arXiv:2302.03492v2 [math.RT] 5 Feb 2024

分支定律的同调方面

迪彭德拉·普拉萨德

2024年2月6日

Abstract. 在这篇以综述为主的文章中，我们探讨了在 p-进群的背景下，群的表示限制到其子群时，分支律的某些同调方面。我们沿用此前的论文 [**Pr3**]，并结合近期的一些研究成果进行了更新。特别是，遵循 Chan 和 Chan-Savin 的研究（参考文献中列出了他们的许多论文），本文着重指出，将群 π 的一个（泛型）表示限制到闭子群 G （本文大部分内容均在 GGP 的背景下撰写）后，在光滑表示范畴的大多数 Bernstein 分块上，所得表示是射影表示。此外，一旦 $\pi|_H$ 在某个特定的 Bernstein 分块中是一个投射模，它就具有简单的结构。

Contents

1. 引言 2 2. 从一般线性群$_{n+1}(F)$到一般线性群$_n(F)$的分支律 5 3. 关于来自 [**Pr 3**] 7的 Künneth 定理的勘误 4. 贝塞尔子群 10 5. 限制后的情形究竟如何！11 6. Roche 的一个定理及其若干推论 14 7. 经典群的欧拉-庞加莱′特征 16 8. 欧拉-庞加莱′特征的局部常值性 19 9. 群情形的欧拉-庞加莱′特征：卡兹丹正交性 20 10. Waldspurger 的一个积分公式 21 11. 猜想的 EP 公式 22 12. Schneider-Stuhler 对偶定理 24 13. 一个例子：一般线性群$_2(F)$的三重积 25 14. 来自代数几何的范本 30 参考文献 30

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：11F70；次要分类号：22E55。
Key words and phrases. 分支律、Ext群、欧拉-庞加莱示性数、GGP 猜想、经典群。

1. 引言

设 H 是群 G的一个子群， G的一个不可约表示 π_1 ，人们通常会关注将表示 π_1 限制到 H 后分解为不可约分量的问题。这就是将 G 的表示限制到 H所得的表示的分支律；这一问题在有限群、紧群或代数群的有限维表示中已得到广泛研究。本文主要讨论群 G 的无限维表示；这类表示限制到 H 后通常并非完全可约，因此“将限制到 H的表示分解”往往没有显而易见的含义，或者必须以某种精确方式赋予其含义，例如将 G 的酉表示限制到 H后的普朗歇尔分解。除非另有说明，若 H 的表示 π_2 出现在 G 的表示 π_1 中，我们就称

$$\mathrm{Hom}_H[\pi_1, \pi_2] \neq 0.$$

局部 GGP 猜想（如今都已成为定理！）讨论的是某些经典群对 (G, H) 的此类分支律；本文中我们常取这些群对为 (一般线性群$_{n+1}(F)$, 一般线性群$_n(F)$) 或 (特殊正交群$_{n+1}(F)$, 特殊正交群$_n(F)$)，其中 F 是一个局部域，除非另有说明，均假定它是非阿基米德的。

对于特殊正交群$_{n+1}(F)$ 的不可约容许表示 π_1 ，以及特殊正交群$_n(F)$ 的不可约容许表示 π_2 ，GGP 关注的问题是理解 Hom 空间：

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{SO}_n(F)}[\pi_1, \pi_2] &\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{SO}_n(F)}[\pi_1 \otimes \pi_2^\vee, \mathbb{C}] \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{SO}_{n+1}(F)\times \mathrm{SO}_n(F)}[\mathcal{S}(X), \pi_1^\vee \otimes \pi_2],\end{aligned}$$

其中 $X =$特殊正交群$_n(F)\backslash$[特殊正交群$_n(F)$ $\times$特殊正交群$_{n+1}(F)$],，而 $\mathcal{S}(X)$ 表示 X 上紧支撑光滑函数构成的空间。这种表述“分支律”的方式有一个优点：我们不必像本文所讨论的情形那样，局限于研究 $G \times H$ 齐性球簇 $X = \Delta(H)\backslash[G \times H]$ ，而可以研究群 $\mathbb{G}$ 的任意球簇 $\mathbb{X}$ （群 $\mathbb{G}$ 不一定在其上传递作用），并将与球簇 $\mathbb{X}$ 相关的分支律视为对以下对象的研究：

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{G}}[\mathcal{S}(\mathbb{X}), \Pi],$$

对于 Π 群 $\mathbb{G}$ 的不可约表示。不过，由于本文主要讨论 GGP 的背景，我们将从 $\mathrm{Hom}_H[\pi_1, \pi_2] \cong \mathrm{Hom}_H[\pi_1 \otimes \pi_2^\vee, \mathbb{C}]$. 的角度考察分支。

GGP 所考察的分支律的第一个重要结果是重数一性质：

$$m(\pi_1, \pi_2) := \dim \mathrm{Hom}_{\mathrm{SO}_n(F)}[\pi_1, \pi_2] \leq 1.$$

这归功于 A. Aizenbud、D. Gourevitch、S. Rallis 和 G. Schiffmann 在非阿基米德情形下的 [AGRS] ，以及 B. Sun 和 C. Zhu 在阿基米德情形下的 [Sun-Zhu] 。

值得一提的是，在完整的重数一定理得到证明之前，人们甚至还不知道重数空间是否有限维；这一问题后来由 Y. Sakellaridis 和 A. Venkatesh 在 [Sak-Ven] 的工作中以更一般的形式得到解答。对于我们主要研究的无限维表示，$m(\pi_1, \pi_2)$ 也有可能对某个特定的 π_1恒等于 0！

重数一$\heartsuit$定理得到证明后，接下来便可以对下列不可约容许表示的集合作出更精确的描述： π_1 特殊正交群 $\mathrm{SO}_{n+1}(F)$ 的表示和 π_2 特殊正交群 $\mathrm{SO}_n(F)$ 的表示，其中

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{SO}_n(F)}[\pi_1,\pi_2]\neq 0.$$

关于 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{SO}_n(F)}[\pi_1,\pi_2]$ 的精确定理，已见于 Waldspurger 和 Moeglin-Waldspurger 撰写的一系列论文；关于正交群，参见 [Wa], [Wa1], [Wa2]{ Mo-Wa] 。随后，Beuzart-Plessis 又为酉群撰写了一系列论文，参见 [Ra1], [Ra2], [Ra3]。

鉴于人们对空间的关注

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{SO}_n(F)}[\pi_1,\pi_2]\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{SO}_{n+1}(F)\times\mathrm{SO}_n(F)}[\mathcal{S}(X),\pi_1^\vee\otimes\pi_2],$$

考虑相关空间是很自然的

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{SO}_n(F)}[\pi_1,\pi_2]\cong \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{SO}_{n+1}(F)\times\mathrm{SO}_n(F)}[\mathcal{S}(X),\pi_1^\vee\otimes\pi_2],$$

事实上，同调代数方法表明，最简洁的答案并不针对这些单独的空间，而是针对它们维数的交错和：

$$\mathrm{EP}[\pi_1,\pi_2]=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\dim\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{SO}_n(F)}[\pi_1,\pi_2];$$

这些或许更易处理的对象——当然也更灵活——若与高阶 Ext 的消失（在适用时）结合起来，或许能给出关于.....的定理

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{SO}_n(F)}[\pi_1,\pi_2].$$

我们谨此补充说明，在定义 $\mathrm{EP}[\pi_1,\pi_2]$ 之前，需要证明：当 π_1 和 π_2 分别是 $\mathrm{SO}_{n+1}(F)$ 和 $\mathrm{SO}_n(F)$ 的有限长度容许表示时，对于所有 $i\geq 0$ ，$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{SO}_n(F)}[\pi_1,\pi_2]$ 都是有限维的；此外，还需要证明当 i 足够大时，$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{SO}_n(F)}[\pi_1,\pi_2]$ 为 0。

当

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{SO}_n(F)}[\pi_1,\pi_2]$$

当 i 足够大时消失是众所周知的一般结论：对于此处考虑的约化 p-进群 G，已知

$$\mathrm{Ext}^i_G[\pi,\pi']=0$$

对于 G 的任意两个光滑表示 π 和 π'，当 i 大于 G 的 F-分裂秩时，结论成立。这是由与 G 相关的（Bruhat-Tits）建筑所给出的 G 的平凡表示 $\mathbb{C}$ 的投射分解的标准应用。

关于 $\mathrm{Ext}^i_G[\pi_1,\pi_2]$ 有限维性的证明，我们注意到，与 Hom 空间 $\mathrm{Hom}_G[\pi_1,\pi_2]$ 不同——对于后者，如果 π_1 和 π_2 都是尖点表示，我们并不知道如何证明 $\mathrm{Hom}_G[\pi_1,\pi_2]$ 的有限维性——对于 $\mathrm{Ext}^i_G[\pi_1,\pi_2]$，恰好可以先验地处理这种情形，因为 $i>0$：几乎按照尖点表示的定义，它们在光滑表示范畴中既是投射对象，也是内射对象（而投射对象限制到闭子群后仍是投射对象）。

当 π_1、π_2 中的一个是完整主系列表示时，$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{SO}(n)}[\pi_1,\pi_2]$ 的有限维性是通过对 n 以及主系列所源自的 Levi 子群的分裂秩进行归纳论证而得到的。由此产生的分析需要贝塞尔模型这一概念；这也是一个限制问题，涉及一个同时具有约化部分和幺幂部分的子群。

最近，A. Aizenbud 和 E. Sayag 在 [AS] 中提出了一个非常一般的 Ext $^{i}_{G}[\pi_1, \pi_2]$ 有限性定理（适用于球簇）。然而，在分析 $\mathrm{SO}_{n+1}(F)$ 的主系列表示限制到 $\mathrm{SO}_n(F)$ 时所采用的贝塞尔模型方法，另有一项优点：它能给出关于欧拉-庞加莱特征的明确答案（至少在某些情况下）。

定义及下述定理见 Aizenbud 和 Sayag [AS]。

DEFINITION 1.1.（局部有限生成表示）设 G 是一个p-进群，且 π 是 G的一个光滑表示。若满足以下等价条件之一，则称 π 为 G 的局部有限生成表示（或简称局部有限表示）。

（1）对于 G的每个紧开子群 K， π^K 都是赫克代数 $\mathcal{H}(K\backslash G/K)$上的有限生成模。（2）对于每个尖点数据（$M, \rho$），即 M 是 G的一个 Levi 子群，且 ρ 是 M的一个尖点表示 $\pi[M, \rho]$， π在 G的光滑表示范畴的 Bernstein 分解中所对应的分量是一个有限生成 G-模。

尽管对于一般线性群$_{n+1}(F)$的表示限制到一般线性群$_n(F)$的情形，下述来自 [AS] 的定理可以用其他方法证明（利用 Bernstein-Zelevinsky 滤过，以及 [Bu-He]关于 Gelfand-Graev 表示的局部有限生成性），但该定理适用范围之广仍值得注意。

THEOREM 1.2.（Aizenbud-Sayag）对于 π $\mathrm{GL}_{n+1}(F)$ 的不可约容许表示， π 限制到 $\mathrm{GL}_n(F)$ 后局部有限。更一般地，若 (G, H) 连同 $H \subset H \times G$ 构成一个球对，即 H 在 $G \times H$ 的旗簇上有开轨道，并且已知有限重数性质（例如所有 GGP 对），那么不可约容许表示从 G限制到 H 后局部有限。

作为 Aizenbud 和 Sayag 的这一结果的推论，请注意，不可约表示 π 从 $\mathrm{GL}_{n+1}(F)$ 限制到 $\mathrm{GL}_n(F)$ 后，在 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的任意 Bernstein 分支中都是有限生成的，因此 $\pi|_{\mathrm{GL}_n(F)}$ 有非零不可约商，这是一般性结论（正如我们先前所说，对于一般的限制问题，我们还不知道如何证明这一点）。

下面的推论是标准同调代数的一个直接结果；这里还用到了这样一个事实：若模在诺特环 R 上有限生成（该环不必交换，但含有 1），则它有一个由有限生成投射 R-模构成的分解。

COROLLARY 1.3. 对于 π_1 $\mathrm{GL}_{n+1}(F)$ 的不可约表示 $G =$ ，以及 $H = \mathrm{GL}_n(F)$ 的 π_2（对于已知具有有限重数的球对 $H \subset H \times G$，结论也更一般地成立），

$$\mathrm{Ext}^i_H[\pi_1, \pi_2]$$

它们是有限维的，并且在 H 的分裂秩之后均为零。

我们以这样的建议结束引言：尽管本文只讨论 GGP 背景下出现的限制问题，但局部有限生成表示的概念，以及它在限制到适当选取的子群时成为投射模这一性质——这是本文强调的性质之一——

在许多涉及有限重数的其他情形中也应当适用，例如韦伊表示及其限制到对偶约化对；我们现在简要提及这一情形。关于局部有限生成和投射性的判据，在几何背景下将会非常有用：例如，当一个（p-adic）群G 作用于一个带有等变层 ψ的（p-adic）空间 X 时，人们希望理解 G 在施瓦茨空间 $\mathcal{S}(X,\psi)$上的作用所涉及的这些问题。

在对偶约化对 (G_1,G_2) 位于 $\mathrm{Sp}_{2n}(F)$ 内的 Howe 对应背景下，且 G_1 “小于或等于” G_2，其中 K_1，K_2 是 G_1 和 G_2 中的紧开子群，对于覆盖辛群 $\mathrm{Mp}_{2n}(F)$ 的韦伊表示 ω ，看来 $\omega^{K_1\times K_2}$ 既是 $\mathcal{H}(K_1\backslash G_1/K_1)$ 和 $\mathcal{H}(K_2\backslash G_2/K_2)$ 上的有限生成模，也是 $\mathcal{H}(K_1\backslash G_1/K_1)$ 上的投射模。此外，似乎可以将 $\omega^{K_1\times K_2}$ 作为 $\mathcal{H}(K_1\backslash G_1/K_1)$ 与$\mathcal{H}(K_2\backslash G_2/K_2)$ 的双模，用来构造从 $\mathcal{H}(K_1\backslash G_1/K_1)$ 的光滑表示范畴到 $\mathcal{H}(K_2\backslash G_2/K_2)$ 的光滑表示范畴的嵌入。迄今似乎尚未有人研究这种关于 Howe 对应的“函子方法”。

2. 从一般线性群$_{n+1}(F)$到一般线性群$_n(F)$的分支律

回顾以下基本结果，该结果是作为 Rankin-Selberg 理论的推论证明的，参见 [Pr2]。

THEOREM 2.1. 设 π_1 是一般线性群$_{n+1}(F)$的一个不可约泛型表示，且 π_2 是一般线性群$_n(F)$的一个不可约泛型表示，

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n(F)}[\pi_1,\pi_2]\cong\mathbb{C}.$$

以下定理可视为上述定理的 Euler-Poincar´e 版本，它比前一个定理灵活得多，而且证明起来也更容易！

THEOREM 2.2. 设 π_1 是一般线性群$_{n+1}(F)$的一个有限长度容许表示，且 π_2 是一般线性群$_n(F)$的一个有限长度容许表示。那么，$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{GL}_n(F)}[\pi_1,\pi_2]$ 是 $\mathbb{C}$上的有限维向量空间，并且

$$\mathrm{EP}_{\mathrm{GL}_n(F)}[\pi_1,\pi_2]=\dim\mathrm{Wh}(\pi_1)\cdot\dim\mathrm{Wh}(\pi_2),$$

其中 $\mathrm{Wh}(\pi_1)$ 和 $\mathrm{Wh}(\pi_2)$ 分别表示 π_1 和 π_2 的惠特克模型空间，它们对应于一般线性群$_{n+1}(F)$ 和一般线性群$_n(F)$ 中极大幺幂子群上的固定非退化特征。

这是一个有趣的推论！

COROLLARY 2.3. 若 π_1 是一般线性群$_{n+1}(F)$ 的不可约容许表示，且 π_2 是一般线性群$_n(F)$ 的不可约容许表示，那么 $\mathrm{EP}_{\mathrm{GL}_n(F)}[\pi_1,\pi_2]$ 取值只有 0 和 1，特别地，它是 ≥ 0。

定理 2.2 的证明：定理 2.2 的证明借助 Bernstein 和 Zelevinsky 的一些结果完成，参见 [BZ1], 中关于一般线性群$_{n+1}(F)$ 的表示限制到拟抛物子群后的结构的 §3.5。

