(\sum_{w|v|p} \langle D_1, D_2\rangle^N_{p,w,W_v} + \sum_{w<\infty, w\nmid p} \langle D_1, D_2\rangle^N_{p,w}\right).$$

定理 5.27 ([**Col98**，第 II.2.18] + ϵ 定理〞)。配对 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{W,\ p}$ 等于当 $p = \infty$ 时相对于 $\chi^{(\infty)}$ 的 Néron–Tate 实高度配对；若 p 为有限，则等于相对于 $(W_v)_{v|p}$ 和 $\chi^{(p)}$ 的 Coleman–Gross 扩展 p-进高度配对。此外，若 p 为无限，或 p 为有限且 $w \nmid p$，则

$$\langle \cdot, \cdot\rangle_{p,w,W} = \langle \cdot, \cdot\rangle^N_{p,w},$$

因此 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{p,\ w,\ W}$与 W 无关；否则，

$$\langle \cdot, \cdot\rangle_{p,w,W} = \langle \cdot, \cdot\rangle^N_{p,w,W_v}.$$

证明。Colmez 对特定的 $\chi \in \mathscr{I}(K)$ 选择证明了该结果；根据上述定义和结果，证明可推广到任意的 χ。特别地，只需证明满足命题 5.23 假设的所有配对 (p, w) 的局部高度配对相等。例如，若 p, w 是非阿基米德的且 $w \mid \ell \neq p$，由 (5.4) 及引理 5.17 的证明可得

$$\langle D_1, D_2\rangle_{p,w,W} = G_{D_1,W,w}(D_2)^{(1)}\chi^{(p)}_{L,w}(\ell). \tag{5.6}$$

由唯一性，只需证明 (5.6) 满足命题 5.23 的所有性质，而这与 $\chi^{(p)}$ 的选择无关。□

注记 5.28。 正如 Colmez 所指出的，由定理 5.27 的比较结果和公式 (5.6)，我们得到一个不使用交理论的 N´eron–Tate 局部高度公式。这与定义 4.5 和 p-adic N´eron 函数在 p 处的定义（不包括 [BKM23]）

最近，Besser、M¨uller 和 Srinivasan [BMS22] 利用 p-adic Arakelov 理论，使用数域上的簇上的 p-adic 高度 [Bes05], ，特别是 p-adic 对数函数，构造了一种新的高度。其高度满足推广我们刚才关于 Colmez 的高度所观察到的性质：也就是说，在所有赋值点处，局部贡献均以解析方式定义。在曲线的雅可比簇这一特殊情形下，他们将其构造与 Colmez 的构造进行了比较。为此，他们

使用了 Besser 的一个结果 [Bes05，附录 B] 该结果将阿贝尔簇上线丛的对数函数理论与 Colmez 的格林函数联系起来。

注 5.29. 若 p 是有限的，$w \mid v \mid p$，且 $\chi^{(p)}$ 在 v 处非分歧（即 $\chi_v^{(p)}(\mathcal{O}_v^\times) = 0$），则$\langle D_1, D_2\rangle_{p,\, w,\, W}$ 仅依赖于 $G_{D_1,\, W,\, w}(D_2)^{(1)}$，而与 $G_{D_1,\, W,\, w}(D_2)^{(0)}$无关，因为引理 5.17 证明中的局部迹映射 $t_v^{(p)}$是平凡的。事实上，在这种情况下，局部高度也与 W_v的选取无关，并由公式 (5.6) 给出。请与注 4.6 (iii) 比较。

5.4. p-进 N´eron 函数、格林函数与 Coleman–Gross 高度。在本小节中，我们回到第 4 节的情形，其中 p 是 $\mathbb{Q}$ 的一个有限素数，且 C 是数域 K上的一条光滑亏格 2 曲线，由形式为 (2.5) 的方程给出，其系数属于 K的整数环。设 v 是 K的一个赋值，并考虑 C 到 K_v的基变换。根据注 5.8，我们应用 Colmez 在 §§5.2–5.3 中的结果：特别是，

- ι 是相对于基点 $P_0 = \infty$ 的嵌入。
- (Ω_1, Ω_2) 是定义 2.11 中 $H^0(J, \Omega^1)$ 的基，并在引理 2.12 (1) 中通过 J 的$\mathbb{P}^8$ 嵌入作了明确描述。不变导子的对偶基 (∂_1, ∂_2) 也在引理 2.12(2) 中作了描述。
- $x \in \Theta$ 当且仅当 $-x \in \Theta$，因此命题 5.9 之前定义的元素 $w \in J$ 就是 0。特别地，除子 Θ 的 v-进格林函数对称，当且仅当它是偶的。

根据命题 5.9，除子 Θ 的对称 v-进格林函数集合（模去加上常值函数）与 $H^1_{\mathrm{dR}}(C/K_v)$ 的子空间集合的子集 $\mathrm{Is}(C/K_v)$ 双射。根据命题 3.5，$\mathrm{Is}(C/K_v)$ 与 v-进 σ 函数的集合之间也存在双射。

设 $\chi\colon \mathbb{A}_K^\times/K^\times \to \mathbb{Q}_p$ 是一个连续幂等类特征。令 $T_v\colon \mathscr{L}(K_v^\times) \to \mathbb{Q}_p$ 为由 χ 诱导的 v 处的迹映射，如引理 5.17 所述。固定一个子空间 $W_v \in \mathrm{Is}(C/K_v)$。在本小节中，我们证明：

定理 5.30. 存在一个对称的 v-进格林函数 $G := G_{\Theta,\, W_v}$，其除子为 Θ，并同时满足以下性质：

(i) $\langle \iota^*[d(\partial_1 G)], \iota^*[d(\partial_2 G)]\rangle = W_v$; (ii) 设 L 是 K 的有限扩张，设 $w \mid v$ 是 L的一个赋值，设 $\lambda_w := \lambda_{w,\, W_v}$ 是 w 处关于 $W_v \in \mathrm{Is}(C/K_v)$ 和 χ 的局部 p-进 N´eron 函数，并设 $T_w := T_v \circ \mathrm{Tr}^{L_w/K_v}$。那么

$$n_w \lambda_w = -2T_w(G). \tag{5.7}$$

注 5.31. 如果 v 是一个使得 χ 非分歧的素数，该定理同样成立；在此情形下，(5.7) 式的左右两边都与 W_v 无关（参见定义 4.5、注记 4.6(iii) 和定理 5.27）。

阿黛尔格林函数高度的 p-进分量与（扩张的）Coleman–Gross p-进高度的比较，进而推出局部 N´eron 函数 $\lambda_{w,\, W_v}$ 与关于 χ的局部高度配对 $\langle\cdot,\cdot\rangle^N_{p,\, w,\, W_v}$ 之间的比较结果。

推论 5.32. 设 L 是 K的有限扩张，w 是 L在 K的赋值 v 之上的一个赋值。设$D_1 = \sum_{i=1}^r k_i P_i$ 和 $D_2 = \sum_{j=1}^s m_j Q_j$ 是支集包含于 $C(L_w)$ 上的不相交的次数为零的除子。选取点 $u_1, \ldots, u_r \in J(L_w)$，使得 $u_1, \ldots, u_r$处于一般位置，且对于所有 i, j，$\sum_i k_i C_{u_i} = D_1$和 $\iota(Q_j) - u_i \notin \mathrm{Supp}(\Theta)$。那么

$$\langle D_1, D_2\rangle^N_{p,w,W_v} = -\frac{n_w}{2}\sum_{i=1}^r\sum_{j=1}^s k_i m_j \lambda_{w,W_v}(\iota(Q_j) - u_i).$$

证明。由定理 5.30 和定理 5.27 即可得出。 □

例 5.33。沿用推论 5.32 中的记号，令 $R \in C(L_w)$，使得对所有 $i \in \{1,\dots,r\}$ 和所有 $j \in \{1,\dots,s\}$，均有 $R \neq P_i, P_i^-, Q_j$。那么我们可以选取 $u_i = \iota(P_i) + \iota(R)$。

注 5.34。该比较在 χ 非分歧的素数处同样成立。对于这些素数，结果不依赖于 W_v。

推论 5.35。在所有 χ 的分歧赋值点处作出相同的 $W_v \in \mathrm{Is}(C/K_v)$ 选择时，$J(\overline{\mathbb{Q}}) \times J(\overline{\mathbb{Q}})$ 上的 Coleman–Gross 全局高度配对等于由 h_p 所诱导的对称双线性配对。

注 5.36。假设 $p \geq 5$，C 在 χ 的每个分歧赋值点 $v \mid p$ 处都有良好普通约化，并且对于每个这样的 v，K_v 是 $\mathbb{Q}_p$ 的非分歧扩张。那么，在每个这样的 v 处，我们都可以取 W_v 为 Frobenius 的单位根特征子空间。根据命题 3.8，这对应于选择 Blakestad 的典范 v-进 σ 函数。在这些假设下，推论 5.35 因而将相对于 Frobenius 的单位根特征子空间的 Coleman–Gross p-进高度，与相对于典范 v-进 sigma 函数的 p-进高度联系起来。

推论 5.35 的证明。 我们在记号中省略子空间 W_v 的选取。设 L 是 K的任意有限扩张。由于 $C(L)$ 根据 Faltings 定理是有限的 [Fal83], 中只有有限多个点 $J(L$，它们要么具有 $[2P - 2\infty]$ 的形式，要么具有 $[P + W - 2\infty]$ 的形式，其中 W是一个 Weierstrass 点。因此，$J(L) \setminus J_{\mathrm{tors}}(L$中的任意点都有一个倍数 v 具有如下形式

$$v = [P_1 - P_2],$$

对于某些 非魏尔斯特拉斯点 P_1, P_2，使得 $P_1 \neq P_2^-$。因此，根据二次性，只需 to sho证明 $h_p(v) = \langle v, v\rangle^{CG}$ 对所有具有此形式的 v 均成立。

在此情形下，除子 $D_1 = P_1 - P_2$ 和 $D_2 = P_2^- - P_1^-$不相交，并满足 $[D_1] = [D_2] = v \notin \mathrm{Supp}(\Theta)$。通过将 L 替换为一个域扩张，我们可以假设D_1 和 D_2 的支集定义在 L上。设 w 是 L的一个非阿基米德赋值，并设 $v_1 = [P_2^- - P_1], v_2 = [P_2^- - P_2], v_3 = [P_1^- - P_1]$。由推论 5.32 和例 5.33，我们有

$$\langle D_1, D_2\rangle_{p,w}^N = -\frac{n_w}{2}\left(2\lambda_w(v_1) - \lambda_w(v_2) - \lambda_w(v_3)\right).$$

因此，根据命题 4.7 (iii),

$$\langle D_1, D_2\rangle_{p,w}^N = n_w\lambda_w(v) - \chi_{L,w}(-X_{11}(v_1) + X_{11}(v) - X_{12}(v_1)X_{22}(v) + X_{22}(v_1)X_{12}(v)).$$

对所有赋值点求和 w 即可得到结果。 □

还剩下证明定理 5.30。这将是一些中间结果的推论。在为 der to ke σ_v 只是 C/K_v的某个 v-adic σ 函数。

引理 5.37. 设 V 是 $J(K_v)$ 的一个有限指数子群，在其上 σ_v 收敛。则存在 $J(K_v)$ 的一个有限指数子群 V'，使得 $V' \subseteq V$，且 $\mathrm{Log}(\sigma_v)$ 在 V' 上的限制对 $D = \Theta$ 满足命题 5.5；也就是说，

$$\Delta^{[3]}(\mathrm{Log}(\sigma_v)) = \mathrm{Log}\, g_\Theta^{(4)},$$

其中 $g_\Theta^{(4)}$ 是 $f_\Theta^{(4)}$ 在 $V', 4$ 上的限制，$\mathrm{Log}(\sigma_v)$ 在 Θ 之外局部解析，并沿 Θ 有对数奇点。

证明. 若 σ_v 和 σ_v' 是两个不同的 σ 函数，则 $\mathrm{Log}(\sigma_v)$ –$\mathrm{Log}(\sigma_v')$ 是 J 的形式单对数中的二次多项式。因此，由于引理的陈述允许我们转到更小的 V'，只需考虑定理 3.3 中朴素的 v-进 σ 函数。将变量换为加法群后，后者就是复西格玛函数 σ 的泰勒展开，因此只需证明

(i) 函数 σ 满足

$$F_\Theta^{(4)}(z_0,z_1,z_2,z_3) = \frac{\sigma(z_0+z_1+z_2+z_3)\sigma(z_0+z_1)\sigma(z_0+z_2)\sigma(z_0+z_3)}{\sigma(z_0+z_1+z_2)\sigma(z_0+z_1+z_3)\sigma(z_0+z_2+z_3)\sigma(z_0)}$$

以周期 Λ^4 为周期；(ii)
$F_\Theta^{(4)}$ 的除子为 $\Delta^{[3]}\Theta$。
（i）由σ [Uch11b的平移性质及命题 2 得出。2], 而（ii）则由 [Uch11b的命题 2 得出。7]注意，在 $J^3 \times \{0\} \cup (J^2 \times \{0\} \times J) \cup (J \times \{0\} \times J^2)$ 上，我们有$F_\Theta^{(4)} = 1$。□

引理 5.37 告诉我们，局部而言，Log(σ_v) 是除子 Θ 的一个 v-进格林函数。接下来，我们要证明可以将 Log(σ_v) 延拓为 J 上的一个 v-进格林函数，而实现这一点的正确方法是使用一个涉及除法多项式的准二次性公式，就像我们定义局部 N´eron 函数时所做的那样。

