arXiv:2302.03513v1 [math.CA] 7 Feb 2023

实数与复数世界中的罗尔模型

D. Novikov，S. Yakovenko

To Askold Georgievich prince Khovanskii, our Teacher and lifelong Role Model, with admiration.

Abstract. 分析（实分析与复分析）和几何学（解析几何、代数几何、丢番图几何等）中的许多问题，都可以归结为计算方程组“解的数量”：这些方程组由代数等式以及右端为代数表达式的微分方程（包括常微分方程和 Pfaff 方程）定义。在纯代数语境中，其典范由 B´ezout 定理给出：在 n 维空间中，一个次数为 $\leqslant d$ 的多项式方程组的孤立解数量不超过 d^n，其中上界关于 d 为多项式增长、关于 n 为指数增长。这个上界是最优的：如果恰当地计算解的数量（即计入重数，包括复数解以及无穷远超平面上的解），那么等号成立。

如上所述，这一范式可以推广到超越情形。事实证明，一些计数问题具有类似的上界，这些上界只取决于次数和维数；而另一些问题只能在局部处理，即只能得到某些有限大小区域内解的数量上界。只有一类计数问题能够得到全局上界，但除了次数和维数之外，答案还取决于相应 Pfaffian 系统的高度。

这些结果的共同特征，是一个处于其证明核心的基本事实。这一事实可以被视为本科微积分中所熟知的罗尔定理的各种深远推广：该定理断言，一元可微函数在一个线段上的任意两个根之间，必然存在其导数的一个根。我们将讨论罗尔定理针对向量值函数和复解析函数的推广（这些推广都并非显而易见），以及针对全纯映射芽的推广。

Contents

1. 罗尔引理：原始版本 2
1.1. 重温大一微积分 2
1.2. 罗尔不等式与笛卡尔法则 3
1.3. 初等少项式理论的主要构件 4
2. 罗尔定理与实常微分方程 4
2.1. De la Vall´ee Poussin 定理与高阶方程 4
2.2. 实游荡定理 6
2.3. 最大切触阶与加布里埃洛夫–霍万斯基定理 8

2.4. 欧几里得空间中曲线的振荡 10 2.5. Voorhoeve 指数 11 2.6. 空间曲线与线性常微分方程 14 3. 复根计数 16 3.1. Kim 定理 16 3.2. 詹森不等式 17 3.3. 伯恩斯坦指标 17 3.4. 复值线性方程解的辩值变化 19 3.5. 伯恩斯坦指标的罗尔不等式与三角不等式 20 3.6. 幂级数的伯恩斯坦指标 20 3.7. 差分算子的奇点与罗尔理论 22 3.8. 伪阿贝尔积分 25 4. 多维（复数域） 26 4.1. 无穷小版本：重数计数 27 4.2. 多维局部版本：Binya mini 定理 34 5. 从局部到整体 36 5.1. 准代数函数 36 5.2. 阿贝尔积分与希尔伯特第十六问题 41 致谢 44 参考文献 45

1. Rolle lemma, virgin flavor

一个在紧实线段上可微、且在两个端点处都为零的实函数，其导数必定在内部某处有一个根（即使导数不连续）。这一结论称为罗尔引理，它源于这样一个事实：非恒定函数必定能在该线段上取得最大值和最小值。除非函数为常数，这些点中必有一点位于内部，因此导数必定在那里为零。

这一极其基础的原理，结果证明比若干非常强大的技术更能追溯其源头，并可带来众多重要应用[1]。

1.1. 重温一年级微积分。我们从最简单的改动开始。对于函数 $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$，记 $Z(f)\leqslant\infty$ 为其在 $[0,1]$ 上几何上不同的零点（根）的个数。

命题 1（罗尔不等式）。如果 f 是可微函数，那么 $Z(f')\geqslant Z(f)-1$，因此 $Z(f)\leqslant Z(f')+1$。特别地，如果 $Z(f')<+\infty$，那么 $Z(f)<+\infty$ 也成立。□

[1]这份综述的“入门版”列出了 2015 年以前已有的主要结果，发表于 [Yak16]：后者可视为该领域的温和入门读物。

命题 2（罗尔不等式，周期情形）。如果 $f\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个周期为一的可微函数，那么 $Z(f)\leqslant Z(f')$。□

这两种不同情形可以合并为一个不等式。

命题3。假设 f 在 $[0,1]$ 上可微，且 f 和f'在端点0、1处均不为零。那么 $Z(f)\leqslant Z(f')+\varphi(t)\big|_{t=0}^{t=1}$，其中 $\varphi(t)=\frac{1}{2}|$符号 $f(t)-$符号 $f'(t)|\in\{0,1\}$。

证明。若 $t=0$ f 和 f' 在 $t=0$ f 处符号相同，那么在0与 f 的最小根之间必有 f'的一个根。对 f 的最大根与 $t=1$之间的区间，也可作类似的论证（作相应的修改）。□

现在考虑函数 f 在 $[0,1]$, 上（包括端点）实解析的情形。这使我们可以引入 f 及其所有导数的根的重数（重数也可能是无穷大）。记 $N(f)<+\infty$ 为 f 的根的数量，按重数计。

命题 4. $N(f)\leqslant N(f')+1$。 □

证明基于这样一个事实：如果 f 在某点有一个重数为 $\mu\geqslant 2$ 的根，那么 f' 就有一个重数为 $\mu-1$ 的根。这一不等式的周期版本和综合版本也成立。

将数 $N(\cdot)$ $Z(\cdot)$ 视为泛函时，它们满足乘法三角不等式。

命题 5.

$$|Z(f)-Z(g)|\leqslant Z(fg)\leqslant Z(f)+Z(g)\qquad N(fg)=N(f)+N(g).\quad\square$$

1.2. 罗尔不等式与笛卡尔法则。上述不等式的一个直接应用，是得到多项式孤立根数量的一个上界；该上界不是用多项式的次数来表示，而是用其非零系数的数量来表示。对于次数很高但只有少数非零系数的稀疏多项式，这一区别至关重要。术语 *fewnomials* 由 A. Khovanskii 提出，如今已在这一传统中根深蒂固，不过从文体上看， *olygonomials* 一词或许更合适。

命题6. *The number of positive roots of a Laurent polynomial* $p(t)=\sum_{\alpha\in A}c_\alpha t^\alpha$, *where* $A\subset\mathbb{Z}$ *a finite set with* $|A|=n$ *elements* , *does not exceed* $n-1$. *The bound is sharp.*

Proof. 不失一般性，我们可以假设 $A\subseteq\mathbb{Z}_+$ 和 $0\in A$，必要时将 p 乘以适当次幂 t^μ。这种乘法不会改变 p的正根数量。导数仍然是一个少项式，其新的指标集为 $A'=A\setminus\{0\}$，其中至多有 $n-1$ 个不同的指标。因此可以对项数使用归纳法。经过 $n-1$ 次求导后，我们得到一个非平凡的少项式 $A=\{0\}$，它没有正根。对罗尔不等式应用归纳法即可证明该结论。□

事实上，利用更精细的命题3，可以证明正根的个数不超过非零系数序列中的符号变化次数。

1.3. 初等少项式理论的主要构件。罗尔不等式最直接的多维类比，涉及满足某些拓扑条件的光滑曲线与 *Pfaffian hypersurfaces* 的交点 [Kho91]。

设 $\gamma \quad a\ b \ \to \mathbb{R}^n$ Γ not: (,) 是 *necessarily connected* Γ 1 ω 一条光滑（参数化）曲线和一个实超曲面，。如果存在一个在 $T\Gamma = \bigcup_{a\in\Gamma} T_a\Gamma$ 上消失的 Pfaffian -形式，我们就称 为 Pfaffian（即， Γ是 ω 的一个积分曲面，尽管一般而言， ω 可能违反可积条件，且不存在其他积分超曲面）。如果 Γ 是一个 *separating hypersurface*，即它是区域 D 在 $\mathbb{R}^n$ 中的拓扑边界，并且 ω 在所有横截于 Γ、指向外部的向量上取正值，我们就称之为 *separating hypersurface*。

如果 ω 在速度向量 $\dot\gamma = \mathrm{d}\ \mathrm{d}t\gamma(t_*)$ 上消失，则称点 $a = \gamma(t_*)$ 为 γ 与 ω之间的切点。切点集记为 $\{\gamma \parallel \omega\}$。

定理

7 *If Γ is a separating solution of the Pfaffian equation $\omega = 0$ then the number . , ## of points of intersection* $\{\gamma \cap \Gamma\} \leqslant \{\gamma \parallel \omega\} + 1$.