回想一下， E_n 是 $\mathrm{GL}_{n+1}(F)$ 的拟抛物子群，由 $\mathrm{GL}_{n+1}(F)$ 中末行为 $(0,0,\cdots,0,1)$ 的矩阵组成。

对于 GL$_{n+1}(F)$ 的一个表示 π，Bernstein-Zelevinsky 定义

$$\pi^i = \text{ the } i\text{-th derivative of } \pi,$$

它是一般线性群 GL$_{n+1-i}(F)$ 的一个表示。一个至关重要的事实是，若 π 是一般线性群 GL$_{n+1}(F)$ 的有限长度表示，则 π^i 是一般线性群 GL$_{n+1-i}(F)$ 的有限长度表示。

Bernstein-Zelevinsky 证明，对于一般线性群 GL$_{n+1}(F)$ 的一个容许表示 π，将其限制到 mirabolic 子群 E_n 后，存在一个有限滤过，其连续商由 π 的导数表示 π^i 描述。

利用 Bernstein-Zelevinsky 滤过以及 Ext群的 Frobenius 互反律的一种形式，定理 2.2 最终可由下述简单引理推出。更多细节请参见 [**Pr3**] 。

LEMMA 2.4. 若 V 和 W 是一般线性群 GL$_d(F)$ 的任意两个有限长度表示，则若 $d > 0$,

$$\mathrm{EP}[V, W] = 0.$$

若 $d = 0$，那么当然有

$$\mathrm{EP}[V, W] = \dim V \cdot \dim W.$$

以下结果是作者多年前提出的猜想，参见 [**Pr3**], ，最近由 Chan 和 Savin 在 [**CS2**], 中证明。正是这一结果使得上面的定理 2.2 中简单而一般的结论，能够转化为定理 2.1 中关于泛型表示的 Hom 空间的简单结论。

THEOREM 2.5. 设 π_1 是一般线性群 GL$_{n+1}(F)$ 的不可约泛型表示， π_2 是一般线性群 GL$_n(F)$ 的不可约泛型表示。则

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{GL}_n(F)}[\pi_1, \pi_2] = 0,$$

对所有 $i > 0$ 均成立。

另一方面，定理2.2 对某些情形下（高阶）Ext群的非消失性也有影响，我们将在下面的备注中讨论这一点。

REMARK 2.6. 已知（参见 [**Pr2**], ），一般线性群 GL$_3(F)$ 存在不可约泛型表示，其商为一般线性群 GL$_2(F)$ 的平凡表示；类似地，一般线性群 GL$_3(F)$ 存在不可约非泛表示，其商为一般线性群 GL$_2(F)$ 的不可约泛型表示。对于这样的表示对 (π_1, π_2)，由关于 Euler–Poincar´e 特征的定理 2.2 可得

$$\mathrm{EP}_{\mathrm{GL}_2(F)}[\pi_1, \pi_2] = 0,$$

而

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(F)}[\pi_1, \pi_2] \neq 0.$$

因此，对于此类不可约表示对 (π_1, π_2)，必有

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{GL}_2(F)}[\pi_1, \pi_2] \neq 0,$$

对某个 $i > 0$。论文 [**GGP2**] 更一般地研究分支问题 Hom$_{\mathrm{GL}_n(F)}[\pi_1, \pi_2]$，其中 GL$_{n+1}(F)$ 的不可约表示 π_1 或 GL$_n(F)$ 的不可约表示 π_2 之一不是泛型表示，并且二者均由 Levi 子群的酉 Speh 模抛物诱导而来，也就是说，它们是 Arthur 型表示，从而导致高阶 Ext 群的非消失性。

3. 对 [Pr3] 中 Künneth 定理的一则勘误

G. Savin 曾指出，在 [Pr3]，中所断言的 Künneth 定理的普遍性并不成立。鉴于 Künneth 定理在许多归纳论证中发挥着重要作用，我借此机会在此陈述并证明一个修正后的版本。证明仅是在 [Pr3]，中给出的证明基础上略作补充，但我在此比原文提供了更多细节。

在证明 Künneth 定理的过程中，我们需要用到 [Pr3] 中所使用的 Frobenius 互反律最基本形式如下。

LEMMA 3.1. 设 K 是 p-进群 G 的一个开子群。设 E 是 K 的一个光滑表示， F 是 G 的一个光滑表示。那么，

$$\mathrm{Hom}_G[\mathrm{ind}_K^G E, F] \cong \mathrm{Hom}_K[E, F].$$

COROLLARY 3.2. 对于 p-进群 G 的任意紧开子群 K ，以及 K的任意光滑表示 E ， $\mathrm{ind}_K^G E$ 是 G 的一个投射模。

在下一个定理中，我们需要用到以下引理。

LEMMA 3.3. 设 G_1 和 G_2 是两个 p-进群。设 P_1和 P_2 分别是 G_1和 G_2的任意两个光滑投射模。那么 $P_1 \boxtimes P_2$是 $G_1 \times G_2$的投射模。

PROOF. 这个引理的证明中有一点细微之处：若 τ 是 $G_1 \times G_2$的光滑表示，尽管我们有：
$\mathrm{Hom}_{G_1\times G_2}(P_1\boxtimes P_2, \tau) = \mathrm{Hom}_{G_1}(P_1, \mathrm{Hom}_{G_2}(P_2, \tau)) = \mathrm{Hom}_{G_1}(P_1, \mathrm{Hom}_{G_2}(P_2, \tau)^\infty)$,
这似乎足以证明该引理，但 $\mathrm{Hom}_{G_2}(P_2, \tau)$ 不一定是 G_1的光滑模，而且取光滑向量 $\pi \to \pi^\infty$ 并不是 G_1- 模范畴上的正合函子。

然而，正如我们将要证明的，若 P_2 是 G_2的光滑投射模，

$$\tau \to \mathrm{Hom}_{G_2}(P_2, \tau)^\infty,$$

是从光滑（$G_1 \times G_2$）-模范畴到光滑 G_1-模范畴的正合函子；也就是说，如果 $\tau_1 \to \tau_2$ 是（$G_1 \times G_2$）-模之间的满射，那么在相应 Hom 空间中的 G_1-光滑向量上诱导的映射 $\mathrm{Hom}_{G_2}(P_2, \tau_1)^\infty \to \mathrm{Hom}_{G_2}(P_2, \tau_2)^\infty$也是满射。

我们证明，若 $\phi_2 \in \mathrm{Hom}_{G_2}(P_2, \tau_2)^\infty$ 对 G_1中的某个紧开子群 K_1 不变，则存在 $\phi_1 \in \mathrm{Hom}_{G_2}(P_2, \tau_1)^\infty$ ，它对 K_1不变，且在给定映射 $\tau_1 \to \tau_2$ 下的像为 ϕ_2。

注意，由于 $\tau_1 \to \tau_2$ 是光滑（$G_1 \times G_2$）-模之间的满射，诱导的 $\tau_1^{K_1} \to \tau_2^{K_1}$模映射也是满射，并且 $\mathrm{Hom}_{G_2}(P_2, \tau_2)^{K_1}$与 $\mathrm{Hom}_{G_2}(P_2, \tau_2^{K_1})$之间存在一个同一化。现在，交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{G_2}(P_2, \tau_1^{K_1}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{G_2}(P_2, \tau_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_{G_2}(P_2, \tau_2^{K_1}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{G_2}(P_2, \tau_2), \end{array}$$

其中左侧的垂直箭头因 P_2 作为 G_2-模的投射性而为满射，由此完成了如下断言的证明：若 P_2 是 G_2 的光滑投射模，

$$\tau \to \mathrm{Hom}_{G_2}(P_2, \tau)^\infty,$$

是从光滑 $(G_1 \times G_2)$-模范畴到光滑 G_1-模范畴的正合函子。因此，根据这一识别，

$$\mathrm{Hom}_{G_1\times G_2}(P_1\boxtimes P_2, \tau) = \mathrm{Hom}_{G_1}(P_1, \mathrm{Hom}_{G_2}(P_2, \tau)) = \mathrm{Hom}_{G_1}(P_1, \mathrm{Hom}_{G_2}(P_2, \tau)^\infty),$$

$P_1 \boxtimes P_2$ 是一个投射模，属于 $G_1 \times G_2$。 □

REMARK 3.4. 在 [APS], 中，引理 5.14 的证明采用了与引理 3.3 的证明类似的考虑，并证明了对于 $G_1 \times G_2$ 的光滑表示 τ 和 G_2 的光滑表示 X，有 $\mathrm{Ext}^i_{G_2}(\tau, X)^{K_1} = \mathrm{Ext}^i_{G_2}(\tau^{K_1}, X)$；其中 $K_1 \subset G_1$ 是一个紧开子群。

THEOREM 3.5. 设 G_1 和 G_2 是两个 p-adic 群。设 E_1, F_1 是 G_1 的任意两个光滑表示， E_2, F_2 是 G_2 的任意两个光滑表示。假设以下两个条件之一成立：

(1) E_1 和 F_1 这两个 G_1 的表示具有有限长度，且 G_1是一个约化的 p-进群。或者，(2) E_1 是 G_1 的表示， E_2 是 G_2 的表示，二者都具有有限长度，且群 G_1和G_2 都是约化的 p-进群。

那么，

$$\mathrm{Ext}^i_{G_1\times G_2}[E_1 \boxtimes E_2, F_1 \boxtimes F_2] \cong \bigoplus_{i=j+k} \mathrm{Ext}^j_{G_1}[E_1, F_1] \otimes \mathrm{Ext}^k_{G_2}[E_2, F_2].$$

PROOF. 如果 P_1 是 G_1的投射模，且 P_2 是G_2的投射模，那么根据引理 3.3, $P_1 \boxtimes P_2$ 是 $G_1 \times G_2$的投射模。

Let

$$\cdots \to P_1 \to P_0 \to E_1 \to 0,$$

$$\cdots \to Q_1 \to Q_0 \to E_2 \to 0,$$

是 E_1 作为 G_1-模的一个投射分解，也是E_2 作为 G_2-模的一个投射分解。

由此可知，这两个正合列的张量积：

$$\cdots \to P_1 \boxtimes Q_0 + P_0 \boxtimes Q_1 \to P_0 \boxtimes Q_0 \to E_1 \boxtimes E_2 \to 0,$$

是 $E_1 \boxtimes E_2$的一个投射分解。因此，$\mathrm{Ext}^i_{G_1\times G_2}[E_1 \boxtimes E_2, F_1 \boxtimes F_2]$ 可以通过取链复形的上同调来计算

$$\mathrm{Hom}_{G_1\times G_2}[\bigoplus_{i+j=k} P_i \boxtimes Q_j, F_1 \boxtimes F_2].$$

此时，我们使用如下众所周知的结果：由于 G_1 是一个约化的 p-进群， G_1 的光滑表示范畴是诺特的，即有限生成模的任意子模都是有限生成的，参见 [BZ1] 的定理 4.19。（这是本证明中唯一使用 G_1 为约化群之处，也许这一条件并非必要？）由于 E_1 具有有限长度，因而是有限生成的，所以存在一个从有限生成投射模 $P_0 \to E_1 \to 0$ 到它的满射，其中 P_0 是若干形如 $\mathrm{ind}_{K_{0k}}^{G_1}(W_{0k})$ 的有限生成模之和。映射 $P_0 \to E_1$ 的核是一个有限生成的 G-模，因此再次存在一个映射 $P_1 \to P_0$，其中 P_1 是若干形如 $\mathrm{ind}_{K_{1k}}^{G_1}(W_{1k})$ 的有限生成模之和，且其像正好是映射 $P_0 \to E_1$ 的核。迭代这一过程，我们得到一个投射

由有限生成投射模 $P_i = \sum_k \mathrm{ind}_{K_{ik}}^{G_1}(W_{ik})$ 构成的 E_1 的分解，因此 E_1 的投射分解为：

$$\cdots \to P_1 = \sum_j \mathrm{ind}_{K_{1k}}^{G_1}(W_{1k}) \to P_0 = \sum_k \mathrm{ind}_{K_{0k}}^{G_1}(W_{0k}) \to E_1 \to 0.$$

假设我们处于定理的情形 (1)，因此 E_1、F_1 具有有限长度，特别是 F_1 是容许的。

现在，由于 F_1 是容许的，$\mathrm{Hom}_{K_{ik}}[W_{ik}, F_1]$ 是有限维的，因此存在一个 K_{ik}-不变子空间 $F_{1ik} \subset F_1$，使得 $\dim(F_{1ik})$ 有限维，且 $\mathrm{Hom}_{K_{ik}}[W_{ik}, F_{1ik}] = \mathrm{Hom}_{K_{ik}}[W_{ik}, F_1]$。

由于 W_{ik}、F_{1ik} 是有限维的，我们有如下同构

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{K_{ik}\times G_2}[W_{ik}\boxtimes Q_j, F_1\boxtimes F_2] &\cong \mathrm{Hom}_{K_{ik}\times G_2}[W_{ik}\boxtimes Q_j, F_{1ik}\boxtimes F_2]\\ &\cong \mathrm{Hom}_{K_{ik}}[W_{ik}, F_{1ik}]\otimes \mathrm{Hom}_{G_2}[Q_j, F_2],\\ &\cong \mathrm{Hom}_{K_{ik}}[W_{ik}, F_1]\otimes \mathrm{Hom}_{G_2}[Q_j, F_2],\end{aligned}$$

在第二个同构中，我们用到了W_i、F_{1ik} 的有限维性，以及关于向量空间的相应结论：

$$\mathrm{Hom}[W_{ik}\boxtimes Q_j, F_{1ik}\boxtimes F_2] \cong \mathrm{Hom}[W_{ik}, F_{1ik}]\otimes \mathrm{Hom}[Q_j, F_2].$$

As $P_i = \sum_k \mathrm{ind}_K^{G_1}(W_{ik})$, we have:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{G_1\times G_2}[P_i\boxtimes Q_j, F_1\boxtimes F_2] &= \sum_k \mathrm{Hom}_{G_1\times G_2}[\mathrm{ind}_{K_{ik}}^{G_1}(W_{ik})\boxtimes Q_j, F_1\boxtimes F_2]\\ &\cong \sum_k \mathrm{Hom}_{K_{ik}\times G_2}[W_{ik}\boxtimes Q_j, F_1\boxtimes F_2]\\ &\cong \sum_k \mathrm{Hom}_{K_{ik}}[W_{ik}, F_1]\otimes \mathrm{Hom}_{G_2}[Q_j, F_2]\\ &\cong \mathrm{Hom}_{G_1}[P_i, F_1]\otimes \mathrm{Hom}_{G_2}[Q_j, F_2].\end{aligned}$$

在定理的情形 (2) 中，我们也有类似的同构：此时，E_1 在 G_1 上的表示和 E_2 在 G_2 上的表示具有有限长度；在这种情况下，我们分别用有限生成的 G_1 模和 G_2 模对E_1 和 E_2 作分解，正如上文中我们对 G_1分解 E_1 那样。

因此，我们能够将链复形 $\mathrm{Hom}_{G_1\times G_2}[\bigoplus_{i+j=k} P_i\boxtimes Q_j, F_1\boxtimes F_2]$ 识别为链复形 $\mathrm{Hom}_{G_1}[P_i, F_1]$ 和 $\mathrm{Hom}_{G_2}[Q_j, F_2]$ 的张量积。现在，抽象的 Künneth 定理根据两个链复形各自的上同调计算其张量积的上同调，从而完成了该定理的证明。□

Corollary 3.6. 设 G_1 和 G_2 是两个 p-进群。设 E_1, F_1 是 G_1的任意两个光滑表示， E_2, F_2 是 G_2的任意两个光滑表示。假设定理 3.5 中的两个条件之一成立。若 $\mathrm{EP}_{G_1}[E_1, F_1]$和 $\mathrm{EP}_{G_2}[E_2, F_2]$ 有定义（即相应的 Ext群是有限维的，且在充分大的次数上为零），则 $\mathrm{EP}_{G_1\times G_2}[E_1\boxtimes E_2, F_1\boxtimes F_2]$ 有定义（即 Ext群是有限维的，且在充分大的次数上为零），并且有：

$$\mathrm{EP}_{G_1\times G_2}[E_1\boxtimes E_2, F_1\boxtimes F_2] = \mathrm{EP}_{G_1}[E_1, F_1]\cdot \mathrm{EP}_{G_2}[E_2, F_2].$$