为此，我们注意到，正如命题 5.5 所述， G_Θ （并且在加上关于 J 的单对数、次数至多为 2 的多项式后唯一）存在，这一点由 Colmez 借助 [Col98, 定´理` II.1.16] 证明。这个技术性结果的证明分为两步：首先在局部求解问题，然后利用 [Col98, 命题 II.1.23] 推广该解。

命题 5.38. 函数 Log(σ_v) 可延拓为唯一的格林函数 G_Θ ，其定义在 J 上的 Θ 。此外， G_Θ 是偶函数，并且

$$G_\Theta(nx) - n^2 G_\Theta(x) = \mathrm{Log}(\phi_n(x)), \tag{5.8}$$

其中， ϕ_n 是 (2.15) 的第 n 个除法多项式。

证明. 根据 [Col98, 命题 II.1.23], , Log(σ) 可延拓为定义在 J 上的唯一格林函数 G_Θ 。现在，Log(σ) 是偶函数，并且由于 $[-1]^*\Theta = \Theta$，我们有 Log $f_\Theta^{(4)}(-z_0, -z_1, -z_2, -z_3)$ 与 Log $f_\Theta^{(4)}(z_0, z_1, z_2, z_3)$ 相差一个常数。在 $z_3 = 0$ 处求值可得，该常数为 0。因此，[Col98, 命题 II.1.23] 中的公式取 $f = \mathrm{Log}(\sigma)$ 时给出一个偶函数，满足

$$\begin{aligned} &G_\Theta(z_0+z_1+z_2+z_3) - G_\Theta(z_0+z_1+z_2) - G_\Theta(z_0+z_2+z_3) - G_\Theta(z_0+z_1+z_3) \\ &+G_\Theta(z_0+z_1) + G_\Theta(z_0+z_2) + G_\Theta(z_0+z_3) - G_\Theta(z_0) = \Delta^{[3]} G_\Theta(z_0,z_1,z_2,z_3) = \mathrm{Log}(f_\Theta^{(4)}) \end{aligned} \tag{5.9}$$

现在利用这一点证明（5.8）。证明将类似于在 [Col98，命题 II.2 的证明中给出的椭圆曲线情形。20]。

B（5.9）的左右两侧在 $\{0\} \times J^3$ 处都有一个对数奇点。我们有 e

$$\begin{aligned} &G_\Theta(z_1+z_2+z_3) - G_\Theta(z_1+z_2) - G_\Theta(z_2+z_3) - G_\Theta(z_1+z_3) \\ &+G_\Theta(z_1) + G_\Theta(z_2) + G_\Theta(z_3) = \lim_{z_0 \to 0} (\mathrm{Log}(f_\Theta^{(4)})(z_0,z_1,z_2,z_3) + G_\Theta(z_0)) = \mathrm{Log}(h(z_1,z_2,z_3)), \end{aligned} \tag{5.10}$$

对于某个有理函数 h。再次令 $z_1 = z_2$，取极限 $z_3 \to -z_1$ ，并利用 G_Θ 为偶函数，我们得到

$$4G_\Theta(z_1) - G_\Theta(2z_1) = \mathrm{Log}(f_2^{-1}(z_1)) \tag{5.11}$$

对于 某个有理函数 f_2。回到（5.10），令 $z_1 =$ （$n-1$）x， $z_2 = z_3 = x$，我们得到 et
s

$$G_\Theta((n+1)x) - 2G_\Theta(nx) - G_\Theta(2x) + G_\Theta((n-1)x) + 2G_\Theta(x) = \mathrm{Log}(h((n-1)x, x, x)).$$

通过归纳，我们得出：对于所有 $n \geq 1$ ，存在一个有理函数 f_n ，使得

$$G_\Theta(nx) - n^2 G_\Theta(x) = \mathrm{Log}(f_n(x)).$$

比较对数奇点可知， f_n 等于 ϕ_n，相差一个常数因子；通过比较 0 附近的情形可知，该常数可以取为 1。□

剩下要证明的是，若 σ_v 通过命题 3.5 与 W_v 对应，则命题 5.38 中的格林函数 G_Θ也在命题 5.9 的双射下与 W_v 对应。

引理 5.39。设 σ_v 为满足以下微分方程的 σ 函数

$$D_iD_j(\mathrm{Log}(\sigma_v)) = -X_{ij} + c_{ij}, \qquad c_{12} = c_{21}.$$

设 G_Θ 为由命题 5.38 与 σ_v 相关联的格林函数。则 $\eta_{i,\ J} = d(\partial_i G_\Theta)$ 可明确表示为

$$\eta_{i,J} = (-X_{1i} + c_{1i})\Omega_1 + (-X_{i2} + c_{i2})\Omega_2.$$

证明。由引理 2.17， D_i 是 ∂_i 在形式群律上的限制。因此有

$$\partial_i\partial_j(\mathrm{Log}(\sigma_v(nx))) = n^2(-X_{ij}(nx) + c_{ij})$$
$$\partial_i\partial_j(\mathrm{Log}(\phi_n(x))) = -n^2X_{ij}(nx) + n^2X_{ij}(x)$$

（参见 [Uch11b，命题 4。10]），从而 $\partial_i\partial_j\ (G_\Theta) = -X_{ij} + c_{ij}$，如所需。 □

引理 5.40。采用引理 5.39 的记号，设 $[\eta_1] = \iota^*[\eta_{1,J}]$、$[\eta_2] = \iota^*[\eta_{2,J}]$。则我们可以选取

$$\eta_1 = (-3x^3 - 2b_1x^2 - b_2x + c_{12}x + c_{11})\frac{dx}{2y}, \qquad \eta_2 = (-x^2 + c_{22}x + c_{12})\frac{dx}{2y},$$

即 $\eta_1 = \eta_1^{(c)}$ 和 $\eta_2 = \eta_2^{(c)}$，其中 $\eta_1^{(c)}$ 和 $\eta_2^{(c)}$ 是式（3.3）的微分。

证明。令 $\pi_i\colon C^2 \to C$ 为投影映射，并令 $\varpi\colon C^2 \to J$ 为将 (P_1, P_2) 映射到 $\iota(P_1) + \iota(P_2)$ 的映射。根据 [Col98，Lemme II.2.1]，，给定 C 上的第二类微分 ω，存在唯一的 J 上的第二类微分 ω_J，使得 $\varpi^*\omega_J = \pi_1^*\omega + \pi_2^*\omega$。此外， $\iota^*\omega_J$ 的类在 $H^1_{\mathrm{dR}}(C)$ 中等于 ω 的类。由此可知， J 上的任意第二类微分 ξ 都等价于一个微分，其在 ϖ^* 下的像具有如下形式

$$\pi_1^*\omega + \pi_2^*\omega, \tag{5.12}$$

而且， $[\iota^*\xi] = [\omega]$。因此，为了计算 $[\eta_i]$的类，只需为 $\varpi^*[\eta_{i,J}]$ 寻找一个形如 (5.12) 的代表元。根据 [Bla18，第 66], 页，我们有

$$d(X_{222}) = (3X_{12}X_{22} - X_{11} + 2b_1X_{12})\Omega_1 + (3X_{22}^2 + 2X_{12} + 2b_1X_{22} + b_2)\Omega_2;$$

此外，根据定义， $\varpi^*\Omega_1 = \frac{dx_1}{2y_1} + \frac{dx_2}{2y_2}$, $\varpi^*\Omega_2 = x_1\frac{dx_1}{2y_1} + x_2\frac{dx_2}{2y_2}$and $\varpi^*X_{12} = -x_1x_2$, $\varpi^*X_{22} = x_1 + x_2$。计算可得

$$\begin{aligned}\varpi^*(\eta_{1,J} - d(X_{222})) &= \pi_1^*\eta_1 + \pi_2^*\eta_1\\ \varpi^*(\eta_{2,J}) &= \pi_1^*\eta_2 + \pi_2^*\eta_2.\end{aligned} \tag{5.13}$$

□

定理 5.30 的证明。这由引理 5.17、备注 5.19、命题 5.38 以及引理 5.39、5.40 得出。□

6. Implementation and examples

6.1. 形式群与 σ 函数。令 C, R 和 K 如 §2.3 中所述。回顾一下，函数$\frac{1}{X_{111}}$、 $\frac{X_{ij}}{X_{111}}$ 和 $\frac{X_{ijk}}{X_{111}}$ 可在形式群参数T_1 和 T_2下展开为 R 上的幂级数。Grant 通过说明如何利用 $\mathbb{P}^8$ 中定义 J 的方程，得到展开式中系数的递推公式，证明了这一点（参见 (2.21)、(2.22) 及其周围的讨论）。

我们实现了这一递归（结合注记 2.14）。因此，我们可以将 $\frac{1}{X_{111}}$、 $\frac{X_{ij}}{X_{111}}$ 和 $\frac{X_{ijk}}{X_{111}}$ 展开为 T_1 和 T_2 中的幂级数，并达到任意所需的精度。结合 J 由[Gra90的定理 3 提供的2], 加法公式，我们便可显式计算定理 2.15 的形式群律 $F(T, S)\ = (F_1, F_2(T, S)$，并达到任意所需的精度。

有了形式群律，求严格对数 $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ 和朴素西格玛函数，只需在幂级数环上求解微分方程组，算起来很容易。注意，(2.3) 对每个 $i \in \{1, 2\}$，都将导子 D_i 表示为关于 T_1 和 T_2 的导数以及形式群律的形式。

给定朴素西格玛函数和严格对数 $\mathcal{L}$，我们可以使用公式 (3.2) 计算任意其他 σ 函数的展开式。我们在附录 C 中列出了任意曲线 C 以及任意常数 c_{11}, c_{12}, c_{22} 时， $\sigma_v^{(c)}(T)$ 展开式的前几项（因此，特别地，其系数属于 $\mathbb{Q}[b_1, \ldots, b_5][c_{11}, c_{12}, c_{22}]$）。

6.2. 典范西格玛函数。现在假设 K 是数域在非阿基米德赋值 v处的完备化，且满足定理 3.6 的假设。我们希望计算 Blakestad 的典范 v-进制 σ 函数。根据命题 3.8，若 K 是 $\mathbb{Q}_p$的非分歧扩张，那么该函数就是对应于 Frobenius 的单位根特征子空间的 v-进制 σ 函数。虽然可以利用定理 3.6 (iii) 计算这个子空间，但计算效率非常低。

如果 K 同构于 $\mathbb{Q}_p$，且素数 p 大于 3，我们也可以使用 Kedlaya 算法 [Ked01] 和 [BB12，命题 6。1]，来计算 Frobenius 的单位根特征子空间。我们将说明如何在实践中进行计算，以及如何推导出 b 对应于单位根特征子空间的对称矩阵。

因此现在假设 C 定义在 $\mathbb{Q}_p$上，其中 p 是一个大于或等于 5 的素数，对 C 具有良约化，并对 J具有普通约化。考虑 C 在 $\mathbb{F}_p$上的基变换的雅可比簇的 Frobenius 特征多项式 $\chi(t)$，其形式为

$$\chi(t) = t^4 + a_1 t^3 + a_2 t^2 + p a_1 t + p^2 \in \mathbb{Z}[t].$$

上的雅可比簇 $\mathbb{F}_p$ 是普通的，当且仅当 a_2 与 p 互素（例如参见 [Yui78、§3]）。在这种情况下，因式分解

$$\chi(t) \equiv t^4 + a_1 t^3 + a_2 t^2 \bmod p = t^2(t^2 + a_1 t + a_2)$$

通过 Hensel 引理提升为 $\mathbb{Z}_p$上的因式分解。设 $\chi_{W^{(b)}}(t) = t^2 + \hat{a}_1 t + \hat{a}_2 \in \mathbb{Z}_p[t]$ 是在这种 $\chi(t)$的因式分解中 $t^2 + a_1 t + a_2$ 模 p 的提升。
设 $\mathcal{C}/\mathbb{Z}_p$ 是定义在 $\mathbb{Z}_p$ 上的超椭圆曲线，其无穷远截面的补集是 $\mathbb{A}^2_{\mathbb{Z}_p}$ 中的闭子概形，由我们通常的 C仿射方程描述。回顾我们有

$$H^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{C}/\mathbb{Z}_p) \hookrightarrow H^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{C}/\mathbb{Z}_p) \otimes \mathbb{Q}_p \cong H^1_{\mathrm{dR}}(C/\mathbb{Q}_p),$$

并且这诱导出 $\mathbb{Q}_p$上的线性 Frobenius 自同态 $H^1_{\mathrm{dR}}(C/\mathbb{Q}_p)$。此自同态的特征多项式等于 $\chi(t)$（例如参见 [Edi07，定理 5.3。2]结合下文的注 6.1）。Frobenius 的单位根特征子空间是一个 2 维的 Frobenius 不变 $\mathbb{Q}_p$向量子空间 $W^{(b)}$，它属于 $H^1_{\mathrm{dR}}(C/\mathbb{Q}_p$，且 Frobenius 在其上的作用的特征多项式为$\chi_{W^{(b)}}(t)$。