Proof. 不失一般性，假设 γ 与 Γ 横截相交，因此 $\{\gamma \cap \Gamma\}$ 由孤立点组成。这些点处的值 ω ($\dot\gamma$) 符号交替：事实上，进入 D 的轨迹只能在离开时穿过它的边界 $\Gamma = \partial D$ ，反之亦然。因此，在 γ 与 Γ 的任意两个相邻交点之间，必定至少有一个切点。□

注意，例如，如果 γ 是代数曲线，且形式 ω 是多项式，那么切点集 $\{\gamma \parallel \omega\}$ 是代数的；若它由孤立点组成，则可由贝祖定理给出其点数的上界。这使得我们可以将贝祖定理“扩展”到某些超越情形。

例 8。考虑平面 $\omega = P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y$ 上次数为 n的多项式 2-形式。对于 $\{\omega = 0\}$ 而言，孤立的紧积分流形（曲线）称为相应微分方程的 *limit cycles*。每个这样的闭链都是一个分离超曲面（实际上是一条平面曲线）。此外，其中一些可以组合成非连通的分离超曲面（这取决于极限环的定向）。

容易证明，任意分离超曲面 Γ与次数为 m 的代数曲线横截相交的点数不超过 $m(n + m)$。这意味着任意分离解至多有 $2n^2$ 个连通分支。遗憾的是，这并不能给出 ω的极限环数量的任何上界，因为拓扑约束排除了“绝大多数”极限环同时包含在分离超曲面 Γ中的可能性。

采取适当的预防措施后，可以迭代这一构造，从而发展出少项式理论。非常宽泛地说，有一种方法可以将由代数方程 $P_{k+1} = 0, \ldots, P_n$ =0 在 $\mathbb{R}^n$ 中补充的“Pfaffian 方程组” $\omega_1 = 0, \ldots, \omega_k = 0$，化为另一个系统（实际上是若干个系统），其中包含 $k - 1$ 个 Pfaffian“方程”和 $n - k + 1$ 个代数方程。为此，Pfaffian 方程（实际上是积分流形 $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ 构成的递增链）必须满足某种归纳拓扑条件，才能构成一个 *Pfaffian chain*。这一方向构成了 Kho91] 所著的书 [的主体内容，我们在此不作探讨。

2. Rolle theorem and real ODE's

2.1. 德拉瓦莱·普桑定理与高阶方程。§1.1 中的罗尔引理可以迭代使用，从而适用于高阶线性常微分算子，而不仅仅是单个导子。

用 $\|\cdot\|$ 表示线段 $[0, \ell] \subseteq \mathbb{R}$ 上的上确界范数（我们只考虑光滑函数）。众所周知，从各种实际意义上说，导子都是无界算子，但不存在形如 $\|f\| \leqslant$ 的反向不等式

$C\|f'\|$ 不可能成立，因为最终只要用足够大的 $c \in \mathbb{R}$ 替换 f 中的 $f + c$，它就会被违反。如果我们要求 f 在 $[0, \ell]$ 上某处为零，情况就不同了。

引理9. 若 f在 $[0, \ell]$上有一个根，则 $\|f\| \leqslant \ell\|f'\|$。

更一般地，若 f 在 $[0, \ell]$上有 $n + 1 \geqslant 1$ 个根（按重数计），则$\|f\| \leqslant \frac{\ell^n}{n!}\|f^{(n)}\|$。

证明. 由牛顿-莱布尼茨公式可立即得出第一个结论

$$\forall t \in [0, \ell] \qquad f(t) = f(t_*) + \int_{t_*}^{t} f'(s)\,\mathrm{d}s = \int_{t_*}^{t} f'(s)\,\mathrm{d}s,$$

若令 $t_* \in [0, \ell]$ 取 f的一个根处的值，并用 $\ell\,\|f'\|$估计积分上界。

第二个结论由第一个结论迭代得到。根据罗尔定理，后续导数 f'、 f''、……、 $f^{(n)}$在 $[0, \ell]$ 上分别至少有n、 $n-1$、……、1个根。迭代应用牛顿-莱布尼茨公式可得， f 是 $f^{(n)}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的积分，而该区域包含于标准单纯形 $\{0 \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_n \leqslant 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$之内。因此， $\|f\|$不超过单纯形的体积 $\ell^n/n!$ 乘以范数$\|f^{(n)}\|$。 □

由此引理可立即推出一个推论。

命题10（德拉瓦莱-普桑定理，1929）。考虑如下形式的齐次线性常微分方程

$$y^{(n)} + a_1(t)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)\,y' + a_n(t)\,y = 0, \qquad t \in [0, \ell] \Subset \mathbb{R} \quad (1)$$

其连续系数 a_1，……， a_n 有界， $\|a_k\| \leqslant A_k < +\infty$。

假设长度 ℓ 足够小（与系数的大小相比），满足不等式

$$\sum_{i=1}^{n} A_k \frac{\ell^k}{k!} < 1. \qquad (2)$$

那么，方程（1）的任意解在 $[0, \ell]$上至多有 $n-1$ 个孤立根。

证明。设 f 为任意一个解。若 $\|f^{(n)}\| = 0$，则 f 是次数为 $\leqslant n-1$的多项式，结论显然成立。否则，不失一般性，可假设 $\|f^{(n)}\| = 1$ （因为该方程是齐次的）；根据引理9，在最大值 $1 = \max_t |f^{(n)}(t)| = \|f^{(n)}\|$ 取得处，代入 $y = f(t)$ 后，恒等式（1）的首项会超过所有非主项之和。□

根的数量的上界是最优的。事实上，在任意 n 维实函数空间中，对于任意 $[0, \ell]$，都可以将任意 $n-1$ 个点指定为该子空间中某个非零函数的根。

2.2. 实游荡定理。命题10使我们能够对任意有界区间上、系数有明确上界的线性微分方程的孤立零点数量给出有效上界。为此，应将区间划分为足够小的部分，使其满足（2）。出人意料的是，线性假设可以由单纯的多项式性假设取代。

考虑 $\mathbb{R}^n$ 中的一个多项式向量场，它由一个多项式常微分方程组定义

$$\dot{x}_i = v_i(x) = \sum_{i,\alpha} c_{i\alpha} x^\alpha, \quad i = 1, \dots, n, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Delta \Subset \mathbb{Z}^n_+. \quad (3)$$

除维数 n 外，该向量场还由其次数 $d = \max_\Delta |\alpha|$ 刻画，其中 $|\alpha| = |\alpha_1 + \cdots + \alpha_n|$。在奇异轨迹 $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ 之外: } v(x) = 0\}$，该向量场的轨线都是光滑的实解析曲线。我们关注这些曲线的“有界”部分与仿射超平面之间孤立交点数的上界。

最简单的（线性）例子已经表明，除曲线部分的“大小”外，这个上界还必须取决于它与无穷远的接近程度，以及方程的“高度”（系数 $|c_{i\alpha}|$ 的大小）。为了尽量减少独立参数的数量，我们假设所有系数的绝对值都由同一个数 $R > 0$ 控制：

$$|q_i| \leqslant R, \quad |c_{i\alpha}| \leqslant R \qquad \forall i = 1, \dots, n, \quad |\alpha| \leqslant d, \quad (4)$$