4. 贝塞尔子群

我们将使用贝塞尔子群和贝塞尔模型，但不作定义，而是请读者参阅 [GGP], ; 这里只回顾一下，这些概念是针对经典群一般线性群(V)、特殊正交群(V)、U(V)定义的，并通过一个子空间 $W \subset V$来构造，其中 V/W为奇数维；在特殊正交群(V)的情形下，该子空间是一个分裂二次空间。本文中我们只对特殊正交群(V)使用这些子群；其他群的情形非常相似，主要只需改变记号。贝塞尔子群 Bes(V, W)（若 V已知，则简记为 Bes(W)）是特殊正交群(V)的一个子群，其形式为 SO(W) $\ltimes U =$ SO(W) $\cdot U$；其中 U是特殊正交群(V)的一个幺幂子群，由特殊正交群(W)正规化，并附带一个特征 $\psi : U \to \mathbb{C}^\times$，该特征在特殊正交群 ($W$) 作用下保持不变。当 dim($V/W$) $= 1$时，贝塞尔子群 Bes(V, W) $=$SO(W)。对于特殊正交群(W)的一个表示 ρ，我们将对应的表示记为 $\rho \otimes \psi$，它是 Bes(W) $=$SO(W) $\cdot U$。全文中，对于特殊正交群(V)的有限长度光滑表示 π以及特殊正交群(W)的 ρ，我们将使用记号 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Bes}(V,W)}[\pi, \rho]$ 表示以下同态空间:

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Bes}(V,W)}[\pi, \rho] = \{\ell : \pi \to \rho | \ell(su \cdot v) = \rho(s)\psi(u)\ell(v)\},$$

对所有 $v \in \pi, s \in$特殊正交群(W)，以及 $u \in U$，其中 Bes(V, W) $=$特殊正交群(W) $\ltimes U$。

特殊正交群(V)上的表示 $\mathrm{ind}^{\mathrm{SO}(V)}_{\mathrm{Bes}(V,W)}(\rho\otimes\psi)$ 称为 Gelfand–Graev–Bessel 表示，在分析从特殊正交群(V^+)到特殊正交群(V)的限制问题时发挥着重要作用，其中 V^+是一个二次空间，包含作为余维1子空间的 V，且 V^+/W 是偶数维分裂二次空间。根据 Frobenius 互反律，我们有:

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Bes}(V,W)}[\pi, \rho^\vee] = \mathrm{Hom}_{\mathrm{SO}(V)}[\mathrm{ind}^{\mathrm{SO}(V)}_{\mathrm{Bes}(V,W)}(\rho \otimes \psi), \pi^\vee].$$

Proposition 4.1. 若 ρ 是特殊正交群(W)的有限长度表示，则 Gelfand–Graev–Bessel 表示,

$$\mathrm{ind}^{\mathrm{SO}(V)}_{\mathrm{Bes}(V,W)}(\rho \otimes \psi),$$

是特殊正交群(V)的局部有限生成表示；此外，若ρ是特殊正交群(W)的尖点表示，且特殊正交群(W)不是分裂的特殊正交群$_2$(F)，则它是投射的。

Proof. 任意准分裂群的盖尔范德-格雷夫表示的投射性，归功于 Chan 和 Savin 在论文 [CS3] 附录中的工作。我们来回顾一个稍微微妙的要点。由 U-余不变量的正合性可知，显然的是 $\mathrm{Ind}^G_U(\psi)$ 是约化群 G的 U 任意幺幂子群的内射模 G。投射模的对偶是内射模，这是一条普遍结论，但这并不能证明 $\mathrm{ind}^G_U(\psi)$ 是投射的!

Chan 和 Savin 并未直接证明 $\mathrm{ind}^G_U(\psi)$ 是投射的，而是证明了对所有 σ 和所有 $i > 0$，$\mathrm{Ext}^i_G[\mathrm{ind}^G_U(\psi)\ \sigma] = 0$。根据一般理论，对于中心包含一个有限生成 $\mathbb{C}$-代数 Z 的代数 $\mathcal{H}$，且 $\mathcal{H}$ 作为 Z-模有限生成，若 M 是有限生成的 $\mathcal{H}$-模，则对$i > 0$ 和所有 N，$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{H}}[M, N] = 0$成立，当且仅当这对有限生成的 $\mathcal{H}$-模 N 成立；最终，对 $i > 0$ 和所有 N，$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{H}}[M, N] = 0$成立，当且仅当对作为 $\mathcal{H}$-模有限长度的 $i > 0$ 和所有 N，$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{H}}[M, N] = 0$成立。（显然，只有不可约$N$ 才合适！）

从有限生成推广到有限长度，是 Chan 和 Savin 讨论的一般性问题；根据 [NP]，这也是命题 5.2 的推论。

其中

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{H}}[M,N]\otimes_Z \widehat{Z}\cong \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{H}}[M,\widehat{N}]\cong \lim_{\leftarrow}\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{H}}[M,N/\mathfrak{m}^nN],$$

其中 $\widehat{N}=\lim_{\leftarrow}(N/\mathfrak{m}^nN)$。因此，若对某个 $n\geq 1$ 有 $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{H}}[M,N]\neq 0$，则 $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{H}}[M,N/\mathfrak{m}^nN]\neq 0$。

对此，M 的有限生成至关重要。Chan 和 Savin 为此引用了论文 [Bu-He]，该论文证明 Gelfand–Graev 表示是局部有限生成的。

在我们的情形中，我们可以借助 Aizenbud-Sayag 的定理 1.2，证明 Gelfand–Graev–Bessel 表示 $\mathrm{ind}^{\mathrm{SO}(V)\,\mathrm{Bes}(W)}(\rho\otimes\psi)$ 是局部有限生成的。下面我们将详细说明这一点；Chan-Savin 在 [CS3]中的其余论证可照搬。当然，正如 $\mathrm{Ind}_U^G(\psi)$ 是 U任意约化群 G的幺幂子群的内射模一样，若 ρ 是特殊正交群 $\mathrm{SO}(W)$ 的尖点表示，且 $\mathrm{SO}(W)$ 不是分裂的 $\mathrm{SO}_2(F)$，则 $\mathrm{Ind}^{\mathrm{SO}(V)\,\mathrm{Bes}(W)}(\rho\otimes\psi)$ 是 $\mathrm{SO}(V)$ 的内射模。

令 $V^+=V+L$，其中 L 是满足 $V^+=X+W+Y$ 的一维二次空间；对于 X，Y 是与 W 垂直的各向同性空间。考虑 $\mathrm{SO}(V^+)$ 的表示 $\tau\times\rho$：它是从抛物子群诱导得到的 $\mathrm{SO}(V^+)$ 的抛物诱导表示，该抛物子群的 Levi 子群为 $\mathrm{GL}(X)\times\mathrm{SO}(W)$，表示为 $\tau\boxtimes\rho$，其中 τ 是 $\mathrm{GL}(X)$ 的任意尖点表示。应用标准的麦基理论，考虑 $\mathrm{SO}(V^+)$ 的表示 $\tau\times\rho$ 限制到 $\mathrm{SO}(V)$ 后的情形，其中 $\tau\times\rho$ 的开轨道贡献给出 $\mathrm{ind}^{\mathrm{SO}(V)\,\mathrm{Bes}(W)}(\rho\otimes\psi)$，见 [GGP] 的定理 15.1。这将 $\mathrm{ind}^{\mathrm{SO}(V)\,\mathrm{Bes}(W)}(\rho\otimes\psi)$ 实现为表示 $\tau\times\rho$ 的一个子模，其中 $\tau\times\rho$ 是 $\mathrm{SO}(V^+)$ 的表示限制到 $\mathrm{SO}(V)$ 后的表示；根据 Aizenbud-Sayag 的定理 1.2，该表示是局部有限生成的。由于支配 Bernstein 分块的环是诺特环，局部有限生成表示的子模也是局部有限生成的，从而证明了该命题。□

注意这个命题的一个特例。

Corollary 4.2. 若 $W\subset V$ 是 V（一个二次空间）的余维一子空间，且 ρ 是 $\mathrm{SO}(W)$的有限长度表示，则 $\mathrm{ind}^{\mathrm{SO}(V)\,\mathrm{SO}(W)}(\rho)$ 是 $\mathrm{SO}(V)$的局部有限生成表示；若 ρ 是尖点表示（且 $\dim(W)=2$，W不是分裂的），则它还是投射的。$\mathrm{GL}_n(F)$、$\mathrm{U}_n(F)$也有类似结论。

5. 限制究竟是什么样的!

到目前为止，我们一直在讨论这样一个问题：$\mathrm{GL}_{n+1}(F)$的不可约表示的商中，哪些表示属于 $\mathrm{GL}_n(F)$。我们能否更全面地了解 $\mathrm{GL}_{n+1}(F)$的表示限制到 $\mathrm{GL}_n(F)$后是什么样的?

许多情形下 Ext 群会消失（但并非所有情形都如此！），这表明 $\mathrm{GL}_{n+1}(F)$的不可约容许（泛型）表示 π 限制到 $\mathrm{GL}_n(F)$后，虽然并非在所有情形下都是投射模，但与投射模非常接近。

由于 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的光滑表示范畴分解为由 $\mathrm{GL}_n(F)$ 中尖点数据（M,ρ）的惯性等价类参数化的块，因此可以提出这样一个问题：π 在特定块上的投影（记作 $\pi[M,\rho]$）是否是该块中的投射模？这似乎是一个重要的问题，值得

理解：给定 $\mathrm{GL}_{n+1}(F)$ 的一个不可约表示 π，对于 $\mathrm{GL}_n(F)$ 中哪些块（M, ρ），$\pi[M,\rho]$ 是投射模?

在讨论下一个命题之前，回顾一下，伯恩斯坦-泽列文斯基引入了一般线性群表示的导数表示这一概念：将 $\mathrm{GL}_{n+1}(F)$ 的表示 π 映到 $\mathrm{GL}_{n+1-i}(F)$ 的表示，其中 $\pi \to \pi^i$，对所有 $0 \leq i \leq (n+1)$ 均成立；当且仅当 π 具有惠特克模型时，π^{n+1} 非零。伯恩斯坦-泽列文斯基导数表示满足莱布尼茨法则（在 $\mathrm{GL}_{n+1}(F)$ 表示的格罗滕迪克群中）：

$$(\pi_1 \times \pi_2)^d = \sum_{i=0}^{d} \pi_1^{d-i} \times \pi_2^i.$$

此外，对于 $\mathrm{GL}_d(F)$ 的不可约尖点表示 π，仅有以下导数表示非零：$\pi^0 = \pi$ 和 $\pi^d = \mathbb{C}$。

伯恩斯坦-泽列文斯基在 $\mathrm{GL}_{n+1}(F)$ 的表示上引入了一种滤过，它通过表示 π 的导数 π^i 来描述 $\mathrm{GL}_{n+1}(F)$ 的表示 π 限制到 $\mathrm{GL}_{n+1}(F)$ 的拟抛物子群上的情形。将 π（一个 $\mathrm{GL}_{n+1}(F)$ 的表示）视为 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的表示时，该滤过的连续商为抛物诱导表示 $\nu^{1/2}\pi^{i+1} \times \mathrm{GG}(n-i)$，其中 $0 \leq i \leq n$；这里，$\mathrm{GG}(i)$ 是 $\mathrm{GL}_i(F)$ 的盖尔范德-格雷夫表示。

现在，根据一般线性群$_{n+1}(F)$的表示上的 Bernstein-Zelevinski 过滤以及导数表示的莱布尼茨法则，以下命题的证明显而易见：

PROPOSITION 5.1. 设 π 是一般线性群$_{n+1}(F)$的不可约泛型表示。设(M, ρ)是一般线性群$_n(F)$的一个尖点数据，因此 $M =$一般线性群$_{n_1}(F) \times \cdots \times$一般线性群$_{n_k}(F)$，其中 $n = n_1 + \cdots + n_k$是一般线性群$_n(F)$中的一个 Levi 子群，而 $\rho = \rho_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \rho_k$ 是一般线性群$_{n_i}(F)$的不可约尖点表示的张量积。假设一般线性群$_{n_i}(F)$的尖点表示 ρ_i 均不出现在π 的尖点支撑中，即使经过非分歧扭亦如此。那么$\pi|_{\mathrm{GL}_n(F)}[M,\rho]$ 是盖尔范德-格雷夫表示 $\mathrm{GG}(n) = \mathrm{ind}^{\mathrm{GL}_n(F)}{}_N \quad \psi$的 $[M,\rho]$ 分量；特别地，$\pi|_{\mathrm{GL}_n(F)}[M,\rho]$是一般线性群$_n(F)$的投射表示。

下面给出经典群的相应结果。为简化记号，我们只陈述 $\mathrm{SO}(W) \subset \mathrm{SO}(V)$ 的情形，其中 $W \subset V$是二次空间 V中的余维1非退化子空间，且 $\dim(V) = n+1$。与命题5.1类似，这一结果也可由 Bernstein-Zelevinski 类似的滤过推出（该滤过由莫格林和瓦尔德斯普格在 [Mo-Wa] 中提出）：当 $\mathrm{SO}(V)$ 的表示由 Levi 子群形如 $\mathrm{GL}_m(F) \times \mathrm{SO}(W')$ 的极大抛物子群诱导而来，且表示具有 $\mu_1 \boxtimes \mu_2$ 这种形式时，将 $\mathrm{SO}(V)$ 的表示限制到 $\mathrm{SO}(W)$ 上即可应用该滤过；此外还需对限制到 $\mathrm{GL}_m(F)$ 中 mirabolic 子群上的 μ_1 使用 Bernstein-Zelevinski 过滤。下面的命题使用表示 $\mathrm{ind}^{\mathrm{SO}(W)}{}_{\mathrm{Bes}(W_0)}(\rho_0 \otimes \psi)$，其中$\rho_0$ 是 $\mathrm{SO}(W_0)$ 的尖点表示；我们在第4节中称其为 Gelfand–Graev–Bessel 表示，并且根据命题 4.1，它是一个射影表示。这里，$\mathrm{Bes}(W_0)$ 是 $\mathrm{SO}(W)$ 内的贝塞尔子群，于第4节引入；其中 $W_0 \subset W$ 是二次空间 W 中的非退化子空间，且 $W_0^{\perp}$是一个奇数维双曲空间，

PROPOSITION 5.2. 设 π 是 $\mathrm{SO}(V)$ 的不可约容许表示，它是 $\mathrm{SO}(V)$ 的某个 Levi 子群的尖点表示的完全诱导。设 (M,ρ) 是 $\mathrm{SO}(W)$ 的尖点数据，因此，$M = \mathrm{GL}_{n_1}(F) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{n_k}(F) \times \mathrm{SO}(W_0)$，其中 $n = 2n_1 + \cdots + 2n_k + \dim(W_0)$，是 $\mathrm{SO}(W)$ 内的一个 Levi 子群，

并且 $\rho = \rho_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \rho_k \boxtimes \rho_0$ 是 $\mathrm{GL}_{n_i}(F)$ 的不可约尖点表示 ρ_i （ $i \geq 1$）的张量积，而 ρ_0 是 $\mathrm{SO}(W_0)$ 的不可约尖点表示。假设 $\mathrm{GL}_{n_i}(F)$ 的尖点表示 ρ_i 均不出现在 π 的尖点支撑中，即使经过非分歧扭转也不出现（对 ρ_0 不作任何条件）。那么 $\pi|_{\mathrm{SO}(W)}[M,\rho]$ 是 Gelfand–Graev–Bessel 表示 $\mathrm{ind}^{\mathrm{SO}(W)}{}_{\mathrm{Bes}(W_0)}(\rho_0 \otimes \psi)$ 的 $[M,\rho]$ 分量；特别地，如果 $\mathrm{SO}(W_0)$ 不是分裂的 $\mathrm{SO}_2(F)$，则 $\pi|_{\mathrm{SO}(W)}[M,\rho]$ 是 $\mathrm{SO}(W)$ 的射影表示。

REMARK 5.3. 我们在命题5.1中假设 π 是泛型的，否则命题5.1中的断言将变为空，即若 π 不是泛型的，则$\pi|_{\mathrm{GL}_n(F)}[M,\rho]$将为零。然而，在命题 5.2中，我们并不假设 π 是泛型的。