注 6.1。严格来说，Kedlaya 算法计算的是 Frobenius 在曲线 $H^1_{\mathrm{MW}}(\tilde{C}'/\mathbb{F}_p, \mathbb{Q}_p)$ 的 Monsky–Washnitzer 上同调 $\tilde{C}'$ 上的作用；该曲线由C 模 p 约化后再去掉 Weierstrass 点得到。由于 $H^1_{\mathrm{MW}}(\tilde{C}'/\mathbb{F}_p, \mathbb{Q}_p)$ 的奇部与 $H^1_{\mathrm{dR}}(C/\mathbb{Q}_p)$ 同构，且此同构与 $H^1_{\mathrm{dR}}(C/\mathbb{Q}_p)$ 上在§3.2 中引入的 Frobenius 作用相容，因此我们将忽略这一细微之处。详情请参见 [vdB08，定理 2。6]。

为了计算定理 3.6 中的微分 $\eta_1^{(b)}$ 和 $\eta_2^{(b)}$，我们直接处理 $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{C}/\mathbb{Z}_p)$ 及其 $\mathbb{Z}_p$-线性 Frobenius 作用。正如我们在命题 3.8 的证明中所看到的，在我们的既定假设下，这个 $\mathbb{Z}_p$-模同构于 $H^0(\mathcal{C}, \Omega^1_{\mathcal{C}/\mathbb{Z}_p}(4\infty))^-$，后者由以下元素自由生成

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{x^i dx}{2y} : i = 0, \ldots, 3 \right\}. \tag{6.1}$$

从现在起，我们将 $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{C}/\mathbb{Z}_p)$ 视为 $\mathbb{Z}_p$-张成的 $\mathcal{B}$。相对于 $\mathcal{B}$，Frobenius 作用记为ϕ^*，其在 $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{C}/\mathbb{Z}_p)$ 上的作用可使用 Kedlaya 算法[Ked01]计算。
$\mathbb{Q}_p$-向量空间 $W^{(b)}$是通过与 $\mathbb{Q}_p$ 张量化 $\mathbb{Z}_p$-子模 $W^{(b)}{}_0 \subset H^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{C}/\mathbb{Z}_p)$ 得到的，该子模定义为展开映射 P-map $\beta_P\colon H^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{C}/\mathbb{Z}_p) \to H^1_{\mathrm{dR}}(\hat{\mathcal{C}}_P/\mathbb{Z}_p)$ 的核，其中 $P \in$任意

$\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p)$。微分 $\eta_1^{(b)}$，$\eta_2^{(b)}$ 属于 $W_0^{(b)}$，并且事实上，它们作为一个 $\mathbb{Z}_p$-模自由生成该模。此外，$H^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{C}/\mathbb{Z}_p)$ 同构于 $W_{(b)\,0} \oplus \langle \frac{dx}{2y}, \frac{xdx}{2y} \rangle_{\mathbb{Z}_p}$。现在，

$$\phi^*\left(\frac{dx}{2y}\right), \phi^*\left(\frac{xdx}{2y}\right) \in pH^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{C}/\mathbb{Z}_p); \tag{6.2}$$

例如，参见 [Har12，引理 3.4] 的证明。此外，由于 Frobenius 在 $W_0^{(b)}$ 的任意一组基上的矩阵的行列式等于 $\tilde{a}_2 \in \mathbb{Z}_p^\times$，我们有 $\phi^*(W_{(b)\,0}) = W_{(b)\,0}$，根据 [Lan02，XIII，第 3.1 和 4.16] 条命题。由此可推出以下算法，用于在给定精度下计算 $W_0^{(b)}$ 的一组基。请注意，[BB12] 以更一般的形式陈述了本质相同的结果；不过，那里似乎没有区分 $\mathbb{Q}_p$-向量空间 $W^{(b)}$ 与 $\mathbb{Z}_p$-模 $W_{(b)\,0}$。

命题 6.2 ([**BB12**，命题 6.1])。设 $M \in M_4(\mathbb{Z}_p)$ 为相对于 $\mathcal{B}$的 Frobenius 矩阵，并设 n 为一个正整数。存在一组 $W_0^{(b)}$ 基，其相对于 $\mathcal{B}$ 的系数模 p^n 约化后等于 M^n的第三列和第四列。

利用推论 6.2，我们可以计算模 p^n 的 $W_0^{(b)}$ 的一组基，由此可以推导出模 p^n 的 $\eta_1^{(b)}$,$\eta_2^{(b)}$。

注 6.3。若 $p = 3$，集合 $\mathcal{B}$ 不是 $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{C}/\mathbb{Z}_p)$ 的一组基（参见 [vdB08，§5]）。不过，只要稍加注意，应该就能以类似的方式计算单位根特征子空间，并将其与 Blakestad 的典范西格玛函数联系起来（参见注 3.7）。

6.3. 除法多项式。在前两个小节中，我们讨论了如何计算各种 sigma 函数的展开式。回想一下，我们曾使用除法多项式将 sigma 函数延拓到其收敛域之外。

事实上，如果我们要使用定义 4.2 或 4.5 计算局部 N´eron 函数的值，则无需计算除法多项式，只需计算它在所关注点处的值即可。`Magma` [BCP97]提供了计算除法多项式取值的代码，随 [dJM14]一并提供。我们将其转换为 `SageMath`，并做了一些细微修改（参见注 6.4）。

为解决此问题，我们可以更一般地假设 C 定义在任意特征为 0 的域上。设 P 是雅可比簇上一个不属于 theta 除子的点。策略如下：

(1) 对于 $1 \le n \le 5$，Uchida 将 ϕ_n 计算为变量 $\wp_{ij}$ 和 $\wp_{ijk}$ 的多项式，其系数属于 $\mathbb{Z}[b_1, \dots, b_5]$。在 $\wp_{ij}(P)$ $\wp_{ijk}(P)$ 处求值，得到 $1 \le n \le 5$ 的 $\phi_n(P)$。(2) 使用递推关系 [Kan10，定理 9（已更正）]，计算 $6 \le n \le 8$ 的 $\phi_n(P)$。由于计算 $\phi_6(P)$ 和 $\phi_8(P)$ 需要除以 $\phi_2(P)$，我们必须假设 $2P \notin \mathrm{Supp}(\Theta)$。(3) 使用 [Uch11b，例 6。6]，递归计算 $n \ge 8$ 的 $\phi_n(P)$。这需要除以，因此只有当其非零时才能应用这些公式。对于 n 偶的情形，我们还需要ϕ_2 在 P 处不消失。

$$\phi_5(P) - \phi_4(P)\phi_2(P)^3 + \phi_3(P)^3,$$

对于某些 n 的取值，如果 ϕ_2 或 $\phi_5 - \phi_4\phi_2^3 + \phi_3^3$ 在我们所关注的点 P 处为零，则 de Jong–M¨uller 的代码无法直接应用。如果我们只关心 h_p 处全局高度 P 的值，可以通过计算非零整数 m 的 $h_p(mP)$，并利用二次性推导出 $h_p(P)$ 的值来解决这一问题。否则，我们可以对趋近于 P 的点取第 (2) 步和第 (3) 步中的递推关系的极限，从而计算 $\phi_n(P)$。

注 6.4. 步骤 (3) 的递归公式将 ϕ_{2m} 和 ϕ_{2m+1} 表示为 ϕ_k 关于 $k \in \{2, 3, 4, 5\} \cup \{m-4, \dots, m+4\}$的形式。特别是，要计算 ϕ_n，不必计算 ϕ_k 所有 $k \le n-1$；只需计算 ϕ_k 在某些区间内的 k 即可。我们实现了这一改进。Harvey 在 SageMath 中实现 [Har08]on`SageMath`上的 p椭圆曲线上的 p 进高度时也使用了同样的技巧。

6.4. p进 N´eron 函数。为了计算定义 4.2 和 4.5 中的 p进 N´eron 函数，还需讨论如何计算合适的整数 m，以及如何明确处理数域 K 上的幂等类特征。

后一个问题在 [BBBM21中有详细讨论，§2。1]本文中，我们将实现限制在 $K=\mathbb{Q}$的情形；在这种情形下， $\mathbb{Q}_p$连续幂等类特征的 - 维向量空间是一维的，并由圆分特征生成（ χ^{cyc} 参见[BBBM21，例 2。7]）。具体而言，我们有

$$\chi_p^{\mathrm{cyc}}(x)=\log_p(x) \qquad \text{for all } x\in\mathbb{Q}_p^\times,$$

其中 $\log_p$ 是 p-进对数在 p处取零的分支，并且对于 $q\neq p$,

$$\chi_q^{\mathrm{cyc}}(x)=\log_p|x|_q, \qquad \text{for all } x\in\mathbb{Q}_q^\times.$$

我们主要关注的 p-进 sigma 函数是朴素函数和典范函数（若其存在）。若 p 为奇数，则这两个函数都在整个 $J_1(\mathbb{Q}_p)$ 上收敛。事实上，典范西格玛函数具有整系数，而朴素西格玛函数的收敛性由定理 3.3（ii）给出。

因此，给定 $P\in J(\mathbb{Q}_p)$，我们需要计算其在 $J(\mathbb{Q}_p)/J_1(\mathbb{Q}_p)$ 中的阶（或其倍数）。若 p ˜是良约化素数，则这就是 P 在有限群 $J(\mathbb{F}_p)$ 中的阶。若 p 是坏约化的奇素数，记 $J_0(\mathbb{Q}_p)$ 为 $J(\mathbb{Q}_p)$ 的子群，它由˜点组成，这些点在 J 的光滑部分中约化到原点连通分支。我们可以应用 [BS10，注 5.12，图 1] 来确定 $J_1(\mathbb{Q}_p)$ 在 $J_0(\mathbb{Q}_p)$ 中的指数，并利用该文献第 294–295 页的讨论，确定 P 的一个倍数属于 $J_0(\mathbb{Q}_p)$。由于很容易检验一个点是否属于 $J_1(\mathbb{Q}_p)$，我们也可以依次计算$[J_0(\mathbb{Q}_p):J_1(\mathbb{Q}_p)]P$的倍数，直到得到属于 $J_1(\mathbb{Q}_p)$ 的点。当 $p=2$时，也可以采用试错策略。

6.5. 示例：一个大于 10^6的素数。 现在考虑定义在 $\mathbb{Q}$ 上的亏格 2 曲线，其 LMFDB 标签为 160000.c.800000.1 [LMF23]

$$C\colon y^2=x^5-1.$$

其雅可比簇 J 在几何上是单的，并且具有由 $\mathbb{Q}(\zeta_5)$ 给出的复乘，其中 ζ_5 是一个本原五次单位根。我们将看到，所有满足 $p\equiv 1$模 10 的情形都具有良好普通约化，并且对应于 p 的单位根特征子空间的常数 c_{ij} 全都等于零。特别地，它们都是代数数，且与 p无关：可与注 3.11 对照。这使我们能够在大素数处计算典范 p-进 Néron 函数，而无需显式使用命题 6.2。

引理 6.5 ([**Yui78**]). 设 p是一个同余于 1 模 10的素数。则 C 在 p处有良约化，且 J 在 p处有良好普通约化。

证明。 所给出的 C 方程仅在 2 和 5 处有坏约化。要证明其为普通约化，只需说明 C 模 p 的 Cartier–Manin 矩阵的行列式非零：参见 [Yui78，例 3。3]。 □

L引理 6.6。设 p 是一个模 10 同余于 1 的素数。那么微分的类 *ls*

$$\eta_1^{(0)}=-3x^3\frac{dx}{2y}, \qquad \eta_2^{(0)}=-x^2\frac{dx}{2y}$$

张成 Frobenius 的单位根特征子空间。特别地，典范西格玛函数等于朴素西格玛函数。

证明。首先注意， p在 $\mathbb{Q}(\zeta_5)$中完全分裂。曲线 C 的 $\mathbb{Q}(\zeta_5)$-自同构 $\psi\colon(x,y)\mapsto(\zeta_5x,y)$˜模 $\mathbb{F}_p$约化为一个自同构 ϕ，且它与 p次幂弗罗贝尼乌斯自同态 π˜ ˜交换。因此， $\pi\circ\psi$ 和 $\psi\circ\pi$ 的提升在

微分 [vdP86，定理 (2.4.4) (iii)] 上诱导同伦映射，因而在上同调中诱导相同的映射。换言之，对于每个第二类微分 ω，

$$\psi^*(\phi^*([\omega])) = \phi^*(\psi^*([\omega])). \tag{6.3}$$

对于每个 $i \in \{0,1,2,3\}$，微分 $\omega_i = x^i \frac{dx}{2y}$ 是 ψ^* 的特征向量，其特征值为 ζ_5^{i+1}。因此，由 (6.3) 可知，关于 $\mathcal{B}$ 的 Frobenius 矩阵是对角矩阵。结论随即由 (6.2) 得出。□

这些引理适用于素数 $p = 10^6 + 81$，我们将利用它们计算点 p 处的典范 p-进 N´eron 函数

$$P = [(-1-i,-2-i) - (-1+i,2-i)] \in J_\Theta(\mathbb{Q}).$$

典范 p-进 σ 函数的前几项可由附录 C 的展开式通过取 $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = c_{11} = c_{12} = c_{22} = 0$、$b_5 = -1$ 得到。因此，我们在此省略该展开式（尽管下面计算所需的精度高于附录中给出的 T-进精度）。

令 m 为一个正整数，使得 $mP \in J_1(\mathbb{Q}_p)\backslash\mathrm{Supp}(\Theta)$。由于 m 很大，计算mP的开销很高。不过，如果将典范的 p-进 σ 函数计算到 $O(T_1,T_2)^n$，我们只能确定 $\sigma_p(T(mP))$ 模 p^n，因此与将 $T_i(mP)$ 计算为精度达到 $O(p^n)$ 的 p- 进数相比，将其计算为有理数并无优势。换言之，我们可以在 p- 进数域上对雅可比簇执行乘以 m 运算，并达到适当的 p-进精度。

