arXiv:2302.03458v2 [cs.GT] 4 Nov 2024

基于单个样本的多面体临床拍卖

Ryosuke Sato*

摘要

我们研究买方受预算约束的双边市场拍卖。这是一个基础问题，对于展示广告等应用也至关重要。我们的目标是设计满足占优策略激励相容性、个体理性和预算平衡的高效机制。为克服不可能性定理的局限，我们假设事先了解卖方估值，并聚焦于将预算纳入考量的效率目标——流动福利。我们的贡献有两点：首先，我们提升了 Hirai 和 Sato（2022年）提出的多面体临床拍卖的效率保证。其次，我们运用 D¨utting 等人（2021年）的归约方法，将该机制扩展为适用于预算约束拍卖的高效单样本机制，从而为他们的结果提供预算扩展。值得注意的是，即使在多拟阵约束下，我们的结果仍然成立，并适用于可分割和不可分物品。

1 引言

近年来，随着广告交易平台（如 Xandr）、互联网交易平台（如 eBay）和网约车平台（如 Uber）等平台的普及，双边市场在现实世界中随处可见。尽管这些市场的机制设计理论是未来发展的重点，但它们的结构存在问题，即买方和卖方都有动机采取策略性行动来最大化自身效用。要在双边市场中实现高效的资源分配，就需要能够应对这些策略性行动的机制。

尽管从单边市场的拍卖中积累了丰富的知识（例如，[Krishna，2010年；Nisan 等人， 2007]），但双边市场拍卖的基础理论仍不成熟，并面临重大挑战。一篇开创性论文 [Myerson 和 Satterthwaite， 1983]指出，在双边交易——双边市场最简单的形式——中，能够最大化社会福利（SW）且满足激励相容和个体理性的机制会出现亏损。

一项近期研究 [D¨utting 等人 2021] 还指出，在缺乏估值的先验信息时，不存在任何机制能够同时满足占优策略激励相容（DSIC）、个体理性（IR）、预算平衡（BB），并实现对最优社会福利的常数近似。相反，通过假设掌握最低限度的先验信息——即单样本假设——他们提出了单样本机制，使其具备上述全部性质。这些机制由黑箱归约推导而来，可将任意单边机制转化为双边机制，但会造成一定的效率损失。这些结果对在没有预算约束的情况下设计高效的双边市场机制有两点重要启示：

- 从每个卖方的估值分布中获取单个样本，便足以在满足占优策略激励相容（DSIC）、个体理性（IR）和预算平衡（BB）的同时，实现对最优社会福利的常数近似。
- 高效的单边市场机制也可用于双边市 ts.

*庆应义塾大学科学技术研究生院，横滨，神奈川 223-0061，日本。ryosuke.sato.517@gmail.com

即使存在商品分配约束，这些推论依然成立，因此预算约束将是一个自然的后续挑战。即使在双边市场中，预算约束下的多单位拍卖也十分重要，不仅在理论上如此，在实践中亦然。例如，在展示广告中，广告主通常会设定在特定时间段内向发布商支付的最高金额。然而，即使在单边市场中，预算约束在理论上也会带来困难。一条广为人知的民间定理（参见例如 [Dobzinski 等人，2012年；Dobzinski 和 Leme， 2014]）指出，任何满足占优策略激励相容和个体理性的机制，都无法实现最优社会福利的常数近似。因此，在预算约束下，需要采用另一种效率目标。

本研究为双边市场中的预算约束拍卖提出了一种高效机制，同时满足占优策略激励相容、个体理性和预算平衡。这是首项在单样本假设下探讨这一问题的研究。基于第一点，在不考虑预算约束时，已有研究证明这一假设足以设计出高效机制。此外，根据第二点，高效机制的候选方案是多面体临界拍卖；众所周知，它是单边市场预算约束拍卖中最具一般性且高效的机制。该机制最初由 Goel 等人提出， [2015], 并对 Ausubel 的著名攫取框架进行了改进。 [2004]我们通过将多面体临界拍卖扩展为高效的单样本机制，证明上述两点在预算约束下同样成立。

1.1 我们如何衡量效率?

评估效率是本研究的一个关键方面。在预算约束拍卖中，无法在满足占优策略激励相容和个体理性的同时，实现对最优社会福利的常数近似。因此，帕累托最优这一较弱的效率概念常被用作替代性的效率目标。然而，即使以帕累托最优取代最优社会福利，不可能性定理 [Myerson 和 Satterthwaite 1983] 仍然成立。此外，在采用平均情形分析的单样本情形中，近似帕累托最优（例如， [Immorlica 等人 2017]）并未直观地纳入期望。

为了发展双边市场中拍卖的基础理论，我们需要适用于高度泛化模型的结果。这些模型应允许我们利用多面体临界拍卖的优势。这意味着，某些效率保证，尤其是那些针对对称情形设计的保证（例如共同预算或估值的独立同分布），如[Devanur 等人、 2013] 以及 [Feng 和 Hartline 所提出的 2018], ，并不适用于我们的非对称情形。因此，除了帕累托最优之外，我们还需要能够适用于此类非对称性的其他效率目标。

流动福利（LW） [Dobzinski 和 Leme，2014年；Syrgkanis 和 Tardos， 2013] 是我们的效率目标候选。流动福利通过纳入支付能力（即预算）自然地扩展了社会福利。社会福利是支付意愿（即分配的商品的估值）之和，而流动福利定义为可接受支付额之和，即支付能力与支付意愿中的较小值。它被用作预算约束拍卖中的标准效率目标（例如，Fikioris 和 Tardos [2023]; Fotakis 等人 [2019]; Lu 和 Xiao [2017]）。

然而， [Myerson 和 Satterthwaite，1983年；D¨utting 等人， 2021] 关于 SW 的不可能性定理同样适用于 LW。因此，我们能够实现的最佳目标，是设计一种单样本机制，在满足占优策略激励相容、个体理性和预算平衡的同时，对最优 LW 实现常数近似。这是对 D¨utting 等人 [2021] 关于预算约束的研究的一项新颖且富有挑战性的拓展，也凸显了我们研究目标的基础性和重要性。

1.2 我们的贡献

我们研究买方和卖方数量均为多个的预算约束拍卖，其中每位卖方提供多个单位的同质商品。每位卖方的估值均来自某个分布，但

拍卖人只能获取每位卖方的单个样本。本研究首次探讨有限信息下双边市场中的预算约束拍卖。我们的主要结果是：

主定理。存在一种满足占优策略激励相容、个体理性和预算平衡的单样本机制。此外，该机制实现的 LW 期望值超过最优 LW 的 1/4，并且实现的社会福利期望值超过最优 LW 的 1/2。

该定理表明，我们成功实现了以最优 LW 为基准的常数近似目标，同时还提供了社会福利保证。Syrgkanis 和 Tardos [2013], 首次提出使用最优 LW 作为社会福利的基准，而本研究首次将这一基准应用于临界拍卖。由于当估值被修改为预算可加估值时，最优 LW 可以解释为最优社会福利，因此，这一比较提供了有价值的洞见。

由于 D¨utting 等人[2021] 以及 Liu 等人的研究结果表明，这两项保证的现有上界均为 1/2, [2023], 我们的社会福利保证甚至达到了可能的最佳水平。此外，在双边交易的情况下，我们还证明了我们机制的 LW 达到了这一比率。这证实了我们机制的效率，并凸显了其有效性。

这一结果的一个显著特点是其普适性。尽管我们的设置本身存在挑战，我们仍成功地实现了目标，涵盖商品分配受多拟阵约束的可分和不可分情形。事实上，我们的模型涵盖了许多现有预算约束拍卖研究的双边扩展，例如多单位拍卖 [Dobzinski 等人、 2012], 匹配市场 [Fiat 等人（2011 年）；Colini-Baldeschi 等人； 2015], 以及关键词广告拍卖 [Goel 等人；2015]。我们的模型也是预留交换市场 [Goel 等人； 2016]在预算方面的扩展。

我们的单样本机制建立在 D¨utting 等人 [2021], 提出的归约方法之上，该方法将 VCG 机制（针对非策略性卖方）扩展到单样本设置。鉴于在没有预算约束时，多面体临界拍卖会产生 VCG 结果，采用这一机制似乎合乎情理。然而，该机制现有的效率保证仅为帕累托最优，这与我们的目标不符。为我们的机制的效率分析奠定基础，我们为多面体临界拍卖建立了紧的流动福利（LW）和社会福利（SW）保证：

定理（定理 4.3 和 4.6，非正式表述）。多面体临界拍卖（针对可分割商品）所实现的流动福利超过最优流动福利的 1/2，且社会福利超过最优流动福利。

我们的流动福利保证大幅拓展了 Dobzinski 和 Leme [2014], 的结果；该结果聚焦于单边市场中的多单位拍卖，同时我们保持了相同的近似比。这是首个适用于多拟阵约束的流动福利保证。我们的技术贡献在于提出了新的不变性质，用于分析机制的剩余商品和支付；以往研究尚未探索这些性质，即使在我们设定的特殊情形下也未涉及。随后，我们证明 D¨utting 的归约方法同样适用于流动福利保证，并据此从该定理推导出我们的主定理。

1.3 相关工作。

双边市场中的拍卖（无预算）。著名的不可能性定理 [Myerson 和 Satterthwaite， 1983] 指明了研究方向：设计近似高效且满足其他理想性质的机制。在双边交易中，近期研究致力于提高社会福利（SW）的近似比（例如， [Blumrosen 和 Dobzinski，2021年；Kang等人，2022年；Liu 等人，2023年；Dobzinski 和 Shaulker， 2024]）或交易收益的近似比（例如，[Brustle 等人，2017年；Deng 等人，2022年；Fei， 2022]），相关工作总结见 Liu 等人 [2023]。由于重要性日益凸显，具有商品分配约束的更一般情形 [Colini-Baldeschi 等人，2016年；Braun 和 Kesselheim，2023] 以及涉及组合结构的情形 [Colini-Baldeschi 等人， 2020] 也受到关注。这些研究考虑贝叶斯设置，在这种设置下，拍卖人可以获取估值分布。

在无先验设定中，针对双向拍卖（例如， [McAfee， 1992]）和多单位拍卖（例如， [Segal-Halevi等人，2018a、2018b年]），已有满足占优策略激励相容、个体理性和预算平衡的渐近高效机制。然而，D¨utting 等人 [2021] 证明，在满足占优策略激励相容、个体理性和预算平衡的同时，不可能实现相对于最优社会福利的常数近似。随后，他们提出了采用黑箱约简方法的高效单样本机制（如 D¨utting 等人 [2017]）。在拍卖中，单样本情形常用于假设先验信息最少的情况（例如， [Dhangwatnotai 等人，2015年；Kang等人， 2022]），先知不等式中也常见此设定（例如， [Azar等人，2014年、2019年；Correa等人， 2019, 2020]）。近期，Cai 和 Wu [2023] 以及 Babaioff等人 [2024] 也研究了样本数多于一个的情形。

预算约束下的临界拍卖。Dobzinski 等人 [2012] 指出，Ausubel [2004] 提出的一种临界拍卖变体，是预算约束拍卖中实现高效机制的候选方案之一。后续研究（例如， [Bhattacharya 等人，2010年；Colini-Baldeschi 等人，2015年；D¨utting 等人，2015年；Fiat 等人，2011 年；Goel 等人，2014年、2015年、2020年；Hirai 和 Sato， 2022, 2023]）推广了这一模型和机制，它们是我们单样本机制的基石。本文第一版上传至 arXiv 后，Hirai 和 Sato [2023] 针对不可分物品提出了多面体临界拍卖，并运用我们的技术给出了流动福利和社会福利保证。本研究进一步将他们的结果推广到了单样本情形。

预算约束拍卖中的其他方法。许多研究（例如， [Abrams，2006 年；Cheng等人，2021年；Feng等人，2023年；Voudouris， 2020]）也探讨了简单机制在预算约束拍卖中的有效性，并给出了社会福利和收入方面的保证。此外，Wu等人 [2018] 关注双边市场中的采购机制。他们的设定与我们的模型大不相同：只要买方的支付不超过预算，支付就与其效用无关，而且买方不会报告与其估值相对应的报价。

1.4 论文结构。

第 2 节介绍我们的模型。第 3 节介绍多面体临界拍卖及其性质。第 4 节给出该机制的效率保证。第 5 节使用 D¨utting 的归约方法将该机制扩展到单样本设置，并给出主要结果。第6节探讨我们结果的进一步扩展与应用。第 7 节考察我们的效率保证是否达到了可能的最佳水平，并提出未来研究方向。第 8 节证明第 4 节中 LW 保证的一项关键结果。部分证明见附录。

注释。即使商品分配受到多拟阵约束，或商品不可分，或两者兼有，我们的主定理仍然成立。为简洁起见，第2至第5节中的论证仅限于没有多拟阵约束的可分割情形。随后，我们将在第6节说明如何将结果推广到这些更广泛的情形。

记号。令 R+ 和 R++ 分别表示非负实数集和正实数集，并令 Z+ 表示非负整数集。对于集合 E，令 R_+^E 表示从 E 到 R+的所有函数构成的集合。对于 $w \in \mathrm{R}_+^E$，我们常用 w_e表示 $w(e)$，并将其写作 $w = (w_e)_{e \in E}$。对于 $F \subseteq E$，令 $w(F)$表示 $w(e)$在 $e \in F$上的总和，并令 $w|_F$表示 w在 F上的限制。我们用 e表示单元素集合 $\{e\}$。由两个不相交集合 N、M 和边集$E \subseteq N \times M$构成的二分图记作 (N, M, E)。边 $(i, j) \in E$记作 ij。对于节点 $i \in N \cup M$，令$E_i \subseteq E$ 表示与 i相连的边集。同理，令 E_S 表示与 $S \subseteq N \cup M$中的节点相连的边集。对于 $S \subseteq N$，令 M_S表示 M中与 S相邻的节点集。

2 我们的模型

考虑一个由 n 个买家和 m 个卖方组成的市场，其中 n 和 m 为正整数。该市场由二分图 (N, M, E) 表示，其中节点集 $N := \{1, 2, \ldots, n\}$（分别为 $M := \{1, 2, \ldots, m\}$）表示买家（分别为卖方）集合；当且仅当买方 $i \in N$ 和卖方 $j \in M$ 有意彼此进行交易时，两者相邻。

我们考虑同质商品的多单位拍卖。每个买方 i 和卖方 j 对一单位商品分别有估值 $v_i \in \mathbb{R}_{++}$ 和 $\rho_j \in \mathbb{R}_{++}$。他们向拍卖人提交报价，买方的报价为 $v'_i \in \mathbb{R}_{++}$，卖方的报价为 $\rho'_j \in \mathbb{R}_{++}$。每位参与者（买方或卖方）都采取策略以最大化自身效用。此外，买方 i 的预算为 $B_i \in \mathbb{R}_+$，这是其可能支付金额的上限；卖方 j 拥有 $s_j \in \mathbb{R}_+$ 单位商品。分配 $\mathcal{A}$ 是一个三元组 $\mathcal{A} := (w, p, r)$，由交易向量 $w = (w_{ij})_{ij \in E}$、支付向量 $p = (p_i)_{i \in N}$ 和收入向量 $r = (r_j)_{j \in M}$ 组成，其中 $w_{ij} \in \mathbb{R}_+$ 表示买方 i 与卖方 j 之间交易的商品数量，$p_i \in \mathbb{R}_+$ 表示买方 i 的支付金额，$r_j \in \mathbb{R}_+$ 表示卖方 j 的收入。该分配必须满足预算约束 $p_i \leq B_i (i \in N)$ 和供给约束 $w(E_j) \leq s_j (j \in M)$。

参与者的效用由分配 $\mathcal{A}$ 决定。对于交易向量 w，我们定义向量 $x := (x_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}_+^N$，其定义为 $x_i := w(E_i)$，对每个 $i \in N$ 均如此；它表示分配给买方 i 的商品数量。于是，对于分配 $\mathcal{A}$，买方 i 的效用 $u_i(\mathcal{A})$ 定义为

$$u_i(\mathcal{A}) := \begin{cases} v_i x_i - p_i & \text{if } p_i \leq B_i, \\ -\infty & \text{otherwise,} \end{cases}$$

当支付不超过预算时，该效用等于分配的商品的估值减去其支付；否则，效用为 -infinity。卖方 j 的效用定义为 $u_j(\mathcal{A}) := r_j - \rho_j w(E_j)$，即其收入减去拍卖中售出商品的总估值。[1]

拍卖人能够获取的信息 $\mathcal{I}$ 定义为 $\mathcal{I} := ((N, M, E), \{v'_i\}_{i \in N}, \{B_i\}_{i \in N}, \{\rho'_j\}_{j \in M}, \{s_j\}_{j \in M})$。鉴于 Dobzinski 等人 [2012] 和 Fiat 等人 [2011]，提出的不可能性定理，我们假设预算 $\{B_i\}_{i \in N}$ 和边集 E 是公开信息。买方 i（分别为卖方 j）的估值 v_i（分别为 ρ_j）是只有该参与者才能获取的私人信息。于是，三元组 $(\mathcal{I}, \{v_i\}_{i \in N}, \{\rho_j\}_{j \in M})$ 可视为该模型的输入。机制 $\mathcal{M}$ 是一个根据信息 $\mathcal{I}$ 输出分配 $\mathcal{A}$ 的映射。接下来，我们考虑该机制的以下性质：

- 占优策略激励相容性（DSIC）：对每位参与者而言，报告其真实估值是最优策略。对于每个输入，都有 $u_i(\mathcal{M}(\mathcal{I})) \leq u_i(\mathcal{M}(\mathcal{I}_i)) (i \in N \cup M)$，其中 $\mathcal{I}_i$ 是将参与者 i 的报价替换为其估值后，从 $\mathcal{I}$ 得到的。

- 个体理性（IR）：对于每个 $i \in N \cup M$，都存在一个报价，使得 i 获得非负效用。若满足 DSIC，则对于每个输入，IR 表示为 $u_i(\mathcal{M}(\mathcal{I}_i)) \geq 0 (i \in N \cup M)$。
- 弱预算平衡（WBB）：总支付超过总收入，即 $p(N) \geq r(M)$。
- 强预算平衡（SBB）：总支付等于总收入，即 $p(N) = r(M)$。

效率是本研究的一个关键概念，其标准度量是社会福利（SW），定义为每位参与者所获分配商品的估值之和，即，

$$\mathrm{SW}(\mathcal{A}) := \sum_{i \in N} v_i x_i + \sum_{j \in M} \rho_j (s_j - w(E_j))$$

[1] 我们修改效用 Hirai 和 Sato 的卖方效用 [2022]，使得不参与时的效用为零 .