以下定理归功于 Chan 和 Savin，参见 [CS1], [CS2], [CS3]。

THEOREM 5.4. (1) 不可约容许表示 π 从一般线性群 $\mathrm{GL}_{n+1}(F)$限制到一般线性群 $\mathrm{GL}_n(F)$后，在一般线性群 $\mathrm{GL}_n(F)$的光滑表示的某个 Bernstein 分块中是一个投射模，当且仅当 π 本身是泛型的，并且 π在一般线性群 $\mathrm{GL}_n(F)$的光滑表示的该 Bernstein 分块中的所有不可约一般线性群 $\mathrm{GL}_n(F)$-商都是泛型的。(2) 若 π_1、π_2是一般线性群 $\mathrm{GL}_{n+1}(F)$的任意两个不可约表示，且它们限制到一般线性群 $\mathrm{GL}_n(F)$后在一般线性群 $\mathrm{GL}_n(F)$的光滑表示的某个 Bernstein 分块中是投射的，那么 π_1 和 π_2 在一般线性群 $\mathrm{GL}_n(F)$的光滑表示的该 Bernstein 分块中同构。(3) 设 π 是一般线性群 $\mathrm{GL}_n(F)$的 Iwahori 块中的一个光滑投射模，满足对任意不可约表示 π'，都有 $\dim \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n(F)}[\pi,\pi'] \leq 1$。那么 π同构于 $\mathrm{ind}^{\mathrm{GL}_n(F)}\mathrm{GL}_n(O_F)(\mathrm{St})$ 或 $\mathrm{ind}^{\mathrm{GL}_n(F)}\mathrm{GL}_n(O_F)(\mathbb{C})$，其中 St 表示一般线性群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$的 Steinberg 表示，且 $\mathbb{F}_q$ 是 O_F的剩余域。

REMARK 5.5. Chan 和 Savin 的这一结果之后，尚待解决的问题有：(1) 给定一个 $\mathrm{GL}_{n+1}(F)$ 的不可约泛型表示 π，能否准确分类 $\mathrm{GL}_n(F)$ 中使 $\pi|_{\mathrm{GL}_n(F)}$ 不是投射的 Bernstein 分块？(2) 更一般地，若 π 是 $\mathrm{GL}_{n+1}(F)$ 的一个不可约表示（它可能是泛型，也可能不是），能否理解特定 Bernstein 分块中 $\pi|_{\mathrm{GL}_n(F)}$ 的投射维数（即投射分解的最短长度）？

在 p 进群的表示论中，处理非尖点离散系列往往是最困难的部分。下一节的命题 6.3 将证明，对于 π 个 $\mathrm{GL}_{n+1}(F)$ 的泛型表示，在那些不含非尖点离散系列表示的 $\mathrm{GL}_n(F)$ Bernstein 分块中，$\pi|_{\mathrm{GL}_n(F)}$ 是投射表示。命题 6.3 和命题5.1 都可视为答案明晰的最简单的块。

下述 Chan定理，参见 [Chan], ，完整分类了这样一类一般线性群$_{n+1}(F)$的不可约表示：限制到一般线性群$_n(F)$后成为投射模，因此在所有块中仍保持投射性。

THEOREM 5.6. 设 π 是 $\mathrm{GL}_{n+1}(F)$ 的不可约表示。那么 π 限制到 $\mathrm{GL}_n(F)$ 后是射影表示，当且仅当

(1) π 是本质平方可积的；或者 (2) $(n+1) = 2d$, $\pi = \pi_1 \times \pi_2$，其中 π_i 是 $\mathrm{GL}_d(F)$ 上的尖点表示。

REMARK 5.7. 注意，若一般线性群 $\mathrm{GL}_{n+1}(F)$ 的不可约表示 π 是非广义的，或有一个一般线性群 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的非广义商表示 π'，则由定理 2.2，作为 $\mathrm{EP}[\pi, \pi'] = 0$，对某个 $i > 0$，有 $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{GL}_n(F)}[\pi, \pi'] \neq 0$，且将 π 限制到一般线性群 $\mathrm{GL}_n(F)$ 后不可能是投射模。现在，[GGP2] 中提出并由 [Chan2], [Gur], 证明的一般线性群 $\mathrm{GL}_n(F)$ 上的非温和 GGP，描述了一般线性群 $\mathrm{GL}_{n+1}(F)$ 的不可约表示 π 和一般线性群 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的不可约表示 π'（它们是离散系列表示上的 Speh 表示，即具有 A-参数），其

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n(F)}[\pi, \pi'] \neq 0.$$

这就排除了定理 5.6 所列表示之外的大多数表示（一般线性群 $\mathrm{GL}_{n+1}(F)$ 的 π 或是非广义的，或是泛型但属于 Arthur 型），证明它们不是投射的。例外是一般线性群 $\mathrm{GL}_{2d}(F)$ 上的温和表示 $\pi = \mathrm{St}_d \times \chi\mathrm{St}_d$，其中 χ 是 $F^\times$ 的酉特征，而 St_d 是一般线性群 $\mathrm{GL}_d(F)$ 的 Steinberg 表示。根据非温和 GGP，它没有一般线性群 $\mathrm{GL}_{2d-1}(F)$ 上具有 A-参数的非广义商表示（但它确实有其他一般线性群 $\mathrm{GL}_{2d-1}(F)$ 上的非广义商表示，参见定理 5.4(1)）。另一方面，

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{GL}_{2d-1}(F)}[\mathrm{St}_d \times \chi\mathrm{St}_d, \mathbb{1}_{d+1} \times \pi'] \neq 0,$$

对于 $i = d, d-1$，其中 π' 是 $\mathrm{GL}_{d-2}(F)$ 的任意温和表示，参见 Chan 的定理 7.4 以及 Saad 的一项近期工作，参见 [Sa]。因此，定理 5.6 可以重新表述为：$\mathrm{GL}_{n+1}(F)$ 的不可约表示 π 限制到 $\mathrm{GL}_n(F)$ 后不是投射表示，当且仅当存在某个 $i > 0$,

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{GL}_n(F)}[\pi, \pi'] \neq 0,$$

存在 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的某个不可约非广义表示 π'，其具有 A-参数（这一说法尚未完全得到证明，因为我们还不知道 $\mathrm{GL}_{n+1}(F)$ 上维数为 > 1 的任意不可约表示是否都有一个 Arthur 型的 $\mathrm{GL}_n(F)$ 商表示，而我们预期确实如此）。

REMARK 5.8. 根据 Chan 定理 5.6，与尖点表示类似，$\mathrm{GL}_{n+1}(F)$ 的离散系列表示限制到 $\mathrm{GL}_n(F)$ 后总是投射表示。这似乎是所有 GGP 对的一个普遍特征。因此，对于一个 GGP 对 (G, H)，若 π 是 G 的离散系列表示，则预期 $\pi|_H$ 是 H 的投射表示；这一预期目前尚无证明。

6. Roche 的一个定理及其若干推论

上一节中，我们讨论了若干情形：将一般线性群 $\mathrm{GL}_{n+1}(F)$ 的不可约容许表示（或其他经典群的不可约容许表示）限制到 $\mathrm{GL}_n(F)$（或其他经典群的子群）后，会得到投射模；对于一般线性群 $\mathrm{GL}_{n+1}(F)$，根据 Chan 和 Savin 的定理，这些投射模是非常显式的紧诱导表示。本节中，我们将运用 Alan Roche 的一个定理，讨论另一个类似情形：对于一般线性群 $\mathrm{GL}_{n+1}(F)$ 以及经典群，限制表示都会得到投射模。不过在这种情形下，投射模是普适主系列表示。

THEOREM 6.1. (Alan Roche) 设 G 是一个约化 p-进群，(M,ρ) 是一个尖点数据。假设 $N_G(M)/M$ 中没有非平凡元素在非分歧扭意义下保持 ρ 不变。那么诱导表示为：

$$\mathrm{Ind}_P^G(\rho),$$

是不可约的。此外，从 P （Levi 子群为 M）到 G的抛物诱导给出范畴等价

$$\mathcal{R}[M][\rho] \to \mathcal{R}[G][M,\rho].$$

特别地，由于 M 中与 M 的尖点表示 ρ 相对应的 Bernstein 分支内的表示范畴 $\mathcal{R}[M][\rho]$ ，与以阿祖马亚代数为模的范畴相同，而该代数的中心是复环面上函数构成的环，这个复环面由 ρ的非分歧扭组成，因此 G的 Bernstein 分支 $\mathcal{R}[G][M,\rho]$ 也具有相同性质。

REMARK 6.2. 根据几何引理（该引理计算完全主系列表示的 Jacquet 模，在本例中 ρ 是尖点表示），断言 $N_G(M)/M$ 中没有非平凡元素在非分歧扭意义下保持 ρ 不变，等价于说，主系列表示 $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)$关于抛物子群 P的 Jacquet 模包含 ρ，且其重数为一；此外，不包含任何与其不同的非分歧扭。

PROPOSITION 6.3. 令 G_{n+1} 为以下任意经典群之一：$\mathrm{GL}_{n+1}(F)$、$\mathrm{SO}_{n+1}(F)$、$\mathrm{U}_{n+1}(F)$。设 π_1 是 $\mathrm{G}_{n+1}(F)$ 的一个不可约表示，属于 $\mathrm{G}_{n+1}(F)$ 的一个泛型L-包；并设 (M,ρ) 是 $\mathrm{G}_n(F)$ 的一个尖点数据。假设 $N_{\mathrm{G}_n(F)}(M)/M$中没有非平凡元素在非分歧扭下保持 ρ不变。设ρ^0 是 M^0 的一个不可约表示； M^0 是由 M 的紧元素生成的子群，并且满足 $\rho^0 \subset \rho|_{M^0}$。那么， π_1的 (M,ρ) Bernstein 分支限制到 $\mathrm{G}_n(F)$ 后，就是“普适主系列”表示，即

$$\pi_1|_{\mathrm{G}_n(F)}[M,\rho] \cong \mathrm{ind}_{P^0}^{\mathrm{G}_n}(\rho^0) \cong \mathrm{Ind}_P^{\mathrm{G}_n}\mathrm{ind}_{M^0}^M(\rho^0),$$

其中 $P^0 = M^0N$。特别地，$\pi_1|_{\mathrm{G}_n(F)}$的 (M,ρ) Bernstein 分支是一个与 π_1无关的射影表示。

PROOF. 由于 M 是 $\mathrm{G}_n(F)$ 的一个 Levi 子群， M 是若干 $\mathrm{GL}_{n_i}(F)$ 群与 $\mathrm{G}_m(F)$ 的乘积，其中 $m \geq 0$ 是某些群（除非 G_m 是 $\mathrm{U}_1(F)$ 或 $\mathrm{SO}_2(F)$ 之一，否则这些群都是半单群），因此很容易看出，任意不可约表示限制到 M^0后，都是 M^0的不可约表示的有限直和，且重数一。由第二伴随性结合开子群的 Frobenius 互反律（参见引理 3.1），对于 π 任意一个 $\mathrm{G}_n(F)$ 的不可约表示，

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}_n(F)}[\mathrm{Ind}_P^{\mathrm{G}_n(F)}\mathrm{ind}_{M^0}^M(\rho^0),\pi] \cong \mathrm{Hom}_M[\mathrm{ind}_{M^0}^M(\rho^0),\pi_{\bar{N}}] \cong \mathrm{Hom}_{M^0}[\rho^0,\pi_{\bar{N}}].$$

根据注 6.2， $\pi_{\bar{N}}$ 作为 M 的模，包含 ρ 作为一个重数一的子商，并且不包含任何不等于 ρ的 ρ 的非分歧扭。由此很容易推出 $\dim \mathrm{Hom}_{M^0}[\rho^0,\pi_{\bar{N}}] \leq 1$.因此，$\mathrm{G}_n(F)$ 的任意不可约表示 π，只要它作为 $\mathrm{Ind}^{\mathrm{G}_n(F)}_{P^0}(\rho^0)$ 的商出现，其重数至多为一；当且仅当它属于 Bernstein 分块 $[M,\rho]$ 且是完整主系列时，其重数为一。此外，由于重数为一，定理 6.1 中出现的阿祖马亚代数就是劳朗多项式环 R $R = \mathbb{C}[X_1, X_1^{-1}, \cdots, X_d, X_d^{-1}]$，它是一个 d维复环面上的正则函数环。

现在我们分析作为模的 $\pi_1|_{\mathrm{G}_n(F)}[M,\rho]$，将其记为环 $R=\mathbb{C}[X_1,X_1^{-1},\cdots,X_d,X_d^{-1}]$ 上的模 $\mathcal{M}$。在 R-模范畴中，不可约= 简单模具有如下形式 $R/\mathfrak{m}$，其中 $\mathfrak{m}$ 是 R 中的极大理想，因此 $\pi_1|_{\mathrm{G}_n(F)}[M,\rho]$ 的不可约商是 R-模同态$\mathcal{M}\to R/\mathfrak{m}=\mathbb{C}$，等价地说，是 R-模同态 $\mathcal{M}/\mathfrak{m}\mathcal{M}\to\mathbb{C}$。由于此 Bernstein 分块中的每个不可约表示都是完整主系列，特别是它们全都是泛型表示，因此根据一般线性群$_{n+1}(F)$ 情形下的定理 5.1，以及其他情形下的 GGP 猜想（定理！），这些不可约主系列表示各自都以重数 1 作为 π_1 的商出现（对于特殊正交群$_{n+1}(F)$、U$_{n+1}(F)$，重数恒为零也是一种可能；重要的是，这个分块中的所有不可约表示的重数都是相同的——它们都是由 Levi 子群的尖点表示诱导而来的完整主系列表示，而这属于比一般情形容易得多的 GGP 猜想情形）。由此可将上述分析概括为：对于与 $\pi_1|_{\mathrm{G}_n(F)}[M,\rho]$ 对应的、$R=\mathbb{C}[X_1,X_1^{-1},\cdots,X_d,X_d^{-1}]$ 上的模 $\mathcal{M}$，对 R 中所有极大理想 $\mathfrak{m}$，$\mathcal{M}/\mathfrak{m}\mathcal{M}\cong\mathbb{C}$。

根据 Aizenbud-Sayag 的定理 1.2，我们知道 $\mathcal{M}$ 在 $R=\mathbb{C}[X_1,X_1^{-1},\cdots,X_d,X_d^{-1}]$上的有限生成。因此，下面引理 6.4 中的所有假设均已满足，从而 $\mathcal{M}$ 是环 R 上的秩 1 投射模，其中 R 是 Laurent 多项式 $R=\mathbb{C}[X_1,X_1^{-1},\cdots,X_n,X_n^{-1}]$。通用主系列表示 $\mathrm{ind}_{P^0}^{\mathrm{G}_n}(\rho^0)$也同样如此。由于 Laurent 多项式环上的任意秩 1 投射模都是自由的，命题得证。□

Lemma 6.4. 设 R 是一个有限生成的交换 k-代数，其中 k 是一个域。假设 R 没有非零幂零元素。设 $\mathcal{M}$ 是一个 R 上的有限生成模，并且对于 R的每个极大理想 $\mathfrak{m}$，$\mathcal{M}/\mathfrak{m}\mathcal{M}$ 都是 $R/\mathfrak{m}$上的秩 1 自由模，那么 $\mathcal{M}$ 是 R上的秩 1 投射模。

Remark 6.5. 命题 6.3 尤其适用于包含一般线性群 GL$_n(F)$ 的尖点表示的 GL$_n(F)$ Bernstein 分块！

7. 经典群的 Euler-Poincar´e 特征

在接下来的几节中，我们将讨论经典群分枝律的 Euler-Poincar´e 特征，并仅考虑 $G=\mathrm{SO}_{n+1}(F)$ 和 $H=\mathrm{SO}_n(F)$ 的情形，因为 [GGP] 的定理 15.1 的以下变体，可将涉及贝塞尔模型的 Hom 和 Ext 空间的任何问题转化为涉及 $(G,H)=(\mathrm{SO}_{n+1}(F),\mathrm{SO}_n(F))$ 的问题。

Proposition 7.1. 设 $W\subset V\subset V^+$ 为非退化二次空间，其中V/W是维数为（$2d-1$）的奇数维分裂二次空间，V^+/W是维数为 $2d$ 的分裂二次空间。记 $V^+=X+W+Y$，其中 X,Y 是 V^+ 中维数为 d 的各向同性子空间，且 $X+Y$非退化，并与W正交。设 π_1是 SO(V) 的任意有限长度表示，π_2是 SO(W) 的有限长度表示。则存在酉尖点表示 τ（属于 GL(X)），使得对于 SO(V^+) 的主系列表示 $\tau\times\pi_2$，有：

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{SO}(V)}[\tau\times\pi_2,\pi_1^\vee]\cong\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Bes}(V,W)}[\pi_1,\pi_2^\vee]\ \text{for all i}\geq 0.$$