$J(\mathbb{F}_p)$的阶为 $m' = 1001600512000$，而对 $m'P$ 的计算表明我们可以取$m = m'$。

类似地，只需将第 m 个除法多项式在 P 处的取值计算到有限的 p-进精度；我们按照 §6.3 中概述的方法进行计算。结合上述中间计算，我们得到素数 p处、点 P关于幂等类特征 χ^{cyc} 及 Frobenius 的单位根特征子空间的 p-进 N´eron 函数：

$$\begin{aligned}\lambda_p(P) = {} & 790065\cdot p + 875980\cdot p^2 + 899921\cdot p^3 + 943161\cdot p^4 + 701712\cdot p^5 \\ & + 507099\cdot p^6 + 399164\cdot p^7 + 725683\cdot p^8 + 423209\cdot p^9 + 174881\cdot p^{10} \\ & + 96387\cdot p^{11} + 973189\cdot p^{12} + 88349\cdot p^{13} + 970515\cdot p^{14} + 117600\cdot p^{15} \\ & + 519019\cdot p^{16} + 639751\cdot p^{17} + 971144\cdot p^{18} + 996211\cdot p^{19} + O(p^{20}).\end{aligned}$$

计算是在一台 32 核、主频为 2.3GHz、配备 256GB RAM 的 AMD Opteron 6276 处理器的单个核心上运行的。所有计算均在 `SageMath` [The22]，总共耗时约 14.3 秒。其中，计算 σ 函数的展开式（截至 $O(T_1,T_2)^{21}$）耗时 12.6 秒。我们将其计算为系数属于 $\mathbb{Q}$的幂级数，而不是对系数进行 p-进逼近。

为了计算全局 p-进高度 $h_p(P)$，我们还需要计算 P 处 p-进 N´eron 函数在素数 $q \neq p$处的值。首先，由于

$$X_{11}(P) = 5, \qquad X_{12}(P) = -2, \qquad X_{22}(P) = -2,$$

并且 C 在除 2 和 5 以外的所有素数处都有良约化，根据注 4.6 (ii)，唯一可能出现非平凡贡献的地方是 $q \in \{2,5\}$。

点 $2P$ 模 2 约化后为单位元，且不位于 theta 除子上。因此，根据定义 4.5，

$$\lambda_2(P) = -\frac{1}{2}\log_p\left|\frac{T_1(2P)}{\phi_2(P)}\right|_2 = -\frac{1}{2}\log_p\left|\frac{2+O(2^7)}{-30}\right|_2 = 0.$$

就 $q=5$ 而言，根据[BS10，注 5.12，图 1], 群 $J_0(\mathbb{Q}_5)/J_1(\mathbb{Q}_5)$的阶为 25。显式计算表明，$25P$ 不属于 $J_1(\mathbb{Q}_5)$，但 $50P$ 属于该群。因此，

$$\lambda_5(P) = -\frac{2}{50^2}\log_p\left|\frac{T_1(50P)}{\phi_{50}(P)}\right|_5 = -\frac{1}{2\cdot 625}\log_p\left|\frac{4\cdot 5^2+O(5^3)}{4\cdot 5^{627}+O(5^{628})}\right|_5 = -\frac{1}{2}\log_p(5).$$

总之， P 的整体规范 p-进高度为

$$\begin{aligned} h_p(P) &= \lambda_p(P) + \lambda_5(P) \\ &= 227482 \cdot p + 997009 \cdot p^2 + 96340 \cdot p^3 + 795588 \cdot p^4 + 602398 \cdot p^5 \\ &+ 562446 \cdot p^6 + 378071 \cdot p^7 + 977705 \cdot p^8 + 744905 \cdot p^9 + 778414 \cdot p^{10} \\ &+ 506461 \cdot p^{11} + 834642 \cdot p^{12} + 129041 \cdot p^{13} + 687989 \cdot p^{14} + 134678 \cdot p^{15} \\ &+ 452034 \cdot p^{16} + 429426 \cdot p^{17} + 552523 \cdot p^{18} + 572577 \cdot p^{19} + O(p^{20}). \end{aligned}$$

6.6. 示例：通过 N´eron 函数计算 Coleman–Gross 局部高度。设

$$C\colon y^2 = x^3(x-1)^2 + 1,$$

令 $P_1 = (1,-1)$， $P_2 = (0,1) \in X(\mathbb{Q})$，并令 $D_1 = P_1 - P_2$, $D_2 = P_2^- - P_1^- \in \mathrm{Div}^0(C)$。素数$p = 11$ 是 C 的良约化素数（因此也是其雅可比簇 J 的良约化素数），且 J具有普通约化。令 $W := W^{(b)} \subset H^1_{\mathrm{dR}}(C/\mathbb{Q}_p)$ 为 Frobenius 的单位根特征子空间。

在本小节中，我们对除子对 D_1, D_2 进行数值验证，确认推论 5.32 和 5.35 中的等式，具体如下。Coleman–Gross 局部 p-进高度配对 $\langle D_1, D_2\rangle_{p,p,W}^N$以及 $\langle D_1, D_2\rangle_{p,q}^N$ $(q \neq p)$ 是根据其定义直接计算得到的，见 [BBM16, §7.2。1] (同上文献中的记法与我们的记法不同）。我们检验发现，若取满足推论 5.32 假设的 p-进 N´eron 函数值的线性组合，也会得到相同结果。

其次，除子 D_1 和 D_2 线性等价，因此根据推论 5.35，Coleman–Gross 局部 p-进高度配对在 D_1、D_2 上的和等于规范的全局 p-进高度$h_p([D_1])$。我们通过（几乎）直接根据定义计算 $h_p([D_1])$ 来对这一点进行数值验证。

为简化记号，从现在起我们将在下标中省略单位根子空间 W。考虑 $J(\mathbb{Q})$ 中的以下点：

$$u_1 = \iota(P_1) = [P_1 - \infty], \qquad u_2 = \iota(P_2) = [P_2 - \infty],$$
$$v_1 = [P_2^- - P_1], \qquad v_2 = [P_2^- - P_2], \qquad v_3 = [P_1^- - P_1].$$

根据例 5.33，对于任意有理素数 $w = q$，点 u_1、u_2 满足推论 5.32 的假设。在这一选择下，该推论中的等式转化为

$$\langle D_1, D_2\rangle_{p,q}^N = -\frac{1}{2}(2\lambda_q(v_1) - \lambda_q(v_2) - \lambda_q(v_3)). \tag{6.4}$$

首先考虑 $q = p$ 的情形。作为计算式 (6.4) 中 λ_p 的值的准备步骤，我们需要确定与 Frobenius 的单位根特征子空间选择相对应的对称矩阵 b 。在此情形下，我们使用 §6.2 中所述的 Kedlaya 算法。得到

$$\begin{aligned} b_{11} &= 6 + 6 \cdot 11 + 3 \cdot 11^2 + 6 \cdot 11^4 + 2 \cdot 11^5 + 10 \cdot 11^6 + 11^7 + 6 \cdot 11^8 + 9 \cdot 11^9 + O(11^{10}), \\ b_{12} &= 3 + 10 \cdot 11 + 10 \cdot 11^2 + 11^4 + 11^5 + 5 \cdot 11^6 + 11^7 + 3 \cdot 11^8 + 4 \cdot 11^9 + O(11^{10}), \\ b_{22} &= 4 + 3 \cdot 11 + 6 \cdot 11^2 + 6 \cdot 11^3 + 9 \cdot 11^4 + 10 \cdot 11^5 + 4 \cdot 11^6 + 5 \cdot 11^7 + 2 \cdot 11^8 + 2 \cdot 11^9 + O(11^{10}). \end{aligned}$$

将附录 C 的展开式分别取 $b_1 = -2, b_2 = 1, b_3 = b_4 = 0, b_5 = 1, c_{ij} = b_{ij}$ for all $1 \le i \le j \le 2$，即可推导出典范 p-进 σ 函数的前几项。分别取 $m = 116$、29 和 58，并运用定义 4.2 和 §6.1–6.4 中的显式技巧，我们计算得：

$$\begin{aligned} \lambda_p(v_1) &= 9 \cdot 11 + 8 \cdot 11^2 + 8 \cdot 11^3 + 4 \cdot 11^4 + 5 \cdot 11^5 + 10 \cdot 11^6 + 8 \cdot 11^7 + 9 \cdot 11^8 + O(11^9), \\ \lambda_p(v_2) &= 2 \cdot 11^3 + 6 \cdot 11^4 + 10 \cdot 11^5 + 10 \cdot 11^6 + 9 \cdot 11^7 + 10 \cdot 11^8 + O(11^9), \\ \lambda_p(v_3) &= 2 \cdot 11 + 4 \cdot 11^2 + 2 \cdot 11^3 + 6 \cdot 11^4 + 2 \cdot 11^5 + 5 \cdot 11^6 + 3 \cdot 11^7 + 11^8 + O(11^9). \end{aligned}$$

我们推导出

$$\langle D_1, D_2\rangle_{p,p}^N = 3 \cdot 11 + 4 \cdot 11^2 + 4 \cdot 11^3 + 11^4 + 11^5 + 3 \cdot 11^6 + 3 \cdot 11^7 + 7 \cdot 11^8 + O(11^9),$$

这与 [BBM16] 的计算结果一致，精确到 $O(11^7)$，也就是说，精确到 同上

接下来，我们考虑素数 $q = 2$。根据定义 4.5，我们有

$$\lambda_2(v_1) = -\frac{2}{12^2}\log_p\left|\frac{T_1(12v_1)}{\phi_{12}(v_1)}\right|_2 = -\frac{7}{6}\log_p(2)$$
$$\lambda_2(v_2) = -\frac{2}{3^2}\log_p\left|\frac{T_1(3v_2)}{\phi_3(v_2)}\right|_2 = -\frac{2}{3}\log_p(2)$$
$$\lambda_2(v_3) = -\frac{2}{2^2}\log_p\left|\frac{T_1(2v_3)}{\phi_2(v_3)}\right|_2 = 0,$$

由此我们得出

$$\langle D_1, D_2\rangle^N_{p,q} = \frac{5}{6}\log_p(2).$$

Fin总之，对于所有 $q \notin \{2, 11\}$，我们有 $\lambda_q(v_1) = \lambda_q(v_2) = \lambda_q(v_3) = 0$，因此 $\langle D_1,D_2\rangle^N_{p,\ q} = 0$，whi这就完成了对推论 5.32 的数值验证。
至于推论 5.35 的验证，由于 $4[D_1] = -v_2$，
$h_p([D_1]) = \dfrac{h_p(v_2}{16} = \dfrac{1}{16}$) $(\lambda_p(v_2)+\lambda_2(v_2)) = 8\cdot 11+2\cdot 11^4+6\cdot 11^5+6\cdot 11^6+5\cdot 11^7+9\cdot 11^8+O(11^9)$，
等于 $\sum_q \langle D_1$、$D_2\rangle^N_{p,\ q}$。

6.7. 第一类、第二类和第三类微分的积分。现在令 p 为任意有理素数（允许 $p = 2$ ），并令 C 定义在 $\mathbb{Q}_p$ 上，且如通常一样，由一个系数在 $\mathbb{Z}_p$中的首一五次模型给出。我们不对约化作任何假设。根据 §6.1，我们可以计算严格形式群对数 $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ 的展开。根据命题 2.7，该展开在 $J_1(\mathbb{Q}_p)$ 上收敛。令 $u \in J(\mathbb{Q}_p)$。§6.4 中已说明如何确定一个正整数 m，使得 $mu \in J_1(\mathbb{Q}_p)$。于是，对于每个 $i \in \{1, 2\}$，Ω_i 的 Colmez 积分满足

$$\int_0^u \Omega_i = \frac{1}{m}\mathcal{L}_i(mu).$$

设 $\omega_i = x^{i-1}\frac{dx}{2y}$和 $P_1, P_2 \in C(\mathbb{Q}_p)$。由定义 2.11 和定理 5.2 (v)，可得

$$\int_{P_2}^{P_1} \omega_i = \int_0^{[P_1-P_2]} \Omega_i.$$

这样，我们无需对约化作任何假设，就能计算 C 上全纯微分的积分。

注 6.7. 对于由 $y^2 = f(x)$ 描述的 $f(x)$ 为六次（或五次）多项式的亏格 2 曲线，可以使用 Flynn 更一般的形式群描述[Fly90，Fly93] 来计算全纯微分的积分。例如，参见 [Fly97] 中关于 Chabauty 方法的应用。

在 J 上的非全纯闭第二类微分并非平移不变，但它是半不变的 [Bar57，定理 2。8]。这意味着它与其在任意 $u \in J$下平移所得的拉回线性等价，因此原则上，我们可以使用形式群工具来计算此类微分的 Colmez 积分。例如，对于 $i \in \{1, 2\}$，考虑微分（引理 5.39）

$$\eta^{(0)}_{i,J} = -X_{1i}\Omega_1 - X_{i2}\Omega_2.$$

利用定理 5.2 (v) 和 [Uch11b，命题 4.10], 我们看到，$\eta^{(0)}_{i\ J}$,的整性必须满足

$$\int_{mv}^{mu} \eta^{(0)}_{i,J} = m\int_v^u \eta^{(0)}_{i,J} + \frac{1}{m}\frac{D_i(\phi_m)}{\phi_m}(u) - \frac{1}{m}\frac{D_i(\phi_m)}{\phi_m}(v) \qquad (u, v \in J(\mathbb{Q}_p)).$$