对于分配 $\mathcal{A} = (w, p, r)$。[2] 然而，众所周知，在存在预算的情况下，没有任何机制能够在满足占优策略激励相容和个体理性的同时，对最优社会福利实现常数近似（参见 Dobzinski 和 Leme 的引理 2.2 [2014]）。这一不可能性定理在我们的设定中同样成立，因此需要采用另一种效率目标。流动福利是社会福利的一种自然扩展，也是预算约束拍卖中的标准效率目标。流动福利定义如下：

$$\mathrm{LW}(\mathcal{A}) := \sum_{i \in N} \min(v_i x_i, B_i) + \sum_{j \in M} \rho_j (s_j - w(E_j)),$$

这表示可接受支付额的总和。在单边市场中，某些机制能够在满足占优策略激励相容和个体理性的同时，对最优 LW 实现常数近似（例如，[Dobzinski 和 Leme，2014]）。然而，由于 D¨utting 等人的定理 1 [2021].[3]，在没有先验信息的双边市场中，不可能在满足占优策略激励相容、个体理性和预算平衡的同时，对最优 LW 实现常数近似。

为规避 上述局限，我们假设掌握卖方估值的特定先验信息 ：

- 在第 3 节和第 4 节中，假设卖方如实报告其估值。
- 在第 5 节中，卖方估值独立地取自概率分布，且拍卖人只能从每个卖方的分布中获得单个样本。

注释。帕累托最优（PO）也被用作预算约束拍卖中的效率目标。然而，Myerson 和 Satterthwaite 的不可能性定理 [1983] 意味着，在第 5 节的设定下，无法同时满足占优策略激励相容、个体理性和预算平衡，并实现帕累托最优。

3 含真实报价卖方的多面体临床拍卖

在第 5 节中使用的 D¨utting 等人 [2021] 的归约方法中，我们需要一种适用于有多个非策略性卖方且其报价各不相同的市场的机制。这促使我们关注 Hirai 和 Sato [2022], 提出的多面体临界拍卖，它将 Goel 等人 [2015] 提出的方法扩展到了这种情形。本节将介绍 Hirai 和 Sato [2022] 提出的多面体临界拍卖，并给出一些基本性质。在第 3 节和第 4 节中，我们始终假设卖方如实报告其报价，即对于每个 $j \in M$，$\rho'_j = \rho_j$。

3.1 预处理

本文中经常采用以下预处理：添加 m 虚拟买家，然后修改市场。每个虚拟买家都与卖方 j相关联，标记为买家 $n+j$，且仅与卖方 j相邻。随后，将买家集合 N修改为 $N := \{1, 2, \ldots, n+m\}$，并将边集合 E修改为 $E := \bigcup_{j \in M} E_j \cup \{(n+j)j\}$。我们假设 $v'_{n+j} = v_{n+j} = \rho_j$，且对于每个 $j \in M$，$B_{n+j} = \infty$。此修改将卖方的报价/估值转移给虚拟买家。然后，我们考虑这个修改后的市场，不再使用卖方的报价/估值。请注意，Goel 等人 [2016] 以及 Hirai 和 Sato [2022]也采用了这些修改。

假设在拍卖结束时，所有商品都已售给买家。那么，对于卖方 $j \in M$，分配给虚拟买家 $n+j$ 的商品被视为 j的未售商品。卖方 j 的真实效用可以计算为卖方 j 和虚拟买家 $n+j$ 的效用之和，即

$$(r_j - \rho_j w(E_j)) + (v_{n+j} x_{n+j} - p_{n+j}) = (r_j - p_{n+j}) - \rho_j \left(w(E_j) - x_{n+j}\right),$$

[2]价值 $\sum_{i \in N} v_i x_i - \sum_{j \in M} \rho_j w(E_j)$ 也称为 *gains-from-trade*，这是一种常用的效率目标。一般而言，为交易收益提供理论保证比为社会福利提供理论保证更具挑战性。[3]他们的不可能性定理适用于不可分物品；由于他们针对随机机制的证明同样可作为可分割商品的证明，因此该定理涵盖了可分割商品和不可分物品。

其中，等式右侧的第一项是非虚拟买家的收入，第二项是售给非虚拟买家的商品的估值。

在这个市场中，SW 被修改为 $\mathrm{SW}(\mathcal{A}) := \sum_{i \in N} v_i x_i$。由于虚拟买家的预算是无限的，LW 也被修改为 $\mathrm{LW}(\mathcal{A}) := \sum_{i \in N} \min(v_i x_i, B_i)$。这些是在单边市场中定义的量，因此，虚拟买家使我们的双边市场更接近单边市场。

3.2 机制

机制的完整描述见算法 1。我们将该机制记为 PCA((N, M, E) v', ρ', B, s)，其中 (N, M, E) 表示（原始）市场，$v' := \{v'_i\}_{i \in N}$ 表示买家报价集合，$\rho' := \{\rho'_j\}_{j \in M}$ 表示卖家报价集合，$B := \{B_i\}_{i \in N}$ 表示买家预算集合，$s := \{s_j\}_{j \in M}$ 表示卖方供应商品数量集合。

Hirai 和 Sato 的算法 1 多面体临界拍卖 [2022]: PCA((N, M, E) v', ρ', B, s)

1：添加虚拟买家 V并构建修改后的市场（N, M, E）。2：$c_i := 0$, $d_i := \infty (i \in N)$ 和 $l := 1$。$w_{ij} := 0 (ij \in E)$，$p_i := 0$，（$i \in N$），以及 $r_j := 0 (j \in M)$。3：当 $d_i \neq 0$ 对某个 $i \in N$ 成立时，执行 4：攫取$(s, (w, p, r)$ $d, c)$。5：$c_l := c_l + \varepsilon$。6：如果 $c_l < v'_l$，则 $d_l := \Big\{ ($

$B_l - p_l)/c_l$，否则为 0。7：$l := l + 1$ 模 $m + n$。8：结束 while 9：$w^{\mathrm{f}}_{ij} := w_{ij} (ij \in E)$、$p^{\mathrm{f}}_i := p_i (i \in N)$，以及 $r^{\mathrm{f}}_j := r_j (j \in M)$。10：取消虚拟买家与卖方之间的所有交易后，输出最终分配。

变量和参数说明如下：

- (w, p, r)表示当前分配，其中 $w_{ij} \in \mathrm{R}+$ 表示买方 i 与卖方 j之间交易的商品数量，$p_i \in \mathrm{R}+$ 表示买方 i的支付，$r_j \in \mathrm{R}+$ 表示卖方 j的收入。
- $c := (c_i)_{i \in N} \in \mathrm{R}^N_+$ 表示买家的单位交易价格。对于每个 i，价格 c_i 初始为零，并在每一步增加 ε。我们假设 v' 中的所有值都是 ε的倍数。
- $d := (d_i)_{i \in N} \in \mathrm{R}^N_+$ 表示买家的需求。对于买方 i，值 d_i 表示在当前价格下，i最多可以获得的商品数量。具体而言，需求为零的买家不会获得任何商品；我们称需求降至零的买家为需求归零的买家。
- l 是当前迭代第5行中价格上涨的买方。

在第 1 行，执行第 3.1 节中的预处理，构造修改后的市场 (N, M, E)，其中集合 V表示虚拟买家的集合。随后，在这个新市场中进行以下升价拍卖。初始时，每位买方 i 都有一个价格时钟 c_i，从 0 开始并逐渐以 ε递增，且分配 (w, p, r) 全部为 0。每次迭代包含以下步骤：在第 4 行，如果满足某个条件（如下所述），买家便以当前价格获得一定数量的商品，并根据交易更新分配 (w, p, r)。在第 5 行，买方 l 的价格时钟 c_l 增加 ε，其中 l 按顺序确定。在第 6 行，她的需求 d_l 也会更新。如果仍有买家存在正需求，拍卖便进入下一次迭代。否则，在第 10 行，算法 1 终止，并在抵消所有虚拟交易后输出最终分配。

注释。本文始终在分析中将第 9 行的 $(w^{\mathrm{f}}, p^{\mathrm{f}}, r^{\mathrm{f}})$ 作为最终分配，而非第 10 行的输出。根据第 3.1 节中的预处理，第 10 行的抵消不会影响社会福利或流动福利，因此 $(w^{\mathrm{f}}, p^{\mathrm{f}}, r^{\mathrm{f}})$ 能准确反映该机制的效率。

攫取过程的描述（算法 1 的第 5 行）见算法 2。直观来说，买家会攫取不会影响其他买家的最大数量的商品。

算法 2 攫取$(s, (w, p, r)\ d, c)$

1: 对于 $i = 1, 2, \ldots, n+m$，执行

2: 攫取最大增量 $\xi_i := (\xi_{ij})_{ij \in E_i}$，使其满足 P^i_w $_{,d}(\xi_i) = P^i_{w,}{}_d(0)$（见下文）。

3: $p_i := p_i + c_i \xi_i(E_i)$ $(i \in N)$。

4: $w_{ij} := w_{ij} + \xi_{ij}$ $(ij \in E_i)$，$d_i := \begin{cases} (B_i - p_i)\ /c_i & \text{如果 } c_i < v'_i \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$ $(i \in N)$。

5: 结束循环

6: $r_j := r_j + \sum_{ij \in E_j} c_i \xi_{ij}$ $(j \in M)$.

为描述该方法，我们构造如下网络：假设 E 中的每条边均从 N指向 M。对于每个 $i \in N$，考虑其副本 i'，并用一条有向边$i'i$将其连接。添加一个源节点 s，并通过一条有向边 si'将其与每个 i' 连接。对于每个 $j \in M$，考虑其副本 j'，并用一条有向边 jj'将其连接。此外，添加一个汇点节点 t，并用一条有向边 $j't$将每个 j' 与其连接。边容量定义如下：

$$\mathrm{cap}(e) := \begin{cases} d_i & \text{if } e = i'i \text{ for } i \in N, \\ s_j - w(E_j) & \text{if } e = jj' \text{ for } j \in M, \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

所得网络 $\mathcal{N}$ 如图1所示。

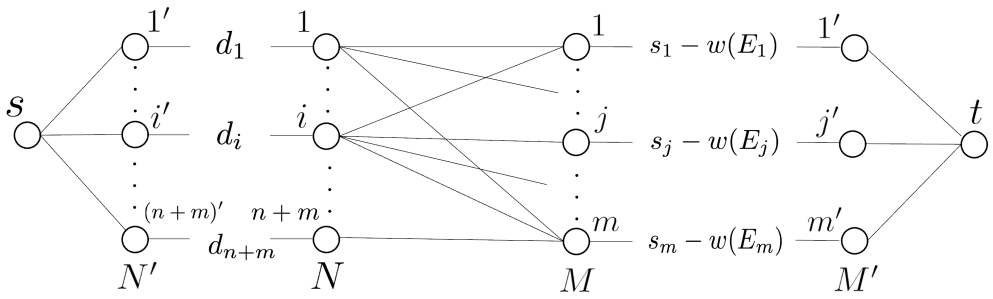


图1：所得网络 $\mathcal{N}$。

对于向量 $\kappa_i := (\kappa_{ij})_{ij \in E_i} \in \mathbf{R}_+^{E_i}$，我们定义多面体 $P^i_{w,\ d}(\kappa_i)$ 如下：

$$P^i_{w,\ d}(\kappa_i) := \{u \in \mathbf{R}_+^{N \setminus i} \mid \exists \psi : \text{flow in network } \mathcal{N}, \psi(i'i) = \kappa_i(E_i), \psi(k'k) = u_k \ (k \in N \setminus i)$$

它表示在本次迭代中，若买方 i 攫取 $\kappa_i \in \mathbf{R}_+^{E_i}$，买家 $N \setminus i$ 未来可能进行的交易。于是，成交条件可描述为 $P^i_{w,\ d}(\kappa_i) = P^i_{w,\ d}(0)$。满足该条件的 κ_i 集合称为临界分配多面体，即 $P^i_{w,\ d} := \{\kappa_i \in \mathbf{R}_+^{E_i} : P^i_{w,\ d}(\kappa_i) = P^i_{w,\ d}(0)\}$。在算法 2 的第 2 行，从 $P^i_{w,\ d}$ 中选取一个极大向量 $\xi_i = (\xi_{ij})_{ij \in E_i}$。

令 $f\colon 2^N \to \mathbb{R}_+$ 为由 $f(S) := \sum_{j \in M_S} s_j (S \subseteq N)$ 定义的单调次模函数。[4]该函数表示供给约束所引起的、对分配给买家的商品数量的限制。[5] 算法 2 的关键特征概述如下：

定理 3.1（Hirai 和 Sato [2022]）。在算法 2 中，以下结论成立：

(i) 可以在多项式时间内计算向量 $\xi_i \in P^i_{w,d}$。

(ii) 对任意 $\xi_i \in P^i_{w,d}$，均有 $\xi(E_i) = f_{x,d}(N) - f_{x,d}(N \setminus i)$ $(i \in N)$，其中 $f_{x,d}$也是一个单调次模函数，表示买家 S 未来可以交易的商品数量（在 x 和 d条件下），其表达式为

$$f_{x,d}(S) := \min_{S' \subseteq S} \{ \min_{S'' \supseteq S'} \{ f(S'') - x(S'') \} + d(S \setminus S') \} \quad (S \subseteq N). \tag{1}$$

(iii) 对每个卖方 $j \in M$，当 $c_{n+j} < \rho_j$ 时，对于所有 $ij \in E_j \setminus (n+j)j$，均有 $\xi_{ij} = 0$.

注释。定理 3.1 (i) 表明，每次迭代都可以在多项式时间内计算。虽然算法 1 的迭代次数没有非平凡的上界，但在不可分情形（见第 6.2 节）中，迭代次数以参与者和商品数量的多项式为上界。在这种情形下，整个过程可在多项式时间内运行。

现在总结算法 1 的关键性质。令 $x^{\mathrm{f}} \in \mathbb{R}^N_+$表示买家（包括虚拟买家）的商品最终分配，其中 $x^{\mathrm{f}}_i = w^{\mathrm{f}}(E_i)$ $(i \in N)$。在下文的论证中，根据买家的占优策略激励相容性，我们不失一般性地假设，对于每个 $i \in N$，$v'_i = v_i$。

定理 3.2（Hirai 和 Sato [2022]）。在算法 1 中，以下结论成立：

(i) 该机制满足买家的占优策略激励相容性、个体理性和强预算平衡。

(ii) 拍卖结束时所有商品均已售出，即 $x^{\mathrm{f}}(N) = f(N) = \sum_{j \in M} s_j$。

接下来，我们介绍一种结构性质，以进一步揭示最终分配的特点。具体而言，该性质意味着：(i) 在更高价格下需求归零的买家会分配到更多商品；(ii) 估值高于其需求归零时价格的买家会耗尽其全部预算。这一性质在临界拍卖的效率论证中发挥着关键作用，尤其是在证明帕累托最优方面。在本文余下部分中，若集合 $\mathcal{T} \subseteq N$ 满足 $x^{\mathrm{f}}(\mathcal{T}) = f(\mathcal{T})$，则称其为紧集。

命题 3.3（Goel 等人 [2014, 2015]；Hirai 和 Sato [2022]）。令 $i_1, i_2, \ldots, i_\tau$为算法 1 第 6 行中需求归零的买家，并按需求归零的逆序排列，即 $v_{i_1} \geq v_{i_2} \geq \ldots \geq v_{i_\tau}$。对于每个 $k \in \{1, 2, \ldots, \tau\}$，令 $\mathcal{T}_k$表示买家 i_k需求归零前一刻具有正需求的买家集合。那么，以下结论成立：

(i) $\emptyset = \mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{T}_\tau = N$是一个紧集链，即对于每个 k，$x^{\mathrm{f}}(\mathcal{T}_k) = f(\mathcal{T}_k)$。

(ii) 对于每个 k，均有 $i_k \in \mathcal{T}_k \setminus \mathcal{T}_{k-1}$ 和 $p^{\mathrm{f}}_{i_k} < B_{i_k}$。

(iii) 对于每个 k和 $i \in \mathcal{T}_k \setminus (\mathcal{T}_{k-1} \cup i_k)$，均有 $v_i \geq v_{i_k}$和 $p^{\mathrm{f}}_i = B_i$。特别地，买家 i在买家 i_k 于第 6 行需求归零之后紧接着的那次迭代中，于第 4 行退出。

图 2 展示了紧集链。对于每个 k，集合 $\mathcal{T}_k$ 包含在算法 1 的第 6 行中 i_k 被移除之前具有正需求的买家。买家 i_k 在仍有部分预算剩余时退出，即 $p^{\mathrm{f}}_{i_k} < B_{i_k}$；而每个买家 $i \in \mathcal{T}_k \setminus (\mathcal{T}_{k-1} \cup i_k)$ 都会耗尽其预算，即 $p^{\mathrm{f}}_i = B_i$。

[4]单调次模函数 $f\colon 2^N \to \mathbb{R}_+$ 是满足以下条件的函数：(i) $f(\emptyset) = 0$，(ii) $f(S) \leq f(T)$ $(S \subseteq T \subseteq N)$，以及 (iii) $f(S \cup i) - f(S) \geq f(T \cup i) - f(T)$ $(S, T \subseteq N, S \subseteq T, i \in N \setminus T)$。[5]对于可行分配 w，满足 $x_i = w(E_i)$ $(i \in N)$ 的向量 x 满足 $x(S) \leq f(S)$ $(S \subseteq N)$。此外，如果某个 x满足该不等式，则存在满足供给约束的分配 w，且该分配满足 $x_i = w(E_i)$ $(i \in N)$。