在下面的定理中，为简化记号，如果 λ_1 是 SO(V_1) 的表示，而 λ_2 是 SO(V_2) 的表示，那么我们将 $\mathrm{EP}_{\mathrm{Bes}}[\lambda_1,\lambda_2]$ 赋予

通常的含义（见第 4 节）：当 $V_2 \subset V_1$ 与 V_1/V_2 为奇维分裂二次空间时；而当 $V_1 \subset V_2$ 与 V_2/V_1 为奇维分裂二次空间时，$\mathrm{EP}_{\mathrm{Bes}}[\lambda_1, \lambda_2]$ 表示 $\mathrm{EP}_{\mathrm{Bes}}[\lambda_2, \lambda_1]$。记号 $\mathrm{EP}_{\mathrm{Bes}}[\lambda_1, \lambda_2]$ 将假定我们处于这两种情形之一。这一记号的用途在于可以向 V_1 或 V_2 添加任意维数的双曲空间，并且根据 [GGP], 的定理 15.1,

$$\mathrm{EP}_{\mathrm{Bes}}[\lambda_1, \lambda_2] = \mathrm{EP}_{\mathrm{Bes}}[\tau_1 \times \lambda_1, \tau_2 \times \lambda_2],$$

其中，τ_1、τ_2 是任意维数一般线性群上的尖点表示。（这一结果将在下文的定理 7.2中推广到一般线性群上所有有限长度表示 τ_1、τ_2。）

下述定理是定理 2.2 的类似结果。定理 2.2 针对一般线性群 $\mathrm{GL}_{n+1}(F)$、$\mathrm{GL}_n(F)$ 的表示；这里则针对经典群。但与本文其余部分一样，我们只对特殊正交群陈述该定理。

THEOREM 7.2. 设 V 是 F 上的二次空间，V' 是 V 内余维1的非退化子空间。设 $\sigma = \pi_0 \times \sigma_0$ 是 $\mathrm{SO}(V)$ 的表示，其中 π_0 是 $\mathrm{GL}_{n_0}(F)$ 的有限长度表示；又设 σ_0 是 $\mathrm{SO}(V_0)$ 的有限长度表示，其中 $V_0 \subset V$ 是 V 的二次子空间，且二次空间V/V_0 是维数为 $2n_0$ 的双曲空间。类似地，设 $\sigma' = \pi_0' \times \sigma_0'$ 是 $\mathrm{SO}(V')$ 的表示，则：

$$\mathrm{EP}_{\mathrm{SO}(V')}[\sigma, \sigma'] = \dim \mathrm{Wh}(\pi_0) \cdot \dim \mathrm{Wh}(\pi_0') \cdot \dim \mathrm{EP}_{\mathrm{Bes}}[\sigma_0, \sigma_0'].$$

PROOF. 这个定理的证明类似于定理 2.2 的证明：对于一般线性群 π_1, π_2 一般线性群$_{n+1}(F)$、一般线性群$_n(F)$的表示，用一个类似的正合序列取代 Bernstein-Zelevinsky 正合列；后者描述一般线性群$_{n+1}(F)$中表示 π_1 对拟抛物子群的限制，而前者则描述 Moeglin-Waldspurger 在[Mo-Wa]中给出的 $\mathrm{SO}(V)$的表示 σ 对其子群 $\mathrm{SO}(V')$的限制。定理 2.2 证明中的一个关键部分是引理 11.5，它讨论了当 V, W 是一般线性群 $_m(F)$ 的有限长度表示时 $\mathrm{EP}[V, W]$ 的消失。这里的情况仍然如此。我们在此给出证明的一些细节。

根据 [Mo-Wa], , $\mathrm{SO}(V)$的表示 $\sigma = \pi_0 \times \sigma_0$ 对 $\mathrm{SO}(V')$的限制有一个滤过，其中一个子商等于

$$\mathrm{Ind}_{P'}^{\mathrm{SO}(V')}(\nu^{1/2}\pi_0 \times \sigma_0|_{\mathrm{SO}(V_0')}), \tag{1}$$

其中，$V_0' = V_0 \cap V'$ 是 V_0的余维一子空间，而 P' 是$\mathrm{SO}(V')$中具有Levi 子群一般线性群$_{n_0}(F)$ ×$\mathrm{SO}(V_0')$的抛物子群。（如果$\mathrm{SO}(V')$中不存在这样的抛物子群，那么就不会出现这一项。）

$\sigma|_{\mathrm{SO}(V')}$ 的其他子商是由极大抛物子群诱导得到的$\mathrm{SO}(V')$的主系列表示，其 Levi 子群的一般线性群部分为一般线性群$_{n_0-i}(F)$，特殊正交群部分为$\mathrm{SO}(V_i')$，其中 $V' = V_{n_0}' \supset V_{i+1}' \supset V_i' \supset V_0$ 具有维数为$(2i-1)$的 V_i'/V_0 分裂二次空间；特别地，$\dim V' = \dim V_0 + 2n_0 - 1$。这些子商为：

$$\pi_0^i \times \mathrm{ind}_{\mathrm{Bes}(V_0)}^{\mathrm{SO}(V_i')}(\sigma_0 \otimes \psi), \quad n_0 \geq i \geq 1, \tag{2}$$

其中，π_0^i 是 $\mathrm{GL}_{n_0-i}(F)$ 的一个表示，它是 $\mathrm{GL}_{n_0}(F)$ 的表示 π_0 的第 i 阶导数表示。

给定 $\sigma|_{\mathrm{SO}(V')}$ 上的滤过，其连续商如 (1) 和 (2) 所示，并且 $\mathrm{EP}[\sigma, \sigma']$ 在正合列中具有可加性，因此应用第二个

Bernstein伴随定理的 Ext 版本（参见 [Pr3]，中的定理2.1），可得 EP$[\sigma,\sigma']$是对应于上述将 σ 限制到特殊正交群 SO(V') 后的滤过的若干项之和；对于上述方程 (1) 中的项，结果为：

$$\mathrm{EP}_{\mathrm{GL}_{n_0}(F)\times \mathrm{SO}(V_0')}[\nu^{1/2}\pi_0 \times \sigma_0|_{\mathrm{SO}(V_0')}, \sigma'_{N'^-}] \tag{3}$$

其中， N'^- 是与 P'相对的抛物子群的幺幂根，而 σ' 的下标表示相应的雅各布森模。

公式 (2) 中各项对 EP$[\sigma,\sigma']$ 的贡献为：

$$\mathrm{EP}_{\mathrm{GL}_{n_0-i}(F)\times \mathrm{SO}(V_i')}[\pi_0^i \times \mathrm{ind}_{\mathrm{Bes}(V_0)}^{\mathrm{SO}(V_i')}(\sigma_0\otimes\psi), \sigma'_{N_i'^-}], \tag{4}$$

其中， $N_i'^-$ 是与 P_i'相对的抛物子群的幺幂根。

由于 σ' 是 SO(V')的有限长度表示，其雅各布森模$\sigma'_{N'^-}$和$\sigma'_{N_i'^-}$ 是 SO(V')相应 Levi 子群的有限长度表示，这些 Levi 子群分别具有 GL$_{n_0}$(F) $\times$SO(V_0')和 GL$_{n_0-i}$ (F) $\times$SO(V_i')的形式。因此，在相应 Levi 子群的表示的格罗滕迪克群中，这些雅各布森模是两个因子（一个一般线性群和一个特殊正交群）的不可约表示的张量积之和。因此，我们处于定理 3.5 的情形 (1)（在该定理的记号中， G_1是一个一般线性群，而 G_1 的表示 E_1、 F_1 具有有限长度）。

根据引理11.5（当 V、 W 是一般线性群 $_m$(F) 的有限长度表示时，EP$[V,W]$ 消失）以及推论 3.6（关于群乘积的 Euler-Poincar´e 配对），可知对 EP$[\sigma,\sigma']$ 有非零贡献的唯一项，是由 (2) 得到的、将 σ 限制到 SO(V') 后的滤过中对应于 π_0 的最高导数表示 $\pi_0^{n_0}$ 的那一项（注意， $V'_{n_0}=V'$ 产生了 GL(0) 的表示 $=\{1\}$，其维数为 dim Wh(π_0)），而这一项还需要乘以

$$\mathrm{EP}[\mathrm{ind}_{\mathrm{Bes}(V_0)}^{\mathrm{SO}(V')}(\sigma_0\otimes\psi),\sigma'] = \mathrm{EP}_{\mathrm{Bes}(V_0)}[\sigma'^{\vee},\sigma_0^{\vee}], \tag{5}$$

这是 (4) 中对应于 $i=n_0$ 的项；此时相应的雅各布森模 $\sigma'_{N_i'^-}$ 就是 σ'。（(5) 中的等式正是 Frobenius 互反律。）

因此，我们已经证明

$$\mathrm{EP}_{\mathrm{SO}(V')}[\sigma,\sigma'] = \dim \mathrm{Wh}(\pi_0)\cdot \dim \mathrm{EP}_{\mathrm{Bes}(V_0)}[\sigma'^{\vee},\sigma_0^{\vee}]. \tag{6}$$

现在使用表示$\sigma'=\pi_0'\times\sigma_0'$，我们可以再次进行上述分析，并得到：

$$\mathrm{EP}_{\mathrm{Bes}(V_0)}[\sigma'^{\vee},\sigma_0^{\vee}] = \dim \mathrm{Wh}(\pi_0')\cdot \dim \mathrm{EP}_{\mathrm{Bes}(V_0')}[\sigma_0,\sigma_0']. \tag{7}$$

由 (6) 和 (7)，我们得到：

$$\mathrm{EP}_{\mathrm{SO}(V')}[\sigma,\sigma'] = \dim \mathrm{Wh}(\pi_0)\cdot \dim \mathrm{Wh}(\pi_0')\cdot \dim \mathrm{EP}_{\mathrm{Bes}}[\sigma_0,\sigma_0'], \tag{8}$$

从而完成定理7.2的证明。 □

Corollary 7.3. 令，

$$\sigma = \pi_1\times\cdots\times\pi_t\times\sigma_0,$$
$$\sigma' = \pi_1'\times\cdots\pi_{t'}'\times\sigma_0',$$

分别为特殊正交群(V)、特殊正交群(V')和的表示

$$\sigma_b = \pi_1|\cdot|_F^{b_1} \times \cdots \times \pi_t|\cdot|_F^{b_t} \times \sigma_0,$$

$$\sigma'_{b'} = \pi'_1|\cdot|_F^{b'_1} \times \cdots \pi'_{t'}|\cdot|_F^{b'_{t'}} \times \sigma'_0,$$

是经过 σ、 σ'的表示族。那么 $\mathrm{EP}_{\mathrm{SO}(V')}[\sigma_b, \sigma'_{b'}]$ 与 b、 b'无关。

Proof. 根据定理7.2，只需注意到 dim Wh(π_b) 和 dim Wh($\pi'_{b'}$) 是常数；这是因为抛物诱导表示的惠特克模型空间的维数与诱导表示的惠特克模型空间维数相同。□

8. 欧拉-庞加莱特征的局部常值性

在推论7.3中，我们证明了欧拉-庞加莱特征的局部常值性。本节将给出一个不同且更直接的证明，证明局部常值性的一个部分，且不借助对伯恩斯坦-泽列文斯基式滤过的详细分析。Aizenbud-Sayag 在[AS]中给出了一般情形下一个更一般的证明。

Proposition 8.1. 设 (G, H) 是一对 p-进群，其中 H 为约化群，且 π_1, π_2 分别是 G, H 的光滑表示。假设表示 π_1 从 G 到 H 的限制是局部有限生成的（根据 [AS] 关于 GGP 对的结果，情况确实如此）。设 π_2 是 H 的有限长度表示，属于 $\pi_{2,\lambda}$ 这一族 H 的表示，也就是说， π_2 是 H 的主系列表示，形式为 $\pi_2 = \mathrm{Ind}_P^H(V_2)$，其中 P 是 H 中的抛物子群，其 Levi 分解为 $P = MN$，而 V_2 是 M 的有限长度表示；并且 $\pi_{2,\lambda} = \mathrm{Ind}_P^H(V_2 \otimes \lambda)$，其中 λ 是 M 的非分歧特征。那么，

$$\mathrm{EP}_H[\pi_1, \pi_{2,\lambda}],$$

与 λ 无关。

Proof. 设 $\pi_1[\pi_2]$ 是 pi_1 在 H 中那些仅有限多个且具有非平凡分量的块之和上的投影，其中 H 是一个约化 p-进群。由于 π_1 是 H 的局部有限生成表示，π_2 具有有限长度， $\pi_1[\pi_2]$ 是有限生成的 H-模，因此存在由有限生成的 H-投射模组成的有限分解。这是一个一般性结论，其证明用到：

(1) H 的光滑表示范畴是诺特的，即有限生成模的子模也是有限生成的。(2) H 的光滑表示范畴具有有限同调维数（等于 H 的分裂秩，假设其为 n），也就是说， H 的每个光滑表示都有一个长度为 n 的有限投射分解（其模一般是无限生成的）。

根据这两条一般性质，可知 $\pi_1[\pi_2]$ 有一个由有限生成投射模组成的有限分解 P_i:

$$0 \to Q_n \to P_{n-1} \cdots \to P_1 \to P_0 \to \pi_1[\pi_2] \to 0,$$

由通常的维数平移论证， $Q_n = P_n$ 是一个投射模（其中 n 是 H的光滑表示范畴的上同调维数）。

现在，$\mathrm{Ext}^i_H[\pi_1,\pi_{2,\lambda}]$ $=\mathrm{Ext}^i_H[\pi_1[\pi_2],\pi_{2,\lambda}]$是由 $\mathrm{Hom}_H[P_i,\pi_{2,\lambda}]$构成的复形的上同调。我们断言，$\mathrm{Hom}_H[P_i,\pi_{2,\lambda}]$ 是有限维复向量空间，其维数与 λ无关。

由于 P_i 是有限生成的，根据 H 的光滑表示范畴的诺特性质， P_i 有如下形式的分解：

$$\mathrm{ind}_{K'}^H(V_i')\to\mathrm{ind}_K^H(V_i)\to P_i\to 0,$$

其中 K、K' 是 H 的紧开子群，而 V_i、V_i' 是 K、K' 的有限维光滑表示。因此，对上述正合序列应用 $\mathrm{Hom}_G[-,\pi_{2,\lambda}]$，得到一个正合序列：

$$0\to\mathrm{Hom}_G[P_i,\pi_{2,\lambda}]\to\mathrm{Hom}_G[\mathrm{ind}_K^H(V_i),\pi_{2,\lambda}]\to\mathrm{Hom}_G[\mathrm{ind}_{K'}^H(V_i'),\pi_{2,\lambda}]$$

根据 Frobenius 互反律和引理 3.1，这等同于

$$0\to\mathrm{Hom}_G[P_i,\pi_{2,\lambda}]\to\mathrm{Hom}_K[V_i,\pi_{2,\lambda}]\to\mathrm{Hom}_{K'}[V_i',\pi_{2,\lambda}].$$

现在注意，由于 $\pi_{2,\ \lambda}$ 是 H 的主系列表示，其中 λ 是诱导中所用 Levi 子群的一个非分歧特征，$\pi_{2,\ \lambda}|_K$ 与 λ 无关，因此 $\mathrm{Hom}_K[V_i,\pi_{2,\lambda}]$ 与 λ 无关；又由于 $\pi_{2,\ \lambda}$ 具有容许性，$\mathrm{Hom}_K[V_i,\pi_{2,\lambda}]$ 是有限维 $\mathbb{C}$ 向量空间。有限维表示 V_i'（属于 K'）的情形也类似。因此，$\mathrm{Hom}_K[V_i,\pi_{2,\lambda}]$ 和 $\mathrm{Hom}_{K'}[V_i',\pi_{2,\lambda}]$ 是复向量空间，其维数与 λ 无关，而且它们之间的映射也与 λ 无关，所以核的维数，即 $\dim\mathrm{Hom}_G[P_i,\pi_{2,\lambda}]$，与 λ 无关。