通过适当地选择 m，左侧的整性计算可以归结为在形式群中（即在幂级数环上）求解一个微分方程组；请注意，这实际上是计算 p-adic σ 函数的中间步骤。

利用 (5.13) 拉回到 C，可得到 $\eta_i^{(0)}$ 的整性公式。§6.3 的实现并不能立即使我们能够计算 $D_i(\phi_m)$（因为我们计算的不是除法多项式本身，而只是它们的值）；不过，可以根据 Kanayama[Kan10、定理 9（已更正）] 以及 Uchida [Uch11b、例 6.6] （参见 §6.3）中的递推关系，推导出 $D_i(\phi_m)(u)$ 关于 $\phi_k(u)$ $(k \le m)$、$D_i(\phi_k)(u)$ $(k < m)$ 以及 ϕ_k 对 $k \le 5$ 的高阶导数的表达式。

最后，推论 5.32 给出了利用 p-进 N´eron 函数计算C 上的第三类微分的公式；我们在 §6.6 中对该公式进行了数值检验。
总而言之，我们的实现虽然主要用于计算 p-进 N´eron 函数和高度，但也可加以调整，用于计算 C上的第一类、第二类和第三类微分的积分。因此，在特定情形（亏格 2 的奇次数超椭圆曲线）下，它为良约化时由 Balakrishnan– Bradshaw–Kedlaya 和 Balakrishnan–Besser 提出的 Coleman积分算法[BBK10、BB12] 以及坏约化时由 Katz–Kaya 和 Kaya 提出的 Colmez–Vologodsky积分算法 [KK22、Kay22]提供了一种替代方案。

7. An application: quadratic Chabauty for bihyperelliptic curves

本节的目标有两个方面。Balakrishnan–Besser–M¨uller [BBM16，BBM17] 阐述了一种 Chabauty型方法，用于计算 $\mathbb{Q}$上亏格等于雅可比簇的 Mordell–Weil秩的奇数次超椭圆曲线的整点。该方法将 Coleman–Gross 局部高度配对扩展到支集不相交的除子，并利用全局高度的二次性。这项技术称为二次 Chabauty （针对整点）。本节的中间目标是根据我们的框架，重新表述亏格 2 情形下的这一方法。事实上，我们不只是转换表述，而是用 N [BBM16] eron 函数的术语重新证明其结果´（见下文注 7.5）。为此，我们关键地使用了 Stoll 的结果 [Sto02] 和 M¨uller–Stoll [MS16]。

我们的主要目标是描述一种二次 Chabauty 型方法，用于确定某些亏格 4 双超椭圆曲线上的有理点 X。特别地，我们假设 X 具有两个亏格 2 商曲线，且每个商曲线都满足用于求整点的二次 Chabauty 方法的假设。随后，我们描述一个定义在 p上的 $X(\mathbb{Q}_p$-进局部解析函数；将其限制在 $X(\mathbb{Q}$上时，该函数取值于 $\mathbb{Q}_p$的一个有限显式子集中。这是 Balakrishnan–Dogra 关于亏格 2 双椭圆曲线的二次 Chabauty 方法[BD18]的亏格 4 类比；另见 [Bia20，BP22]。
设 C 和 K 如第 3 节和第 4 节所述：也就是说，K 是一个数域，而 C 是定义在 K上的曲线，由形如 $y^2 = f(x)$的方程给出，其中 $f(x)$是一个次数为 5 的首一多项式，其系数属于 K 的整数环，且没有重根。固定一个素数 p 以及一个非平凡的连续 $\mathbb{Q}_p$-值幂等类特征 χ，其定义在 K上。给定 K的一个非阿基米德赋值 v，令 λ_v为 v 处的局部 p-进 N´eron 函数（若 χ 在 v处分歧，则需选取 $H^1_{\mathrm{dR}}(C/K_v)$的一个子空间）。
若 χ 在 v 处非分歧，我们已知（引理 4.3）存在 $J(K_v)$ 的有限指数子群 H_v，使得对于所有 $u \in H_v \setminus \mathrm{Supp}(\Theta)$，局部 N´eron 函数 λ_v 仅取决于 $X_{ij}(u)$ 的 v-进赋值，其中 $i,\ j \in \{1,2\}$。更一般地，我们有如下结论。对于 $u \in J_\Theta(K_v)$，令

$$\lambda_v^{\mathrm{naive}}(u) = -\frac{1}{n_v}\chi_v(\max_{i,j}\{|X_{ij}(u)|_v, 1\})$$

并令 $\mu_v\colon\ J(K_v) \to \mathbb{Q}$ 为 [MS16，定义 31]。那么 p-进 N´eron 函数在 v 处由 $\lambda_v^{\mathrm{naive}}$加上一个修正项得到：

$$\lambda_v(u) = \lambda_v^{\mathrm{naive}}(u) + \frac{1}{n_v}\mu_v(u)\chi_v(\pi_v),$$

其中 π_v 是 K_v 中的一致化参数。记 k_v 为 K_v 的剩余域，并令 Φ 为 J 在 $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_v)$ 上的 N´eron 模型的分支群，其中 $\mathcal{O}_v$ 是 K_v 的整数环。

定理 7.1（[**MS16**，定理 3.10、11.3、7.4，命题 12.3，引理 12。5]）。

(i) The set $H_v = \{u \in J(K_v) : \mu_v(u) = 0\}$ is a subgroup of finite index of $J(K_v)$ containing $J_1(K_v)$.

(ii) 函数 μ_v 经过 $J(K_v)/H_v$分解。(iii) 对每个 $u \in J(K_v)$，都有 $0 \le \mu_v(u) \le$ 阶$_v(\Delta)$ 4，其中 Δ 是 C的判别式。(iv) 令 N 为 $\Phi(\overline{k_v})$的指数。那么，对每个 $u \in J(K_v)$，都有 $\mu_v(u) \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}$。此外，$N \le \max\{2, \lfloor \frac{\mathrm{ord}_v(\Delta^2)}{3} \rfloor\}$。(v) 如果我们固定的 C 方程确定了一个定义在 $\mathcal{O}_v$ 上且具有有理奇点的模型，那么 μ_v经过 $\Phi(k_v)$分解。

现在考虑函数

$$\nu_v\colon \{P \in C(K_v) : y(P) \neq 0, \infty\} \to \mathbb{Q}_p, \qquad \nu_v(P) = \lambda_v(2\iota(P)) + \frac{2}{n_v}\chi_v(2y(P)).$$

用 $C(\mathcal{O}_v)$ 表示坐标属于 $\mathcal{O}_v$ 的仿射点集合，其中采用我们固定的 C 方程。

引理 7.2. 若 χ 在 v 处非分歧，则函数 ν_v 满足以下性质：

(i) If $P \in C(\mathcal{O}_v) \setminus \{P : y(P) = 0\}$, *then*

$$\nu_v(P) = -\frac{2}{n_v}\chi_v(\max\{|f'(x(P))|_v, |2y(P)|_v\}) + \frac{1}{n_v}\mu_v(2\iota(P))\chi_v(\pi_v).$$

特别地，集合 $\Gamma_v := \nu_v(C(\mathcal{O}_v) \setminus \{P\colon y(P) = 0\})$ 是有限的，并且存在一个可计算的有限集合 $\Gamma'_v \subset \mathbb{Q}_p$，使得 $\Gamma_v \subset \Gamma'_v$。若 v 是我们所用 C 方程的良约化素数，则可取 $\Gamma'_v = \{0\}$。

(ii) 若 $P \notin C(\mathcal{O}_v)$，则 $\nu_v(P) = \frac{8}{n_v}\chi_v(x(P))$.

证明。对于定义域为 ν_v的 P，令

$$\nu_v^{\mathrm{naive}}(P) = \lambda_v^{\mathrm{naive}}(2\iota(P)) + \frac{2}{n_v}\chi_v(2y(P)).$$

由[FS97，§2] 可知

$$X_{22}(2\iota(P)) = 2x(P), \quad X_{12}(2\iota(P)) = -x(P)^2,$$

$$X_{11}(2\iota(P)) = \frac{f'(x(P))^2 - (2y(P))^2(6x(P)^3 + 4b_1x(P)^2 + 2b_2x(P) + b_3)}{(2y(P))^2}.$$

因此，若 $P \in C(\mathcal{O}_v)$，则有

$$\nu_v^{\mathrm{naive}}(P) = -\frac{2}{n_v}\chi_v(\max\{|f'(x(P))|_v, |2y(P)|_v\}).$$

这只能取有限多个值，因为 $\max\{|f'(x(P))|_v, |2y(P)|_v\} \ge |2\,\mathrm{Disc}(f)|_v$，其中 $\mathrm{Disc}(f)$ 是 f的判别式。特别地，若 $2\,\mathrm{Disc}(f)$ 是一个 v进单位，则 $\nu_v^{\mathrm{naive}}(P)$消失。
若 $P \notin C(\mathcal{O}_v)$，则 P的坐标满足 $2\,\mathrm{ord}_v(y(P)) = 5\,\mathrm{ord}_v(x(P))$。因此，由于 $X_{11}(2\iota(P))$的分子作为关于 $x(P)$的多项式是一个 8 次首一多项式，我们有

$$\nu_v^{\mathrm{naive}}(P) = \frac{8}{n_v}\chi_v(x(P)).$$

接下来需要理解 ν_v 与 ν_v^{naive} 的区别。为此，我们应用定理 7.1。 □

现在为简便起见，假设 $K = \mathbb{Q}$。回顾第 5.1 节，每个局部解析群同态 $J(\mathbb{Q}_p) \to \mathbb{Q}_p$ 都是从形式群到 $\mathbb{G}_a$ 的同态扩张到 $J(\mathbb{Q}_p)$ 后得到的。滥用记号，记

$$\mathcal{L} = (\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)\colon J(\mathbb{Q}_p) \otimes \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p^2$$

为由严格形式群对数诱导的 $\mathbb{Q}_p$-线性映射。

假设 7.3。 $\mathcal{L}$ 在 $J(\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}_p$ 上的限制是单射。

注 7.4. 如果 $J(\mathbb{Q})$ 的秩至多为 2，假设 7.3 通常会成立：如果 J 是单的，参见 [Wal11，猜想 1]。

在假设 7.3 下，任意 $\mathbb{Q}_p$-线性映射 $J(\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p$ 都是 $\mathcal{L}_1$ 和$\mathcal{L}_2$的线性组合，而任意二次型 $J(\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p$ 都是 $\mathcal{Q} = \{\mathcal{L}_1^2, \mathcal{L}_1\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_2^2\}$的线性组合。后者尤其适用于 p-进高度 h_p：存在 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Q}_p$ 使得

$$h_p(u) = \alpha_1\mathcal{L}_1^2(u) + \alpha_2\mathcal{L}_1(u)\mathcal{L}_2(u) + \alpha_3\mathcal{L}_2^2(u) \qquad \text{for all } u \in J(\mathbb{Q}). \tag{7.1}$$

将此等式限制在形如 $2\iota(P)$ 的点上，其中 P 是 C上的一个点，并将 h_p 写成局部 N´eron 函数之和，便可利用方程（7.1）和引理 7.2(i) 写出一个局部解析函数 $\rho\colon\ C(\mathbb{Z}_p) \to \mathbb{Q}_p$ 以及一个有限集 $\Gamma \subset \mathbb{Q}_p$，使得 $\rho(C(\mathbb{Z})) \subset \Gamma$。换言之，引理 7.2 使我们能够用 [BBM16]的二次 Chabauty 方法来表述 p-adic N´eron 函数，而不必使用局部 Coleman–Gross 高度配对。

注 7.5。 推论 5.32 给出了 Coleman–Gross 局部高度配对与 p-adic N´eron 函数之间的比较结果。然而，它仅适用于具有不相交支集的除子，而 [BBM16] 的方法至关重要地要求将 Coleman–Gross 局部高度扩展到任意除子。引理 7.2 使我们能够直接证明，也可以使用适当的局部 N´eron 函数。另一方面，在 [BKM23], 中，我们证明了这些扩展的 Coleman–Gross 局部高度配对与 N´eron 函数之间的比较结果，由此，用 $C(\mathbb{Z})$ 表述 λ_q 的二次 Chabauty 是直接的。

我们还注意到， [BBM16、BBM17] 中的显式例子在计算 $\mathcal{L}(\iota(P))$时，依赖于基于 Kedlaya 算法 C 的 Coleman 积分算法 [Ked01]。在我们的亏格 2 情形中，可以用§6.1（另见§6.7）来替代这一步。

现在我们应用类似的思想，为确定某些具有二次映射、映至与同形的曲线的亏格 4 曲线上的有理点，给出一种显式的二次 Chabauty 型方法 C。这类似于 Balakrishnan–Dogra 针对亏格 2 双椭圆曲线上的有理点所提出的显式二次 Chabauty 方法[BD18]；我们的证明基于 [Bia20命题 65] 和 [BP22定理 23]中给出的相应证明。

特别地，我们给出了一个不使用 Kim理论[Kim05、Kim09], 而只使用我们迄今所描述的局部 N´eron 函数性质的证明。因此，与 [BD18、BDM+19]中关于有理点的二次 Chabauty 一般框架相比，该方法在本质上要初等得多。

与上述关于 C上的整点的讨论不同，据作者所知，下面的命题 7.6 并非对文献中已有的涉及 Coleman–Gross局部高度的结果的改述。另一方面，利用 [BKM23] 在注 7.5 中提到的比较结果，可以将其改述为 Coleman–Gross 高度的形式。