其中，$q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$ 是方程 (3) 的初值 $q = \gamma(0)$。

于是，对于任意充分小的 $\delta > 0$，都可以考虑该方程的解析积分曲线 $\gamma_{q,\delta} : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^n$，它满足初始条件 $\gamma(0) = q$，并研究它与任意仿射超平面 $\Pi \subseteq \mathbb{R}^n$的孤立交点个数 $\#\{\gamma_{q,\delta} \cap \Pi\}$。

事实证明，这个问题可以归结为命题10。

定理11（Novikov 和 Yakovenko [NY99]）。存在一个仅依赖于 n, d 的自然数 ν，以及一个依赖于 n, d, R的小量 $\delta > 0$，使得对于任意仿射超平面 Π，$\#\{\gamma_{q,\delta} \cap \Pi\} \leqslant \nu$。

ν, δ 的值分别有明确的上界和下界：

$$\nu \leqslant d^{2^{O(n^2 \ln n)}}, \qquad \delta > R^{-2^{\mathrm{Poly}(n,d)}},$$

其中，Poly(n, d) 表示关于 n、d 的显式多项式。

Idea of the proof. 考虑由仿射方程 $u_0 = 0$ 定义的任意仿射超平面，它位于 $\mathbb{R}^n$，$u_0 \in \mathbb{R}[x] = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$，次数为 $u_0 = 1$。向量场 (3) 定义了代数 $\mathbb{R}[x]$，$Du = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} v_i$ 的导子 $D = D_v$。考虑由连续的导子生成的多项式理想升链，

$$\langle u_0 \rangle \subseteq \langle u_0, u_1 \rangle \subseteq \langle u_0, u_1, u_2 \rangle \subseteq \cdots, \quad u_{i+1} = Du_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

该升链必定会在某一步 ν 稳定下来，这意味着存在恒等式[2]

$$u_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} h_i u_{\nu-i}, \qquad h_i \in \mathbb{R}[x]. \tag{6}$$

将这个恒等式限制在由 t 参数化的任意曲线 $\gamma_{p,\,\delta}$ 上，我们得到一个关于导数 $u_0^{(i)}$ 的线性恒等式，其系数为 $a_i(t) = h_i\big|_{\gamma_{p,\,\delta}}$，也就是说，这是一个 ν 阶的线性“方程”(1)。

注 12. 这是处理后来将被称为诺特环的对象时所采用的关键思想，见下文 §4.1.2：所有超越对象，都是通过将适当的多项式对象或代数对象限制在某个环境仿射空间中的（超越）积分流形（即积分曲线）上得到的；这些流形由代数微分方程定义，而微分等解析运算则仅相当于对代数数据进行代数运算。环境空间中的代数性使我们能够运用交换代数和代数几何的强大工具箱来估计描述中代数部分的复杂度，而经典分析的工具则用于将这些信息转化为针对不同计数问题的答案。

为了完成证明，接下来只需找出 ν 和 $\|a_i\|$ 的显式上界，以应用命题10。事实证明，最困难的部分是有效诺特性，也就是找出长度 ν的上界。一旦知道这一上界，就可以利用输入数据的多项式性质。多项式 u_i 的次数随 i 的增长而线性增长，因此若已知长度 ν，就能给出它们的显式上界。范数 $\|u_i\|$ 的增长也可以显式控制。随后，可以通过求解一个系数矩阵已知（且有显式上界）的线性代数方程组，求出多项式 h_i, $i = 1, \dots, \nu$。将范数有界的多项式 h_i 限制在大小已知且有界的积分曲线片段上，就能得到命题10中标量系数$\|a_i\|$的上界。

除一个步骤外，这些计算都很直接：已知线性代数方程组的系数有一个 $upper\ bound$，且其矩阵为 M （一般而言并非方阵），并不能推出其解向量有任何上界，即使已知该方程组相容（可解），也就是说其秩适当。事实上，相应的非零子式 $\det M_\alpha$ 可能任意接近零，而除以相应的“小分母”可能导致无法预料的大数。

如果矩阵 M 的系数是 $integer$ 整数，情况就会完全不同。此时，每个子式 $\det M_\alpha$ 要么为零，要么是非零整数，也就是说，其绝对值至少为 1。在这种情况下，不会出现“小分母”，而且线性方程组解所需的上界很容易计算。

如何实现这种整性？将所有参数（向量场的系数 $c_{i\alpha}$ 、仿射函数 u_0的系数、初始点 p）都声明为 $new\ dependentvariables$，并令其满足如下形式的“微分方程”：“变量的导数恒等于零”。这会大幅增加问题的维数：对于原有 n 个变量中的次数为 $\leqslant d$ 的 $all\ monomials$，必须为其系数增添额外变量。然而，最终我们得到一个次数已知、系数只有零和一的多项式向量场，而线性形式 u_0 也会变成新变量的二次型，其系数同样为 $\{0,1\}$。这意味着初始数据都定义在 $\{0,1\}$上，因此理想链 (5) 由具有整数系数的多项式生成。

这些范数 $\|h_i\|$ 将成为新变量中的代数函数，它们只依赖于已知数据 n、d 和 ν。它们在半径为 R 的球/盒上的限制将是关于 R 的、具有显式上界的多项式。□

[2]由于这个链是通过逐步添加连续导数得到的，因此从首次稳定化开始，这个链便会永远保持稳定。

注13. 有效诺特性绝非易事，尽管存在一种可显式计算链的最大长度的算法。在 [Yak05] 中，解释了为什么对于由次数不断增大的多项式生成的一般理想链，链的长度可能增长为维数 n 的所谓 $Ackermann\ generalized\ exponential$，也就是说，该函数的渐近增长速度快于任何初等函数，甚至快于任何关于 n 的原始递归函数。这与定理11中关于 ν 的“仅仅”双指数界形成对比。正是由于这条链是通过逐次添加导子而得到的，才迫使它以异常快的速度稳定下来。

之后，在明确给出交点数量的上界时，我们将明确假设，构造中涉及的所有对象（向量场、微分方程等）都定义在 $\mathbb{Q}$上，且其高度有明确的上界。

定义 14. 若有理函数属于域 $\mathbb{Q}(x_1,\dots,x_n)$，则称它定义在 $\mathbb{Q}$ 上的 $\mathbb{C}^n$上。其高度是指仅使用不可约有理分式显式写出该函数所需的最大自然数。

若对象（向量场、标量或矩阵普法夫形式等）的所有坐标都是定义在 $\mathbb{Q}$上的有理函数，则称该对象定义在 $\mathbb{Q}$上。该对象的高度定义为各个条目高度的最大值。

若点 q 是非奇异的，定理11便给出了多项式向量场相轨线线段长度的一个下界；尽管这些轨线是超越的，但从交点的角度看，它们表现得如同次数为 $\leqslant \nu$的代数曲线。

备注 15. 若一个次数已知的多项式向量场 d 定义在 $\mathbb{Q}$ 上，且其高度为 s，则该方程的系数 $|c_i\alpha|$ 的大小有上界 s，因此，张成理想链的多项式 u_i 的高度会关于 i 呈指数增长，并关于 s、d呈多项式增长。由此得到的线性代数方程组的矩阵 M 和右端项也定义在 $\mathbb{Q}$ 上，且其高度有已知上界，这意味着其解（保证存在）的大小有上界。这样就不必为 $c_{i\alpha}$ 引入辅助变量，因此维数 n 和次数 d 不会相互混杂。关于 δ 的总体答案将关于 $\log R$、$\log s$ 和 d呈单指数增长，关于 n呈双指数增长。换言之，可以将关于 d 的依赖性从双指数改进为单指数。这可以与定理 63 中得到的上界进行比较。