命题的证明由一个众所周知的结论完成：有限维向量空间构成的有限复形的欧拉–庞加莱特征，是这些空间维数的交错和，且与 λ 无关。□

9. 群情形下的欧拉–庞加莱特征：卡兹丹正交性

本文考察的分支律适用于 $H\hookrightarrow G\times H$，其中 $H\subset G$ 最终被解释为（$G\times H$）球簇 $\Delta(H)\backslash(G\times H)$；我们试图理解不可约表示 $\pi_1\boxtimes\pi_2$ 的 $\mathrm{Ext}^i_H(\pi_1,\pi_2)$。这一分支问题的一个特例是“群情形”，其中 $H=G$；因此，在 $G\hookrightarrow G\times G$ 的情形下，我们将考察 $\mathrm{Ext}^i_G(\pi_1,\pi_2)$，其中 π_1、π_2 是同一个群 G 的表示。这可以视为更一般的、针对 $H\hookrightarrow G\times H$ 的分支问题的先导，并且在该领域中发挥了重要作用。

对于约化的 G 阶 p-进群 π_1，以及 G 的 π_2 不可约表示，已有若干情形下的 $\mathrm{Ext}^i_G(\pi_1,\pi_2)$ 的显式计算。特别地，若 π_1 和 π_2 都是 G 的温和表示，那么在 [Op-Sol] 中，利用 R-群的表述已有一般性结果；此外， [Ad-Dp] 中也有一些独立的具体计算。某些非温和表示的 Ext 群已在 [Or] 以及 [Dat] 中得到考察。

据我所知，在阿基米德情形下， $H^i(\mathfrak{g},K,\pi)=\mathrm{Ext}^i(\mathbb{C},\pi)$ 已得到广泛研究，但 $\mathrm{Ext}^i(\pi_1,\pi_2)$ 尚未得到研究。

以下定理由卡兹丹提出猜想，并由 Schneider-Stuhler（参见 [Sch-Stu], ）及别兹鲁卡夫尼科夫证明。该定理仅在特征零的情况下为人所知。

THEOREM 9.1. 设 π 和 π' 是有限长度光滑表示，属于一个约化 p-进群 G。则

$$\mathrm{EP}_G[\pi,\pi'] = \int_{C_{ellip}} \Theta(c)\bar{\Theta}'(c)\,dc,$$

其中， Θ 和 Θ' 分别是 π 和 π'的特征， dc 是 G中正则椭圆共轭类集合 C_{ellip} 上的自然测度，其定义为

$$dc = W(G(F),T(F))^{-1}\cdot \|\det(1-Ad(\gamma))_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\gamma}\|dt,$$

其中， dt 是椭圆环面 $T = G_\gamma$ 上的归一化哈尔测度，使其测度为 1。

10. Waldspurger 的积分公式

本节回顾 Waldspurger 的一个积分公式，参见 [Wa], [Wa1],；随后我们提出将其作为 Euler-Poincar´e 配对的积分公式，适用于

$$\mathrm{EP}_{\mathrm{Bes}(V,W)}[\sigma,\sigma']$$

对于 σ SO(V) 的任意有限长度表示，以及 σ' SO(W) 的任意有限长度表示，其中 V和 W 是定义在 F 上的二次空间，且

$$V = X + D + W + Y$$

其中， W 是 V的余维为 $2k+1$ 的二次子空间， X 和 Y是 V 中维数为 k的全各向同性子空间，且在底层双线性形式下互为对偶； D 是 V中的一条各向异性直线。令 $Z = X + Y$。

令 $\underline{\mathcal{T}}$表示 SO(W) 中满足以下条件的椭圆环面 T： 存在 W的二次子空间 W_T、 W'_T，使得:

(1) $W = W_T \oplus W'_T$， 且$V = W_T \oplus W'_T \oplus D \oplus Z$。(2) dim($W_T$)为偶数，且 SO($W'_T$) 和 SO($W'_T \oplus D \oplus Z$) 是准分裂的。(3) T 是 SO(W_T) 中的极大（椭圆）环面。

令 $\mathcal{T}$表示特殊正交群 SO(W) 在 $\underline{\mathcal{T}}$上的作用所产生的一组轨道。就我们的目的而言，我们指出与 $W_T = 0$对应的最重要的椭圆环面 $T = \langle e\rangle$ 。

对于 σ SO(V) 的有限长度容许表示，通过 σ 在 SO(V) 的李代数中 t 的中心化子上的特征 $\theta_\sigma(t)$ 的芽展开，并选取「首项」，定义属于 $\underline{\mathcal{T}}$ 的环面 T 上正则元素的函数$c_\sigma(t)$。

类似地，对于 σ' SO(W) 的有限长度容许表示，通过 σ' 的特征 $\theta_{\sigma'}(t)$ 的芽展开，定义属于 $\underline{\mathcal{T}}$ 的环面 T 上正则元素的函数 $c_{\sigma'}(t)$。

在属于 $\underline{\mathcal{T}}$ 且满足 $W = W_T \oplus W'_T$ 的椭圆环面 T 上定义函数 Δ_T，如下:

$$\Delta(t) = |\det(1-t)|_{W_T}|,$$

并令 D^H 表示定义在 $H(F)$ =SO(W) 上的函数:

$$D^H(t) = |\det(Ad(t)-1)_{h(F)/h_t(F)}|_F,$$

其中， $h(F)$ 是 H 的李代数，而 $h_t(F)$ 是 H 中 t 的中心化子的李代数。

对于 H 中的环面 T，按照通常的正规化子除以中心化子的方式定义韦伊群 $W(H,T)$:

$$W(H,T) = N_{H(F)}(T)/Z_{H(F)}(T).$$

Waldspurger 的下述定理可视为此前遇到的群情形中卡兹丹正交性的类比。

THEOREM 10.1. 设 $V = X + D + W + Y$ 是非阿基米德局部域 F 上的二次空间，且 W 是如上所述余维为 $2k+1$ 的二次子空间。那么，对于 SO(V) 的任意不可约容许表示 σ 和 SO(W) 的不可约容许表示 σ'，

$$c(\sigma, \sigma') := \sum_{T \in \mathcal{T}} |W(H,T)|^{-1} \int_{T(F)} c_\sigma(t) c_{\sigma'}(t) D^H(t) \Delta^k(t) dt,$$

是有限个绝对收敛积分之和。（F(F) 上的哈尔测度归一化为体积 1。）如果 σ 是 SO(V) 的超尖点表示，而 σ' 是任意不可约容许表示，或者 σ 和 σ' 都是温和表示，那么

$$c(\sigma, \sigma') = \dim \mathrm{Hom}_{\mathrm{Bes}(V,W)}[\sigma, \sigma'].$$

11. 猜想的 EP 公式

鉴于 Waldspurger 的定理 10.1，遵循 $V = X + D + W + Y$ 先前的记号，提出以下关于欧拉-庞加莱配对的猜想是最自然的：设 $X + D + W + Y$ 是非阿基米德局部域 F 上的二次空间，且 W 是 V 中余维为 $2k+1$ 的二次子空间。

CONJECTURE 11.1. (1) 若 σ 和 σ' 分别是 SO(V)、SO(W)的不可约温和表示，且 $W \subset V$是一个非退化子空间， V/W 是奇数维分裂二次空间，则

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Bes}(V,W)}[\sigma, \sigma'] = 0 \text{ for } i > 0.$$

(2) 对于 SO(V)的有限长度表示 σ 和 SO(W)的有限长度表示 σ'，我们有：

$$\begin{aligned} \mathrm{EP}_{\mathrm{Bes}(V,W)}[\sigma, \sigma'] &:= \sum_i (-1)^i \dim \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Bes}(V,W)}[\sigma, \sigma'], \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}} |W(H,T)|^{-1} \int_{T(F)} c_\sigma(t) c_{\sigma'}(t) D^H(t) \Delta^k(t) dt. \end{aligned}$$

REMARK 11.2.
- R. Beuzart-Plessis关于酉群的工作中也给出了Waldspurger积分公式。
- 根据命题 7.1，对于猜想11.1的两个断言，我们都可以归结到 dim(V/W) $= 1$的“基本情形”。
- Chen Wan在 [Wan]中提出了一个适用于球簇的一般积分公式。

接下来，令

$$\sigma = \pi_1 |\cdot|_F^{b_1} \times \cdots \times \pi_t |\cdot|_F^{b_t} \times \sigma_0,$$

是特殊正交群 SO(V) 的标准模，因此我们有：

(1) 对于 $i = 1, \cdots, t$， π_i 是 GL$_{n_i}$(F) 的不可约、容许的温和表示。(2) σ_0 是 SO(V_0) 的不可约、容许的温和表示，其中 $V_0 \subset V$ 是 V 的二次子空间，并且二次空间 V/V_0 是由维数为 $2n_i$ 的双曲空间构成的正交直和。

(3) b_i 是满足 $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_t \geq 0$ 的实数。

同样，令

$$\sigma' = \pi'_1|\cdot|_F^{b'_1} \times \cdots \times \pi'_{t'}|\cdot|_F^{b'_{t'}} \times \sigma'_0,$$

为特殊正交群 SO(W) 的一个标准模。

以下定理是 [Mo-Wa] 的命题1.1；其在酉群情形下的变体是 Gan-Ichino 提出的命题9.4，参见 [GI], ；而一般线性群的对应结果由 Chan 在 [Chan2] 中提出。

THEOREM 11.3. 沿用上述记号，特别是当 σ、σ' 分别为特殊正交群 SO(V)、SO(W) 的标准模，并记 $\check{}\sigma'$ 为 σ' 的对偶（暂时沿用 [Mo-Wa] 的记号）时，我们有：

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathrm{SO}(W)}[\sigma, \check{}\sigma'] = \dim \mathrm{Hom}_{\mathrm{SO}(W_0)}[\sigma_0, \sigma'_0] = \dim \mathrm{Hom}_{\mathrm{SO}(W_0)}[\sigma_0, \check{}\sigma'_0].$$

REMARK 11.4. 定理11.3的一个推论是，将 A. Aizenbud、D. Gourevitch、S. Rallis 和 G. Schiffmann 在 [AGRS] 中的重数一定理推广到不一定不可约的标准模。不过请注意，上述定理只涉及 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{SO}(W)}[\sigma, \check{}\sigma']$，其中 σ、σ' 分别是 SO(V)、SO(W) 的标准模，而不适用于任意两个一般的主系列表示（对后者该结论不成立）。

COROLLARY 11.5. 使用上述记号，特别是当 σ、σ' 分别是 SO(V)、SO(W) 的标准模，并记 $\check{}\sigma'$ 为 σ' 的对偶时，我们有：

$$\dim \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{SO}(W)}[\sigma, \check{\sigma}'] \leq \dim \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{SO}(W_0)}[\sigma_0, \sigma'_0] \text{ for all } i \geq 0.$$

特别地，若对所有 $i > 0$ 都有 $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{SO}(W_0)}[\sigma_0, \sigma'_0] = 0$，则对所有 $i > 0$ 也有 $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{SO}(W)}[\sigma, \check{}\sigma'] = 0$。

PROOF. 这个推论的证明与定理11.3的证明完全相同。定理11.3的证明用到了经典群表示上的 Bernstein-Zelevinski 过滤，这一点在定理7.2的证明过程中已有讨论；最终，该证明比较 Hom 空间两边出现的一般线性群 $\mathrm{GL}_d(F)$表示的指数，从而说明除一项外，其余各项的指数都必须为零。对于 Ext 空间的结论，这一论证同样适用。□

下面的定理断言，一旦已知温和表示的 $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Bes}}[\pi_1, \pi_2]$ 消失（对于 $i \geq 1$），则关于 Waldspurger积分公式的猜想11.1——该公式为所有有限长度表示给出 Euler-Poincar´e 特征——成立。

THEOREM 11.6. 假设温和表示的高阶 Ext 群消失，即对于 SO(V)的不可约温和表示 σ 以及 SO(W)的 σ'，假设：

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Bes}(V,W)}[\sigma, \sigma'] = 0 \text{ for } i > 0.$$

那么，对于 SO(V) 的任意有限长度表示 σ 和 SO(W) 的任意有限长度表示 σ'，我们有 Euler-Poincar´e 公式：

$$\begin{aligned} \mathrm{EP}_{\mathrm{Bes}(V,W)}[\sigma, \sigma'] &:= \sum_i (-1)^i \dim \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Bes}(V,W)}[\sigma, \sigma'] \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}} |W(H,T)|^{-1} \int_{T(F)} c_\sigma(t) c_{\sigma'}(t) D^H(t) \Delta^k(t) dt. \end{aligned}$$

Proof. 请注意，所提出的等式两边：

$$\mathrm{EP}_{\mathrm{Bes}(V,W)}[\sigma,\sigma'] \quad = \quad \sum_{T\in\mathcal{T}} |W(H,T)|^{-1} \int_{T(F)} c_\sigma(t) c_{\sigma'}(t) D^H(t) \Delta^k(t) dt,$$

是针对 σ 的双线性形式，其中 σ 属于特殊正交群SO(V)的有限长度表示的格罗滕迪克群，而 σ' 属于特殊正交群SO(W)的有限长度表示的格罗滕迪克群。因此，只需证明当 σ 属于特殊正交群SO(V)的有限长度表示的格罗滕迪克群的一组生成元，且 σ' 属于特殊正交群SO(W)的有限长度表示的格罗滕迪克群的一组生成元时结论成立。众所周知，标准模构成任意约化 p-进群的有限长度表示的格罗滕迪克群的一组生成元，事实上还是一组基。因此，如果我们能够证明：

$$\mathrm{EP}_{\mathrm{Bes}(V,W)}[\sigma,\sigma'] \quad = \quad \sum_{T\in\mathcal{T}} |W(H,T)|^{-1} \int_{T(F)} c_\sigma(t) c_{\sigma'}(t) D^H(t) \Delta^k(t) dt,$$

对于 σ、 σ' 为标准模的情形，我们便可得知结论对特殊正交群SO(V)、SO(W)的所有 σ、σ' 有限长度模分别成立。

根据定理11.6关于温和表示的高阶Ext群消失的假设，由推论11.5，对于特殊正交群SO(V)、SO(W)的所有 σ、 σ' 标准模，$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Bes}(V,W)}[\sigma,\sigma'] = 0 \,\text{for} i>0$。因此，

$$\mathrm{EP}_{\mathrm{Bes}(V,W)}[\sigma,\sigma'] = \dim \mathrm{Hom}_{\mathrm{Bes}(V,W)}[\sigma,\sigma'] = \dim \mathrm{Hom}_{\mathrm{Bes}(V_0,W_0)}[\sigma_0,\sigma_0'],$$

其中，最后一个等式是 Moeglin-Waldspurger 针对正交群提出的定理11.3，经 Gan-Ichino 推广至酉群；对于一般线性群，则归功于 Chan。

接下来只需证明以下求和：

$$\sum_{T\in\mathcal{T}} |W(H,T)|^{-1} \int_{T(F)} c_\sigma(t) c_{\sigma'}(t) D^H(t) \Delta^k(t) dt,$$

对于这对（σ_0， σ_0'），该求和与对于这对（σ， σ'）的求和相同。这是主系列表示的 van Dijk 公式的推论，参见 [Wa1] 的引理 2.3。

□

12. Schneider-Stuhler 对偶定理

以下定理是 Schneider 和 Stuhler 在 [Sch-Stu], 中提出的对偶定理的一个轻微推广，参见 [NP]；它将有关 $\mathrm{Ext}^i[\pi_1,\pi_2]$ 的问题转化为 $\mathrm{Ext}^j[\pi_2,\pi_1]$ 的问题，对我们的主题至关重要。

Theorem 12.1. 设 G 是一个约化 p-进群， π 是 G 的一个不可约容许表示。设 $d(\pi)$ 为承载 π 的尖点支撑的 G 的 Levi 子群 M 的中心的分裂秩， $D(\pi)$ 为 π 的 Aubert-Zelevinsky 对合。于是，

(1) $\mathrm{Ext}_G^{d(\pi)}[\pi, D(\pi)] \cong \mathbb{C}$，以及 (2) 对于 G 的任意光滑表示 π'，
双线性配对

$$(*) \quad \mathrm{Ext}^i_G[\pi,\pi'] \times \mathrm{Ext}^j_G[\pi', D(\pi)] \to \mathrm{Ext}^{i+j=d(\pi)}_G[\pi, D(\pi)] \cong \mathbb{C},$$

是非退化的。

13. 一个例子：一般线性群 $\mathrm{GL}_2(F)$ 的三重积

如前所述，我们预期，对于所有 GGP 对 (G, H)，当 G 的不可约表示 π_1 和 H 的不可约表示 π_2 都是温和表示时，$\mathrm{Ext}^i_H[\pi_1, \pi_2]$ 仅在 $i = 0$ 时非零。