假设 X 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的亏格4双曲曲线，其方程具有如下形式：

$$X\colon y^2 = f_5x^{10} + f_4x^8 + f_3x^6 + f_2x^4 + f_1x^2 + f_0, \qquad f_i \in \mathbb{Z}. \tag{7.2}$$

存在映射 $\varphi_1\colon\ X \to C_1$、 $\varphi_2\colon\ X \to C_2$，分别映到以下曲线 C_1 和 C_2:

$$C_1\colon y^2 = x^5 + f_4x^4 + f_3f_5x^3 + f_2f_5^2x^2 + f_1f_5^3x + f_0f_5^4, \qquad \varphi_1(x,y) = (f_5x^2, f_5^2y),$$
$$C_2\colon y^2 = x^5 + f_1x^4 + f_0f_2x^3 + f_0^2f_3x^2 + f_0^3f_4x + f_0^4f_5, \qquad \varphi_2(x,y) = (f_0x^{-2}, f_0^2yx^{-5}).$$

分别用 J_1 和 J_2 表示 C_1 和 C_2的雅可比簇，并用 $\mathcal{Q}_i$ 表示$\{\mathcal{L}_1^2, \mathcal{L}_1\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_2^2\}$ 中 J_i的二次型集合。令 $Z = X(\mathbb{Q}_p) \setminus \{z\colon\ x(z) \in \{0,\infty\}$ 或 $y(z) = 0\}$。

命题 7.6. 假设 p 是方程（7.2）的良约化素数，且 J_i 对每个 $i \in \{1,2\}$ 都满足假设 7.3，因此 $J_i(\mathbb{Q})$ 上的全局 p-进高度等于某个 $\alpha_Q^{(i)} \in \mathbb{Q}_p$ 在 $J_i(\mathbb{Q})$ 上的限制，其中 $\sum_{Q\in\mathcal{Q}_i} \alpha_Q^{(i)}Q$。函数 $\rho\colon\ Z \to \mathbb{Q}_p$, 定义为

$$\rho(z) = \lambda_p(2\iota(\varphi_1(z))) - \lambda_p(2\iota(\varphi_2(z))) - 6\chi_p(x(z)) - \sum_{Q\in\mathcal{Q}_1} \alpha_Q^{(1)}Q(2\iota(\varphi_1(z))) + \sum_{Q\in\mathcal{Q}_2} \alpha_Q^{(2)}Q(2\iota(\varphi_2(z))),$$

可延拓为局部解析函数 $\tilde{\rho}\colon\ X(\mathbb{Q}_p) \to \mathbb{Q}_p$。此外，存在一个有限且可计算的集合 $\Upsilon \subset \mathbb{Q}_p$，使得

$$\tilde{\rho}(X(\mathbb{Q})) \subset \Upsilon.$$

证明。在 $X(\mathbb{Q}_p)\setminus Z$ 的每个点， $\rho(z)$ 中恰有两项具有对数奇点：

- 若 $x(z)=\infty$，则各项为： $\lambda_p(2\iota(\varphi_1(z)))$ 和 $-6\chi_p(x(z))$;
- 若 $x(z)=0$，则各项为： $-\lambda_p(2\iota(\varphi_2(z)))$ 和 $-6\chi_p(x(z))$;
- 若 $y(z)=0$，则各项为： $\lambda_p(2\iota(\varphi_1(z)))$ 和 $-\lambda_p(2\iota(\varphi_2(z)))$。

在这三种情形中的每一种情形下，我们断言，来自两项的对数奇点相互抵消。我们证明 $x(z)=\infty$ 的情形，并将其他情形留作读者的练习。因此，设 $x(z)=\infty$ ，并令 t 为 z处的一个一致化参数，其模 p 后化为一致化参数：不妨设我们选择 $t=x^{-1}$。由于 φ_1 在 z 处是非分歧的，对于 $\varphi_1(z)$ 处的任意局部坐标 t_1 ，我们有 $t_1(\varphi_1(z(t)))=tu(t)$，其中 $u(t)\in\mathbb{Z}_p[[t]]$是某个单位幂级数。根据 λ_p的定义，$\lambda_p(2\iota(\varphi_1(z(t))))$ 的对数项与 $-2\chi_p(T_1(2\iota(\varphi_1(z(t)))))$ 的对数项相同。根据引理 B.1，这等于 $-6\chi_p(t)=6\chi_p(x(t))$。

We p证明存在一个有限可计算集 Υ ，使得对 $X(\mathbb{Q})\setminus Z$ 成立（极限值将

ow by co 连续性）。如果 $z\in X(\mathbb{Q})\setminus Z$，则有

$$\begin{aligned}\rho(z)&=\sum_{q\neq p}(-\lambda_q(2\iota(\varphi_1(z)))+\lambda_q(2\iota(\varphi_2(z)))+6\chi_q(x(z)))\\&=\sum_{q\neq p}(-\nu_q(\varphi_1(z))+\nu_q(\varphi_2(z))+4\chi_q(f_5f_0^{-1}x(z)^4))=:\sum_{q\neq p}w_q(z).\end{aligned}$$

定义 Z_q 的方式与 Z 类似，但对应素数 q。我们断言，存在一个有限可计算集 Υ_q ，使得 $w_q(Z_q)\subset\Upsilon_q$，此外，对于每个良约化素数 q ，我们都可以取 $\Upsilon_q=\{0\}$ ；命题的结论由此得出。为了证明 Υ_q 的存在及其性质，我们分析 $x(z)$ 的 q-进赋值，并相应地分析 $x(\varphi_1(z))$ 和 $x(\varphi_2(z))$ 的赋值，然后应用引理 7.2。我们区分两种情况：

当且仅当 • $\varphi_1(z)$ 和 $\varphi_2(z)$ 都是整性的，且 $-\mathrm{ord}_q(f_5)\leq 2\mathrm{ord}_q(x(z))\leq\mathrm{ord}_q(f_0)$ 时，情况成立。在这种情况下， $w_q(z)$ 中的三个项各自都取值于一个有限可计算集（由引理 7.2(i) 以及 $\chi_q(x(z))$ 仅取决于 $x(z)$ 的赋值这一事实可知）。

• 在其余情形中， $\varphi_1(z)$ 和 $\varphi_2(z)$ 中恰有一个是整性的。不妨设 $\varphi_i(z)$ 是整性的，而 $\varphi_j(z)$ 不是。接着，我们对 $\nu_q(\varphi_i(z))$ 应用引理 7.2 (i)；此外，根据引理 7.2 (ii),

$$(-1)^j\nu_q(\varphi_j(z))+4\chi_q(f_5f_0^{-1}x(z)^4)=(-1)^j4\chi_q(f_5f_0).$$ □

注 7.7。 有了引理 B.1 和引理 7.2，命题 7.6 的证明与 [BP22定理 2 中亏格 2 情形的证明3], 非常相似，更多细节请参阅该文。

例 7.8。考虑

$$X\colon y^2=x^{10}-x^6+1$$

以及相应的亏格 2 曲线

$$C_1\colon y^2=x^5-x^3+1,\qquad C_2\colon y^2=x^5-x^2+1.$$

设 $p=5$，令 $\chi=\chi^{\mathrm{cyc}}$ ，并考虑 C_1 和 C_2 上相对于其朴素 sigma 函数的 p-进局部 N´eron 函数。对于每个 i， $J_i(\mathbb{Q})$ 的秩均为 2，且命题 7.6 的假设均成立。

C_1和 C_2的判别式都等于 $2^8\cdot 7\cdot 431$。因此，参照该命题的证明，为了确定一个合适的集合 Υ ，我们必须计算 Υ_q（其中 $q\in\{2,7,431\}$），这归结为对每个 C_1 和 C_2计算 Γ_q 或其一个有限超集 Γ'_q （如引理 7.2 (i) 所述）。对于 $q\in\{7,431\}$，根据 [Sto02 、命题 5.2 及] 下方的注， μ_q 在每个 i对应的 $J_i(\mathbb{Q}_q)$ 上恒为零。此外，在 $C_i(\mathbb{Z}_q)$ 中不存在使引理 7.2 证明中定义的函数 ν_q^{naive}非平凡的点。因此，对于每个 C_1 和 C_2，集合 Γ_q 等于 0，且 $\Upsilon=\Upsilon_2$。

以下事实的证明从略：我们可以取[8]

$$\Upsilon_2 = \left\{0, \frac{8}{3}\log_p(2), -2\log_p(2)\right\}. \tag{7.3}$$

~我们可以计算 $\tilde{\rho}(z)$ 在约化映射 $X(\mathbb{Q}_p) \to X(\mathbb{F}_p)$ 的每个剩余圆盘中的展开，并研究集合

$$\{z \in X(\mathbb{Q}_p) : \tilde{\rho}(z) - v, \text{ for some } v \in \Upsilon\} \supseteq X(\mathbb{Q}).$$

例如， $X(\mathbb{Q}_p)$ 中约化到 $(0, 4) \in X(\mathbb{F}_p)$ 的点可由 $t = \frac{x}{p} \in \mathbb{Z}_p$ 和参数化

$$\tilde{\rho}(z(t)) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2 + (2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^3)t^2 + (3 \cdot 5^3)t^4 + O(5^4, t^6).$$

- 若 $v = 0$ 或 $v = -2\log_p(2) = 5 + O(5_2)$，则幂级数 $\rho(z(t)) - v$ 在 $\mathbb{Z}_p$ 中没有零点；
- 若 $v = \frac{8}{3}\log_p(2) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2 + O(5_4)$，则幂级数 $\tilde{\rho}(z(t)) - v$ 在$t = 0$处有一个二重根：这对应于有理点 $(0, -1) \in X(\mathbb{Q})$。该根的重数为二，因为 $(0, -1)$ 在 X 的自同构下保持不变，该自同构将 (x, y) 映射为 $(-x, y)$，且 $\tilde{\rho}$ 在此自同构下不变。

这个例子旨在非正式地说明命题 7.6；不过，只要写出 (7.3) 的论证，并更详细地说明我们如何计算 $\tilde{\rho}$ 的展开式，就可以将其完善为一个证明，证明 $(0, -1)$ 是模 5 约化为 $(0, 4)$ 的唯一有理点。对 $X(\mathbb{Q}_p)$ 的每个剩余圆盘重复这一过程（也可以结合 Mordell–Weil 筛法），应该就能确定 $X(\mathbb{Q})$ 的全部有理点。

注 7.9. 命题 7.6 是用 p-进局部 N´eron 函数表述的；本文中我们为亏格 2 曲线定义了这类函数，更一般地说，也可以在亏格 ≤ 2 曲线上计算它们。如前所述，该命题还有一个以除子与自身的 Coleman–Gross 局部高度配对表述的版本。更一般地，使用这类 Coleman–Gross局部高度，结论可以推广到下列形式的偶亏格 $d - 1 \geq 2$ 超椭圆曲线上的有理点：

$$X : y^2 = \sum_{n=0}^{d} f_n x^{2n}, \qquad f_n \in \mathbb{Z}.$$

Appendix

A. theta 除子之外点的倍数。设 K 是一个特征零的域，并设 $C : y^2 = f(x)$，其中 $f(x)$ 是 $\in K[x]$ 次首一多项式，且没有重根。设 J 是 C 的雅可比簇。回顾：

(I) 若 $u \in J$ 是一个非零点，则存在唯一的无序对 $(P_1, P_2) \in C^{(2)}$，使得 $u = [P_1 + P_2 - 2\infty]$。此外， $u \in J[2] \setminus \{0\}$ 当且仅当 P_1 和 P_2 都是 Weierstrass 点。(II) $[P_1 + P_2 - 2\infty] = 0$ 当且仅当 $P_1 = P_2^-$。

由此容易得到以下引理。

引理 A.1. 设 $u, v, w \in J$。若 $u, v, w \in J$ 位于 theta 除子上，则 $u + v + w \notin \mathrm{Supp}(\Theta)$，除非 $u = -v$ 或 $u = -w$ 或 $v = -w$。

证明。令 $u = [P - \infty], v = [Q - \infty], w = [R - \infty]$。那么 $u + v + w = [S - \infty]$ 当且仅当 i f

$$[P + Q - 2\infty] = [R^- + S - 2\infty],$$

由 (I) 和 (II) 即可得出该结论。 □

以下结果的证明较为复杂。

[8]该集合并非通过引理 7.2 (i) 得到，而是根据 [BKM23] 在注 7.5 中提及的比较结果，以及 [BBM16,BBM17]的结果计算得出的。感谢 Steffen M¨uller 计算出 TBBM16 [所对应的集合，其第三定理Theorem 3.1] 等于 $\{0, -\frac{2}{3}$对数$_p(2)\}$（当 C_1时），并且等于 $\{0, -\frac{1}{2}$对数$_p(2)\}$（当 C_2时）。集合 Υ 由此推得。

引理 A.2 ([dJM14，引理 8.1(iii)])。设 $u \notin J[2]$ 并设 k 为一个整数。那么，以下至少有一个 ku，$(k+1)u$，$(k+2)u$，$(k+3)u$ 不属于 theta 除子的支集。

以下引理及其证明归功于 S. Gajovi´c。

引理 A.3（Gajovi´c）。设 $u_1, u_2, u_3, u_4 \in J$，且 u_1, u_2, u_3, u_4 均不是挠点。那么存在一个整数 $1 \leq m \leq 41$，使得 mu_1, mu_2, mu_3 和 mu_4 均不属于 theta 除子的支集。