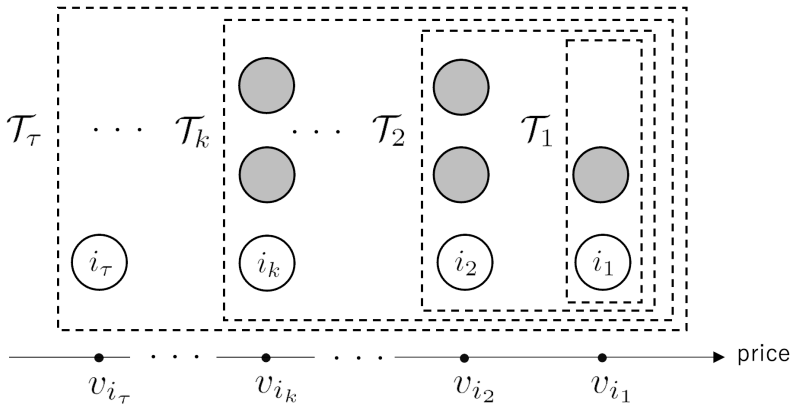


图 2：算法 1 中紧集链和买家需求归零的示意图。白色圆圈表示 $\{i_1, i_2, \ldots, i_\tau\}$ 中的买家，灰色阴影圆圈表示其他买家。

4 E多面体临界拍卖的效率保证 s

我们的单样本扩展存在一个问题：多面体攫取拍卖现有的效率保证依赖于帕累托最优（PO），而帕累托最优无法与 D¨utting 等人 [2021] 的约简方法结合。在本节中，我们为该机制建立两类效率保证。

4.1 最优流动性福利

最优 LW 值被用作我们效率保证的基准。它可以解释为：将每个买家的估值函数修改为预算可加函数后得到的最优社会福利值。需要注意的是，先前的研究（例如 [Lehmann 等人，2006]）也曾考虑过这种修改，以便将预算约束拍卖转化为无预算拍卖。

为准备效率保证，我们构造一个能够达到最优 LW 值的分配。由于 LW 仅取决于分配给买家的商品总数，我们将重点放在这一数量上，并称其为 LW 最优分配。鉴于拍卖人可以获得参与者的估值，该分配可以按如下方式构造：首先，执行第 3.1 节中的预处理，以构造一个带有虚拟买家的修改后市场（N、M、E）。随后，根据买家估值的降序将商品分配给买家。对于每个 $i \in N$，分配 B_i/v_i 与根据供给约束所能分配的最大数量中的较小值。对于买家 i，定义集合 $H_i \subseteq N$ 如下：$H_i := \{k \in N : v_k > v_i\} \cup \{k \in N : v_k = v_i \text{ 以及 } k > i\}$。于是，LW 最优分配可表示为以下显式形式。需要注意的是，证明使用了多拟阵理论的一些基本事实，因此给出于附录 C。

命题 4.1。LW 最优分配 $x^* := (x_i^*)_{i\in N}$ 递归定义如下：

$$x_i^* = \min\left(B_i/v_i,\ \min_{H\subseteq H_i}\{f(H\cup i) - x^*(H)\}\right)\ (i \in N).$$

在此分配中，有 $x^*(S) \le f(S)$ $(S \subseteq N)$ 且 $x^*(N) = f(N)$ $(= \sum_{j\in M} s_j)$。此外，对于满足 $v_i \le \min_{j\in M} \rho_j$ 的非虚拟买家 i，有 $x_i^* = 0$。

利用这一 LW 最优分配，我们说明 x^* 与 x^{f}之间的关系。回想一下，x^{f}表示算法 1 第 9 行中分配给买家的商品数量，即 $x_i^{\mathrm{f}} = w^{\mathrm{f}}(E_i)$ $(i \in N)$。

以下命题表明，在该机制中分配到的商品多于 LW 最优分配中分配到的商品的买家，在 LW 最优分配中也获得了其全部容量。

命题 4.2. 对于买方 $i \in N$，若 $x_i^{\mathrm{f}} > x_i^*$，则 $x_i^* = B_i/v_i$. 成立。此外，对于任意虚拟买家 $i \in V$，$x_i^{\mathrm{f}} \le x_i^* < B_i/v_i$成立。

证明. 假设存在一个买方 ℓ，满足 $x_\ell^{\mathrm{f}} > x_\ell^*$和 $x_\ell^* \neq B_\ell/v_\ell$。设对于某个 $k \in \{1, 2, \ldots, \tau\}$，有 $\ell \in \mathcal{T}_k \setminus \mathcal{T}_{k-1}$，其中 $\mathcal{T}_0$、$\mathcal{T}_1$、.....、$\mathcal{T}_\tau$是命题 3.3 中的紧集链。根据命题 4.1，存在一个集合 $H \subseteq H_\ell$，使得 $x_\ell^* = f(H \cup \ell) - x^*(H) < B_\ell/v_\ell$。根据 H_ℓ 的定义，对于每个 $i \in H_\ell \setminus \mathcal{T}_{k-1}$，必有 $i \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_\tau\}$，这根据命题 3.3 (iii) 意味着 $p_i^{\mathrm{f}} = B_i$。因此，根据 $x_i^{\mathrm{f}} \ge p_i^{\mathrm{f}}/v_i$ （买家的个体理性），我们有

$$x^{\mathrm{f}}(H \setminus \mathcal{T}_{k-1}) \ge \sum_{i \in H \setminus \mathcal{T}_{k-1}} p_i^{\mathrm{f}}/v_i = \sum_{i \in H \setminus \mathcal{T}_{k-1}} B_i/v_i \ge x^*(H \setminus \mathcal{T}_{k-1}),$$

其中，最后一个不等式由命题 4.1 得出。将此与 $x_\ell^{\mathrm{f}} > x_\ell^*$ 结合，我们得到

$$x^*((H \cup \ell) \setminus \mathcal{T}_{k-1}) < x^{\mathrm{f}}((H \cup \ell) \setminus \mathcal{T}_{k-1}) \le f((H \cup \ell) \cup \mathcal{T}_{k-1}) - f(\mathcal{T}_{k-1}) \le f(H \cup \ell) - f(H \cap \mathcal{T}_{k-1}),$$

其中，第二个不等式由可行性约束和 $\mathcal{T}_{k-1}$ 的紧性得出，最后一个不等式则由 $\ell \notin \mathcal{T}_{k-1}$ 和 f 的次模性得出。根据 $x^*(H \cup \ell) = f(H \cup \ell)$，我们得到

$$f(H \cup \ell) - x^*((H \cup \ell) \setminus \mathcal{T}_{k-1}) + x^*(H \cap \mathcal{T}_{k-1}) < f(H \cup \ell) - f(H \cap \mathcal{T}_{k-1}) + x^*(H \cap \mathcal{T}_{k-1}$$

因此，我们有 $x^*(H \cap \mathcal{T}_{k-1}) > f(H \cap \mathcal{T}_{k-1})$，这与可行性约束矛盾。

根据命题 4.1，对任意 $i \in V$，都有 $x_i^* \le f(i) < B_i/v_i = \infty$。由第一个陈述的逆否命题，我们得到 $x_i^{\mathrm{f}} \le x_i^* < B_i/v_i$。 □

4.2 LW 保证

现在我们给出多面体临界拍卖的 LW 保证。令 $\mathrm{LW}^{\mathrm{PCA}((N,M,E),v,\rho,B,s)}$表示 PCA$((N, M, E)\ v, \rho, B, s)$ 所得分配的 LW，令 $\mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}((N,M,E),v,\rho,B,s)}$ 表示相同输入下的最优 LW。在上下文明确时，我们通常分别将它们记为 $\mathrm{LW}^{\mathrm{PCA}}$ 和 $\mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}}$。此外，令 v_{max} （分别为 v_{min}）表示买家（包括虚拟买家）估值的最大值（分别为最小值）。本节的主要结果如下：

定理 4.3。若 $\varepsilon \le v_{min}^2/(v_{max} - v_{min})$，则有 $\mathrm{LW}^{\mathrm{PCA}} \ge 1/2\ \mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}}$。

注意，ε 是算法 1 中每次迭代时价格的增量。以下示例表明，关于 ε 的条件以及定理 4.3 中的 LW 保证都是紧的。

例 4.4. 考虑一个由两位买家和一位卖家组成的多单位拍卖，商品分配不受约束。买家 1 的估值为 $v_{min} + \varepsilon$，且预算无限。买家 2 的估值为 v_{max}，预算为 v_{min}。卖家提供一单位商品，估值为 v_{min}。那么，在 LW 最优分配中，根据命题 4.1，买家 1 获得 $1 - v_{min}/v_{max}$单位，买家 2 获得 v_{min}/v_{max} 单位。因此，$\mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}} = v_{min} + (v_{min} + \varepsilon)\,(1 - v_{min}/v_{max})$。在算法 1 中，当虚拟买家的价格时钟等于 v_{min} 时，她退出拍卖。同理，当买家 1 的价格时钟等于 $v_{min} + \varepsilon$ 时，她也退出拍卖，买家 2 则以 v_{min} 的价格赢得一单位商品。因此，我们有 $\mathrm{LW}^{\mathrm{PCA}} = \min(v_{max}, v_{min}) = v_{min}$。如果$\varepsilon > v_{min}^2/(v_{max} - v_{min})$，则有

$$\mathrm{LW}^{\mathrm{PCA}} = v_{min} < \frac{1}{2}\left(v_{min} + (v_{min} + \varepsilon)\,(1 - v_{min}/v_{max})\right) = \frac{1}{2}\ \mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}}.$$

此外，如果 $\varepsilon = v_{min}^2/(v_{max} - v_{min})$，则有

$$\mathrm{LW}^{\mathrm{PCA}} = v_{min} = \frac{1}{2}\left(v_{min} + (v_{min} + \varepsilon)\left(1 - v_{min}/v_{max}\right)\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}}.$$

利用以下定理，我们首先证明定理 4.3。该定理给出了机制总支付的一个下界，这是首个（非平凡的）支付保证。

定理 4.5。 若 $\varepsilon \le v_{min}^2/(v_{max} - v_{min})$，则有 $\sum_{x_i^{\mathrm{f}} > x_i^*} p_i^{\mathrm{f}} \ge \sum_{i \in N; x_i^{\mathrm{f}} \le x_i^*} v_i(x_i^* - x_i^{\mathrm{f}})$。

定理 4.3 的证明。由命题 4.2 可知，对于每个虚拟买家 $i \in V$，都有 $x_i^{\mathrm{f}} \le x_i^*$。因此，买家集合 $\{i \in N; x_i^{\mathrm{f}} > x_i^*\}$ 仅包含非虚拟买家。对于每个非虚拟买家 $i \in N \setminus V$，由买家个体理性（定理 3.2 (i)）可得 $v_i x_i^{\mathrm{f}} \ge p_i^{\mathrm{f}}$。根据 $B_i \ge p_i^{\mathrm{f}}$（预算可行性），有 $\min(v_i x_i^{\mathrm{f}}, B_i) \ge p_i^{\mathrm{f}}$。因此，利用定理 4.5，我们得到

$$\mathrm{LW}^{\mathrm{PCA}} \ge \sum_{i \in N; x_i^{\mathrm{f}} > x_i^*} \min(v_i x_i^{\mathrm{f}}, B_i) \ge \sum_{i \in N; x_i^{\mathrm{f}} > x_i^*} p_i^{\mathrm{f}} \ge \sum_{i \in N; x_i^{\mathrm{f}} \le x_i^*} v_i(x_i^* - x_i^{\mathrm{f}}). \tag{2}$$

对于具有 $x_i^{\mathrm{f}} \le x_i^*$ 的买方 $i \in N$，根据命题 4.1，有 $x_i^{\mathrm{f}} \le x_i^* \le B_i/v_i$，因此 $\min(v_i x_i^*, B_i) = v_i x_i^*$，且 $\min(v_i x_i^{\mathrm{f}}, B_i) = v_i x_i^{\mathrm{f}}$。然后，我们还有

$$\sum_{i \in N; x_i^{\mathrm{f}} \le x_i^*} v_i(x_i^* - x_i^{\mathrm{f}}) = \sum_{i \in N; x_i^{\mathrm{f}} \le x_i^*} \Big(\min(v_i x_i^*, B_i) - \min(v_i x_i^{\mathrm{f}}, B_i)\Big) \ge \mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}} - \mathrm{LW}^{\mathrm{PCA}}.$$

结合式 (2)，我们有 $\mathrm{LW}^{\mathrm{PCA}} \ge \frac{1}{2}\,\mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}}$。 □

与表 1 中的结果相比，定理 4.3 大幅扩展了 Dobzinski 和 Leme 的结果 [2014], ，同时也是多拟阵约束下首个 LW 保证。在他们的设定中，命题 3.3 还附带一项额外性质：对于 $k \ge 2$ （在 $\tau \ge 2$ 的情况下），有 $\mathcal{T}_k \setminus \mathcal{T}_{k-1} = i_k$，从而使结构更为简单。这使他们仅凭命题 3.3 就能证明定理 4.3。然而，这一性质在我们的一般设定中并不成立，因此我们需要考虑命题 4.1 和命题 4.2，以及定理 4.5。具体而言，定理 4.5 极具挑战性，

表 1：临界拍卖中的流动福利保证

	Dobzinski 和 Leme [2014]	我们的结果
近似比	1/2 近似	
机制	自适应临界拍卖 [Bhattacharya 等人， 2010]	多面体临界拍卖 [Hirai 和 Sato， 2022]
卖家数量	One	多个
环境	多单位	拟阵多面体

其证明详见第 8 节，关键步骤总结如下。

- 在第8.1节中，我们给出了 $f_{x,\ d}$ 在公式 (1) 中表示的更简单公式，其中 x 和 d 分别表示算法 1 的一次迭代中分配的商品数量和买家的需求量。
- 在第8.2节中，我们证明，对于买家集合 S，他们未来能够交易的剩余商品数量至少为 $\sum_{i \in S}(x_i^* - x_i)$，这些商品将以更高的价格出售。

- 在第8.3节中，我们通过反向归纳，为机制中的未来支付构造了一个不变不等式；这意味着归纳从拍卖结束时开始。
- 在第8.4节中，我们通过考察初始步骤，得到了总支付的下界。

这些分析是本文的主要技术贡献，也可能有助于研究该机制的其他性质，尤其是支付方面的性质。

4.3 社会福利保证

在定理 4.3 中，我们给出了多面体临界拍卖的紧致 LW 保证。根据 LW 的定义，LW 的损失由以下两种情况之一造成：(i) 向高估值买家分配的商品数量超过预算除以估值所得的数量；或 (ii) 向低估值买家分配商品，而他们在 LW 最优分配中获得的商品数量很少。命题 4.2 的第一条结论意味着，LW 的损失是由 (i) 造成的。向高估值买家过度分配商品的倾向意味着，所分配商品的估值总和会很高。这促使我们研究该机制的社会福利。

将 PCA((N, M, E) v, ρ, B, s) 的社会福利记为 $\mathrm{SW}^{\mathrm{PCA}((N,M,E),v,\rho,B,s)}$；上下文明确时，也简记为 $\mathrm{SW}^{\mathrm{PCA}}$ 。我们还给出了该机制的紧致社会福利保证。

定理 4.6. 成立 $\mathrm{SW}^{\mathrm{PCA}} = \sum_{i\in N} v_i x_i^{\mathrm{f}} \geq \sum_{i\in N} v_i x_i^* = \mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}}$.

如果所有买家的预算都足够大，那么 $\mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}}$ 恰好等于至少为 $\mathrm{SW}^{\mathrm{PCA}}$的最优 SW。因此，这一社会福利保证也是紧的。这意味着该机制具有很高的效率，因为最优 LW 可以视为社会福利的一个合理基准。

证明. 我们用数学归纳法证明，对于每个 $k \in \{0, 1, 2, \ldots, \tau\}$，都有

$$\sum_{i\in\mathcal{T}_k} v_i x_i^{\mathrm{f}} \geq \sum_{i\in\mathcal{T}_k} v_i x_i^* + v_{i_k}(x^{\mathrm{f}}(\mathcal{T}_k) - x^*(\mathcal{T}_k)). \tag{3}$$

当 $k = 0$ 时，由于根据 $\mathcal{T}_0 = \emptyset$ （其中我们令 $v_{i_0} := v_{i_1}$），两边均等于 0，因此有 (3)。假设该不等式对 $k-1$ 成立。由命题 3.3 (i)，有 $x^{\mathrm{f}}(\mathcal{T}_{k-1}) = f(\mathcal{T}_{k-1}) \geq x^*(\mathcal{T}_{k-1})$，且 $x^{\mathrm{f}}(\mathcal{T}_k) = f(\mathcal{T}_k) \geq x^*(\mathcal{T}_k)$。因此，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\mathcal{T}_k} v_i(x_i^{\mathrm{f}} - x_i^*) &\geq v_{i_{k-1}}(x^{\mathrm{f}}(\mathcal{T}_{k-1}) - x^*(\mathcal{T}_{k-1})) + \sum_{i\in\mathcal{T}_k\setminus\mathcal{T}_{k-1}} v_i(x_i^{\mathrm{f}} - x_i^*) \\ &\geq v_{i_k}(x^{\mathrm{f}}(\mathcal{T}_{k-1}) - x^*(\mathcal{T}_{k-1})) + \sum_{i\in\mathcal{T}_k\setminus\mathcal{T}_{k-1}} v_{i_k}(x_i^{\mathrm{f}} - x_i^*) = v_{i_k}(x^{\mathrm{f}}(\mathcal{T}_\tau) - x^*(\mathcal{T}_\tau),\end{aligned}$$

其中，第一个不等式由归纳法得出，第二个不等式则由命题 3.3 (iii) 和 $x_i^{\mathrm{f}} \geq x_i^* (i \in \mathcal{T}_k \setminus (\mathcal{T}_{k-1} \cup i_k))$（根据 x^* 的定义）对每个 $i \in \mathcal{T}_k$ 由 $v_i \geq v_{i_k}$ 得出。因此，对每个 $k \in \{0, 1, 2, \ldots, \tau\}$，式 (3) 均成立。最后，由于 $\mathcal{T}_\tau = N$，根据定理 3.2 (ii) 和命题 4.1，有 $x^{\mathrm{f}}(\mathcal{T}_\tau) = f(N) = x^*(\mathcal{T}_\tau)$。因此，我们有 $\sum_{i\in N} v_i x_i^{\mathrm{f}} \geq \sum_{i\in N} v_i x_i^*$。 □

5 多面体攫取拍卖的单样本扩展

本节中，我们利用第 4 节的效率保证，将多面体临界拍卖扩展为一种高效的单样本机制。值得注意的是，我们首次在单样本假设下研究双边市场中的预算约束拍卖。

5.1 单样本假设

我们考虑以下关于卖方估值的假设:

假设 5.1。卖方 $j \in M$ 的估值独立地取自概率分布 G_j，且拍卖人可以从每个卖方 $j \in M$的分布 G_j 中获取一个单个样本 $\tilde{\rho}_j \sim G_j$，尽管拍卖人无法访问这些分布 $G := \{G_j\}_{j\in M}$。

注释 5.2。该设定比贝叶斯设定更一般，因为拍卖人不了解分布 G，而且如果拍卖人知道 G，就可以获得这些单个样本。这意味着 Myerson 和 Satterthwaite 的不可能性定理 [仍然成立。就一般性而言，该设定介于贝叶斯设置和无先验设定之间。

令 $\tilde{\rho} := \{\tilde{\rho}_j\}_{j\in M}$ 表示卖方估值的单个样本。于是，拍卖人可获得的信息变为 $\mathcal{I}\cup\tilde{\rho}$，而输入到我们的模型中的内容变为（$\mathcal{I}$，$\tilde{\rho}$，$v$，$\rho$，$G$）。˜单样本机制 $\mathcal{M}$ 是一个将该信息 $\mathcal{I}\cup\tilde{\rho}$ 映射到分配 $\mathcal{A}$的映射。

理想性质和效率目标的定义保持不变。相比之下，效率是根据估值和样本实现值的期望来评估的。下文中，我们固定关于买家和分布的信息 G，并改变卖方的估值和˜样本值。若单样本机制 $\mathcal{M}$ 满足占优策略激励相容，则该机制的 LW 和 SW 期望值分别记为

$$\mathbb{E}_{\rho,\tilde{\rho}\sim G}\left[\mathrm{LW}^{\tilde{\mathcal{M}}((N,M,E),\rho,\tilde{\rho},s)}\right] \text{ and } \mathbb{E}_{\rho,\tilde{\rho}\sim G}\left[\mathrm{SW}^{\tilde{\mathcal{M}}((N,M,E),\rho,\tilde{\rho},s)}\right],$$

。我们希望以最优 LW 的期望值作为基准来评估这些期望值，记为 $\mathbb{E}_{\rho\sim G}\left[\mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}((N,M,E),\rho,s)}\right]$。

为避免分析期望值，我们采用以下技巧，仅用成对输入即可评估效率。设 ρ^a 和 ρ^b 是从卖方分布中实现的两组价值。我们考虑模型的两个输入。在第一个（分别为第二个）输入中，ρ^a（分别为ρ^b）用作样本，而 ρ^b（分别为 ρ^a）用作估值。这两个输入的其余部分相同。我们将机制在这两个输入下实现的效率目标之和，与相同输入下最优 LW 值之和进行比较。以下引理表明，如果在这些成对输入下实现了某个近似比，那么该比率在期望意义下也成立。将机制的 LW 替换为其 SW 时，结论同样成立。

˜引理 5.3. 设 $\mathcal{M}: \mathcal{I}\cup\tilde{\rho}\to\mathcal{A}$ 是满足占优策略激励相容的单样本机制。设 α 是满足 $\alpha \geq 1$ 的某个正数。假设

$$\mathrm{LW}^{\tilde{\mathcal{M}}((N,M,E),\rho^a,\rho^b,s)} + \mathrm{LW}^{\tilde{\mathcal{M}}((N,M,E),\rho^b,\rho^a,s)} \geq \frac{1}{\alpha}(\mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}((N,M,E),\rho^a,s)} + \mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}((N,M,E),\rho^b,s)}) \quad (4)$$

对于任意满足 ρ^a_j、$\rho^b_j \sim G_j$ 的随机变量 ρ^a、ρ^b，对每个 $j \in M$ 都成立。于是，有

$$\mathbb{E}_{\rho,\tilde{\rho}\sim G}[\mathrm{LW}^{\tilde{\mathcal{M}}((N,M,E),\rho,\tilde{\rho},s)}] \geq \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}_{\rho\sim G}[\mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}((N,M,E),\rho,s)}].$$

证明. 根据对称性，$(\rho,\tilde{\rho}) = (\rho^a,\rho^b)$ 和 $(\rho,\tilde{\rho}) = (\rho^b,\rho^a)$ 的概率相同，即 ρ^a 和 ρ^b 从同一分布 G 中独立抽取。因此，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\rho^a,\rho^b\sim G}[\mathrm{LW}^{\tilde{\mathcal{M}}((N,M,E),\rho^a,\rho^b,s)}] &= \frac{1}{2}\mathbb{E}_{\rho^a,\rho^b\sim G}[\mathrm{LW}^{\tilde{\mathcal{M}}((N,M,E),\rho^a,\rho^b,s)} + \mathrm{LW}^{\tilde{\mathcal{M}}((N,M,E),\rho^a,\rho^b,s)}] \\
&\geq \frac{1}{2\alpha}\mathbb{E}_{\rho^a,\rho^b\sim G}[\mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}((N,M,E),\rho^a,s)} + \mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}((N,M,E),\rho^b,s)}] \\
&= \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}_{\rho^a\sim G}[\mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}((N,M,E),\rho^a,s)}],
\end{aligned}$$

其中，不等式由式 (4) 得出。 □

5.2 我们的机制

我们的单样本机制 $\mathrm{M}_{\mathrm{sample}}$ 由算法 1 与 D¨utting 等人 [2021]提出的归约方法相结合得到。在该机制中，首先提取卖方，然后对提取出的卖方执行多面体临界拍卖。对于卖方集合 $M' \subseteq M$，令 $\mathrm{PCA}|_{M'}(\rho')$ 表示 $\mathrm{PCA}((N, M', E'), v, \rho'_{M'}, B, s_{M'})$，其中 $E' := \{ij \in E\colon\ j \in M'\}$，$\rho'_{M'} := \{\rho'_j\}_{j \in M'}$，$s_{M'} := \{s_j\}_{j \in M'}$。这对应于在仅由 M' 中卖方组成的市场上执行多面体临界拍卖，并假设卖方的报价为 ρ'。

机制 $\mathrm{M}_{\mathrm{sample}}$ 的完整描述见算法 3。现在我们概述

算法 3 单样本机制 $\mathrm{M}_{\mathrm{sample}}((N, M, E), v, \rho', \tilde{\rho}, B, s)$

1: 提取卖方集合 $M' := \{j \in M\colon\ \tilde{\rho}_j \geq \rho'_j\}$。

2: 执行 $PCA|_{M'}(\tilde{\rho})$，并为所提取的市场获得分配 (w, p, r)。

3: $= \begin{cases} w^{\mathrm{f}}_{ij} : & w_{ij} \quad \text{如果 } j \in M' \\ & 0 \quad \text{o.w.} \end{cases} (ij \in E)$，$p^{\mathrm{f}}_i := p_i \ (i \in N)$，$r^{\mathrm{f}}_j := \begin{cases} \tilde{\rho}_j w^{\mathrm{f}}(E_j) & j \in M' \\ 0 & \text{如果 ow} \end{cases}$，$(j \in M)$。

机制。在第 1 行，抽取样本值高于其报价的卖方。在第 2 行，执行多面体临界拍卖，其中市场和约束被限制在抽取出的卖方范围内，并将卖方的报价替换为其样本值。随后，得到受限市场的分配 (w, p, r)。在第 3 行，将此分配扩展到原始市场。第 1 行中未被抽取的卖方，其分配均设为零。此外，还会降低被抽取卖方的收入，使单位价格等于其样本值；这是保证卖方占优策略激励相容所必需的。[6]随后，得到最终分配 $(w^{\mathrm{f}}, p^{\mathrm{f}}, r^{\mathrm{f}})$。

在本节余下部分，我们将探讨这一机制的性质。首先，我们重点考察机制 $\mathrm{M}_{\mathrm{sample}}$的基本性质。

定理 5.4. 机制 $\mathrm{M}_{\mathrm{sample}}$ 满足占优策略激励相容、个体理性和弱预算平衡。

证明. 在机制 $\mathrm{M}_{\mathrm{sample}}$中，分配的商品数量和每位买家的支付均与第 2 行得到的结果相同。因此，根据定理 3.2 (i)，机制 $\mathrm{M}_{\mathrm{sample}}$ 满足占优策略激励相容和买家个体理性。此外，每位卖方的报价仅用于决定该卖方是否参与拍卖，且收入与报价无关。如果卖方 j 的估值 ρ_j 大于 $\tilde{\rho}_j$，她会选择不参与，因为她不愿以价格$\tilde{\rho}_j$出售自己的商品。如果 ρ_j等于或低于 $\tilde{\rho}_j$，她愿意以 $\tilde{\rho}_j$出售自己的商品。无论哪种情况，卖方 j 的最优选择都是真实出价 $\rho'_j = \rho_j$，且她不会以低于自身估值的价格出售商品。因此，该机制也满足占优策略激励相容和卖方个体理性。

设 (w, p, r) 为第 2 行得到的分配。根据多面体临界拍卖的 SBB（定理 3.2 (i)），总支付 $\sum_{i \in N} p_i$ 等于总收入 $\sum_{j \in M'} r_j$。根据卖方个体理性的 $r_j \geq \tilde{\rho}_j w(E' \cap E_j)$ $(j \in M')$，我们有

$$\sum_{i \in N} p^{\mathrm{f}}_i = \sum_{i \in N} p_i = \sum_{j \in M'} r_j \geq \sum_{j \in M} \tilde{\rho}_j w(E' \cap E_j) = \sum_{j \in M} \tilde{\rho}_j w^{\mathrm{f}}(E_j) = \sum_{j \in M} r^{\mathrm{f}}_j.$$

因此，该机制满足 WBB。 □

接下来，我们证明，D¨utting 等人 [2021], 提出的归约方法使用 VCG 机制并提供强社会福利保证，在应用于预算约束下的多面体攫取拍卖时，也能提供强 LW 保证。

[6]假设卖方的减少收入是拍卖人的收入。我们可以将其随机分配给一位卖方。在这种情况下，该机制满足 SBB。

为了分析机制 $\mathbf{M}_{\text{sample}}$ 的效率保证，我们使用成对输入。设 ρ^a 和 ρ^b 是任意随机变量，且对每个 $j \in M$ 都有 ρ_j^a、$\rho_j^b \sim G_j$。当上下文清楚时，我们分别用 LW $\tilde{\mathcal{M}}_{((N,M,E)\ \rho^a,\rho^b,s)}$ 和 LW $^{\text{OPT}((N,M,E),\rho^a,s)}$ 表示 LW $\tilde{\mathcal{M}}_{(\rho^a,\rho^b)}$ 和 $\text{LW}^{\text{OPT}(\rho^a)}$。我们的目标是建立以下效率保证：

定理 5.5。在机制 $\mathbf{M}_{\text{sample}}$ 中，以下结论成立：

(i) $\text{LW}^{\mathbf{M}_{\text{sample}}\ (\rho^a,\ \rho^b)} + \text{LW}^{\mathbf{M}_{\text{sample}}\ (\rho^b,\ \rho^a)} \geq \frac{1}{4}(\text{LW}^{\text{OPT}(\rho^a)} + \text{LW}^{\text{OPT}(\rho^b)})$。
(ii) $\text{SW}^{\mathbf{M}_{\text{sample}}\ (\rho^a,\ \rho^b)} + \text{SW}^{\mathbf{M}_{\text{sample}}\ (\rho^b,\ \rho^a)} \geq \frac{1}{2}(\text{LW}^{\text{OPT}(\rho^a)} + \text{LW}^{\text{OPT}(\rho^b)})$。

请注意，这些效率保证是定理 4.3 和 4.6 的一半，这与 D¨utting 等人 [2021] 的定理 2 一致。效率损失源于算法 3 第 1 行中卖方的删除。根据引理 5.3，我们可以看出，该机制期望实现超过最优 LW 四分之一的 LW，以及超过最优 LW 二分之一的 SW。然后，根据定理 5.4，我们证明了主定理中的所有性质。此外，以下示例表明，上述效率保证是紧的。

例 5.6. 考虑有两位买家和一位卖方的多单位拍卖。买家 1 的估值为 1，且预算无限；买家 2 的估值为 k ($k \geq 1$)，预算为 1。卖方拥有一单位商品。对于任意小的正数 $\Delta \ll 1$，我们考虑两种情况：$(\rho_1, \tilde{\rho}_1) = (\Delta, 2\Delta)$ 和 $(\rho_j, \tilde{\rho}_j) = (2\Delta, \Delta)$。那么，在这两种情况下，最优 LW 都是 $2 - 1/k$，因为 $\Delta \ll 1$。

如果 $(\rho_1, \tilde{\rho}_1) = (\Delta, 2\Delta)$，那么卖方参与拍卖并出售商品；当买家 1 的价格达到 1 时，所有商品都分配给买家 2。在这种情况下，LW 为 $\min(k, 1) = 1$，而 SW 为 k。如果 $(\rho_1, \tilde{\rho}_1) = (2\Delta, \Delta)$，那么卖方不参与拍卖。在这种情况下，LW 和 SW 均为 2Δ。因此，有

$$\text{LW}^{\mathbf{M}_{\text{sample}}(2\Delta,\Delta)} + \text{LW}^{\mathbf{M}_{\text{sample}}(\Delta,2\Delta)} = 1 + 2\Delta \leq \frac{1+2\Delta}{2(2-1/k)}(\text{LW}^{\text{OPT}(2\Delta)} + \text{LW}^{\text{OPT}(\Delta)}).$$

取 $k \to \infty$ 和 $\Delta \to 0$，我们有 $\frac{1+2\Delta}{2(2-1/k)} \to \frac{1}{4}$。此外，还有

$$\text{SW}^{\mathbf{M}_{\text{sample}}(2\Delta,\Delta)} + \text{SW}^{\mathbf{M}_{\text{sample}}(\Delta,2\Delta)} = k + 2\Delta \leq \frac{k+2\Delta}{2(2-1/k)}(\text{LW}^{\text{OPT}(2\Delta)} + \text{LW}^{\text{OPT}(\Delta)}).$$

取 $k \to 1$ 和 $\Delta \to 0$，我们有 $\frac{k+2\Delta}{2(2-1/k)} \to \frac{1}{2}$。因此，我们的效率保证是紧的。

现在我们证明定理 5.5。令 $\text{LW}^{\text{PCA}|_{M'}(\rho')}$ 表示执行 $\text{PCA}|_{M'}(\rho')$ 所获得的 LW 值。以下引理给出了机制 $\mathbf{M}_{\text{sample}}$ 的 LW 与算法 1 的 LW 之间的关系。定义 $M_a := \{j \in M\colon \rho_j^a \geq \rho_j^b\}$ 和 $M_b := \{j \in M\colon \rho_j^a \leq \rho_j^b\}$。注意，如果将 LW 替换为 SW，同样的论证也成立。

引理 5.7。在机制 $\mathbf{M}_{\text{sample}}$中，有

$$\text{LW}^{\mathbf{M}_{\text{sample}}(\rho^a,\rho^b)} + \text{LW}^{\mathbf{M}_{\text{sample}}(\rho^b,\rho^a)} \geq \text{LW}^{\text{PCA}|_{M_a}(\rho_a)} + \text{LW}^{\text{PCA}|_{M_b}(\rho_b)}.$$

证明。令 $x^a := \{x_j^a\}_{j\in M_a}$（分别为 $x^b := \{x_j^b\}_{j\in M_b}$）表示算法 3 第 2 行中 $\text{PCA}|_{M_a}(\rho_a)$（分别为 $\text{PCA}|_{M_b}(\rho_b)$）内卖方的未售商品数量，该数量也表示与 M_a（分别为 M_b）中的卖方相对应的虚拟买家所获得的分配的商品数量。

在 $\mathbf{M}_{\text{sample}}((N, M, E)\ v, \rho^a, \rho^b, B, s)$ 中，买家（包括虚拟买家）的分配与 $\text{PCA}|_{M_b}(\rho_b)$ 的分配相同。然而，M_b 中卖方的估值实际上是 ρ^a，而非多面体临界拍卖中使用的 ρ^b

此外， $M \setminus M_b$ 中的卖方不参与拍卖，因此其商品在拍卖结束时仍未售出。因此，机制 $\mathbf{M}_{\text{sample}}((N, M, E)\ v, \rho^a, \rho^b, B, s)$ 所产生分配的流动福利（LW）表示为

$$\mathrm{LW}^{\mathbf{M}_{\text{sample}}(\rho^a,\rho^b)} = \mathrm{LW}^{\mathrm{PCA}|_{M_b}(\rho_b)} - \sum_{j\in M_b}(\rho_j^b - \rho_j^a)x_j^b + \sum_{j\in M\setminus M_b}\rho_j^a s_j. \tag{5}$$

类似地，交换 ρ^a 和 ρ^b后，我们也有

$$\mathrm{LW}^{\mathbf{M}_{\text{sample}}(\rho^b,\rho^a)} = \mathrm{LW}^{\mathrm{PCA}|_{M_a}(\rho_a)} - \sum_{j\in M_a}(\rho_j^a - \rho_j^b)x_j^a + \sum_{j\in M\setminus M_a}\rho_j^b s_j. \tag{6}$$

根据 $M_a = (M \setminus M_b) \cup \{j \in M\colon \rho_j^a = \rho_j^b\}$ 和 $M_b = (M \setminus M_a) \cup \{j \in M\colon \rho_j^a = \rho_j^b\}$，我们有

$$\sum_{j\in M_b}(\rho_j^b - \rho_j^a)x_j^b = \sum_{j\in M\setminus M_a}(\rho_j^b - \rho_j^a)x_j^b \quad \text{and} \quad \sum_{j\in M_a}(\rho_j^a - \rho_j^b)x_j^a = \sum_{j\in M\setminus M_b}(\rho_j^a - \rho_j^b)x_j^a.$$

结合供给约束 $x_j^b \le s_j$ 和 $x_j^a \le s_j$ （对每个 $j \in M$），我们有

$$-\sum_{j\in M_b}(\rho_j^b - \rho_j^a)x_j^b + \sum_{j\in M\setminus M_b}\rho_j^a s_j - \sum_{j\in M_a}(\rho_j^a - \rho_j^b)x_j^a + \sum_{j\in M\setminus M_a}\rho_j^b s_j \ge 0. \tag{7}$$

将 (5)、(6) 和 (7) 相加，得到

$$\mathrm{LW}^{\mathbf{M}_{\text{sample}}(\rho^a,\rho^b)} + \mathrm{LW}^{\mathbf{M}_{\text{sample}}(\rho^b,\rho^a)} \ge \mathrm{LW}^{\mathrm{PCA}|_{M_a}(\rho_a)} + \mathrm{LW}^{\mathrm{PCA}|_{M_b}(\rho_b)}.$$

□

令 $\mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}|_{M'}(\rho)}$ 表示卖方仅限于$M' \subseteq M$ 且估值为 $\rho|_{M'}$的市场中的最优 LW 值。我们还将使用以下关于最优 LW 的性质。

引理 5.8. 对于最优 LW 值，有

$$\mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}|_{M_a}(\rho^a)} + \mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}|_{M_b}(\rho^b)} \ge \frac{1}{2}(\mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}(\rho^a)} + \mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}(\rho^b)}).$$

证明见附录 C。利用这一引理，我们给出定理 5.5 的证明。

定理 5.5 的证明。(i)：由定理 4.3 可得：

$$\mathrm{LW}^{\mathrm{PCA}|_{M_a}(\rho_a)} \ge \frac{1}{2}\mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}|_{M_a}(\rho^a)} \quad \text{and} \quad \mathrm{LW}^{\mathrm{PCA}|_{M_b}(\rho_b)} \ge \frac{1}{2}\mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}|_{M_b}(\rho^b)}. \tag{8}$$

结合引理 5.7，可得：

$$\begin{aligned}\mathrm{LW}^{\mathbf{M}_{\text{sample}}(\rho^a,\rho^b)} + \mathrm{LW}^{\mathbf{M}_{\text{sample}}(\rho^b,\rho^a)} &\ge \frac{1}{2}(\mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}|_{M_a}(\rho^a)} + \mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}|_{M_b}(\rho^b)}) \\ &\ge \frac{1}{4}(\mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}(\rho^a)} + \mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}(\rho^b)}),\end{aligned}$$

其中，第二个不等式由引理 5.8 得出。

(ii)：在性质 (i) 的证明中，我们可以用下式替换 (8)：

$$\mathrm{SW}^{\mathrm{PCA}|_{M_a}(\rho_a)} \ge \mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}|_{M_a}(\rho^a)} \quad \text{and} \quad \mathrm{SW}^{\mathrm{PCA}|_{M_b}(\rho_b)} \ge \mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}|_{M_b}(\rho^b)},$$

其中 h 由定理 4.6 可得。根据引理 5.7（针对社会福利）和 5.8，性质（ii）也成立 s. □

6 进一步扩展

在本节中，我们 将我们的结果扩展到多拟阵约束和不可分物品的情形 .