另一方面，根据上一节讨论的对偶定理，我们预计对于 $i = 0$，$\mathrm{Ext}^i_H[\pi_2, \pi_1]$ 通常为零，即 $\mathrm{Hom}_H[\pi_2, \pi_1] = 0$（难怪分支通常不被视为子表示！），并且只有当 i 等于 Levi 子群的中心的分裂秩时才会出现；π_2 是通过对一个超尖点表示进行抛物诱导而得到的。正如我们将看到的，这并不完全正确。

本节的目的是通过一个具体实例，明确处理一个限制问题，以说明经典群中会发生什么：从分裂 SO(4) 到分裂 SO(3) 的限制问题。因此，对于 V 一个有限长度的 $\mathrm{SO}_4(F)$ 表示，以及 V' 一个有限长度的 $\mathrm{SO}_3(F)$ 表示，我们计算 $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{SO}_3(F)}[V, V']$，$i \geq 0$ 和 $\mathrm{EP}[V, V']$，然后研究将 V 从 $\mathrm{SO}_4(F)$ 限制到 $\mathrm{SO}_3(F)$ 时何时为一个投射模。作为我们在此所做工作的结果，我们将构造出 $\mathrm{SO}_3(F)$ $=\mathrm{PGL}_2(F)$ 的 Iwahori 块中的一个投射模；它不同于我们先前在从 $\mathrm{GL}_3(F)$ 到 $\mathrm{GL}_2(F)$ 的限制问题中遇到的投射模，后者的商都只有泛型表示，而在这里还会有另一种可能性。（事实上，[CS3] 的引理 2.4 对于重数一的投射模给出了两种选择，而我们将在这里看到的另一种可能性，正是 [CS3] 的引理 2.4 中关于投射模的第二种选择。）

由于 $\mathrm{SO}_4(F)$ 和 $\mathrm{SO}_3(F)$ 分别与 $\mathrm{GL}_2(F)\times\mathrm{GL}_2(F)$ 和 $\mathrm{GL}_2(F)$ 密切相关，因此我们等价地考虑 $V \cong \pi_1 \otimes \pi_2$ 对于 $\mathrm{GL}_2(F)$ 的容许表示π_1, π_2，以及 $\mathrm{GL}_2(F)$ 的 $V' = \pi_3$。我们的目标于是是计算

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{GL}_2(F)}[\pi_1 \otimes \pi_2, \pi_3],$$

或者，由于我们不想费心处理中心特征，假设 $\pi_1 \otimes \pi_2$和 π_3 的中心特征平凡，那么我们将计算，

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{PGL}_2(F)}[\pi_1 \otimes \pi_2, \pi_3].$$

Proposition 13.1. 设 π_1, π_2 和 π_3 为 $\mathrm{GL}_2(F)$ 的不可约无限维表示，或为由一维表示诱导的 $\mathrm{GL}_2(F)$ 的（可约）主系列表示。假设 π_1 和 π_2 的中心特征之积平凡，且 π_3 的中心特征平凡。那么，

$$\mathrm{EP}_{\mathrm{PGL}_2(F)}[\pi_1 \otimes \pi_2, \pi_3] = 1,$$

除非所有表示 π_i 都是不可约离散级数表示，并且在 $\pi'_1 \otimes \pi'_2 \otimes \pi'_3$ 上存在一个 $D^\times$ 不变线性泛函，其中 π'_i 表示通过 Jacquet-Langlands 与 π_i 相关联的 $D^\times$ 的表示。在$\pi'_1 \otimes \pi'_2 \otimes \pi'_3$ 具有一个 $D^\times$-不变线性泛函的情况下，我们有，

$$\mathrm{EP}_{\mathrm{PGL}_2(F)}[\pi_1 \otimes \pi_2, \pi_3] = 0,$$

and,

$$\mathrm{EP}_{D^\times}[\pi'_1 \otimes \pi'_2, \pi'_3] = 1.$$

PROOF. 该命题可由关于主系列表示的欧拉-庞加莱′特征的更一般的早期结果推出，也可以直接由 Mackey 理论推导得到；下面我们简要概述证明。

如果至少有一个 π_i 是尖点表示，那么很容易看出 $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{PGL}_2(F)}[\pi_1 \otimes \pi_2、\pi_3] = 0$，而该命题等价于如今已广为人知的结果，参见 [Pr1] 关于 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{PGL}_2(F)}[\pi_1 \otimes \pi_2, \pi_3]$ 的结果。如果某个 π_i'是一般线性群$_2(F)$ 的 Steinberg 表示的一个扭曲，那么该情形下的命题可通过将 Steinberg 表示嵌入相应的主系列，并利用 EP 在正合序列中的可加性得到。□

由于对于 PGL$_2(F)$，唯一可能非零的 Ext^i 对应于 $i = 0、1$，因此 EP 结合关于 Ho m 空间的知识，推出以下推论。这是非常一般的猜想——猜想11.1（1）——在特殊正交群$_4(F)$ 与特殊正交群$_3(F)$ 这一对的特殊情形，其中特殊正交群$_4(F)$ 是一个分裂群。

COROLLARY 13.2. 如果 $\pi_1、\pi_2$ 和 π_3 是 GL$_2(F)$ 的任意三个不可约无限维表示，且 π_1 和 π_2 的中心特征之积为平凡特征，并且 π_3 具有平凡中心特征，那么对于 $i > 0$，$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{PGL}_2(F)}[\pi_1 \otimes \pi_2, \pi_3] = 0$。

REMARK 13.3. 蔡和范的论文 [CF] 更一般地证明了

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{GL}_2(F)}[\Pi, \mathbb{C}] = 0 \quad \text{for } i \geq 1,$$

其中，Π 是 GL$_2(E)$ 的不可约泛型表示，E 是 F 的一个三次 ′étale 扩张，其中心特征限制到 $F^\times$ 后为平凡特征。

现在我们利用命题 13.1 和推论 13.2，研究从 $[\mathrm{GL}_2(F) \times \mathrm{GL}_2(F)]/\Delta(F^\times)$ 到 PGL$_2(F)$ 的限制问题，并理解何时 $\pi = \pi_1 \otimes \pi_2$（其中 $\pi_1、\pi_2$ 是 GL$_2(F)$ 的任意两个不可约无限维表示，且 π_1 和 π_2 的中心特征之积为平凡特征）是 PGL$_2(F)$ 的射影表示

PROPOSITION 13.4. 设 π_1, π_2 是 GL$_2(F)$ 的不可约无限维表示，且 π_1 和 π_2 的中心特征之积平凡。那么，PGL$_2(F)$ 的表示 $\pi_1 \otimes \pi_2$ 是一个投射模，除非 π_1, π_2 是 GL$_2(F)$ 的不可约主系列表示，且 $\pi_1 \cong \chi\pi_2^\vee$，其中 χ 是一个二次特征；在这种情况下，当且仅当它属于包含特征 χ 的 PGL$_2(F)$ 的块时，它不是投射模。特别地，如果 π_1 或 π_2 至少有一个是 Steinberg 表示的扭曲，那么 $\pi_1 \otimes \pi_2$ 是 PGL$_2(F)$ 的光滑表示范畴中的一个投射模。

PROOF. 如前所述，如果 PGL$_2(F)$ 的一个光滑表示 π 是局部有限生成的，那么它是 PGL$_2(F)$ 的光滑表示范畴中的一个投射模，当且仅当

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{PGL}_2(F)}[\pi, \pi'] = 0,$$

对于所有光滑有限生成表示 π' PGL$_2(F)$，当且仅当

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{PGL}_2(F)}[\pi, \pi'] = 0,$$

对于 PGL$_2(F)$ 的所有有限长度表示 π'，当且仅当

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{PGL}_2(F)}[\pi, \pi'] = 0,$$

对于 $\mathrm{PGL}_2(F)$ 的所有不可约表示 π'。

在我们的情形中，$\pi = \pi_1 \otimes \pi_2$ 其中 π_1, π_2 是 $\mathrm{GL}_2(F)$ 的任意两个不可约无限维表示，π_1和 π_2 的中心特征之积为平凡特征。因此，若 π' 是 $\mathrm{PGL}_2(F)$ 的任意无限维不可约表示，则所需的 $\mathrm{Ext}^1[\pi, \pi']$ 消失由推论 13.2 得出。因此，要证明 $\pi = \pi_1 \otimes \pi_2$ 作为 $\mathrm{PGL}_2(F)$ 的表示具有投射性，只需验证：

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{PGL}_2(F)}[\pi_1 \otimes \pi_2, \chi] = 0,$$

对于 $\chi\colon\ F^\times/F^{\times 2} \to \mathbb{C}^\times$，将其视为 $\mathrm{PGL}_2(F)$ 的一个特征。现在，

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{PGL}_2(F)}[\pi_1 \otimes \pi_2, \chi] \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(F),Z}[\pi_1, \chi\pi_2^\vee],$$

其中 $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(F)\ Z}[\pi_1, \chi\pi_2^\vee]$ 表示在 $\mathrm{GL}_2(F)$ 的光滑表示范畴中计算的 Ext^1，该范畴在 $Z = F^\times \subset \mathrm{GL}_2(F)$ 上具有给定的中心特征；上述同构是 [**CF2**] 的命题 2.4。

容易看出，如果 π_1、π_2 是 $\mathrm{GL}_2(F)$ 的不可约无限维表示，那么 $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}_2(F)\ Z}[\pi_1, \chi\pi_2^\vee]$ 不为零，当且仅当 π_1、$\pi_2^\vee$ 是 $\mathrm{GL}_2(F)$ 的不可约主系列表示，并且 $\pi_1 \cong \chi\pi_2^\vee$，其中 χ 是一个二次特征。（在半单群 G 的离散系列表示中，$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{PGL}_2(F)}[\mathrm{St}_2$、$\chi\mathrm{St}_2]$ 的消失是关于 $\mathrm{Ext}^i_G(\pi_1, \pi_2)$ $i \geq 1$ 消失的一个众所周知的一般事实；在此情形下的证明见 [**Pr2**] 的引理 7。）□

Corollary 13.5. 设 T 是 $\mathrm{PGL}_2(F)$ 的分裂环面，由对角矩阵群组成。于是，对于 T 的一个特征 χ，$\mathrm{PGL}_2(F)$ 的贝塞尔模型为，

$$\mathrm{ind}_T^{\mathrm{PGL}_2(F)}(\chi),$$

是 $\mathrm{PGL}_2(F)$ 的投射模，当且仅当 $\chi^2 \neq 1$。

Proof. 由命题 13.4 应用于 $\pi_1 = \mathrm{ind}^{\mathrm{PGL}_2(F)\ B}(\chi)$（$\mathrm{PGL}_2(F)$ 的一个不可约主系列表示）以及 $\pi_2 = \mathrm{St}_2$，（$\mathrm{PGL}_2(F)$ 的 Steinberg 表示）可知，$\pi_1 \otimes \pi_2$是 $\mathrm{PGL}_2(F)$ 的投射模。注意：

$$\mathrm{St}_2|_B \cong \mathrm{ind}_T^B(\mathbb{C}),$$

其中 B 是 $\mathrm{PGL}_2(F)$ 中包含 $T \cong F^\times$ 的 Borel 子群，而 $\mathrm{ind}_T^B(\mathbb{C})$ 是由 T 的平凡特征得到的非归一化诱导。这可通过将 Steinberg 表示实现为由 B 的平凡特征诱导得到的 $\mathrm{PGL}_2(F)$ 的（非归一化）诱导表示的一个商，并应用麦基理论得出。由于 $\pi_1 = \mathrm{ind}^{\mathrm{PGL}_2(F)\ B}(\chi)$，因此：

$$\pi_1 \otimes \mathrm{St}_2 = \mathrm{ind}_B^{\mathrm{PGL}_2(F)}(\chi) \otimes \mathrm{St}_2 = \mathrm{ind}_B^{\mathrm{PGL}_2(F)}(\chi \otimes \mathrm{St}_2|_B) \cong \mathrm{ind}_T^{\mathrm{PGL}_2(F)}(\chi).$$

由于 $\pi_1 = \mathrm{ind}^{\mathrm{PGL}_2(F)\ B}(\chi)$（非归一化诱导）是 $\chi^2 \neq 1, \nu^2$的一个不可约主系列，其中 $\nu\colon\ F^\times \to \mathbb{C}^\times$是 $F^\times$上的归一化绝对值，命题 13.4 证明了：若$\chi^2 \neq 1$ 且 $\chi^2 \neq \nu^2$，则 $\mathrm{ind}^{\mathrm{PGL}_2(F)\ T}(\chi)$ 是 $\mathrm{PGL}_2(F)$ 的一个投射模。若 $\chi^2 = \nu^2$，我们利用同构 $\mathrm{ind}^{\mathrm{PGL}_2(F)\ T}(\chi) \cong \mathrm{ind}^{\mathrm{PGL}_2(F)\ T}(\chi^{-1})$，从而推得：若 $\chi^2 \neq 1$，则 $\mathrm{ind}^{\mathrm{PGL}_2(F)\ T}(\chi)$ 是 $\mathrm{PGL}_2(F)$ 的一个投射模。

最后，要证明 $\mathrm{ind}^{\mathrm{PGL}_2(F)\ T}(\chi)$ 不是 $\chi^2 = 1$ 的投射模，显然只需对 T 的平凡特征 χ 证明这一点；在这种情况下，前面的

分析

$$\mathrm{ind}_B^{\mathrm{PGL}_2(F)}(\mathbb{C}) \otimes \mathrm{St}_2 = \mathrm{ind}_B^{\mathrm{PGL}_2(F)}(\mathrm{St}_2|_B) \cong \mathrm{ind}_T^{\mathrm{PGL}_2(F)}(\mathbb{C}),$$

这一结论仍然成立，但现在我们有如下正合序列（未归一化诱导）：

$$0 \to \mathrm{St}_2 \to \mathrm{ind}_B^{\mathrm{PGL}_2(F)}(\mathbb{C}) \otimes \mathrm{St}_2 \to \mathrm{St}_2 \otimes \mathrm{St}_2 \to 0,$$

根据命题 13.4，$\mathrm{St}_2 \otimes \mathrm{St}_2$ 是投射模，因此，

$$\mathrm{ind}_B^{\mathrm{PGL}_2(F)}(\mathbb{C}) \otimes \mathrm{St}_2 \cong \mathrm{St}_2 \otimes \mathrm{St}_2 + \mathrm{St}_2,$$

显然这不是投射模！ □

REMARK 13.6. 推论 13.5 处理了推论 4.2 中遗漏的一种情形，即 $\mathrm{SO}(W)$ 是分裂的 $\mathrm{SO}_2(F)$。在当前情形下，除 Iwahori 块外，所有 Bernstein 分支中的 $\mathrm{ind}^{\mathrm{PGL}_2(F)\,T}(\mathbb{C})$ 都是投射模。

REMARK 13.7. 推论 13.5 证明了猜想11.1(1)的一个非常特殊的情形，事实上是其中最简单的情形：所讨论的是一对均为分裂的群 $(\mathrm{SO}_3(F), \mathrm{SO}_2(F))$。这等价于断言，对于任意 $i > 0$，若 π 是 $\mathrm{SO}_3(F) = \mathrm{PGL}_2(F)$ 的任意无限维表示，则 $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{SO}_2(F)}(\pi, \chi) = 0$。如果推论 13.5 的断言因条件 $\chi^2 \neq 1$ 的出现而看起来略有不同，那是因为表示 π（例如某个群 G 的表示）的投射性要求对所有 $i > 0$ 及所有不可约 π'，均有 $\mathrm{Ext}^i_G(\pi, \pi') = 0$；而猜想11.1(1)只涉及某些 π'（它们属于泛型 L-包）对应的 $\mathrm{Ext}^i_G(\pi, \pi')$ 消失。

下面给出 Ext群计算的一个应用：将其与对偶定理结合，可得子模的存在性。下述命题完整分类了两个（不可约、无限维）一般线性群$_2(F)$表示 π_1、π_2 的张量积$\pi_1 \otimes \pi_2$ 中所有不可约子表示 π，其中这两个表示的中心特征之积为平凡特征。更一般的结果见 [CF]。

PROPOSITION 13.8. 设 π_1、π_2 是一般线性群$_2(F)$的两个不可约容许无限维表示，且它们的中心特征之积为平凡特征。那么，作为 $\mathrm{PGL}_2(F)$-模，$\pi_1 \otimes \pi_2$ 的不可约子表示 π 完整列表如下。