2.3. 最大切触阶与加布里埃洛夫–霍万斯基定理。

定理11还蕴含了其他结论，其中之一是：多项式向量场的积分曲线与代数超曲面之间的最大相切阶，其上界关于向量场/超曲面的次数 d是多项式的，但关于环境空间的维数 n 是双指数的。如下文 A. Gabri`elov 和 A. Khovanskii [GK98] 的定理所示，这个相切上界可以大幅改进。

定理 16。设 γ 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个在原点处不消失的、次数为 d 的多项式向量场的积分轨迹，且 $\Pi = \{P(y) = 0\} \subset \mathbb{R}^n$ 是一个经过原点并由约化多项式 $P \in \mathbb{R}[y_1,\dots,y_n]$定义的代数超曲面，$\deg P \leqslant d$。如果交集 $\gamma \cap \Pi$ 在

原点处是孤立的，那么相切阶 $\mu = \mathrm{ord}_0 P\big|_\gamma$ 是一个有限数，其上界是关于 d 的多项式以及关于 n 的简单指数的表达式。

这一结果的证明采用了奇点理论中典型的、非常优美的构造。下面我们将在 [GK98] 中解释证明的主要思想。

首先，不失一般性地，一切都可以复化：我们有原点 $(\mathbb{C}^n, 0)$ 的一个邻域、在 0 处非奇异的复解析向量场，以及一个多项式超曲面 Π。

由于原点是非奇异的，因此向量场可以在该邻域中被 *rectified*，也就是说，不失一般性地，我们可以假设选择局部坐标系 $(x,t) \in (\mathbb{C}^{n-1}, 0) \times (\mathbb{C}^1, 0)$，以替代 $y \in (\mathbb{C}^n, 0)$，使向量场变为 $\partial/\partial t$；我们将其轨线称为竖直线，并且投影 $\pi\colon (x,t) \mapsto x$ 是良定义的。超曲面 $\Pi \in (\mathbb{C}^n, 0)$ 向下投影到底空间$B = (\mathbb{C}^{n-1}, 0)$，而 $\pi^{-1}(0)$ 是与 Π 相切且具有有限阶 $\mu < +\infty$ 的竖直线。根据魏尔斯特拉斯预备定理，对于任意充分接近原点的点 $x \in B$，交集 $\pi^{-1}(x)$ 与 Π 恰好由 μ 个（复）点组成，当 *counted with their multiplicities* 时。然而，几何上不同的点的数量可能从 1 变化到 μ。

用 Z_i 表示点集 $(x,t) \in \Pi \subseteq (\mathbb{C}^n, 0)$，其中竖直线在 Π 处与其相切，阶数为 $\geqslant i$，对于 $i = 1, \ldots, \mu$（横截相交对应于 $i = 1$）。若 Π在局部由解析方程 $F(x,t) = 0$定义，则

$$Z_i = \left\{ F(x,t) = \frac{\partial F}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(x,t) = \cdots = \frac{\partial^{i-1} F}{\partial t^{i-1}}(x,t) = 0 \right\} \tag{7}$$
$$\Pi = Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \cdots \supseteq Z_\mu \ni \{0\}.$$

用 $\nu_i = \nu_i(x)$ 表示交集

$\pi^{-1}\ x\ \cap Z_i$ $\nu_\mu\ 0\ = 1$ $x \in B$ $\nu_2\ x\ = \cdots = (\,)$ 中几何上不

$\nu_\mu\ x\ = 0$ $\pi\big|_\Pi$

同的点的个数，因此 ( )，并且对于一般点，根据萨德定理有 ( ) ( )（限制映射的临界值测度为零）。于是有

$$\sum_{i=1}^{\mu} \nu_i(x) = \mathrm{const} = \mu. \tag{8}$$

事实上，左边是 $\pi^{-1}(x) \cap \Pi$ 中原像的个数，按其重数计数，也就是几何上不同的点的重数之和。

恒等式 (8) 可以通过应用利用欧拉示性数可加性的形式构造，对“欧拉示性数”[3] 进行积分 χ，从而得到等式

$$\sum_{i=1}^{\mu} \chi(Z_i) = \mu \cdot \chi(B) = \mu. \tag{9}$$

公式 (8) 本身还不足以对 μ 得出任何结论（它同时出现在等式两边）。不过，可以对超曲面 Π 进行扰动，使轨迹集 $Z_1, \ldots, Z_\mu$ 的维数取其 *generic* 值。若 Π 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个 *generic* 超曲面，则 Z_i 在 Π 中的余维由 (7) 中的 *number i of equations* 给出：Π 上的一般点属于 Z_1；相切发生在 Z_1 上，其在 Π 中的余维为 1；二重相切发生在余维为 3 *etc* 的 Z_2 上。在序列末尾，我们看到 $\mathrm{codim}_\Pi Z_n = n - 1 = \dim \Pi$；对于 $i > n$，则有 $\mathrm{codim}\ Z_i > \dim \Pi$。这意味着相应的轨迹集必为空，而 (9) 中相应的左侧将是一个求和，其上限为 $n-1$，而不是 μ。

[3]欧拉示性数定义为 *closed* 良性拓扑空间中不同维数单形数量的交错和，具有可加性：$\chi(M \cup N) = \chi(M) + \chi(N) - \chi(M \cap N)$，这使得可以将一种（主要是符号性的）“积分理论”发展为以χ 作为有限可加测度。特别地，对于足够良性的函数，可以表述并证明富比尼定理的一个类似结果，详见 [Vir88] 。

当然，原超曲面 Π （由方程 $P(y) = 0, y \in \mathbb{C}^n$ 定义、以初始坐标表示的多项式） *may be non-generic*。然而，根据 Thom 横截性定理，可以找到一个形式为 $P_\varepsilon(y) = P(y) + \varepsilon Q(y)$ 的小扰动，其中 $\deg Q \leqslant \deg P$，且 $\varepsilon \in (\mathbb{R}, 0)$ 足够小，使得对于所有 $\varepsilon \neq 0$， Π_ε 都具有上述意义下的一般性。（扰动参数 ε 必须选得足够小，具体取值取决于公式 (9) 适用的邻域大小。）

但对于任意这样的充分小的 ε，我们都有等式

$$\sum_{i=1}^{n} \chi(Z_{i,\varepsilon}) = \mu, \tag{10}$$

其中 $Z_{i,\,\varepsilon}$ 是从 $P_\varepsilon \in \mathbb{R}[y]$ 而非针对 P构造的轨迹集。用不变量术语定义它们，需要沿着多项式向量场 v取李导数 L_v：

$$Z_{i,\varepsilon} = \left\{ P_\varepsilon = 0,\ L_v P_\varepsilon = 0,\ L_v^2 P_\varepsilon = 0,\ \dots\ , L_v^{i-1} P_\varepsilon = 0 \right\}. \tag{11}$$

注意，集合 $Z_{i,\,\varepsilon}$ 均为 *real algebraic*，因此是温和的：它们的拓扑特征可以根据维数、多项式方程的次数及其数量显式给出上界，参见 [Mil64]。已知次数 $d = \deg P = \deg P_\varepsilon$ 和 $\deg v$、维数 n，并注意到对于 $\varepsilon \neq 0$，非空的 $Z_{i,\,\varepsilon}$ 的数量至多为 $n-1$，便可：

(1) 显式给出上述所有李导数次数的上界；(2) 估计所有 $\varepsilon \neq 0$ 的欧拉示性数 $\chi(Z_{i,\,\varepsilon})$。