6.1 多拟阵约束

我们的结果可以轻松扩展到多拟阵约束，这是临界拍卖所处理的最一般化设置。在附录 B 中，对于不熟悉多面体拟阵理论的读者，我们简要总结了与本研究相关的理论基础。

我们不再考虑供给约束 $w(E_j) \leq s_j (j \in M)$，而是考虑每个卖方 j 的交易 $w|_{E_j}$ 受定义在 E_j 上的多拟阵 P_j 约束的情形，即 $w|_{E_j} \in P_j (j \in M)$。[7]定义该多拟阵 P_j 的单调次模函数记为 f_j。因此，卖方 j 的供给 s_j 表示为 $f_j(E_j)$。如 Hirai 和 Sato [2022], 所述，经过以下修改，算法 1 可在多拟阵约束下输出可行分配。值得注意的是，只需将 $f(S) := \sum_{j \in M_S} s_j$ 替换为 $f(S) := f_j(E_j \cap E_S)$，我们的所有技术结果都可以直接扩展到这一情形。这样，第 3 至第 5 节以及第 8 节中的所有证明均无需修改即可成立。这意味着，即使存在多拟阵约束，我们的单样本机制也同样适用，并且定理 5.5 的效率保证立即成立。

算法的输入。我们用 $P := \{w \in \mathbf{R}_+^E : w|_{E_j} \in P_j (j \in M)\}$代替 s。此外，在算法 3 中，使用 $P_{M'} := \{w \in \mathbf{R}_+^{E'} : w|_{E_j} \in P_j (j \in M')\}$ 代替 $s_{M'}$。

预处理（第 1 行）。除第 3.1 节中的修改外，我们还将 $f_j (j \in M)$扩展为

$$f_j(F) := \begin{cases} f_j(E_j) & \text{if } (n+j)j \in F, \\ f_j(F) & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (F \subseteq E_j \cup \{(n+j)j\}).$$

多拟阵 P_j 也根据 f_j进行了扩展。

在攫取过程中构造网络 $\mathcal{N}$ （第 4 行）。对于多拟阵 $\{P_j\}_{j \in M}$、交易向量 w和需求向量 d，我们按如下方式构造多拟阵网络 $\mathcal{N}$：假设 E中的每条边都从 N指向 M。对于每个 $i \in N$，考虑其副本 i'，并用一条有向边 $i'i$将其连接起来。添加一个源节点 s，并通过有向边 si'将其与每个 $i' \in N'$ 连接起来。此外，添加一个汇节点 t，并通过有向边 jt将每个 $j \in M$ 连接到该汇节点。边容量定义为

$$\mathrm{cap}(e) := \begin{cases} d_i & \text{if } e = i'i \text{ for } i \in N, \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

对于多拟阵 P_j 和交易向量 w，定义多面体 $P_{j,\,w}$，它以多拟阵约束的形式表示卖方 j 在 E_j 上的可行未来交易：

$$P_{j,w} := \{w' \in \mathbf{R}_+^{E_j} : w|_{E_j} + w' \in P_j\}.$$

该多面体由向量 $w|_{E_j}$ 收缩得到，因此是一个多拟阵（见附录 B）。对于卖方 $j \in M$，我们将基集为 $\delta_j^- = E_j$ 的多拟阵设为 $P_{j,\,w}$，并将基集为 δ_j^+的多拟阵定义为由边容量确定。其他节点对应的多拟阵也由边容量确定。所得网络如图 3 所示。

[7]在这种设定下，由于 Fiat 等人提出的不可能性定理，假设多拟阵是公开的。 [2011] .

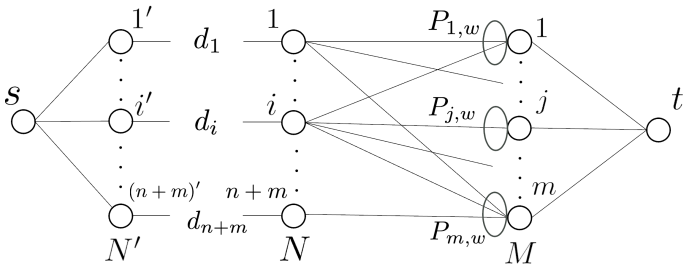


图 3：拟阵多面体网络 $\mathcal{N}$。

现在我们考虑 $\mathcal{N}$中的最大流值。定义函数 $g_{w,\ d}: \mathrm{R}_+^E \to \mathrm{R}_+$ 为

$$g_{w,d}(F) := \max_{\psi:\ \text{flow in}\mathcal{N}} \psi(F) \quad (F \subseteq E).$$

通过求解最大多拟阵流问题，Hirai 和 Sato [2022] 证明，对于每个$F \subseteq E$，只要给定$f_j(j \in M)$的值预言机，就可以在多项式时间内计算值 $g_{w,\ d}(F)$。特别地，$g_{w,\ d}(F)$可表示为：

$$g_{w,d}(F) = \min_{S \subseteq N_F} \{ \min_{F' \supseteq E_S \cap F} \{ \sum_{j \in M} f_j(F' \cap E_j) - w(F') \} + d(N_F \setminus S) \} \quad (F \subseteq E), \tag{9}$$

其中，N_F表示 N 中与 F相邻的节点集合。他们还证明，临界分配多面体$P^i_{w,\ d}$是一个多拟阵，而定义$P^i_{w,\ d}$的次模函数$g^i_{w,\ d}$：$2^{E_i} \to \mathrm{R}_+$由$g^i_{w,\ d}(F) = g_{w,\ d}(E_{N\setminus i} \cup F) - g_{w,\ d}(E_{N\setminus i})$给出。该结果被用于证明定理 3.1。

6.2 不可分物品

Hirai 和 Sato [2023] 针对单边市场中的不可分物品提出了多面体临界拍卖。他们将我们的技术与其原创贡献相结合，以应对不可分割性带来的挑战，从而拓展了我们的效率保证。他们的结果不仅表明了我们在第 8 节中所用方法的有效性，也显示出将我们的结果扩展到不可分割情形的潜力；在该情形下，给定 $s_j \in \mathrm{Z}_+ (j \in M)$后， w 必须是整数向量。现在，我们将 Hirai 和 Sato [2022] 的多维临界分配融入 Hirai 和 Sato [2023]开发的机制中，说明如何将我们的结果扩展到这一情形。与第 3 节和第 4 节一样，我们首先考虑诚实卖方的情形，即 $\rho_j = \rho'_j (j \in M)$。

现在我们提出算法 1 的不可分割扩展，其完整描述见算法 4。该机制的执行过程概述如下：在第 1 行，再次执行第 3.1 节的预处理，以构造一个修改后的市场。此后，整个过程与 Hirai 和 Sato [2023] 的机制类似，不过分配从 (x, π) 改为 (w, p, r)。与算法 1 一样，价格时钟 $c \in \mathrm{R}_+$ 表示单位交易价格，并从零开始逐渐升高。对于当前价格 c，确定需求 $d := (d_i)_{i \in N}$。在一次迭代开始时，价格时钟 c 会持续升高，直到出现一个满足 $c = v'_k$或 $d_k = (B_k - p_k)/c$的买方 k。随后更新这些买家的需求，并在第 8 行和第 12 行直接应用算法 2。处理完需求更新的两种情形后，如果存在正需求的买方，则进行下一次迭代；否则，机制终止。与可分割情形一样，在分析中，我们将第 15 行的 $(w^{\mathrm{f}}, p^{\mathrm{f}}, r^{\mathrm{f}})$ 用作最终分配。

注释。每次迭代中，需求总和至少减少 1。因此，算法 4 至多经过 $(n+m)\sum_{j \in M} s_j + (n+m)$ 次迭代后终止。由于每次迭代都能在多项式时间内完成，整个过程也能在多项式时间内完成。

Al法 4 算法1的不可分扩展： $\mathrm{PCA}_{\mathrm{ind}}((N, M, E)\ v', \rho', B, s$)

1: 添加虚拟买家 V并构造修改后的市场 (N, M, E)。 2: $d_i := \sum_{j \in M_i} s_j + 1\ (i \in N)$ and $c := 0$. 3: $p_i := 0, (i \in N), r_j := 0 (j \in M)$ and $w_{ij} := 0 (ij \in E)$. 4: 当存在活跃买家时执行 5: 提高 c，直到出现一个满足 $v'_k = c$ 或 $d_k = \frac{B_k - p_k}{c}$的活跃买家 k。 6: 当存在满足 $v'_k = c$ 的 $\exists$ 活跃买家 k 时执行 7: 选取这样一位买家 k，并令 $d_k := 0$。 8: 攫取$(s, (w, p, r)\ d, c)$。 9: 结束 while 10: 当存在满足 $d_k = \frac{B_k - p_k}{c}$的 $\exists$ 活跃买家 k 时执行 11: 选取这样一位买家 k，并令 $d_k := d_k - 1$。 12: 攫取$(s, (w, p, r)\ d, c)$。 13: 结束 while 14: 结束 while 15: $w^{\mathrm{f}}_{ij} := w_{ij} (ij \in E)$, $p^{\mathrm{f}}_i := p_i (i \in N)$, and $r^{\mathrm{f}}_j := r_j (j \in M)$. 16: 取消虚拟买家与卖方之间的所有交易后，输出最终分配

s.

我们首先验证最终分配满足整数约束。鉴于对每个 j， $s_j \in \mathbf{Z}_+$，若 w 和 d 都是整数向量，则式 (9) 中的函数 $f_{x,d}$ 和 $g_{w,d}$ 也取整数值。这意味着，在算法 2 中，临界分配多面体成为一个整数拟阵，其中可通过贪心过程计算极大整数向量 $\xi_i \in P^i_{w,d} (i \in N)$。因此， ξ_i 也是整数向量，从而 w 和 d 都仍为整数向量。由于初始时 w 和 d 是整数向量，$f_{x,d}$ 和 $g_{w,d}$ 在整个过程中都保持整数值。因此，以下结论成立：

引理6.1. 在算法 4 的整个过程中，所有向量 w、 d 和 $\xi_i\ (i \in N)$ 都保持为整数。

效率保证可以直接借鉴 Hirai 和 Sato [2023]的结果。为说明这一点，考虑一个称为约化单边市场的市场，它是通过第 3.1 节中的预处理并将所有卖方合并为一个而构造的。于是，Hirai 和 Sato [2023]的机制适用于该市场，并令 $(\tilde{x}^{\mathrm{f}}, \tilde{\pi}^{\mathrm{f}})$ 为最终分配，其中 $\tilde{x}^{\mathrm{f}} \in \mathbf{Z}^N_+$ 和 $\tilde{\pi}^{\mathrm{f}} \in \mathbf{R}^N_+$分别表示分配的商品总数和买家的支付。则在相同输入下，$(\tilde{x}^{\mathrm{f}}, \tilde{\pi}^{\mathrm{f}})$ 与 $(w^{\mathrm{f}}, p^{\mathrm{f}}, r^{\mathrm{f}})$ 满足以下关系。

定理 6.2. 对每个 $i \in N$，均有 $\tilde{x}^{\mathrm{f}}_i = w^{\mathrm{f}}(E_i)$ 和 $\tilde{\pi}^{\mathrm{f}}_i = p^{\mathrm{f}}_i$

这一性质与 Hirai 和 Sato [2022], 的定理 7 相同，其证明可以直接改编用于这一不可分情形。这意味着，对于该约化单边市场中买家的最终分配，所有相关性质在算法 4 中也成立。由于 Hirai 和 Sato[2023] 将我们的定理 4.3 和 4.6 推广到了他们的不可分情形，这些定理对算法 4 也成立。值得注意的是，他们还证明了这些保证在不可分情形下也是紧的。

根据定理 6.2，占优策略激励相容和买家个体理性也成立。由于定理 3.1 (iii) 意味着卖方个体理性，且强预算平衡显然成立，因此该机制满足买方的占优策略激励相容、个体理性和强预算平衡。因此，单样本扩展所需的所有性质在该机制中均成立。

将算法 3 中的算法 1 替换为算法 4，即可轻松将算法 3 扩展到不可分割情形。由于第 5 节的所有证明仍然成立，主定理也同样成立。虽然这一扩展在技术上是通过 Hirai 和 Sato [2022], 提出的方法实现的，但它对于说明可分情形和不可分

情形下可以获得相同的理论结果尤其有益，因为不可分割性往往会带来一些困难。结合第 6.1 节中的方法，我们还可以处理拟阵多面体情形和不可分割情形。现在我们给出例 5.6 中对应的不可分情形的一个例子。

例 6.3。考虑一个有两个买家和一个卖方的多单位拍卖。卖方拥有 k单位商品。买家 1 的估值为 1，预算为 k；买家 2 的估值为 k ($k \geq 1$)，预算为 k。对于任意小的正数 $\Delta \ll 1$，我们考虑两种情况：(ρ_1, $\tilde{\rho}_1$) $= (\Delta, 2\Delta)$ 和 $(\rho_j, \tilde{\rho}_j) = (2\Delta, \Delta)$。在这两种情况下，最优 LW 都是 $2k-1$，因为 $\Delta \ll 1$。

如果 $(\rho_1, \tilde{\rho}_1) = (\Delta, 2\Delta)$，那么卖方参与拍卖并出售她的商品；当价格为 1 时，所有商品都分配给买家 2。在这种情况下，LW 为 $\min(k, k) = k$，而 SW 为 k^2。如果 $(\rho_1, \tilde{\rho}_1) = (2\Delta, \Delta)$，那么卖方不参与拍卖。在这种情况下，LW 和 SW 都是 2Δ。因此，有

$$\mathrm{LW}^{\mathbf{M}_{\mathrm{sample}}(2\Delta,\Delta)} + \mathrm{LW}^{\mathbf{M}_{\mathrm{sample}}(\Delta,2\Delta)} = k + 2\Delta \leq \frac{k+2\Delta}{2(2k-1)}(\mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}(2\Delta)} + \mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}(\Delta)}).$$

取 $k \to \infty$ 和 $\Delta \to 0$，我们有 $\frac{1+2\Delta/k}{2}(2-1/k) \to \frac{1}{4}$。此外，

$$\mathrm{SW}^{\mathbf{M}_{\mathrm{sample}}(2\Delta,\Delta)} + \mathrm{SW}^{\mathbf{M}_{\mathrm{sample}}(\Delta,2\Delta)} = k^2 + 2\Delta \leq \frac{k^2+2\Delta}{2(2k-1)}(\mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}(2\Delta)} + \mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}(\Delta)}).$$

取 $k \to 1$ 和 $\Delta \to 0$，我们有 $\frac{k^2+2\Delta}{2\ 2k-1}() \to \frac{1}{2}$。因此，我们的效率保证在不可分情形下同样是紧的。

6.3 应用：广告位拍卖

这些扩展使我们能够处理 Hirai 和 Sato 提出的广告位分配实际应用[2022], ，即使在单样本假设下也适用。[8] 我们不仅能够处理广告位不可分的情形，也能处理广告位可按时间或其他标准进行划分的情形。

考虑一个广告交易市场，其中某些时段的广告位会预先分配给广告主。假设每个发布商 j 在其网站上提供广告位，这些广告位由若干页面$\{1, 2, \ldots, \beta_j\}$组成，其中每个页面 $k \in \{1, 2, \ldots, \beta_j\}$ 包含 $t_j^k \in$Z+ 个广告位。我们施加一项限制，使每位广告主在每个页面最多购买一个广告位，从而确保同一广告不会在同一页面上多次出现；这可能更符合广告主的偏好。此限制可以通过为卖方 j 定义次模函数 f_j 来实现：

$$f_j(F_j) = \sum_{k=1}^{\beta_j} \min(t_j^k, |F_j|) \quad (F_j \subseteq E_j).$$

在 Hirai 和 Sato [2022], 中，也提出了更复杂的方法：先分配广告曝光，再根据这些广告曝光分配广告位。这种方法考虑了单个广告位估值的差异。

7 讨论

在前文中，我们确立了多面体攫取拍卖的效率保证，并将其扩展为一种高效的单样本机制。本研究首次探讨

[8]这些也是 Colini-Baldeschi 等人 [2015] 和 Goel 等人 [2015所研究广告拍卖的双边扩展].