(1) π 是 $\mathrm{PGL}_2(F)$的超尖点表示，并且是 $\pi_1 \otimes \pi_2$的一个商。(2) π 是 Steinberg 表示的一个扭曲。通过将该扭曲吸收到 π_1 或 π_2 中，不妨设它是 $\mathrm{PGL}_2(F)$ 的 Steinberg 表示 St。那么，当且仅当 π_1、π_2 都是不可约主系列表示，且 $\pi_1 \cong \pi_2^\vee$时，St 才是 $\pi_1 \otimes \pi_2$ 的子模。

REMARK 13.9. 与上述三重积的情形不同，Chan 在 [Chan] 中证明，对于这一对 (一般线性群$_{n+1}(F)$，一般线性群$_n(F)$)，如果 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n(F)}[\pi_2, \pi_1] \neq 0$，其中 π_1 是一般线性群$_{n+1}(F)$ 的不可约表示，π_2 是一般线性群$_n(F)$ 的不可约表示，那么 π_1、π_2 都必须是一维的。因此，在此情形下，即使是一般线性群$_n(F)$ 的超尖表示，也不会作为子模出现；这与子群一般线性群$_n(F)$ 的非紧中心有关，而该中心并不包含在环境群一般线性群$_{n+1}(F)$ 的中心中。

REMARK 13.10. 根据定理 5.4，对于一般线性群$_{n+1}(F)$ 的 π 泛型表示，如果 $\pi|_{\mathrm{GL}_n(F)}$ 是一般线性群$_n(F)$ 在一般线性群$_n(F)$ 的表示的某个特定块中的投射表示，那么在该块中，$\pi|_{\mathrm{GL}_n(F)}$ 与一般线性群$_{n+1}(F)$ 的泛型表示 π 无关。然而，对于本节研究的限制问题，情况并非如此；例如，从 $\mathrm{PGL}_2(F) \times \mathrm{PGL}_2(F)$ 到对角 $\mathrm{PGL}_2(F)$。为说明这一点，令 χ 为 $F^\times$的唯一二次非分歧特征。令 π_1 为 $\mathrm{PGL}_2(F)$ 的一个尖点表示，满足 $\chi\pi_1 \cong \pi_1$；令 π_2 为 $\mathrm{PGL}_2(F)$ 的一个尖点表示，满足 $\chi\pi_2 \ncong \pi_2$。那么，$\mathrm{PGL}_2(F) \times \mathrm{PGL}_2(F)$ 的表示 $\pi_1 \boxtimes \pi_1$、$\pi_1 \boxtimes \pi_2$、$\pi_2 \boxtimes \pi_2$ 和 $\chi\pi_2 \boxtimes \pi_2$，限制到子群 $\Delta\mathrm{PGL}_2(F)$ 后，对于涉及平凡表示的不可约表示 $\Delta\mathrm{PGL}_2(F)$ 以及特征 χ，具有不同的分支；这两者都被视为 $\Delta\mathrm{PGL}_2(F)$ 的特征。更准确地说，对于这 4 个表示中的 Π，$\dim \mathrm{Hom}_{\mathrm{PGL}_2(F)}(\Pi, \mathbb{C}) \leq 1$，且 $\dim \mathrm{Hom}_{\mathrm{PGL}_2(F)}(\Pi, \mathbb{C}_\chi) \leq 1$；Hom 空间维数的全部 4 种可能性均可实现，从而在 $\mathrm{PGL}_2(F)$ 的 Iwahori 块中得到 4 个不同的模；根据命题 13.4，它们都是 $\mathrm{PGL}_2(F)$ 的投射模。

论文 [BS]（注 3.2、命题 3.4 和推论 3.7）给出了涉及经典群的投射模且重数为一的一般性结果；特别是，他们证明了 $\mathrm{PGL}_2(F)$ 的 Iwahori 块中恰有 4 个重数为一的投射模。因此，一个有趣的练习是独立证明：当 $V_1 \otimes V_2$ 是 $\mathrm{PGL}_2(F)$ 的一个投射模时，如命题 13.4 所述，$V_1 \otimes V_2$ 是 Iwahori 块中的这 4 个表示之一。作者目前仅在其中一个表示（例如 V_1）是主系列时才能做到这一点；在这种情况下，要理解 $V_1 \otimes V_2$，就需要理解限制到 $\mathrm{PGL}_2(F)$ 的 Borel 子群上的 V_2，这属于 Kirillov 理论的内容。因此，我们已经完全理解了 $V_1 \otimes V_2$ 的结构，其中 V_1、V_2 是 $\mathrm{PGL}_2(F)$ 的不可约容许表示；而此前 [Pr1] 仅通过它们的不可约商研究了这一结构。

REMARK 13.11. 如果能将具有重数 ≤ 1 的约化 p-进群 G 的投射模 Π（即对于 G 的所有不可约表示 π，$\dim \mathrm{Hom}_G(\Pi, \pi) \leq 1$）理解为交换环的秩 1 投射模的最接近类比，那将是很有意义的。在任意给定的块中，这样的投射模是否只有有限多个？每个块中是否至少存在一个？能否以某种方式对它们进行分类？对于 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的情形，根据 Chan 和 Savin 得出的定理 5.4(3)，在 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的 Iwahori 块中，除同构外恰好有两个这样的投射模：分别是由 $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ 的平凡表示和 Steinberg 表示诱导得到的诱导表示。这一点以及上一条备注中的 $\mathrm{PGL}_2(F)$ 例子表明，对于具有重数 ≤ 1 的分裂约化群的 Iwahori 块，除特征扭曲和 $G(F)$ 的自同构外，这两个可能是仅有的投射模。一般约化群的情形尚不清楚。至少，对于单连通 G，有一个广为人知的一般性结论：存在一个紧开子群，使得其平凡表示在 G 的任意不可约光滑表示中出现的重数至多为 1，因此，相应的诱导表示将给出一个具有重数 ≤ 1 的 G 投射模。

另一个问题是：了解（所有）不可约商的重数（若它们全都是有限的），是否足以确定模在同构意义下的类型？例如，在 GGP 背景下，这个问题似乎有肯定的答案。

（例如，引理 6.4 根据一个交换环的不可约商来确定其上的模。）

14. 来自代数几何的模板

我们列举代数几何中的一些基本定理，它们似乎在我们的语境中都有密切相关的类比。为作类比，我们考虑$H^0(X, \mathfrak{F})$，其中 X 光滑射影簇（有时是更一般的簇）配备一个相干层 $\mathfrak{F}$，对应于 $\mathrm{Hom}[\pi_1, \pi_2]$，以及相应的 H^i 和 Ext^i。

（1） $H^i(X, \mathfrak{F})$ 的有限维性，以及 $i > \dim X$时的消失。（2）半连续性定理：在代数几何中适用于 $H^i(X, \mathfrak{F}_\lambda)$，也适用于层族或表示族中的 $\mathrm{Ext}^i[\pi_{1,\lambda}, \pi_{2,\mu}]$。（3）黎曼-罗赫定理用与 X 及层 $\mathfrak{F}$相关的简单不变量来表示 $\mathrm{EP}(X, \mathfrak{F})$。在我们的情形中，这些是不等式形式的公式，它们构成了卡兹丹猜想及 Waldspurger 工作的基础，其中涉及空间 X 的不变量、某些椭圆环面，以及通过特征标理论与层=表示相关的不变量。（4） $H^i(X, \mathfrak{F})$ 的小平消失定理，$i > 0$ 对于丰沛层 $\mathfrak{F}$。（5）塞尔对偶 $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{O}_X, \mathfrak{F}) \times \mathrm{Ext}^{d-i}(\mathfrak{F}, \omega_X) \to \mathrm{Ext}^d(\mathcal{O}_X, \omega_x) = F$.（6） $X = \mathbb{P}^d(F)$ 在代数几何中所发挥的特殊作用；而在这里，我们也有自己的、无所不包的陛下：一般线性群$_n(F)$。

致谢：本文是在2022年7月于IHES暑期学校举办的朗兰兹纲领课程中我的讲稿基础上扩充并撰写而成的。作者谨向组织者筹办如此精彩的课程表示感谢。作者尤其感谢R. Beuzart-Plessis、Kei Yuen Chan和Gordan Savin提出的诸多宝贵意见。尽管Dragos Fratila并未直接参与本项目，但通过与他讨论我们的联合工作 [FP], 以及后续的一些工作，我获益良多；这些工作同样涉及 p-adic群的同调方面（尽管并不涉及分支律或GGP），我们的一些讨论或许也在本文中有所体现；谨向他致以诚挚的感谢！本文还受益于审稿人的意见，作者对此深表感谢。

参考文献

[Ad-Dp] J. D. Adler 和 D. Prasad, *Extensions of representations of p-adic groups.*《名古屋数学杂志》208（2012），171–199。[APS] *Euler-Poincaré characteristic for the oscillator represen-* J. Adams、D. *tation.* 323 2017, 1 22 Prasad、G. Savin，数学进展，Birkhauser/Springer，Cham，[AS] A. Aizenbud 和 F. Savag, *Homological multiplicities in representation theory of p-adic groups* 2020 1 2, 451 469 ，数学时代（ ）第 期，--。[AGRS] A. Aizenbud、D. Gourevitch、S. Rallis、G. Schiffmann, *Multiplicity One Theorems*,《数学年刊》172，第 2 期，2010年，1407-1434。[BS] P. Bakic 和 G. Savin, *The Gelfand–Graev representation of classical groups in terms of Hecke algebras* 75, 4, 2023,《加拿大数学杂志》，第 卷第 期，8 月，第 1343-1368 页。[Bern] Bernˇsteˇın, I. N., *Representations of p-adic groups*, 由 Karl E. Rumelhart 撰写，哈佛大学，1992年秋季。

[BZ1] Bernˇste ˘ ˘ *Representations of the group* n F *where* F *is a non-Archimdean local field* 31, 1976, 3, 1 68
ın, I. N., 以及 Zelevinskii, A. V., GL( ), 《俄罗斯数学评论》 [Ra1] R. Beuzart-Plessis, *La conjecture locale de Gross-Prasad pour les représentations tempérées des groupes unitaires* ´ 149, 2016, +191 , 《法国数学学会回忆录》（新系列）vii 页。[Ra2] R. Beuzart-Plessis, *Endoscopie et conjecture raffinée de Gan-Gross-Prasad pour les groupes unitaires* 7 2015 1309 1371 , 《Compositio Mathematica》151，第 期–。[Ra3] R. Beuzart-Plessis, *Expression d'un facteur epsilon de paire par une formule intégrale*, 《加拿大数学杂志》66，第 5 期，2014年，993–1049。[Bu-He] C. Bushnell 和 G. Henniart, *Generalized Whittaker models and the Bernstein center.*《美国数学杂志》125，第 3 期（2003年）：513–47。[CF] Li Cai 和 Yangyu Fan, *Higher Ext-groups in the triple product case*, 《数学研究快报》，第 30 卷，第 1 期，第 33-49 页（2023年）。[CF2] Li Cai 和 Yangyu Fan, *Top degree Ext-groups and relatively supercuspidal spectra*, 《数学进展》410（2022年），论文编号 108744，共 25 页。[Chan] *Homological branching law for* $_{n+1}$ F , $_{n}$ F *: projectivity and inde-* K. Y. Chan, *composability.* 225 2021 1, 299 345 （GL ( ) GL ( )）《数学发明》（），第 期–。[Chan 2] *Restriction for general linear groups: the local non-tempered Gan-Gross-* K. Y. Chan, *Prasad conjecture (non-Archimedean case).* 783 2022 49 94 《纯粹与应用数学杂志》（），–。[CS1] K. Y. Chan 和 G. Savin, *Iwahori component of the Gelfand-Graev representation.*《数学杂志》288（2018年），第 1-2 期，125–133。[CS2] K. Y. Chan 和 G. Savin, *A vanishing Ext-branching theorem for*($\mathrm{GL}_{n+1}(F)$, $\mathrm{GL}_n(F)$)。《杜克数学杂志》170（2021年），第 10 期，2237–2261。[CS3] K. Y. Chan 和 G. Savin, *Bernstein-Zelevinsky derivatives: a Hecke algebra approach.*《国际数学研究通知》IMRN 2019，第 3 期，731-760。[Dat] J.-F. Dat, *Espaces symétriques de Drinfeld et correspondence de Langlands locale*, 《高等师范学校科学年鉴》´（4）39（2006年），1-74。[FP] D. Fratila 和 D. Prasad, *Homological duality for covering groups of reductive p-adic groups*《纯粹与应用数学季刊》18（2022年），第 5 期，1867–1950。[GGP] W. T. Gan 、 B. Gross 和 D. Prasad, *Symplectic local root numbers, central criticalL-values, and restriction problems in the representation theory of classical groups*, 346, 《天体》´1-109 2012年。[GGP 2] *Branching laws for classical groups: the non-* W. T. Gan、*tempered case.* 156 2020 11, 2298 2367 B. Gross 和 D. Prasad, 《Compositio Mathematica》（），第 期–。[GI] W.T.Gan 和 A. Ichino, *The Gross-Prasad conjecture and local theta correspondence*, 《数学发明》206（2016年），第 3 期，705–799。[Gur] *On restriction of unitarizable representations of general linear groups and* M. *the non-generic local Gan-Gross-Prasad conjecture.* 24 2022 Gurevich, 《欧洲数学学会杂志》（JEMS）（），第 1 期，265–302。[Mo-Wa] *La conjecture locale de Gross-Prasad pour les groupes* C. Moeglin 和 *spéciaux orthogonaux: le cas général* ´ 347 2012 167 216 J.-L. Waldspurger, , 《天体》，（），-。[NP] M. Nori 和 D. Prasad, *On a duality theorem of Schneider-Stuhler*, 《纯粹与应用数学杂志》762（2020年），261–280。[Op-Sol] E. Opdam 和 M. Solleveld, *Extensions of tempered representations.*《几何与泛函分析》23（2013年），第 2 期，664-714。[Or] S. Orlik, *On extensions of generalized Steinberg representations*《代数杂志》293（2005年），611-630。[Pr1] D. Prasad, *Trilinear forms for representations of* GL(2) *and local* ϵ*-factors*, Compositio Mathematica，75，1990年，1，1–46。[Pr2] D. Prasad, *On the decomposition of a representation of* GL(3) *restricted to* GL(2) *over a p-adic field* 69, 1993, 1, 167 177 , 《杜克数学杂志》，–。[Pr3] D. Prasad, *Ext-analogues of branching laws. Proceedings of the International Congress of* , –1392, *Mathematicians—Rio de Janeiro 2018. Vol. II. Invited lectures* 1367 World Sci. Publ.，Hackensack，新泽西州，2018年。[Roche] A. Roche, *Parabolic induction and the Bernstein decomposition.*《Compositio Mathematica》134（2002年），第 2 期，113–133。[Sa] Mohammed Saad Qadri, *Ext branching Laws for the general linear groups*, 预印本（2024年）。[Sak-Ven] Y. Sakellaridis 和 A. Venkatesh, *Periods and harmonic analysis on spherical varieties.*《天体》，第 396 号（2017年）。

[Sch-Stu] P.Schneider和U.Stuhler, *Representation theory and sheaves on the Bruhat–Tits build-ing*, 《高等科学研究所数学出版物》, 第85卷, 1997年, 97–191页。[Sun-Zhu] B. Sun和C. Zhu, *Multiplicity one theorems: the archimedean case*, 《数学年刊》, 第175卷, 第1期（2012年）, 23–44页。[Wa] J.-L.Waldspurger, *Une Formule intégrale reliée à la conjecture locale de Gross-Prasad*, 《Compositio Mathematica》, 第146卷（2010年）, 第5期, 1180–1290页。[Wa1] J.-L.Waldspurger, *Une Formule intégrale reliée à la conjecture locale de Gross-Prasad 2ème partie: extension aux représentations tempérées* ´ 346 2012 171 312 , 《Astérisque》, ( ) , -。[Wa2] *La conjecture locale de Gross-Prasad pour les représentations tempérées des groupes spéciaux orthogonaux* ´ 347 2012 103 165 J.-L.Waldspurger, , 《Astérisque》, ( ) , -。[Wan] C. Wan, *On a multiplicity formula for spherical varieties.*, 《欧洲数学会杂志》（JEMS）, 第24卷（2022年）, 第10期, 3629–3678页。

Indian Institute of Technology Bombay, Powai, Mumbai - 400 076, India
Email address: prasad.dipendra@gmail.com