这些估计关于 d和 n相当精确：它们关于 d 是多项式级的，关于 n则是单纯指数级的。这为 μ给出了类似的上界，相应的上界可以明确写出，见 [GK98]。

注 17. [GK98] 的上界为 $O(d^{2n})$, $d = \deg P$（回想一下，我们假设 P是约化的、无平方因子的），这低于超越数论应用所需的 $O(d^n)$。另一方面，后一类背景中出现的上界，例如 [Nes88], 中的上界，并未明确表示为向量场 v 的次数以及维数 n的函数。在[Bin16] 中，$_{,\epsilon}$ 的欧拉示性数上界是通过复莫尔斯理论而非实莫尔斯理论得到的。这使得他们得到了具有所需渐近性质的显式上界，改进了 [GK98] 的主要结果及其所有前身。

2.4. 欧几里得空间中曲线的振荡。此前的结果仍未回答下面这个看似简单的问题。考虑欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$中的一条 C^∞-光滑空间曲线 $\gamma\colon [0,\ell] \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto x(t)$，以及它的“导数”——速度矢端曲线 $\gamma'\colon t \mapsto \dot{x}(t) = \mathrm{d}\,\mathrm{d}t^x(t)$。是否存在一种数值度量来衡量空间曲线的“振荡行为”（无论这究竟意味着什么），并且当从速度矢端曲线转到曲线本身时，该度量以可控的方式增加？显然，答案取决于我们如何以定量方式定义振荡行为。

2.4.1. $\mathbb{R}^n$中的罗尔定理。衡量曲线绕某个点（或者更一般地，绕 $\mathbb{R}^n$ 中与该曲线不相交的某个仿射子空间）旋转量度，方法之一是最自然的。假设一条光滑曲线γ 不经过原点 $0 \in \mathbb{R}^n$，也就是说， $\|x(t)\| \neq 0$ 对于 $t \in [0,\ell]$。那么可以将它投影到单位球面 $\mathbb{S}^{n-1}_1 = \{\|x\| = 1\}$ 上，得到球面曲线 $S\gamma(t) = {}^{x}(t)\,\|x\,(t)\,\|$，它也将是光滑的，因此具有有限长度$\|S\gamma\|$。这个长度可以解释为 γ 绕原点旋转的数值量度。我们假设速度 $\dot{x}(t)$处处非零

（这保证了 γ 是光滑的），也就是说，相应的示性图 γ'也不经过原点，且其球面投影 $S\gamma'$ 具有有限长度。$\|S\gamma\|$ 与 $\|S\gamma'\|$相比如何?

定理18（Khovanskii 和 Yakovenko, [KY96]）。

$$\|S\gamma\| \leqslant \|S\gamma'\| - \operatorname{dist}(S\gamma(t), S\gamma'(t))\big|_{t=0}^{t=\ell}, \tag{12}$$

其中，dist(·, ·) 是 $\mathbb{S}_1^{n-1}$ 上的球面距离。

特别地,

(1) *if* γ *is closed,* $\gamma(0) = \gamma(\ell)$, $\gamma'(0) = \gamma'(\ell)$, *then* $\|S\gamma\| \leqslant \|S\gamma'\|$,

(2) *in any case*

$$\|S\gamma\| \leqslant \|S\gamma'\| + 2\pi.$$

第二个陈述由 (12) 得出，因为任意两点之间的球面距离小于或等于 π。

The idea of two different proofs. 第一个证明基于以下观察。考虑两条球面曲线 $S\gamma\colon t \mapsto s(t)$ 和 $S\gamma'\colon t \mapsto s'(t)$，则 s 的球面速度向量始终与连接 $s(t)$ 和 $s'(t)$ 的测地线（大圆弧）相切。为此，只需考虑包含向量 $s(t)$ 和 $s'(t)$ 的 $\mathbb{S}_1^{n-1}$ 二维截面。换言之，点 $s(t)$（蜘蛛）以最优方式追逐点 $s'(t)$（苍蝇），它们之间的距离减少速度不会快于 $\|\dot{s}(t)\| - \|\dot{s}'(t)\|$（差值也可能为负）。对该不等式积分，便得到 (12)。

证明（12）的另一种方法是布丰投针原理。根据这一原理的一个版本，球面曲线的长度等于它与随机大圆（赤道）的交点数的平均值。更确切地说，设 $\xi \in \mathbb{A}_1^{n-1}$ a 为在单位球面上均匀分布的随机向量，$\Pi_\xi = \{x \in \mathbb{R}^n \ \langle \xi\ x\rangle =: 0\}$ 为 $\mathbb{S}_1^{n-1}$ 随机大圆所截出的线性超平面。任意曲线 γ 与 Π 的交点数，按定义与其球面投影 $S\gamma$ 与大圆的交点数相同。布丰投针原理指出:

$$\|S\gamma\| = \frac{\pi}{|\mathbb{S}_1^{n-1}|} \int_{\mathbb{S}_1^{n-1}} \#\{\Pi_\xi, \gamma\}\, \mathrm{d}\sigma(\xi),$$

其中 $\mathrm{d}\sigma$ 是球面上的勒贝格（$n-1$）测度，$|\mathbb{S}_1^{n-1}|$ 是总体积。

出于同样的原因，任意两点之间的球面距离（即连接这两点的“直”弧的长度）与随机超平面将这两点分隔开的概率成正比。现在，对每个 ξ，我们可以考虑标量函数 $f_\xi(t) = \langle \xi, x(t)\rangle$。应用命题3即可完成定理的第二个证明。□

2.5. Voorhoeve 指数。对于 $n = 2$ 上述结果（针对闭曲线）可以用复变量重新表述，从而与原始罗尔不等式之间的联系一目了然，参见 [Voo76]。

设 $U \subseteq \mathbb{C}$ 是一个边界 $S = \partial U$ 光滑（或分段光滑）的有界区域，并以自然参数化 $[0, \ell] \ni t \mapsto z(t) \in S, |\dot{z}(t)| \equiv 1$ 表示。设 f 是定义在 ∂U 某个邻域内且在该邻域内不为零的全纯函数。那么，我们可以比较曲线 $f(z(t))$（即像 $f(\partial U)$）的旋转与其速度 $t \mapsto f'(z(t)) \cdot \dot{z}(t)$ 的旋转，其中 f' 是函数 $z \mapsto f(z)$ 的复导数。

面积参数复值函数 $g(t)$ 绕原点的旋转，等于其辐角的绝对变化量

$$V(g)\big|_0^\ell = \int_0^\ell \left|\frac{\mathrm{d}\operatorname{Arg} g(t)}{\mathrm{d}t}\right| \mathrm{d}t.$$

乘积 $\operatorname{Arg}\big(f'(z(t)) \cdot \dot z(t)\big)$ 的辐角等于各辐角之和。因此，应用定理18，我们得出

$$V(f)\big|_0^\ell \leqslant V(f')\big|_0^\ell f + V(\dot z)\big|_0^\ell.$$

根据定义，最后一项是边界∂U的绝对积分曲率。若 U 是凸的，则它等于 2π。

定义19. 复函数 g 在闭曲线 $S \subseteq \mathbb{C}$ 的邻域内全纯时，其 Voorhoeve 指数 $V_S(g)$定义为 $f(z)$沿该曲线的辐角绝对变化。

根据构造，Voorhoeve 指数总是大于或等于 $f(S)$绕原点的拓扑指标。

命题20. 若 f 在 U内部全纯延拓，则

$$V_{\partial U}(f) \geqslant N_U(f) = \#\{z \in U \colon f(z) = 0\},$$

因此，Voorhoeve 指数不小于按重数计数的孤立零点数 $2\pi N(f)$。

命题 4 的直接类似结论现在几乎完全可以照搬其形式。

定理21. 若 f 在有界凸域 $U \subseteq \mathbb{C}$ 中全纯，则

$$V(f) \leqslant V(f') + 1.$$

对于非凸域，应将 1 替换为边界 ∂U 的绝对曲率积分除以 2π。

由于恒等式 $\operatorname{Arg}(uv) = \operatorname{Arg} u + \operatorname{Arg} v$，Voorhoeve 指数满足三角不等式。