单样本假设下双边市场中的预算约束拍卖。此外，我们的结果适用于多拟阵约束，且适用于可分割商品和不可分物品，因此能够处理展示广告中的实际应用。如例5.6和例6.3所示，我们的机制所具备的所有效率保证都是紧的。下文将讨论是否达到了可能的最佳保证，并概述未来研究的一些方向。

我们首先考察买方与卖方之间的一笔双边交易，其中卖方提供一单位商品。D¨utting 等人 [2021] 证明，任何单样本机制——即拍卖人只能获取卖方的样本价值——在满足占优策略激励相容、个体理性和预算平衡的同时，都无法使其对最优社会福利达到优于 1/2 近似的效果。即使商品可分，Liu 等人 [2023] 的结果也意味着，如果所有交易价格都独立于报价，这一界限仍然成立。这些结果表明，我们在定理 5.5 中给出的社会福利保证已达到最佳可能界限。由于买方预算无限时最优 LW 等于最优社会福利，因此 LW 的近似比上界也至多为 1/2。在附录A中，我们进一步证明，在双边交易中（包括可分割情形），我们的机制对最优 LW 达到 1/2 近似，这同样是最佳可能结果。

在更一般的情形下，我们的机制仍能保持社会福利保证，并且即使在多拟阵约束下，也能实现最优保证。然而，对于 LW 保证，我们在定理 5.5 中给出的保证与上述上界之间仍存在差距。Lu 和 Xiao [2015] 针对单边市场提出的一种机制，其 LW 保证优于临界拍卖（尽管目前尚不适用于拟阵多面体情形），因此，双边市场中或许也存在类似机制。寻找这样的机制是未来研究的一个有前景的方向。即使找到了此类机制，我们仍认为，由于广泛适用性，我们的机制依然有价值。

改进上界是另一个引人入胜且颇具挑战性的方向。解决这一问题需要研究规模更大的实例，因为我们的机制在双边交易中已经实现了最优结果。此前关于双边市场中上界和不可能性定理的研究，大多基于双边交易；要突破某些障碍，至关重要的是探索其他情形。具体而言，可能有必要分析交易价格不仅取决于样本值，还取决于预算等诸多其他因素的机制。通过推进上述某一方向来弥合这一差距，仍是一个重要的开放问题。

另一个方向涉及预算平衡性质。虽然我们的机制满足 WBB，但最强的形式——直接交易强预算平衡（DSBB）——要求货币转移只能通过参与者之间的直接交易进行，正如 Colini-Baldeschi 等人所提出的那样[2020]。探索一种机制能否同时满足占优策略激励相容、个体理性和 DSBB，同时实现对最优 LW 的常数近似，是一个很有前景的研究方向。开发满足这些标准的单个样本机制，仍然是未来研究的一项重要挑战。

8 定理 4.5 的证明

按照第 4.2 节中的提纲，我们证明定理 4.5，这是我们的主要技术贡献。我们关注对于算法 1 的任意迭代都成立的不变性质。值得注意的是，即使在我们所研究设定的特殊情形下，下面所示的此类性质也尚未得到确立。

8.1 函数 $f_{x,d}$ 的更简单公式

设 (w, p, r) 和 d 分别是算法 1 某次迭代中的分配和需求。此外，对于交易向量 w，定义 $x := (x_i)_{i \in N}$，其中 $x_i = w(E_i)$ $(i \in N)$。我们的第一个结果涉及函数 $f_{x,\,d}$ 的基本性质。具体而言，我们发现定理 3.1 中的公式 (1)

可以利用“不会影响其他买家”的成交条件加以简化。这一结果或许能清楚地阐明临界框架的关键特征。

定理 8.1。在算法 1 的整个执行过程中，对于每个 $S \subseteq N$，均有

$$f_{x,d}(S) = \min_{S' \subseteq S} \{f(S') - x(S') + d(S \setminus S')\}. \tag{10}$$

这一性质有助于分析分配给买家的商品总数及其支付。特别地，我们利用该定理证明命题 8.4。现在我们用数学归纳法证明定理 8.1。为简化记号，我们将算法 2 中买方 i 的交易向量 ξ_i 定义为 $\delta := (\delta_i)_{i \in N}$，其中 $\delta_i = \xi_i(E_i)$ $(i \in N)$。于是，有如下结论：

引理 8.2。对于任意满足 $S \subset T$ 的 $S, T \subseteq N$，在该迭代中有 $\delta(T \setminus S) \leq f_{x,\, d}(T) - f_{x,\, d}(S)$。

证明。设对于某个正整数 q，有 $T \setminus S = \{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_q\}$。根据定理 3.1 (ii)，对于每个 $\ell \in T \setminus S$，均有 $\delta_\ell = f_{x,\, d}(N) - f_{x,\, d}(N \setminus \ell)$。于是，我们得到

$$\begin{aligned}\delta(T \setminus S) &= \sum_{\ell \in T \setminus S} (f_{x,d}(N) - f_{x,d}(N \setminus \ell)) \\ &\leq f_{x,d}(T) - f_{x,d}(T \setminus \ell_1) + f_{x,d}(T \setminus \ell_1) - \cdots + f_{x,d}(S \cup \ell_q) - f_{x,d}(S) = f_{x,d}(T) - f_{x,d}(S),\end{aligned}$$

其中，不等式由f_x的次模性d成立。 □

定理 8.1 的证明。在算法 1 开始时，根据 $x_i = 0$ 对每个 $i \in N$ 以及 f的单调性，对于每个 $S \subseteq N$，我们有 $\min_{S' \supseteq S}\{f(S') - x(S')\} = \min_{S' \supseteq S}\{f(S')\} = f(S)$。我们证明，如果在执行某一步之前，(10) 对任意 $S \subseteq N$ 成立，那么执行该步骤后它仍然成立。

（i）买家在第 4 行获得 δ 数量的商品：根据归纳假设，存在 $S' \subseteq S$，使得在第 4 行之前，对于每个 $S \subseteq N$ 都有$f_{x,\, d}(S) = f(S') - x(S') + d(S \setminus S')$。当每个买家$i \in S$ 获得 δ_i时， x_i 增加 δ_i，而 d_i 减少 δ_i。令 $\tilde{x}$ 和 d 分别表示该次迭代第 4 行之后的分配和需求。无论这些买家属于 S' 还是 $S \setminus S'$，都有

$$\min_{S' \subseteq S}\{f(S') - \tilde{x}(S') + \tilde{d}(S \setminus S')\} = \min_{S' \subseteq S}\{f(S') - x(S') + d(S \setminus S')\} - \delta(S) = f_{x,d}(S) - \delta(S). \tag{11}$$

反设 (10) 在第 4 行之后不成立。那么，我们有

$$f_{\tilde{x},\tilde{d}}(S) < \min_{S' \subseteq S}\{f(S') - \tilde{x}(S') + \tilde{d}(S \setminus S')\} = f_{x,d}(S) - \delta(S). \tag{12}$$

现在我们使用以下断言，其证明见附录 C。

断言 8.3. 在 (1) 中，如果 $f_{x,d}(S) < \min_{S' \subseteq S}\{f(S') - x(S') + d(S \setminus S')\}$ for some $S \subseteq N$, then there exist$S^* \subseteq S$and $S^\dagger \supset S^*$such that $S^\dagger \setminus S \neq \emptyset$, $(S^\dagger \setminus S^*) \cap S = \emptyset$, and $f_{x,d}(S) = f(S^\dagger) - x(S^\dagger) + d(S \setminus S^*)$.

定义 $T := S^\dagger \cup (S \setminus S^*)$。由 $T \subseteq N$，(11) 对 T也成立，因此我们有

$$f_{\tilde{x},\tilde{d}}(S) = f(S^\dagger) - \tilde{x}(S^\dagger) + \tilde{d}(S \setminus S^*) \geq \min_{T' \subseteq T}\{f(T') - \tilde{x}(T') + \tilde{d}(T \setminus T')\} = f_{x,d}(T) - \delta(T).$$

由 (12)，我们有 $f_{x,d}(S) - \delta(S) > f_{x,d}(T) - \delta(T)$。由 $S \subset (S^\dagger \setminus S^*) \cup S = S^\dagger \cup (S \setminus S^*) = T$，我们有$\delta(T \setminus S) > f_{x,d}(T) - f_{x,d}(S)$，这与引理 8.2 矛盾。因此，(10) 在第 4 行之后也成立。(ii) 第 5 行中买方 l 的价格更新：由于 x 和 d 不变，(10) 仍然成立。

(iii) 第 6 行中买方 l 的需求更新：令 d' 表示更新后买家的需求。则对每个 $i \in N \setminus l$，均有 $d'_l < d_l$ 和 $d'_i = d_i$。只需考虑 $l \in S$的情形。如果

$l \in S'$ 在需求更新后的 (1) 中成立，根据 $d_l > d'_l$，更新前也有 $l \in S'$ 成立，因此$f_{x,d'}(S) = f_{x,d}(S)$。如果 $l \in S \setminus S'$ 在需求更新后的 (1) 中成立，则有 $f_{x,d'}(S) = f_{x,d}(S \setminus l) + d'_l$。因此，我们有 $f_{x,d'}(S) = \min\{f_{x,d}(S)$ $f_{x,d}(S \setminus l) + d'_l\} = \min_{S' \subseteq S}\{f(S') - x(S') + d'(S \setminus S')\}$，这意味着 (10) 在第 6 行执行后也成立。

因此，如果在某个步骤执行之前，式 (10) 对任意 $S \subseteq N$ 都成立，那么该步骤执行之后也成立。 □

8.2 剩余商品的数量

现在我们给出剩余商品数量的一个下界。令 $X := \{i \in N\colon d_i > 0\}$ 表示活跃买家的集合，即具有正需求的买家。利用定理 8.1，我们现在证明，在机制的任意一次迭代中，活跃买家 S 的剩余商品数量至少等于 $x(S)$ 与 $x^*(S)$ 之差。

Pr命题 8.4. 在算法 1 的整个执行过程中，以下结论成立：

(i) $f_{x,d}(N) = f(N) - x(N)$ 成立。

(ii) $f_{x,d}(X) = f(N) - x(X) - x^{\mathrm{f}}(N \setminus X)$ 成立。特别地，$f_{x,d}(X)$ 不受算法 1 第 6 行需求更新的影响。

(iii) 对任意 $S \subseteq X$，都有 $f_{x,\,d}(S) \geq x^*(S) - x(S)$。

证明。(i) 该性质可直接由 Goel 等人的引理 4.17 [2014]与 Hirai 和 Sato 的定理 7 [2022]结合得到。

(ii) 对于 $i \in N \setminus X$，有 $d_i = 0$。于是，根据定理 8.1，有

$$f_{x,d}(X) = \min_{S \subseteq X}\{f(S) - x(S) + d(X \setminus S)\} = \min_{S \subseteq X}\{f(S) - x(S) + d(X \setminus S)\} + d(N \setminus X) \geq f_{x,d}(N).$$

根据 $f_{x,\,d}$ 的单调性，我们有 $f_{x,\,d}(X) = f_{x,\,d}(N)$。此外，根据 (i)，我们有 $f_{x,\,d}(X) = f_{x,\,d}(N) = f(N) - x(N) = f(N) - x(X) - x^{\mathrm{f}}(N \setminus X)$。第二个陈述可由第一个陈述直接推出。

(iii) 对于任意 $S \subseteq X$，令 $S' \subseteq S$ 为 $f_{x,d}(S)$ 的一个最小化者，即根据定理 8.1，$f_{x,d}(S) = f(S') - x(S') + d(S \setminus S')$。由 $x^*(S') \leq f(S')$（命题 4.1），可得：

$$\begin{aligned} f_{x,d}(S) - x^*(S) + x(S) &= f(S') - x^*(S') + x(S \setminus S') + d(S \setminus S') - x^*(S \setminus S') \\ &\geq x(S \setminus S') + d(S \setminus S') - x^*(S \setminus S'). \end{aligned}$$

令 c_i 表示买方 i 的当前价格。假设对于所有 $i \in S \setminus S'$，都有 $c_i > 0$。在该机制中，买方 i 以不高于 c_i 的价格获得商品。于是，对于每个 $i \in N$，都有 $x_i \geq p_i/c_i$。此外，由于买方 $i \in S \setminus S'$ 仍然活跃，因此有 $v_i \geq c_i$，从而根据命题 4.1 可得 $x^*_i \leq B_i/v_i \leq B_i/c_i$。因此，我们有

$$f_{x,d}(S) - x^*(S) + x(S) \geq \sum_{i \in S \setminus S'}(x_i + d_i - x^*_i) \geq \sum_{i \in S \setminus S'}(p_i/c_i + (B_i - p_i)/c_i - B_i/c_i) = 0.$$

假设 $c_i = 0$ 对于某个 $i \in S \setminus S'$。根据 $d_i = \infty$，我们还有 $f_{x,\,d}(S) - x^*(S) + x(S) > 0$. □

根据定理 3.2 (ii)，所有商品都会售出，因此当前价格乘以剩余商品的数量，可得买家未来支付的一个下界。然而，虚拟买家的所有支付都会在拍卖结束时被抵消。因此，需要进行更详细的分析。

8.3 未来支付的下界

为了给活跃非虚拟买家的未来支付提供一个下界，我们定义集合 $Y := \{i \in X : x_i^{\mathrm{f}} \le x_i^*\}$。根据命题 4.2，集合 Y 包含所有活跃虚拟买家。以下不等式给出了 $X \setminus Y$ 中活跃非虚拟买家所需的下界：

命题 8.5. 在整个拍卖过程中，均有

$$\sum_{i \in X \setminus Y} (p_i^{\mathrm{f}} - p_i) \ge \sum_{i \in Y} (v_i - \varepsilon)(x_i^* - x_i^{\mathrm{f}}) + \tilde{c}(f_{x,d}(X) - x^*(Y) + x(Y)), \tag{13}$$

其中 $\tilde{c} := \min^{i \in X \setminus V} c_i$。

为证明这一点，我们证明：如果（13）在某次迭代结束时成立，那么它在该次迭代开始时也成立。据我们所知，这是首项采用反向数学归纳法这一方法研究多面体临界拍卖的工作。

证明。在拍卖结束时，根据 $X = Y = \emptyset$ 和定理 3.2 (ii) 中的 $x^{\mathrm{f}}(N) = f(N)$，由 $X = Y = \emptyset$ 可得（13）。通过以下逐案分析，我们证明：如果（13）在某次迭代结束时成立，那么它在该次迭代开始时也成立。

（i）第 5 行的价格更新：不等式（13）的左侧和右侧第一项保持不变。于是，根据命题 8.4 (iii)，有 $f_{x,\,d}(X) - x^*(Y) + x(Y) \ge f_{x,\,d}(Y) - x^*(Y) + x(Y) \ge 0$，其中第一个不等式由 $Y \subseteq X$ 以及 f_x 的单调性得出，d。这保证了右侧第二项非递减。这意味着，由于买方 l 的价格上涨，右侧非递减。因此，如果（13）在价格更新后成立，那么它在更新前也成立。

(ii) 第 6 行中的需求更新：根据命题 8.4 (ii)，我们可以看到 $f_{x,\,d}(X)$ 与需求无关。因此，当买方 l 的需求 d_l 因价格上涨而略微减少时，由于等式 (13) 两边都与需求无关，两边均保持不变。因此，只需考虑买方 l 因 $c_l = v_l$ 而退出拍卖的情况。假设在该次迭代的第 6 行之前，$l \in X \setminus Y$。需求更新之前，等式 (13) 的左侧不因 $p_l = p_l^{\mathrm{f}}$ 而改变。在右侧，第一项不因 $l \notin Y$ 而改变。根据命题 8.4 (ii)，第二项也不变，因为 l 只是从 $X \setminus Y$ 移动到了 $N \setminus X$，且满足 $x_l = x_l^{\mathrm{f}}$。综上，等式 (13) 两边均保持不变。假设在该次迭代的第 6 行之前，$l \in Y$。等式 (13) 的左侧显然不因 $l \notin X \setminus Y$ 而改变。在右侧，第一项减少了 $(v_l - \varepsilon)(x_i^* - x_i^{\mathrm{f}})$，第二项增加了 $\tilde{c}(x_i^* - x_i^{\mathrm{f}})$，因为 l 被加入了 $N \setminus X$。通过需求更新，右侧增加了 $(\tilde{c} - (v_l - \varepsilon))(x_i^* - x_i^{\mathrm{f}})$。由于 $\tilde{c} \in \{v_l, v_l - \varepsilon\}$，右侧不会因需求更新而减少。这意味着，如果需求更新后等式 (13) 成立，那么更新前等式 (13) 也成立。

(iii) 第 4 行的确定分配步骤：考虑买方 $i \in N$ 获取 $\xi_i(E_i)$ 数量的商品的情形。设在该次迭代中第 4 行之前 $i \in Y$。若 $p_i^{\mathrm{f}} = B_i$ 成立，则有 $x_i^{\mathrm{f}} > p_i^{\mathrm{f}}/v_i = B_i/v_i \ge x_i^*$，这与 $i \in Y$ 矛盾。因此，$p_i^{\mathrm{f}} < B_i$。根据命题 3.3，i 在确定分配步骤之后不会退出拍卖。于是，(13) 的左边和右边的第一项保持不变。右边的第二项也因 $f_{x,d}(X) - x^*(Y) + x(Y) = f(N) - x(X \setminus Y) - x^*(Y) - x^{\mathrm{f}}(N \setminus X)$ 而保持不变（命题 8.4 (ii)）。设在该次迭代中第 4 行之前 $i \in X \setminus Y$。(13) 的左边减少了 $c_i \xi_i(E_i)$。对于右边，第一项因 $l \notin Y$ 而保持不变，第二项则减少了 $\tilde{c}\xi_i(E_i)$，无论确定分配步骤之后 i 属于 $X \setminus Y$ 还是 $N \setminus X$。因此，如果 (13) 在确定分配步骤之后成立，那么它在此步骤之前也成立。