证明。反设这样的整数不存在。那么我们可以将 $\{1, \ldots, 41\}$ 划分为四个子集 S_1, S_2, S_3, S_4，使得若 $i \in \{1, \ldots, 4\}$ 和 $k \in S_i$，则 $ku_i \in$Supp(Θ)。由引理 A.1 和 A.2，集合 S_i 满足：

(i) 若 $k_1, k_2, k_3 \in S_i$（不一定互异），则 $k_1 + k_2 \notin S_i$ 和 $k_1 + k_2 + k_3 \notin S_i$；(ii) 若 k, $k+1, k+2 \in S_i$，则 $k+3 \notin S_i$。

代码仓库 [Bia23] 包含 `Magma` [BCP97] 代码，用于检查是否不存在将$\{1, \ldots, 41\}$ 划分为四个子集 S_1, S_2, S_3, S_4且每个子集都满足性质 (i) 和 (ii)。□

注 A.4. 在引理 A.3 的证明中，同时考虑约束 (i) 和 (ii)，而不只是约束 (i)，并不能改善 m 的上界。不过，这样可以加快 Magma 计算。

B. 形式群参数展开。设 K_v 是数域 K 在非阿基米德赋值 v 处的完备化，设 $\mathcal{O}_v$ 是其整数环，并设 $C\colon y^2 = f(x)$，其中 $f(x) = x^5 + b_1x^4 + b_2x^3 + b_3x^2 + b_4x + b_5 \in \mathcal{O}_v[x]$ 没有重根。

引理 B.1. 假设 C 的方程具有良约化，并设 $P = (x, y) \in C(K_v)$ 是一个模 v 约化为 Weierstrass 点的点。那么 $2\iota(P) \in J_1(K_v)$，并且

$$T_1(2\iota(P)) = -2y\frac{g_1(x)}{g_2(x)}, \qquad T_2(2\iota(P)) = -2y\frac{g_3(x)}{g_2(x)},$$

其中

$$\begin{aligned}
g_1(x) &= f'(x)^2 - 4f(x)(6x^3 + 4b_1x^2 + 2b_2x + b_3)\\
g_2(x) &= -g_1(x)f'(x) + f(x)\tilde{g}_2(x)\\
\tilde{g}_2(x) &= 4x^7 - 8b_2x^5 - 32b_3x^4 + 4\left(b_2^2 - 4b_1b_3 - 11b_4\right)x^3\\
&\quad - 8\left(3b_1b_4 + 7b_5\right)x^2 - 4\left(b_2b_4 + 8b_1b_5\right)x - 8b_2b_5\\
g_3(x) &= xg_1(x) - 2f(x)(x^4 + b_2x^2 + b_4).
\end{aligned}$$

特别地，如果 t 是 Weierstrass 点 $P_0 \in C(K_v)$ 处的一个一致化参数，并且它模 v 约化为一个一致化参数，则存在单位幂级数 $u_1(t)$ $u_2(t) \in \mathcal{O}_v[[t]]$ 和幂级数 $w_2(t) \in t^2\mathcal{O}_v[[t]]$，使得

$$T_1(2\iota(x(t), y(t))) = \begin{cases} 2t^3u_1(t) & \text{if } P_0 = \infty;\\ 2tu_1(t) & \text{otherwise.}\end{cases}$$

$$T_2(2\iota(x(t), y(t))) = \begin{cases} 2tu_2(t) & \text{if } P_0 = \infty;\\ 2x(0)tu_2(t) + w_2(t) & \text{otherwise.}\end{cases}$$

证明。回顾证明引理 7.2 时所使用的 $X_{ij}(2\iota(P))$ 的公式，我们得到

$$X_{11}(2\iota(P)) = \frac{g_1(x)}{4y^2}, \qquad X(2\iota(P)) = \frac{g_3(x)}{4y^2}.$$

利用 $X_{ijk}([P_1 + P_2 - 2\infty])$ 的 [Gra90 公式 (1.4)], , 令 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 同时趋于 (x, y)，取极限可得

$$X_{111}(2\iota(P)) = \frac{g_2(x)}{8y^3}.$$

对于 t 中的展开式，只需证明其中一个局部坐标 t 满足该结论即可，因为任何其他坐标都可以由 t 乘以 $\mathcal{O}_v[[t]]$ 中的一个单位幂级数得到。如果 $P_0=\infty$，令 $t=-\frac{x^2}{y}$。于是

$$x(t)=t^{-2}+O(1)\in\mathcal{O}_v((t)),\qquad y(t)=-t^{-5}+O(t^{-3})\in\mathcal{O}_v((t))$$
$$g_1(x(t))=t^{-16}+O(t^{-14}),\quad g_2(x(t))=-t^{-24}+O(t^{-22})\quad g_3(x(t))=-t^{-18}+O(t^{-16}).$$

若 $P_0=(x_0,y_0)$ 满足 $y_0=0$，则 $|f'(x_0)|_v=1$，因为 C 具有良约化。令 $t=\frac{y}{f'(x_0)}$，则有

$$x(t)=x_0+O(t^2)\in\mathcal{O}_v[[t]],\qquad y(t)=f'(x_0)t$$
$$g_1(x(t))=f'(x_0)^2+O(t^2),\quad g_2(x(t))=-f'(x_0)^3+O(t^2),\quad g_3(x(t))=x_0f'(x_0)^2+O(t^2).$$

注意到关于 C 的方程具有良约化这一假设蕴含 $v\nmid 2$，即可得出该结果。□

C. σ 函数展开。$\sigma_v^{(c)}(T)$ 的展开式中总次数不超过 8 的项如下：

$$\begin{aligned}
\sigma_v^{(c)}(T)&=T_1+\left(\frac{1}{2}b_3+\frac{1}{2}c_{11}\right)T_1^3+c_{12}T_1^2T_2+\left(\frac{1}{2}c_{22}\right)T_1T_2^2\\
&+\left(\frac{3}{8}b_3^2+\frac{5}{12}b_2b_4-\frac{5}{3}b_1b_5+\frac{7}{12}b_3c_{11}+\frac{1}{8}c_{11}^2+\frac{1}{3}b_4c_{12}\right)T_1^5\\
&+\left(\frac{5}{6}b_3c_{12}+\frac{1}{2}c_{11}c_{12}+\frac{1}{3}b_4c_{22}-\frac{10}{3}b_5\right)T_1^4T_2+\left(\frac{1}{2}c_{12}^2+\frac{1}{4}b_3c_{22}+\frac{1}{4}c_{11}c_{22}-\frac{1}{2}b_4\right)T_1^3T_2^2\\
&+\left(-\frac{2}{3}b_1c_{12}+\frac{1}{2}c_{12}c_{22}+\frac{1}{3}c_{11}\right)T_1^2T_2^3+\left(-\frac{2}{3}b_1c_{22}+\frac{1}{8}c_{22}^2-\frac{1}{12}b_2+\frac{1}{3}c_{12}\right)T_1T_2^4\\
&+\Bigg(\frac{5}{16}b_3^3+\frac{391}{360}b_2b_3b_4+\frac{13}{30}b_1b_4^2+\frac{13}{30}b_2^2b_5-\frac{547}{90}b_1b_3b_5+\frac{439}{720}b_3^2c_{11}+\frac{73}{120}b_2b_4c_{11}-\frac{73}{30}b_1b_5c_{11}\\
&+\frac{11}{48}b_3c_{11}^2+\frac{1}{48}c_{11}^3+\frac{61}{90}b_3b_4c_{12}-\frac{3}{5}b_2b_5c_{12}+\frac{1}{6}b_4c_{11}c_{12}+\frac{1}{18}b_4^2c_{22}-\frac{113}{90}b_4b_5\Bigg)T_1^7\\
&+\Bigg(\frac{89}{120}b_3^2c_{12}+\frac{49}{60}b_2b_4c_{12}-\frac{79}{15}b_1b_5c_{12}+\frac{3}{4}b_3c_{11}c_{12}+\frac{1}{8}c_{11}^2c_{12}+\frac{1}{3}b_4c_{12}^2+\frac{17}{30}b_3b_4c_{22}-\frac{3}{5}b_2b_5c_{22}\\
&+\frac{1}{6}b_4c_{11}c_{22}+\frac{4}{5}b_4^2-\frac{181}{15}b_3b_5-\frac{14}{3}b_5c_{11}\Bigg)T_1^6T_2+\Bigg(-b_1b_4c_{12}+\frac{7}{12}b_3c_{12}^2+\frac{1}{4}c_{11}c_{12}^2+\frac{3}{16}b_3^2c_{22}\\
&+\frac{5}{24}b_2b_4c_{22}-\frac{17}{6}b_1b_5c_{22}+\frac{7}{24}b_3c_{11}c_{22}+\frac{1}{16}c_{11}^2c_{22}+\frac{1}{2}b_4c_{12}c_{22}-\frac{3}{4}b_3b_4-\frac{5}{2}b_2b_5-\frac{1}{4}b_4c_{11}-\frac{34}{3}b_5c_{12}\Bigg)T_1^5T_2^2\\
&+\Bigg(-\frac{5}{9}b_1b_3c_{12}-\frac{1}{3}b_1c_{11}c_{12}+\frac{1}{6}c_{12}^3-\frac{11}{9}b_1b_4c_{22}\\
&+\frac{5}{12}b_3c_{12}c_{22}+\frac{1}{4}c_{11}c_{12}c_{22}+\frac{1}{6}b_4c_{22}^2-\frac{1}{9}b_2b_4+\frac{5}{18}b_3c_{11}+\frac{1}{6}c_{11}^2-\frac{43}{18}b_4c_{12}-\frac{20}{3}b_5c_{22}\Bigg)T_1^4T_2^3\\
&+\Bigg(-\frac{2}{3}b_1c_{12}^2-\frac{1}{3}b_1b_3c_{22}-\frac{1}{3}b_1c_{11}c_{22}+\frac{1}{4}c_{12}^2c_{22}+\frac{1}{16}b_3c_{22}^2+\frac{1}{16}c_{11}c_{22}^2-\frac{1}{24}b_2b_3+\frac{1}{2}b_1b_4\\
&-\frac{1}{24}b_2c_{11}-\frac{5}{6}b_3c_{12}+\frac{1}{2}c_{11}c_{12}-\frac{9}{4}b_4c_{22}-\frac{3}{2}b_5\Bigg)T_1^3T_2^4\\
&+\left(\frac{6}{5}b_1^2c_{12}-b_1c_{12}c_{22}+\frac{1}{8}c_{12}c_{22}^2-\frac{3}{5}b_1c_{11}-\frac{41}{60}b_2c_{12}+\frac{1}{3}c_{12}^2-b_3c_{22}+\frac{1}{6}c_{11}c_{22}-\frac{1}{5}b_4\right)T_1^2T_2^5\\
&+\left(\frac{64}{45}b_1^2c_{22}-\frac{1}{3}b_1c_{22}^2+\frac{1}{48}c_{22}^3+\frac{19}{90}b_1b_2-\frac{37}{45}b_1c_{12}-\frac{77}{120}b_2c_{22}+\frac{1}{6}c_{12}c_{22}-\frac{1}{15}b_3+\frac{1}{18}c_{11}\right)T_1T_2^6\\
&+O(T_1,T_2)^9.
\end{aligned}$$

References

[Bak07] H. F. Baker, *An introduction to the theory of multiply periodic functions*, 剑桥，大学出版社，1907 年。[Bar57] I. Barsotti, *Factor sets and differentials on abelian varieties*,《美国数学会汇刊》84 (1957), 85–108。[BB12] J. S. Balakrishnan 和 A. Besser, *Computing local p-adic height pairings on hyperelliptic curves*, IMRN 2012 (2012), 第 11 期, 2405–2444。[BB15] , *Coleman-Gross height pairings and the p-adic sigma function*,《纯粹与应用数学杂志》698 (2015), 89–104。[BBBM21] J. S. Balakrishnan, A. Besser, F. Bianchi, 和 J. S. M

¨ *Explicit quadratic Chabauty over number* uller, ,《以色列数学 *fields* **243** 2021 1, 185 232
杂志》( ), 第 – 期。[BBK10] J. S. Balakrishnan, R. W. Bradshaw, 和 K. Kedlaya, *Explicit Coleman integration for hyperelliptic*
curves , 算法数论，《计算机
科学讲义》，第 6197 卷，施普林格，柏林，2010 年，第 16–31 页。[BBM16] J. S. Balakrishnan, A. Besser, 和 J. S. M

¨ *Quadratic Chabauty: p-adic heights and integral points* uller, ,《纯粹与应用 *on hyperelliptic curves* **720** 2016 51 79
数学杂志》( ), – 。[BBM17] J. S. Balakrishnan, A. Besser, 和 J. S. M

¨ *Computing integral points on hyperelliptic curves using* uller, ,《数学计算》 *quadratic Chabauty* **86** 2017 305, 1403 1434
( ), 第 – 期。[BCP97] W. Bosma, J. Cannon, 和 C. Playoust, *The Magma algebra system. I. The user language*,《符号计算杂志》24 (1997), 第 3-4 期，235–265。[BD18] J. S. Balakrishnan 和 N. Dogra, *Quadratic Chabauty and rational points, I: p -adic heights*,《杜克数学杂志》167 (2018), 第 11 期，1981–2038，附录由 J. S. M¨uller 撰写。[BDCKW18] J. S. Balakrishnan, I. Dan-Cohen, M. Kim, 和 S. Wewers, *A non-abelian conjecture of Tate-Shafarevich type for hyperbolic curves* **372** 2018 1 2, 369 428 ,《数学年刊》( ), 第
- 期，– 。[BDM+19] J. S. Balakrishnan, N. Dogra, J. S. M