命题22. 对于在同一条闭曲线上全纯的任意两个函数 f, g，

$$|V(f) - V(g)| \leqslant V(fg) \leqslant V(f) + f(g). \quad \square \tag{13}$$

Voorhoeve 指数对于计算解析函数的复零点个数非常有用。

2.5.1. *Integral Frenet curvatures and spatial meandering.* 光滑曲线绕其外部一点旋转的概念，可以很容易地推广到更高维的仿射子空间。设 γ 是欧几里得空间中一条避开仿射子空间 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ 的光滑曲线。考虑正交投影 $\pi\colon \mathbb{R}^n \to A^\perp$，它将 A 映到互补维数的仿射子空间 $A^\perp$ 中的点 a。于是，我们可以像之前一样，定义 $\pi \circ \gamma$ 在 $A^\perp$ 内绕 a 的旋转，并将这个非负数作为 γ 绕 A 的旋转量度。当 $\dim A \leqslant n-2$ 时，这种构造都适用。

回想一下，任意欧几里得光滑曲线都存在密切正交标架，但在有限个例外点（通常数量很少）处未定义。如果初始曲线由向量函数 $t \mapsto x(t) = \big(x_1(t) \ldots, x_n(t)\big)$ 参数化，那么迭代导子 $v^{(1)}(t) = {}_{\mathrm{d}\,\mathrm{d}t}x(t)$, $v^{(2)}(t) = {}_{\mathrm{d}\,\mathrm{d}t}v^{(1)}(t), \ldots,$ $v^{(n)}(t) = {}_{\mathrm{d}\,\mathrm{d}t}v^{(n-1)}(t)$ 通常（即对一般曲线及一般点 t）在 $\mathbb{R}^n$ 中定义一个标架。对这个标架进行正交化，可得到向量函数 $\mathrm{e}_1(t) \ldots,$ $\mathrm{e}_n(t)$，使得

- 向量 $v \quad t \quad v \quad t \quad {}_1\, t \quad {}_k\, t \quad k = {}_{(1)}(\,) \ldots, {}_{(k)}(\,)$ 对所有 $, , ,$ $\bullet$ 都张成与 $\mathrm{e}\,(\,) \ldots, \mathrm{e}\,(\,)$ 相同的子空间。向量 $\mathrm{e}_1(t) \ldots,$ $\mathrm{e}_k(t)$ 构成一个正交规范组，对于 $k = n$ 的定向为正。

集合 $\mathrm{e}_1(t) \ldots, \mathrm{e}_n(t)$（定向为正）称为与曲线 γ 相关联的 *Frenet frame*。如果曲线的参数化为 *natural*（按弧长），即 $v^{(1)} = \mathrm{e}^1, ,$ 那么必须满足 *Frenet identites*:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{n-1} \\ \mathbf{e}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varkappa_1 & & & & \\ -\varkappa_1 & 0 & \varkappa_2 & & & \\ & -\varkappa_2 & 0 & \varkappa_3 & & \\ & & \cdots & 0 & \cdots & \\ & & & -\varkappa_{n-2} & 0 & \varkappa_{n-1} \\ & & & & -\varkappa_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{n-1} \\ \mathbf{e}_n \end{pmatrix}$$

量 $\varkappa_i = \varkappa_i(t)$ 称为弗雷内（广义）曲率（$i = 1$ 是曲率，$i = 2$ 对应于挠率等）。对于一般的光滑曲线，曲率 $\varkappa_1$、.....、$\varkappa_{n-2}$ 为正（非零），而最后一个曲率 $\varkappa_{n-1}(t)$ 可能改变符号，但只会在称为 *hyperinflections* 的孤立点处发生。注意，在定理18中，对于按弧长参数化的光滑曲线 γ，$\|S\gamma'\| = K_1(\gamma)$。

用 $K_i(\gamma)$ 表示绝对积分 Frenet 曲率，$K_i(\gamma) = \int_0^\ell |\varkappa_i(t)|\mathrm{d}t$（回想一下，参数化采用弧长，且对于 $\leqslant n-2$，曲率为正）。

定理23（D. Novikov、D. Nadler、S. Yakovenko [NY96,NaY98]）。 *Rotation of real analytic curve γ around any k-dimensional affine subspace A^k does not exceed $\pi(k+1) + 4\sum_{i=0}^{k+1} K_i(\gamma$ $k+1$ can be dropped and rotation is bounded). For closed curves the term $\pi(\,)$, (up to a factor of 4) by the sum of integral absolute curvatures.*

对于 $k = 0$，这一结果与定理18的区别仅在于因子 4（在这个特定情形下，经过更细致的考察可以去掉该因子）。定理可以扩展到 dim $A = n-1$ 的情形，如下所述。将曲线 γ 绕一个（$n-1$）维子空间 A（仿射超平面）的“旋转”定义为 $\pi \cdot \#\{\gamma \cap A\}$。考虑 $\mathbb{R}^n$ 在一维子空间 $A^\perp$ 上的正交投影，即可说明这一求法的合理性。零维“单位球面”$\mathbb{S}_1^0$ 由两个彼此相距 2 的点组成；若规定这两个对踵点之间的“球面”距离为 π，与所有更高维情形相同，那么这种归一化便显得自然。同理，将第 n 个积分曲率定义为 $K_n(\gamma) = \pi \cdot \{\varkappa_{n-1}(t) = 0\}$，即超拐点的归一化数量，也是自然的。采用这些约定后，定理23中的不等式仍然成立。我们可以将其改述为以下不涉及极端维数中的旋转的形式:

$$\#\{\gamma \cap \Pi\} \leqslant n + \frac{4}{\pi}\sum_{i=1}^{n-1} K_i(\gamma) \ + \ \#\{\varkappa_{n-1} = 0\},$$

如果曲线是闭曲线，则可以省略第一项。

2.5.2. *Non-oscillating curves in $\mathbb{R}^n$.* 在 $\mathbb{R}^n$ 中的任意曲线，都可以被一个合适的仿射超平面在任意 n 个点处截交；一般而言，这些交点是孤立的。无法在更多点处被截交的曲线称为非振荡曲线。定理23表明，足够小的

光滑曲线片段确实是非振荡的。问题在于，如何像命题10那样对这一断言作定性表述。

定义24. 若一条空间光滑曲线没有超拐点，即其最后一个弗雷内曲率不改变符号，则称其为 *hyperconvex*。

定理25（B. Shapiro， [Sha90]）。 *A hyperconvex curve in* $\mathbb{R}^n$ *such that*

$$\int_\gamma \sqrt{\varkappa_1^2(t)+\dots+\varkappa_n^2(t)}\,\mathrm{d}t < \frac{1}{n\sqrt{2}}$$

is non-oscillating.