□

8.4 总支付的下界

利用命题 8.5，我们通过考察拍卖的初始步骤来证明定理 4.5。证明中，我们使用以下引理：

引理 8.6. 若对每个 $i \in N$（其中 $x_i^{\mathrm{f}} > x_i^*$），$\varepsilon \le v_{min}^2/(v_{max} - v_{min})$，则有 $(v_{min}+\varepsilon)x_i^* - \varepsilon x_i^{\mathrm{f}} \ge 0$。

证明. 对于满足 $x_i^{\mathrm{f}} > x_i^*$ 的 $i \in N$，由命题 4.2 可知，$x_i^* = B_i/v_i$，且 i 是非虚拟买家。因此，由定理 3.1 (iii)，买家 i 的最低成交价格至少为 v_{min}。结合预算可行性，可得 $x_i^{\mathrm{f}} \le p_i^{\mathrm{f}}/v_{min} \le B_i/v_{min}$。因此，由 $v_i \le v_{max}$ 可知，

$$(v_{min}+\varepsilon)\, x_i^* - \varepsilon x_i^{\mathrm{f}} \ge B_i \left(\frac{v_{min}+\varepsilon}{v_i} - \frac{\varepsilon}{v_{min}} \right) \ge B_i \left(\frac{v_{min}+\varepsilon}{v_{max}} - \frac{\varepsilon}{v_{min}} \right).$$

只需证明右侧非负。由 $\varepsilon \le v_{min}^2/(v_{max} - v_{min})$，可得

$$B_i \left(\frac{v_{min}+\varepsilon}{v_{max}} - \frac{\varepsilon}{v_{min}} \right) = B_i \left(\frac{v_{min}}{v_{max}} - \varepsilon \left(\frac{1}{v_{min}} - \frac{1}{v_{max}} \right) \right) \ge B_i \left(\frac{v_{min}}{v_{max}} - \frac{v_{min}}{v_{max}} \right) = 0.$$

□

定理 4.5 的证明. 考虑这样一次迭代：所有非虚拟买家的价格时钟刚好达到 $\min_{i \in V} v_i$。此时，根据对每个 $j \in M$ 都成立的 $c_{n+j} < v_{n+j} = \rho_j$，所有虚拟买家仍处于活跃状态。于是，由定理 3.1 (iii)，对每个 $i \in N \setminus V$，都有 $x_i = p_i = 0$。结合命题 4.2 的第二个结论，可得 $V \subseteq Y \subseteq X \subseteq N$。因此，

$$x(V) = x(Y) = x(X) = x(N) \text{ and } x_i^{\mathrm{f}} = x_i = 0 \quad (i \in N \setminus X), \tag{14}$$

其中，最后一个等式根据 X 的定义成立。根据命题 4.1 的最后一条结论，对于每个 $i \in N \setminus X$，都有 $x_i^* = x_i^{\mathrm{f}} = 0$。这意味着在迭代过程中，我们有

$$N \setminus Y = X \setminus Y = \{i \in N \colon x_i^{\mathrm{f}} > x_i^*\} \text{ and } Y = \{i \in N \colon x_i^{\mathrm{f}} < x_i^*\} \cup \{i \in X \colon x_i^{\mathrm{f}} = x_i^*\}. \tag{15}$$

然后，根据命题 8.4 (ii) 以及 $x^*(N) = f(N)$（命题 4.1），我们还有

$$f_{x,d}(X) - x^*(Y) + x(Y) = f(N) - x^*(Y) = \sum_{i \in N; x^{\mathrm{f}} > x_i^*} x_i^*,$$

其中，第一个等式根据 $x(X) = x(Y)$ 和由 (14) 得到的 $x^{\mathrm{f}}(N \setminus X) = x(N \setminus X) = 0$ 成立。

根据命题 8.5，(13) 在整个拍卖过程中均成立。将 (15) 与 (13) 代入，我们有

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N; x_i^{\mathrm{f}} > x_i^*} p_i^{\mathrm{f}} = \sum_{i \in X \setminus Y} p_i^{\mathrm{f}} &\ge \sum_{i \in Y} (v_i - \varepsilon)(x_i^* - x_i^{\mathrm{f}}) + \tilde{c}(f_{x,d}(X) - x^*(Y) + x(Y)) \\ &\ge \sum_{i \in N; x_i^{\mathrm{f}} \le x_i^*} (v_i - \varepsilon)(x_i^* - x_i^{\mathrm{f}}) + v_{min} \sum_{i \in N; x^{\mathrm{f}} > x_i^*} x_i^*, \end{aligned} \tag{16}$$

其中第二个不等式由 $\tilde{c} = \min_{i \in V} v_i \ge v_{min}$ 得出。然后，根据引理 8.6，我们有

$$-\varepsilon \sum_{i \in N; x_i^{\mathrm{f}} \le x_i^*} (x_i^* - x_i^{\mathrm{f}}) + v_{min} \sum_{i \in N; x^{\mathrm{f}} > x_i^*} x_i^* = \sum_{i \in N; x_i^{\mathrm{f}} > x_i^*} \Big((v_{min}+\varepsilon) x_i^* - \varepsilon x_i^{\mathrm{f}} \Big) \ge 0,$$

其中，第一个等式根据定理 3.2 (ii) 和命题 4.1 中的 $x^*(N) = x^{\mathrm{f}}(N) = f(N)$ 成立。因此，由（16）可得 $\sum_{i \in N; x_i^{\mathrm{f}} > x_i^*} p_i^{\mathrm{f}} \ge \sum_{i \in N; x_i^{\mathrm{f}} \le x_i^*} v_i (x_i^* - x_i^{\mathrm{f}})$。 □

双边交易中我们机制的 LW 保证

我们证明，在 $n = m = 1$ 和 $s_1 = 1$ 的情况下，我们的单样本机制能够达到最优 LW 的 1/2 近似。令 ρ_a 和 ρ_b 分别表示卖方的估值和样本价值。我们改变这些值，并固定买方的分布和信息。

如果 $\rho_a = \rho_b$，这就化为诚实卖方的情形，根据定理 4.3，我们的机制可实现 1/2 近似。接下来，我们可以假设 $\rho_a > \rho_b$。令 $\mathrm{LW}^{\mathbf{M}_{\mathrm{sample}}(\rho,\ \rho_s)}$ 表示当估值和样本价值分别为 ρ 和 ρ_s时算法 3 的 LW 值，令 $\mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}(\rho)}$表示估值为 ρ时的最优 LW 值。根据引理 5.3，只需证明：

$$\mathrm{LW}^{\mathbf{M}_{\mathrm{sample}}(\rho_a,\rho_b)} + \mathrm{LW}^{\mathbf{M}_{\mathrm{sample}}(\rho_b,\rho_a)} \geq \mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}(\rho_a)} \geq \frac{1}{2}(\mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}(\rho_a)} + \mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}(\rho_b)}).$$

根据 $\rho_a > \rho_b$，第二个不等式显然成立。现在我们证明第一个不等式。当 ρ_a为估值且 ρ_b 为样本价值时，在算法 3 中，卖方不参与拍卖，因此我们有 $\mathrm{LW}^{\mathbf{M}_{\mathrm{sample}}(\rho^a,\ \rho^b)} = \rho_a$。当 ρ_b 为估值且 ρ_a 为样本价值时，我们根据商品可分或不可分进行分类讨论。

可分割情形。假设 $\rho_a < v_1$。在算法 1 中，根据命题 3.3，当 $B_1 \leq \rho_a < v_1$ 时，买方会用尽其预算；否则，所有商品都会分配给买方。由于算法 3 直接使用分配给买方的部分，因此我们有 $\mathrm{LW}^{\mathbf{M}_{\mathrm{sample}}(\rho_a,\ \rho_b)} = \min(v_1, B_1)$，于是

$$\mathrm{LW}^{\mathbf{M}_{\mathrm{sample}}(\rho_a,\rho_b)} + \mathrm{LW}^{\mathbf{M}_{\mathrm{sample}}(\rho_b,\rho_a)} = \min(v_1, B_1) + \rho_a \geq \mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}(\rho_a)}.$$

假设 $v_1 \leq \rho_a$。此时，所有商品都分配给卖方时可达到最优 LW 值。因此，我们有 $\mathrm{LW}^{\mathbf{M}_{\mathrm{sample}}(\rho_a,\ \rho_b)} = \rho_a = \mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}(\rho_a)}$。

不可分情形。假设 $\rho_a < \min(v_1, B_1)$。在算法 4 中，所有商品都分配给买方。与可分割情形一样，我们有 $\mathrm{LW}^{\mathbf{M}_{\mathrm{sample}}(\rho_a,\ \rho_b)} = \min(v_1, B_1)$，于是

$$\mathrm{LW}^{\mathbf{M}_{\mathrm{sample}}(\rho_a,\rho_b)} + \mathrm{LW}^{\mathbf{M}_{\mathrm{sample}}(\rho_b,\rho_a)} = \min(v_1, B_1) + \rho_a \geq \mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}(\rho_a)}.$$

假设 m 在(v_1, B_1)中，$\leq \rho_a$。与可分割情形一样，我们有 $\mathrm{LW}^{\mathbf{M}_{\mathrm{sample}}(\rho_a,\ \rho_b)} = \mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}(\rho_a)}$.

B 多拟阵

由于我们在附录中使用多面体拟阵理论，因此先简要概述该理论。关于多拟阵基础知识的更多信息，请参阅 [Fujishige, 2005; Schrijver, 2003]。

B.1 多拟阵

由单调次模函数 $f\colon 2^N \to \mathrm{R}$+在 N上关联的多拟阵 P:= $P(f)$是由 $P(f) := \{x \in \mathrm{R}_+^N\colon x(S) \leq f(S)$ $(S \subseteq N)\}$定义的多面体。我们常用 P表示 $P(f)$。于是，已知多拟阵 P 与单调次模函数 f之间存在一一对应关系：

引理 B.1（例如，Schrijver [2003]）。两个多拟阵相等，当且仅当对应于这些多拟阵的单调次模函数相等。

多拟阵 在各种运算下都是封闭的。在这些运算中，我们使用以下 g:

• 收缩：对于 $x \in P$，定义一个多面体 $P^x := \{y\colon\ y \in P, y \geq x\}$，其中每个分量都大于 x 的对应分量。于是，$P^x + (-x)$ 是一个多拟阵，其中 $+$ 表示闵可夫斯基和。定义 $P^x + (-x)$ 的单调次模函数 $f^x\colon 2^N \to \mathrm{R}+$ 表示为

$$f^x(S) := \min_{S' \supseteq S} \{f(S') - x(S' \setminus S)\} \quad (S \subseteq N).$$

• 约简：对于 $x \in \mathrm{R}^N$，定义多面体 $P_x := \{y\colon\ y \in P, y \leq x\}$，其中每个分量都小于 x 的对应分量。于是，P_x 是一个多拟阵，其对应的单调次模函数 $f_x : 2^N \to \mathrm{R}+$ 定义了 P_x，表示为

$$f_x(S) := \min_{S' \subseteq S} \{f(S') + x(S \setminus S')\} \quad (S \subseteq N).$$

• 归纳：设 (N, M, E) 是一个二分图，P 是 M 上与单调次模函数 $f\colon 2^M \to \mathrm{R}+$ 相关联的多拟阵。现在定义函数 $g\colon 2^N \to \mathrm{R}+$，使得 $g(S) := f(M_S)$ $(S \subseteq N)$。于是，g 是一个单调次模函数，多拟阵 $P' := P'(g) \subseteq R_+^N$ 表示为

$$P' := \{x \in \mathbf{R}_+^N : \exists w \in P,\ x_i = w(E_i)\ (i \in N)\}.$$

随后，对于 N 上与单调次模函数 $f : 2^N \to \mathrm{R}+$ 相关联的多拟阵 P，考虑以下优化问题：

$$\text{maximize} \quad \sum_{i \in N} \omega_i x_i \qquad \text{s.t.} \quad x \in P,$$

其中，$\omega := (\omega_i)_{i \in N} \in \mathrm{R}_+^N$ 表示元素的权重。随后，Edmonds [1970] 证明了可以通过以下贪心过程高效地解决这一问题：

1. 对元素进行排序，使得 N so that $\omega_1 \geq \omega_2 \geq \cdots \geq \omega_n$。
2. 对于 $i = 1, 2, \ldots, n$，定义 $X_i := \{1, 2, \ldots, i\}$ and $x_i := f(X_i) - f(X_{i-1})$。
3. 输出 $x := (x_i)_{i \in N}$ 的目标函数值。

最优解 x 位于基多面体 $B(f) := \{y\colon\ y \in P, y(N) = f(N)\}$ 上。这也意味着，如果给定 f 的值预言机，就可以在多项式时间内计算出 $B(f)$ 上的一个点。

B.2 拟阵多面体流问题

多拟阵网络由一个有向网络（V、E）组成，该网络具有源点 s 和汇点 t，其中每个节点 $v \in V$ 都关联有多拟阵 P_v^+ 和 P_v^-。令 δ_v^+ 和 δ_v^- 分别表示从 E 离开和进入 v 的边集合。在该网络中，流 φ ： $E \to \mathrm{R}+$ 被定义为满足以下性质的函数：

$$\sum_{e \in \delta_v^+} \varphi(e) = \sum_{e \in \delta_v^-} \varphi(e) \quad (v \in V \setminus \{s, t\}),\ \ \varphi|_{\delta_v^+} \in P_v^+, \varphi|_{\delta_v^-} \in P_v^-.$$

如果网络具有边容量 c ： $E \to \mathrm{R}+$，则表示该容量约束的多拟阵由次模函数 $F \mapsto \sum_{e \in F} c(e)$ ($F \subseteq \delta_v^+$(或 δ_v^-)) 给出。流 φ 的流值表示为

$$\sum_{e \in \delta_s^+} \varphi(e) - \sum_{e \in \delta_s^-} \varphi(e) (= \sum_{e \in \delta_t^-} \varphi(e) - \sum_{e \in \delta_t^+} \varphi(e)).$$

现在我们介绍多拟阵网络中的最大流最小割定理。由节点集合构成的割 (S,T) 满足 $s \in S$和 $t \in T$，从S到 T的边集合的一个划分 (A,B)，称为弧分割割 (S,T,A,B)。注意， $S \cup T = V$。该弧分割割的容量表示为 $\sum f_v^-(\delta_v^- \cap A) + \sum f_v^+(\delta_v^+ \cap B)$，其中 f_v^+和 f_v^-分别是 P_v^+和 P_v^-对应的单调次模函数。Lawler 和 Martel [1982] 证明，多拟阵网络中的最大流值等于弧分割割的最小容量。他们还提出了一种算法，在给定次模函数的值预言机的情况下，可在多项式时间内计算最大流值。

C 省略的证明

定义 $P := \{w \in \mathbf{R}_+^E : w(E_j) \leq s_j (j \in M)\}$. 考虑由单调次模函数 f定义的多拟阵 $\tilde{P} \subseteq \mathbf{R}_+^{N\tilde{}}$。由于 P 也是通过对 P 进行归纳得到的，因此有

$$\tilde{P} := \{x \in \mathbf{R}_+^N : \exists w \in P,\ x_i = \sum_{ij \in E_i} w_{ij} \quad (i \in N)\}. \tag{17}$$

C.1 命题 4.1 的证明

LW最大化问题可表示为:

$$\text{maximize} \quad \sum_{i \in N} \min(v_i x_i, B_i) \quad \text{subject to} \quad x \in \tilde{P}.$$

如果对于某个 $i \in N$有 $x_i \geq B_i/v_i$，那么随着 x_i增加，$\min(v_i x_i, B_i)$ 的值不会改变。这意味着我们可以将每个 $i \in N$ 对应的 x 限制为 $x_i \leq B_i/v_i$，并将问题重新表述为

$$\text{maximize} \quad \sum_{i \in N} v_i x_i \quad \text{subject to} \quad x \in \tilde{P}_{d^*}, \tag{18}$$

其中， $d^* \in \mathbf{R}_+^N$ 由每个 $i \in N$ 对应的 $d_i^* := B_i/v_i$ 定义，而 $\tilde{P}_{d^*} := \{y \in \tilde{P} : y_i \leq d_i^* (i \in N)\}$ 是通过向多拟阵 P约简向量 d^*得到的多拟阵$\tilde{}$。然后，与 P_{d^*} 相关联的单调次模函数 f_{d^*} $\tilde{}$表示为

$$f_{d^*}(S) = \min_{T \subseteq S} \{f(S \setminus T) + d^*(T)\}. \tag{19}$$

问题 (18) 可视为在多拟阵上的线性优化，可通过贪心过程求解。于是，我们有 $x^*(S) \leq f_{d^*}(S) \leq f(S)$ $(S \subseteq N)$ 和 $x_i^* = f_{d^*}(H_i \cup i) - f_{d^*}(H_i)$。下面，我们利用以下引理和 (19) 展示其余部分:

引理 C.1（例如，Fujishige [2005]）。设 P 是由单调次模函数 f: $2^N \to \mathbf{R}$+定义的多拟阵。对于向量 $x \in P$，若对某些$S,T \subseteq N$，有 $x(S) = f(S)$ 且 $x(T) = f(T)$，则也有 $x(S \cap T) = f(S \cap T)$ 且 $x(S \cup T) = f(S \cup T)$。

命题 4.1 的证明。设 $f_{d^*}(H_i \cup i) = f(H) + d^*(H_i \setminus H) + d_i^*$对 $i \in N$和某个$H \subseteq H_i$成立。这意味着 $\min_{H' \subseteq H_i}\{f(H_i \setminus H') + d(H')\} = f(H) + d^*(H_i \setminus H)$。于是，有$f_{d^*}(H_i) = f(H) + d^*(H_i \setminus H)$。因此，我们有 $x_i^* = f_{d^*}(H_i \cup i) - f_{d^*}(H_i) = d_i^*$。

假设 t $f_{d^*}(H_i \cup i) = f(H \cup i) + d^*(H_i \setminus H)$，对于 $i \in N$和某个 $H \subseteq H_i$。这意味着

$$d^*(H_i \setminus H) = f_{d^*}(H_i \cup i) - f(H \cup i) \leq f_{d^*}(H_i \cup i) - f_{d^*}(H \cup i) \leq f_{d^*}(H_i) - f_{d^*}(H$$