¨ *Explicit Chabauty—Kim for the* uller, J. Tuitman, 和 *split Cartan modular curve of level 13* **189** 2019 3, 885 944
J. Vonk, ,《数学年刊》( ), 第 – 期。[Ber74] P. Berthelot, *Cohomologie Cristalline des Schémas de Caractéristique $p > 0$*, 《数学讲义》第 407 卷，Springer-Verlag，柏林-纽约，1974 年。[Ber81] D. Bernardi, *Hauteur p-adique sur les courbes elliptiques*, 巴黎数论研讨会 1979–80，《数学进展》，第 12 卷，Birkh¨auser，波士顿，马萨诸塞州，1981 年，第 1–14 页。[Bes04] A. Besser, *The p-adic height pairings of Coleman-Gross and of Nekovář*, 数论，《CRM 会议讲义》，第 36 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2004 年，第 13–25 页。[Bes05] , *p-adic Arakelov theory*,《数论杂志》 111 (2005), 第 2 期，318–371。[Bes22] , *p-adic heights and Vologodsky integration*,《数论杂志》 239 (2022), 273–297。[Bia20] F. Bianchi, *Quadratic Chabauty for (bi)elliptic curves and Kim's conjecture*,《代数数论》14 (2020), 第 9 期，2369–2416。[Bia23] , *SageMath code*, 2023, https://github.com/bianchifrancesca/padic_heights_g2. [BK10] K. Bannai 和 S. Kobayashi, *Algebraic theta functions and the p-adic interpolation of Eisenstein-Kronecker numbers* **153** 2010 295 ,《杜克数学杂志》
( ), 第 2 期，229– 。[BKM23] F. Bianchi, E. Kaya, 和 J. S. M¨uller, *Article in preparation*, 2023。[Bla18] C. Blakestad, *On Generalizations of p-Adic Weierstrass Sigma and Zeta Functions*, 博士学位论文，科罗拉多大学，2018 年。[BMS16] J. S. Balakrishnan, J. S. M

¨ *A p-adic analogue of the conjecture of Birch and* uller, 和 W. A. *Swinnerton-Dyer for modular abelian varieties* **85** 2016 298, 983 1016
Stein, ,《数学计算》( ), 第 – 期。[BMS22] A. Besser, J. S. M¨uller, 和 P. Srinivasan, *p-adic adelic metrics, and Quadratic Chabauty I*, arXiv:2112.03873v3 (2022)。[Bos20] J.-B. Bost, *Theta invariants of Euclidean lattices and infinite-dimensional Hermitian vector bundles over arithmetic curves* 334, ¨ [2020] 2020 , 数学进展，第
Birkhauser/Springer 卷，沙姆，© 。[BP22] F. Bianchi 和 O. Padurariu, *Rational points on rank 2 genus 2 bielliptic curves in the LMFDB*, arXiv:2212.11635 (2022)。[BS10] N. Bruin 和 M. Stoll, *The Mordell-Weil sieve: proving non-existence of rational points on curves*, 伦敦数学会计算数学杂志13 (2010), 272–306。[CdS88] R. F. Coleman 和 E. de Shalit, *p-Adic regulators on curves and special values of p-adic L-functions*,《数学发明》93 (1988), 第 2 期，239–266。[CF96] J. W. S. Cassels 和 E. V. Flynn, *Prolegomena to a middlebrow arithmetic of curves of genus 2*, 伦敦数学会讲义丛书，第 230 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1996 年。[CG89] R. F. Coleman 和 B. H. Gross, *p-adic heights on curves*, 代数数论，《纯粹数学研究进展》，第 17 卷，学术出版社，波士顿，马萨诸塞州，1989 年，第 73–81 页。[Col82] R. F. Coleman, *Dilogarithms, regulators, and p-adic L-functions*,《数学发明》69 (1982), 171–208。[Col85] R. F. Coleman, *Torsion points on curves and p-adic abelian integrals*,《数学年刊》(2) 121 (1985), 第 1 期，111–168。[Col91] ,

The universal vectorial bi-extension and p-adic heights **103** 1991 3, ,《数学发明》( ), 631 650
第 – 期。

[Col98] P. Colmez, *Intégration sur les variétés p-adiques*,《算术探索》（1998），第248卷，vi（共8页）。[dJM14] R. de Jong 和 J. S. M¨uller, *Canonical heights and division polynomials*,《剑桥哲学学会数学会报》157（2014），第2期，357–373。[Edi07] B. Edixhoven, *Point counting after Kedlaya*, EIDMA-Stieltjes 研究生课程讲义（莱顿，2003）（2007），可见 https://math.leidenuniv.nl/reports/files/2007-33.pdf, [在线；访问日期: 2023]年1月5日。[Fal83] G. Faltings, *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern*,《数学发明》73（1983），第3期，349–366。[Fal84] , *Calculus on arithmetic surfaces*,《数学年刊》（第2辑）119（1984），第2期，387–424。[Fly90] E. V. Flynn, *The Jacobian and formal group of a curve of genus* 2 *over an arbitrary ground field*,《剑桥哲学学会数学会报》107（1990），第3期，425–441。[Fly93] ,
The group law on the Jacobian of a curve of genus 2,《纯粹与应用数学杂志》439（1993），45–69。[Fly97] ,
_____ *A flexible method for applying Chabauty's theorem* **105** 1997 1, ,《组合数学》79 94（），第 – 期。[Fre93] M. N. Freije, *The formal group of the Jacobian of an algebraic curve*,《太平洋数学杂志》157（1993），第2期，241–255。[FS97] E. V. Flynn 和 N. P. Smart, *Canonical heights on the Jacobians of curves of genus 2 and the infinite descent* **79** 1997 333 352 ,《算术学报》（），–。[Gra90] D. Grant, *Formal groups in genus two*,《纯粹与应用数学杂志》411（1990），96–121。[Gro86] B. H. Gross, *Local heights on curves*, 算术几何（康涅狄格州斯托斯，1984），施普林格，纽约，1986，第327–339页。[Har08] D. Harvey, *Efficient computation of p-adic heights*,《伦敦数学学会计算数学杂志》11（2008），40–59。[Har12] M. C. Harrison, *An extension of Kedlaya's algorithm for hyperelliptic curves*,《符号计算杂志》47（2012），第1期，89–101。[Hon70] T. Honda, *On the theory of commutative formal groups*,《日本数学会杂志》22（1970），213–246。[Hri85] P. Hriljac, *Heights and Arakelov's intersection theory*,《美国数学杂志》107（1985），第1期，23–38。[HS00] M. Hindry 和 J. H. Silverman, *Diophantine geometry: An introduction*, 数学研究生教材，第201卷，Springer-Verlag，纽约，2000。[Kan05] N. Kanayama, *Division polynomials and multiplication formulae of Jacobian varieties of dimension 2* **139** 2005 409 ,《剑桥哲学学会数学会报》（），第3期，399– 。[Kan10] ,
Corrections to "Division polynomials and multiplication formulae in dimension 2",《剑桥哲学学会数学会报》149（2010），第1期，189–192。[Kat73] N. M. Katz, *p-adic properties of modular schemes and modular forms*,《单变量模函数 III》，数学讲义，第350卷，施普林格，柏林，1973，第69–190页。[Kat76] ,
_____ *p-adic interpolation of real analytic Eisenstein series* 2 **104** 1976 3, ,《数学年刊》459 571（）（），第 – 期。[Kat81] , *Crystalline cohomology, Dieudonné modules, and Jacobi sums*, 自守形式、表示论与算术（孟买，1979），塔塔数学研究所丛书，第10卷，施普林格，柏林、海德堡，1981，第165–246页。[Kay22] E. Kaya, *Explicit Vologodsky integration for hyperelliptic curves* **91** 2022 337, ,《数学计算》2367 2396（），第 – 期。[Ked01] K. S. Kedlaya,
Counting points on hyperelliptic curves using Monsky-Washnitzer cohomology,《拉马努金数学会杂志》16（2001），第4期，323–338。[Kim05] M. Kim, *The motivic fundamental group of* $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ *and the theorem of Siegel*,《数学发明》161（2005），第3期，629–656。[Kim09] ,
The unipotent Albanese map and Selmer varieties for curves,《数理科学研究所刊物》45（2009），第1期，89–133。[KK22] E. Katz 和 E. Kaya, *p-adic integration on bad reduction hyperelliptic curves*, IMRN（2022），第8期，6038–6106。[Lan82] S. Lang, *Introduction to Algebraic and Abelian Functions*，第二版，数学研究生教材，第89号，Springer-Verlag，纽约，1982。[Lan83] , *Fundamentals of Diophantine geometry*, Springer-Verlag，纽约，1983。[Lan02] , *Algebra*，修订第三版，第1卷，数学研究生教材，第211号，施普林格，2002。[LMF23] LMFDB 合作组,
The L-functions and modular forms database, http://www.lmfdb.org, 2023年4月, [在线；访问日期: 2023]年1月。[Mat55] A. Mattuck, *Abelian varieties over p-adic ground fields*,《数学年刊》（第2辑）62（1955），92–119。[Mil08] J. S. Milne, *Abelian varieties (v2.00)*, 2008，可见 www.jmilne.org/math/, [在线；访问日期: 2023], 年1月5日。 166+第 vi 页。[MS16] J. S. M¨uller 和 M. Stoll, *Canonical heights on genus-2 Jacobians*,《代数与数论》10（2016），第10期，2153–2234。[MST06] B. Mazur、W. Stein 和 J. Tate,
Computation of p-adic heights and log convergence,《数学文献》（2006），增刊卷，577–614。

[MT83] B. Mazur 和 J. Tate, *Canonical height pairings via biextensions*, 算术与几何，第I卷，数学进展，第35卷，Birkh¨auser，波士顿，马萨诸塞州，1983，第195–237页。[MT91] , *The p-adic sigma function*, 《杜克数学杂志》62（1991），第3期，663–688。[Mum07a] D. Mumford, *Tata lectures on theta. I*，现代 Birkh¨auser 经典著作，Birkh¨auser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，2007；与 C. Musili、M. Nori、E. Previato 和 M. Stillman 合作；重印1983年版。[Mum07b] , *Tata lectures on theta. II*, *Jacobian theta functions and differential equations*，现代 Birkh¨auser 经典著作，Birkh¨auser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，2007；与 C. Musili、M. Nori、E. Previato、M. Stillman 和 H. Umemura 合作；重印1984年原版。[Nek93] J. Nekov´aˇr, *On p-adic height pairings*，巴黎数论研讨班，1990–91，数学进展，第108卷，Birkh¨auser Boston，波士顿，马萨诸塞州，1993，第127–202页。[PR83] B. Perrin-Riou, *Sur les hauteurs p-adiques* ´ **296** 1983 6, , 《巴黎科学院数学报告，第一辑》（），第 – 期。[PR84] , *Hauteurs p-adiques*，巴黎数论研讨班，1982–83，数学进展，第51卷，Birkh¨auser，波士顿，马萨诸塞州，1984，第233–257页。[Sil94] J. H. Silverman, *Advanced topics in the arithmetic of elliptic curves*，数学研究生教材，第151卷，Springer-Verlag，纽约，1994。[Sto02] M. Stoll, *On the height constant for curves of genus two. II*，《算术学报》104（2002），第2期，165–182。[The22] Sage开发团队, *SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version 9.6)*, 2022, http://www.sagemath.org 。[Tri22] M. Trip, *A naive p-adic height function on the Jacobians of curves of genus 2*，硕士学位论文，格罗宁根大学，2022。[Uch11a] Y. Uchida, *Canonical local heights and multiplication formulas for the Jacobians of curves of genus 2* **149** 2011 111 130 , 《算术学报》（），–。[Uch11b] , *Division polynomials and canonical local heights on hyperelliptic Jacobians*，《数学手稿》（2011），第134期，273–308。[vdB08] T. van den Bogaart, *About the choice of a basis in Kedlaya's algorithm*, arXiv:0809.1243（2008）。[vdP86] M. van der Put, *The cohomology of Monsky and Washnitzer*，《引论： *p*-进上同调》（卢米尼，1984），第23期，《法国数学会回忆录》（新辑），1986，第4、33–59页。[Vol03] V. Vologodsky, *Hodge structure on the fundamental group and its application to p-adic integration*，《莫斯科数学杂志》3（2003），第1期，205–247，260。[Wal11] M. Waldschmidt, *On the p-adic closure of a subgroup of rational points on an Abelian variety*，《非洲数学》22（2011），第1期，79–89。[Wut04] C. Wuthrich, *On p-adic heights in families of elliptic curves*，《伦敦数学学会杂志》（第2辑）70（2004），第1期，23–40。[Yos98] K. Yoshitomi, *On height functions on Jacobian surfaces*，《数学手稿》96（1998），第1期，37–66。[Yui78] N. Yui, *On the Jacobian varieties of hyperelliptic curves over fields of characteristic $p > 2$*，《代数杂志》52（1978），第2期，378–410。[Zin84] T. Zink, *Cartier Theory of Commutative Formal Groups* *Cartiertheorie kommutativer formaler Gruppen* 68, 的译本，Teubner数学丛书，第 BSB B. G. Teubner出版社卷，莱比锡，1984，可见 https://perso.univ-rennes1.fr/matthieu.romagny/articles/zink.pdf, [3 2022] 在线；访问日期：1月。