这一结果可以与定理23的一条推论相比较；该推论保证，对于超凸曲线，若

$$\int_\gamma |\varkappa_1(t)|+\dots+|\varkappa_{n-1}(t)|\,\mathrm{d}t < \frac{\pi}{4}.$$

2.6. 空间曲线与线性常微分方程。线性常微分方程振荡理论与空间曲线振荡理论之间显而易见的平行关系，很容易解释。一条空间曲线由一个 n元组的光滑函数 $x_1(t)\dots,x_n(t)$给出，它与仿射超平面的交点是（非齐次）线性组合 $\sum_1^n c_ix_i(t) = c_0$的根。根据罗尔定理，只需估计所有齐次线性组合 $\sum_i c_if_i(t) = 0$, $f_i(t) = \dot{x}_i(t)$的根的数量；这些组合共同满足一个线性常微分方程。

任何这样的方程都可以写成展开形式 (1)，其中系数 $a_i(t)$ 可由基本解系f_1、.....、 f_n 通过算术运算和求导得到。然而，有时需要进行除法，因此，要按照 de la Vall´ée Poussin 定理的思路，为 $\max_t|a_i(t)|$ 建立显式上界会很困难。

另一种方法是将作用于给定基本解系后为零的微分算子，重构为导子与乘以具有零点和极点的函数这两种运算交替构成的复合算子。为简单起见，假设函数 $f_1(t)\dots,f_n(t)$ 是实解析的，以避免出现非孤立的交点/零点。

用 $W_k(t)$ 表示前 k 个函数的朗斯基行列式，

$$W_k(t)=\det\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_k\\ f_1^{(1)} & f_2^{(1)} & \dots & f_k^{(1)}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ f_1^{(k-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_k^{(k-1)}\end{pmatrix}.$$

这些行列式可以看作多重线性常微分算子 $\mathscr{W}(f_1,\dots,f_k)$，其阶数分别为 $k-1$（参数个数各不相同），并作用于元组 $f_1,\dots,f_n$ 中的前 k 个函数。

用 D_k 表示一阶微分算子（写成由两个零阶函数乘法算子

组成的“乘法”形式，中间夹着导子）

$$D_k = \frac{W_k}{W_{k-1}k} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{W_{k-1}}{W_k},$$

它们在某种意义上是通过乘以分数 $\frac{W_{k-1}}{W_k}$ 的算子与标准导子共轭的导子（我们约定 $W_0 \equiv 1$）。

引理 26（G. P´olya [P´ol22]）。函数 f_1、……、f_n 满足由以下复合给出的 n 阶微分方程

$$D_n D_{n-1} \cdots D_2 D_1 y = 0.$$

如果所有朗斯基行列式都不为零，则函数系 $\{f_i\}_1^n$ 是非振荡的（切比雪夫），这可由经典的罗尔定理推出，因为乘以一个处处非零的函数不会改变零点的个数。当允许朗斯基行列式有零点时，就必须使用 Voorhoeve 指数的三角不等式。这会增大上界，但所得结果仍几乎是最优的。

注 27. 用已知的 n 个线性无关解 $f_1(t)$ ……、$f_n(t)$ 显式写出一个 n 阶线性微分算子并不困难。黎曼解法是写出由 $n+1$ 个函数 f_1、……、f_n、y 以及一个未知函数 y 构成的朗斯基矩阵，

$$Ly = 0, \qquad L = \mathscr{W}(f_1, \dots, f_n, y)$$

并将其按最后一列的元素展开。令这个和等于零，就得到一个涉及 y、y'、……、$y^{(n)}$ 的线性常微分方程，其系数为朗斯基矩阵的子式。众所周知，对于解析函数，该方程成立当且仅当 y、f, ……、f_n 线性相关，也就是说，y 是 f_1、……、f_n 的线性组合。

黎曼公式给出了相应方程的展开形式，但显然与元组 f_1、……、n 中各元素的排列顺序无关。相反，引理 26 中构造的微分算子是若干一阶算子的复合（这是一种非交换类比，对应于将多项式表示为与其根相对应的线性形式的乘积）。检查最高阶项的系数可知，$L = D_n D_{n-1} \cdots D_1$。这种“乘法式”表示法使方程更容易求解，这一点并不令人意外。

当然，通过反复应用莱布尼茨法则，P´olya 形式可以转换为黎曼形式（从而得到韦达公式的非交换版本）。但一般来说，P´olya 形式（算子 D_k 的系数） *depends explicitly* 取决于元组的排列顺序，因为分解并不唯一。比如，考虑函数 $1, t, t^2, \dots, t^{n-1}$ 的例子，它们将产生显然的黎曼方程 $y^{(n)} = 0$；再将其与为一个经过置换的元组计算出的 P´olya 形式进行比较。

The idea of the proof of Theorem 23. 考虑由其坐标函数 $x_i = f_i(t)$ $\Gamma = \Gamma_n$ 参数化的 n-空间曲线 $\Gamma = \Gamma_n$。其密切标架由向量 $\mathbf{v}_1 = \dot{x}$、$\mathbf{v}_2 = \ddot{x} \cdots$、$\mathbf{v}_n = \mathrm{d}^n x / \mathrm{d}t^{n-1}$ 构成。对该标架进行正交化，即得到由上面的弗雷内方程支配的弗雷内标架 $\mathbf{e}_1(t)$……、$\mathbf{e}_n(t)$。注意，向量 $\mathbf{v}_i$ 按照相应导数的阶数自然排序。记 V_k 为前 k 个向量的格拉姆–施密特行列式，$V_k(t) = \det{}^{1/2} \left\| \langle \mathbf{v}_i(t), \mathbf{v}_j(t) \rangle \right\|_{i,\, j=1}^{k}$。不难验证

$$\varkappa_k(t) = \frac{V_{k-1}(t) V_{k+1}(t)}{V_k^2(t) V_1(t)}, \qquad k = 1, \dots, n-1 \text{ (for } k = 1 \text{ we assume } V_0 \equiv 1).$$

应用 P´olya 公式可以根据 $\varkappa_1$、.....、 $\varkappa_{n-1}$ 在 $[0,t]$上的零点数，得到交点数，而后者是未知的。但是，可以应用布丰投针原理：该原理通过曲线在 k-空间中到一个“随机”超平面的平均交点数，表示该曲线在球面 $\mathbb{S}^{k-1}\subset\mathbb{R}^k$上的球面投影长度。这使我们能够将曲线 Γ_n 在一个 *“random”*完全旗 $F=\{L_1\subset L_2\subset\cdots\subset L_{n-1}\subset\mathbb{R}^n\}$ 的子空间上的投影 $\Gamma_1(F)$.....、$\Gamma_{n-1}(F)$与相应曲率的线性组合联系起来，从而给出与$average$投影的交点数的上界。最终情形 Γ_1 不过就是经典的罗尔引理（ $\varkappa_{n-1}$ 的零点数可以根据其导数的根数给出上界）。

只需注意，总能在 $\mathbb{R}^n$ 中找到一个标旗，使得交点数不超过在所有标旗上取平均后的值。应当用这个标旗替代由初始坐标 x_1、.....、 x_n 生成的标旗，即将它们替换为线性组合 $\widetilde{x}_1$、.....、 $\widetilde{x}_n$，这样相应的曲率 $\widetilde{\varkappa}_k(t)$的零点数就不会超过初始积分曲率之和 K_k。□

3. 复零点计数

3.1. Kim 定理。将命题10推广到复数情形，最简单、最直接的方法是对实数情形的证明稍作修改。

假设 U 是直径为 $\ell>0$ 的凸域，且 f 是定义在 U 上、在$\overline{U}$ 上连续的全纯函数（为简单起见，假设∂U 是分段光滑的）。

引理 28. 若 f在 U中有 n 个孤立零点，则对所有 $k=0$、1、.....、 $n-1$，不等式 $\|f_{(n-k)}\|\leqslant\|f^{(n)}\|\cdot\frac{\ell^k}{k}!$ 成立。

The idea of the proof. 已知 n 阶导数后，便可利用迭代积分，并借助形式算子恒等式，唯一地从函数的零点 a_1、.....、 a_n 恢复该函数

$$\partial^n=\big((z-a_n)\partial+n\big)\cdots\big((z-a_1)\partial+1\big).\frac{1}{(z-a_n)\cdots(z-a_1)}$$

□

该引理立即推出复数域非振荡结果（与实情形完全相同）。

定理 29（W. J. Kim [Kim69]）。考虑如下形式的线性常微分方程

$$y^{(n)}+a_1(t)\,y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(t)\,y'+a_n(t)\,y=0,\qquad t\in U\Subset\mathbb{C}\qquad(14)$$

在一个有界凸复域 U 中，该区域的直径为 ℓ，系数 a_i（z）在 U 内全纯且有界， $\|a_k$（z）$\|\leqslant A_k<\infty$，参见实情形中的对应结果（1）。