其中，第一个不等式根据 f_{d^*} 的定义成立，第二个不等式根据 f_{d^*} 的次模性成立。根据 $x^* \in P_{d^*}$，对于每个 $i \in N$，有 $x^*(H) \leq f_{d^*}(H)$ 和 $x_i^* \leq B_i/v_i = d_i^*$。利用这些不等式，我们得到

$$\begin{aligned} x^*(H_i) &= x^*(H) + x^*(H_i \setminus H) \leq f_{d^*}(H) + d^*(H_i \setminus H) \\ &\leq f_{d^*}(H) + (f_{d^*}(H_i) - f_{d^*}(H)) = f_{d^*}(H_i) = x^*(H_i), \end{aligned}$$

其中，最后一个等号由贪心过程得出。这意味着上述所有不等式都取等号。因此，我们有 $x^*(H) = f_{d^*}(H)$ 和 $x^*(H_i \setminus H) = d^*(H_i \setminus H)$，于是

$$x_i^* = f_{d^*}(H_i \cup i) - f_{d^*}(H_i) = f(H \cup i) + d^*(H_i \setminus H) - x^*(H_i) = f(H \cup i) - x^*(H).$$

在这种情况下，x_i^* 定义为关于 $H \subseteq H_i$ 的 $f(H \cup i) - x^*(H)$ 的最小值。

因此，x_i^* 可递归地由以下公式给出：

$$x_i^* = \min\left(B_i/v_i, \min_{H \subseteq H_i}\{f(H \cup i) - x^*(H)\}\right) \ (i \in N).$$

接下来，我们证明 $x^*(N) = f(N)$。令 $\{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m\}$ 为按估值降序排列的虚拟买家集合。对于每个 $\eta_k \in \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m\}$，根据 $B_{\eta_k} = \infty$，我们有

$$x_{\eta_k}^* = \min_{H \subseteq H_{\eta_k}}\{f(H \cup \eta_k) - x_{\eta_k}^*(H)\} = f(H_{\eta_k}^*) - x^*(H_{\eta_k}^* \setminus \eta_k)$$

对于某个满足 $\eta_k \in H_{\eta_k}^*$ 的 $H_{\eta_k}^* \subseteq H_{\eta_k} \cup \eta_k$。这意味着集合 $H_{\eta_1}^*$、$H_{\eta_2}^*$、.....、$H_{\eta_m}^*$ 都是紧集。然后，我们将 H^* 定义为 $H_{\eta_1}^*$、$H_{\eta_2}^*$、.....、$H_{\eta_m}^*$ 的并集。根据引理 C.1，H^* 也是一个紧集。因此，根据 f 的单调性，我们有

$$x^*(N) \geq x^*(H^*) = f(H^*) = f(H_{\eta_1}^* \cup \ldots \cup H_{\eta_m}^*) \geq f(V) = \sum_{j \in M} s_j = f(N).$$

另一方向由多拟阵约束可直接得到。因此，我们有 $x^*(N) = f(N)$。此外，根据集合 H^* 的构造，任何满足 i with $v_i \leq \min_{j \in M} \rho_j$ 的非虚拟买家 H^* 都不包含在紧集内。由于 $x^*(H^*) = f(N)$，我们对这类买家有 $x_i^* = 0$ i。 □

C.2 其他省略的证明

引理 5.8 的证明。在下面，我们证明如下不等式：

$$\mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}|_{M_a}(\rho_a)} + \mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}|_{M_b}(\rho_b)} \geq \mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}(\rho^{\max})} \geq \frac{1}{2}(\mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}(\rho^a)} + \mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}(\rho^b)}),$$

其中 $\rho^{\max} := \{\rho_j^{\max}\}_{j \in M}$，且对于每个 $j \in M$，$\rho_j^{\max} = \max(\rho_j^a, \rho_j^b)$。

为证明第一个不等式，令 $\tilde{x}^*$ 表示通过命题 4.1 得到并实现 $\mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}(\rho^{\max})}$ 的 LW 最优分配。于是，对每个 $i \in N$，都有 $\min(v_i \tilde{x}_i^*, B_i) = v_i \tilde{x}_i^*$。因此，我们得到

$$\begin{aligned} \mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}(\rho^{\max})} &= \sum_{i \in N \setminus V} v_i \tilde{x}_i^* + \sum_{j \in M_a} \rho_j^a \tilde{x}_{n+j}^* + \sum_{j \in M_b} \rho_j^b \tilde{x}_{n+j}^* - \sum_{j \in M : \rho_j^a = \rho_j^b} \rho_j^a \tilde{x}_{n+j}^* \\ &\leq \sum_{i \in N \setminus V} v_i \tilde{x}_i^* + \sum_{j \in M_a} \rho_j^a \tilde{x}_{n+j}^* + \sum_{j \in M_b} \rho_j^b \tilde{x}_{n+j}^*. \end{aligned}$$

˜根据 $\tilde{x}^* \in P$ (命题 4.1) 和 (17)，存在 $\tilde{w}^* \in P$，使得 $\tilde{x}^*_i = \tilde{w}^*(E_i)$ $(i \in N)$。于是，我们有如下结论：

$$\begin{aligned}\mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}(\rho^{\max})} &\leq \sum_{i \in N \setminus V} v_i \tilde{x}^*_i + \sum_{j \in M_a} \rho^a_j \tilde{x}^*_{n+j} + \sum_{j \in M_b} \rho^b_j \tilde{x}^*_{n+j} \\ &\leq \sum_{j \in M_a} \left(\sum_{i \in N \setminus V} v_i \tilde{w}^*_{ij} + \rho^a_j \tilde{w}^*(E_{n+j}) \right) + \sum_{j \in M_b} \left(\sum_{i \in N \setminus V} v_i \tilde{w}^*_{ij} + \rho^b_j \tilde{w}^*(E_{n+j}) \right). \quad (20)\end{aligned}$$

根据 $\tilde{w}^* \in P$，有 $\tilde{w}^*(E_j) \leq s_j (j \in M)$。因此，由最优性可知，(20) 右侧的第一项（分别为第二项）有上界 $\mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}|_{M_a}(\rho_a)}$（分别为 $\mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}|_{M_b}(\rho_b)}$）。因此，我们有 $\mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}|_{M_a}(\rho_a)} + \mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}|_{M_b}(\rho_b)} \geq \mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}(\rho^{\max})}$。

˜接下来，我们证明第二个不等式。设 $x^{*a} \in P$ 为实现 $\mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}(\rho^a)}$ 的商品分配。则有

$$\mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}(\rho^{\max})} \geq \sum_{i \in N \setminus V} v_i x^{*a}_i + \sum_{j \in M_a} \rho^a_j x^{*a}_{n+j} + \sum_{j \in M \setminus M_a} \rho^b_j x^{*a}_{n+j} \geq \mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}(\rho^a)},$$

其中，第一个不等式由 $\mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}(\rho^{\max})}$ 的最优性成立，第二个不等式则由 $\rho^a_j \leq \rho^b_j$ 对每个 $j \in M \setminus M_a$ 均成立。类似地，我们有 $\mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}(\rho^{\max})} \geq \mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}(\rho^b)}$。因此，我们有 $\mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}(\rho^{\max})} \geq \max(\mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}(\rho^a)}, \mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}(\rho^b)}) \geq \frac{1}{2}(\mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}(\rho^a)} + \mathrm{LW}^{\mathrm{OPT}(\rho^b)})$。 □

定理 8.1 中断言的证明。根据 (1)，存在 $S^* \subseteq S$ 和 $S^\dagger \supseteq S^*$，使得 $f_{x,\,d}(S) = f(S^\dagger) - x(S^\dagger) + d(S \setminus S^*)$。假设 $S^\dagger \subseteq S$。根据 $S^\dagger \supseteq S^*$，有

$$\min_{S' \subseteq S} \{f(S') - x(S') + d(S \setminus S')\} \leq f(S^\dagger) - x(S^\dagger) + d(S \setminus S^\dagger) \leq f(S^\dagger) - x(S^\dagger) + d(S \setminus S^*) = f_{x,d}(S),$$

这与假设矛盾。因此，有 $S^\dagger \setminus S \neq \emptyset$。假设 $(S^\dagger \setminus S^*) \cap S \neq \emptyset$。定义$S^{**} := ((S^\dagger \setminus S^*) \cap S) \cup S^*$。根据 S^{**} 的定义，我们有 $(S^\dagger \setminus S^{**}) \cap S = \emptyset$。我们有

$$f(S^\dagger) - x(S^\dagger) + d(S \setminus S^*) \geq f(S^\dagger) - x(S^\dagger) + d(S \setminus S^{**}).$$

由于有 $S^{**} \subseteq S$ 和 $S^\dagger \supseteq S^{**}$，将 S^* 替换为 S^{**}时，断言成立。 □

致谢

我们感谢 Hiroshi Hirai 仔细审阅并提出宝贵意见。本研究获得了 JSPS 特别研究员资助金（资助编号：JP22J22831）、挑战性研究（探索性）资助金（资助编号：JP21K19759）以及 JSTERATO（资助编号：JP-MJER2301）的支持。

参考文献

Z. Abrams。当竞标者有预算时的收益最大化。载于第 17 届 ACM-SIAM离散算法研讨会论文集，SODA'06，第 1074–1082 页，2006 年。

L. M. Ausubel. 多物品的高效升价拍卖。《美国经济评论》94(5):1452–1475，2004年。

P. D. Azar、R. Kleinberg 和 S. M. Weinberg。有限信息下的先知不等式。载于第25届ACM-SIAM离散算法研讨会论文集，SODA’14，第1358–1377页，2014年。P. D. Azar、R. Kleinberg 和 S. M. Weinberg。通过有限信息下的先知不等式实现先验独立机制。《博弈与经济行为》118卷：511–532，2019年。M. Babaioff、A. Frey 和 N. Nisan。在小型市场中学习最大化贸易收益，2024年。S. Bhattacharya、V. Conitzer、K. Munagala 和 L. Xia。多单位拍卖中的激励相容预算询价。载于第21届ACM-SIAM离散算法研讨会论文集，SODA’10，第554–572页，2010年。L. Blumrosen 和 S. Dobzinski。双边交易的（近乎）高效机制。《博弈与经济行为》130卷：369–383，2021年。A. Braun 和 T. Kesselheim。通过先知不等式实现双边市场的真实机制。《运筹学数学》48(4):1959–1986，2023年。J. Brustle、Y. Cai、F. Wu 和 M. Zhao。通过简单机制近似双边市场中的贸易收益。载于第18届ACM经济学与计算会议论文集，EC’17，第589–590页，2017年。Y. Cai 和 J. Wu。关于双边交易中的最优固定价格机制。载于第55届ACM计算理论年会论文集，STOC’23，第737–750页，2023年。Y. Cheng、N. Gravin、K. Munagala 和 K. Wang。面向预算受限买方的简单机制。《ACM经济学与计算学报》9(2):10:1–10:25，2021年。R. Colini-Baldeschi、S. Leonardi、M. Henzinger 和 M. Starnberger。关于预算约束下的多个关键词赞助搜索拍卖。《ACM经济学与计算学报》4(1):2:1–2:34，2015年。R. Colini-Baldeschi、B. de Keijzer、S. Leonardi 和 S. Turchetta。具有强预算平衡的近似高效双向拍卖。载于第27届ACM-SIAM离散算法研讨会论文集，SODA’16，第1424–1443页，2016年。R. Colini-Baldeschi、P. W. Goldberg、B. d. Keijzer、S. Leonardi、T. Roughgarden 和 S. Turchetta。近似高效双边组合拍卖。《ACM经济学与计算学报》8(1):4:1–4:29，2020年。J. R. Correa、P. D¨utting、F. A. Fischer 和 K. Schewior。来自未知分布的独立同分布随机变量的先知不等式。载于第20届ACM经济学与计算会议论文集，EC’19，第3–17页，2019年。J. R. Correa、A. Cristi、B. Epstein 和 J. A. Soto。双边古戈尔博弈与基于样本的先知不等式。载于第31届ACM-SIAM离散算法研讨会论文集，SODA’20，第2066–2081页，2020年。Y. Deng、J. Mao、B. Sivan 和 K. Wang。近似高效双边交易。载于第54届ACM计算理论年会论文集，STOC’22，第718–721页，2022年。N. R. Devanur、B. Q. Ha 和 J. D. Hartline。面向预算受限代理人的无先验拍卖。载于第14届ACM电子商务会议论文集，EC’13，第287–304页，2013年。

P. Dhangwatnotai、T. Roughgarden 和 Q. Yan。单样本收益最大化。《博弈与经济行为》，91:318–333，2015年。S. Dobzinski 和 R. P. Leme。预算拍卖中的效率保证。载于第41届国际自动机、语言与编程研讨会论文集（ICALP’14），第392–404页，2014年。S. Dobzinski 和 A. Shaulker。相关估值下的双边交易。载于第56届ACM计算理论年会论文集（STOC’24），第237–246页，2024年。S. Dobzinski、R. Lavi 和 N. Nisan。预算限制下的多单位拍卖。《博弈与经济行为》，74(2):486–503，2012年。P. D¨utting、M. Henzinger 和 M. Starnberger。异质物品与预算限制拍卖。《ACM经济学与计算学报》，4(1):4:1–4:17，2015年。P. D¨utting、I. Talgam-Cohen 和 T. Roughgarden。双向拍卖中的模性与贪心。《博弈与经济行为》，105:59–83，2017年。P. D¨utting、F. Fusco、P. Lazos、S. Leonardi 和 R. Reiffenh¨auser。有限信息下的高效双边市场。载于第53届ACM计算理论年会论文集（STOC’21），第1452–1465页，2021年。J. Edmonds。次模函数、拟阵与某些多面体。载于卡尔加里组合结构及其应用国际会议论文集，第69–87页，1970年。Y. Fei。改进第一最优交易收益近似。载于第18届网络与互联网经济学会议论文集（WINE’22），第204–218页，2022年。Y. Feng 和 J. D. Hartline。机制设计中的端到端论证（面向预算受限代理人的先验无关拍卖）。载于第59届IEEE计算机科学基础研讨会论文集（FOCS’18），第404–415页，2018年。Y. Feng、J. D. Hartline 和 Y. Li。面向非线性参与者的简单机制。载于第34届ACM-SIAM离散算法研讨会年会论文集（SODA’23），第3802–3816页，2023年。A. Fiat、S. Leonardi、J. Saia 和 P. Sankowski。预算约束下的单估值组合拍卖。载于第12届ACM电子商务会议论文集（EC’11），第223–232页，2011年。G. Fikioris 和 E. Tardos。序贯预算拍卖中无悔学习的流动福利保证。载于第24届ACM经济学与计算会议论文集（EC’23），第678–698页，2023年。D. Fotakis、K. Lotidis 和 C. Podimata。次模竞标者参与的组合拍卖中流动福利与社会福利之间的桥梁。载于第33届AAAI人工智能会议论文集（AAAI’19），第1949–1956页，2019年。S. Fujishige。《次模函数与优化》，第2版。爱思唯尔，阿姆斯特丹，2005年。G. Goel、V. Mirrokni 和 R. P. Leme。突破硬性预算约束的临界拍卖。载于第15届ACM经济学与计算会议论文集（EC’14），第167–184页，2014年。

G. Goel、V. Mirrokni 和 R. P. Leme。多面体临界拍卖与 AdWords 多面体。《ACM杂志》，62(3):18:1–18:27，2015年。G. Goel、S. Leonardi、V. Mirrokni、A. Nikzad 和 R. P. Leme。互联网广告预留交换市场。载于第43届国际自动机、语言与编程研讨会论文集（ICALP'16），第142:1–142:13页，2016年。G. Goel、V. Mirrokni 和 R. P. Leme。具有在线供给的临界拍卖。《博弈与经济行为》，123:342–358，2020年。H. Hirai 和 R. Sato。双边市场的多面体临界拍卖。《运筹学数学》，47(1):259–285，2022年。H. Hirai 和 R. Sato。不可分物品的多面体临界拍卖。载于第19届网络与互联网经济学会议论文集（WINE'23），第366–383页，2023年。N. Immorlica、B. Lucier、G. Weyl 和 J. Mollner。匹配市场中的近似效率。载于第13届网络与互联网经济学会议论文集（WINE'17），第252–265页，2017年。Z. Y. Kang、F. Pernice 和 J. Vondr´ak。双边交易中的固定价格近似。载于第33届ACM-SIAM离散算法研讨会年会论文集（SODA'22），第2964–2985页，2022年。V. Krishna。《拍卖理论》，第2版。学术出版社，圣迭戈，2010年。E. L. Lawler 和 C. U. Martel。计算最大"拟阵多面体"网络流。《运筹学数学》，7(3):334–347，1982年。B. Lehmann、D. Lehmann 和 N. Nisan。具有递减边际效用的组合拍卖。《博弈与经济行为》，55(2):270–296，2006年。Z. Liu、Z. Ren 和 Z. Wang。改进双边交易中固定价格机制的近似比。载于第55届ACM计算理论年会论文集（STOC'23），第751–760页，2023年。P. Lu 和 T. Xiao。改进预算拍卖中的效率保证。载于第16届ACM经济学与计算会议论文集（EC'15），第397–413页，2015年。P. Lu 和 T. Xiao。多物品拍卖中的流动福利最大化。载于第10届国际算法博弈论研讨会论文集（SAGT'17），第41–52页，2017年。R. McAfee。占优策略双向拍卖。《经济理论杂志》，56(2):434–450，1992年。R. B. Myerson 和 M. A. Satterthwaite。双边交易的高效机制。《经济理论杂志》，29(2):265–281，1983年。N. Nisan、T. Roughgarden、E. Tardos 和 V. V. Vazirani。《算法博弈论》。剑桥大学出版社，纽约，2007年。A. Schrijver。《组合优化》。施普林格出版社，柏林，2003年。

E. Segal-Halevi、A. Hassidim 和 Y. Aumann。MUDA：一种真实的多单位双向拍卖机制。载于第32届AAAI人工智能会议论文集，AAAI’18，第1193–1201页，2018a。E. Segal-Halevi、A. Hassidim 和 Y. Aumann。多种商品市场中的双向拍卖。载于第27届国际人工智能联合会议论文集，IJCAI’18，第489–497页，2018b。V. Syrgkanis 和 E. Tardos。可组合且高效的机制。载于第45届ACM计算理论年会论文集，STOC’13，第211–220页，2013年。A. A. Voudouris。具有预算约束的简单组合拍卖。《理论计算机科学》，842：6–17，2020年。W. Wu、X. Liu 和 M. Li。双边市场中的预算可行的采购机制。载于第27届国际人工智能联合会议论文集，IJCAI’18，第489–497页，2018年。