若区域 U 足够小，使得不等式（2）成立，则方程（14）的任意解在 U 中至多有 $n-1$ 个孤立零点。□

与实情形一样，任何较大的区域都可以细分为较小的区域，从而为有界系数方程的解的零点个数给出明确的上界。然而，奇点的出现使这种细分变得非常棘手，因此需要采用其他工具。

3.2. 詹森不等式。全纯函数的辩值原理意味着，在一个区域内有许多零点的函数，其辐角在边界上应当快速旋转。由于辐角与模的对数（根以外）互为调和共轭，因此可以预期，解析函数的增长率与其零点个数之间也存在类似的联系。

这一原理最简单的形式体现在詹森公式中。假设函数 f 在闭单位圆盘 $\overline{\mathbb{D}}$ 上全纯，即 $f \in \mathscr{O}(\overline{\mathbb{D}})$，特别是，它在边界 $\mathbb{S} = \partial\mathbb{D}$ 上连续，且 $f(0) \neq 0$。那么

$$\ln|f(0)| = \sum \ln|z_i| + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{S}_1} \ln|f(z)|\,|\mathrm{d}z|, \tag{15}$$

其中求和遍及 f 在 $\mathbb{D}$中的所有孤立根。若记 $m = |f(0)|$, $M = \max_{\mathbb{S}}|f(z)|$, 则可得不等式

$$\sum_{f(z_i)=0} -\ln|z_i| \leqslant \ln\frac{M}{m}, \tag{16}$$

也就是说， f 在 $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ 中的根 z_i 以正权重$-\ln|z_i|$ 计数后的总和，不超过 f从中心到 $\mathbb{D}$边界的增长率。这使我们能够计算 f 在任意较小圆盘（$1-\varepsilon$）$\mathbb{D}$, $0 < \varepsilon < 1$中的零点个数（不加权）。或者说，这个不等式构成了 Nevanlinna理论的基石，它将整函数零点的分布与其在不断扩大的同心圆盘 $r\mathbb{D}$上的最大模所衡量的增长联系起来。下文中，对于在有界开集 $U \subset \mathbb{C}$ 的闭包上解析的函数 f，且 $K \Subset U$，我们记

$$M_K(f) = \max_{z\in K}|(f)|, \qquad \text{and} \quad M_U(f) = M_{\overline{U}}(f).$$

那么（16）意味着

$$N_{\frac{1}{2}R\mathbb{D}}(f) \leqslant \ln 2 \cdot \ln\frac{M_{R\mathbb{D}}(f)}{M_{\frac{1}{2}R\mathbb{D}}(f)}.$$

然而，对于具有奇点的函数，我们需要形状更复杂的区域。

3.3. 伯恩斯坦指标。从现在起（主要是为了简便），我们只考虑复平面中相对规整的子集，即曲线多边形（CP-多边形）：边界分段解析的有界单连通开区域。若 $\overline{K} \Subset U$，则两个 CP-多边形K 和 U之间的间隙定义为

$$\mathrm{gap}(K,U) = \max_{\varepsilon>0}\{\varepsilon : K + \varepsilon\mathbb{D} \subseteq U\}, \tag{17}$$

为正。此外，对于这样的嵌套对（和三元组），我们只考虑在 $\overline{U}$ 上全纯的函数，从而避免任何潜在的边界行为问题。

3.3.1. 关于量词的顺序：如何理解下列不等式。在 Nevanlinna理论中，通常的设定如下：给定一个整函数f，随后研究其孤立根在大圆盘中的分布（当其半径 R 趋于无穷时），重点关注对 R 的渐近依赖，而允许常数依赖于 f。

下面我们部分地反转设定。我们考虑彼此适当嵌套的 CP-多边形 $K \Subset U$，并为每一对定义一个或多个泛函，这些泛函作用于在 U 上全纯且在 $\overline{U}$ 上连续的函数空间。最大模函数 $M_K(U)$ 和 $M_U(f)$ 是典型例子：它们是一阶齐次（非线性）泛函，而它们的比值 $M_R(f)/M_K(f)$ 是零阶齐次的（对于任意 $\lambda \neq 0$， f 和 λf 也同样如此）。

下面的结果旨在给出 $|f(z)|$ 的逐点上界，这些上界以这些泛函表示，并且在所有子集或其相当大部分上均成立。

3.3.2. 伯恩斯坦指标的定义。根据黎曼一致化定理，若 $K \Subset U \subsetneq \mathbb{C},$，则单连通区域 U 可以赋予双曲度量，且 K 在此度量下的直径有限。于是，詹森不等式推出以下结论。

定理 30. 存在一个正的有限常数 $\beta = \beta_{K,\,U}$ 它仅取决于 K 在 U 中的双曲直径，并具有以下性质。

对于任意在 U 中全纯且在 $\overline{U}$ 中连续的函数 $f \neq 0$，其在 K中的（必然是孤立的）零点数不超过 $\beta \ln \frac{M_U(f)}{M_K(f)} \geqslant 0$。

定义 31. 对于上述一对集合 $K \Subset U$，函数的伯恩斯坦指标定义为以下比值

$$B = B_{K,U}(f) = \ln \frac{M_U(f)}{M_K(f)} \geqslant 0. \tag{18}$$

最大模原理蕴含， $B(f) = 0$ 当且仅当 f是一个（非零）常数。

注 32. “伯恩斯坦指标”这一术语由 [IY96] 提出，这是因为经典的伯恩斯坦不等式：若 $K = [-1, 1]$ 且 $U_R = \{|z-1|+|z+1| \leqslant 2R\}$ 是以 ± 1 为焦点、半径为 $R > 0$的椭圆，则对于任意次数为 n 的多项式p，不等式 $B_{K,\,U_R}(p) \leqslant n \ln R$ 成立，且该上界是锐的。

常数 $\beta_{K,U}$ 是显式的，在简单情况下可以轻松求得其上界。詹森公式为一对同心圆盘提供了一个显式上界：特别是，若 $U = \mathbb{D}$ 是单位圆盘，K_ε 是半径为 $1 - \varepsilon < 1$ 的同心圆盘（因此间隙为 ε），则 $\beta_{K_\varepsilon,U} \sim O(1/\varepsilon^2)$。若 K 是长度为 $|K|$ 的实线段， $U_\varepsilon = K + \varepsilon\mathbb{D}$ 是其复数ε-邻域（“体育场形域”），则 $\beta_{K,U_\varepsilon} \sim \exp O(|K|/\varepsilon)$，参见 [IY96]。

下文中，我们将伯恩斯坦指标视为定义在具有适当定义区域的非零有界解析函数上的（非线性）泛函。这个泛函记作$B_{K,\,U}$，是零次齐次的，并且关于 K 和 U单调变化：如果 $K' \subseteq K \Subset U \subseteq U'$（回想一下，我们讨论的是

仅限于温和的 CP-多边形），那么根据最大模原理

$$B_{K',U} \geqslant B_{K,U} \geqslant B_{K,U'}. \tag{19}$$

注 33。本节讨论的不等式并不难证明，只需用到两个关键结果。其一是 Cartan不等式，它指出，单个复变量上的 $monic$多项式 $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{C}[z]$ 在远离其零点集（即与其零点集保持一定距离）时，不可能处处都很小，参见 [Car28,Lub97]。另一项是 Harnack不等式，它给出了开单位圆盘 $U = \mathbb{D}$内函数 u, $harmonic\ and\ positive$ 的上界和下界，二者均取决于该函数到边界圆的距离，参见 [Eva98]:

$$\frac{1-|z|}{1+|z|}u(0) \leqslant u(z) \leqslant \frac{1+|z|}{1-|z|}u(0), \qquad |z| < 1.$$

将此方程应用于单位圆盘内无零点的全纯函数的绝对值 $\log|f(z)|$，即可为任意紧集 $K \Subset U$ 上的 $\max_{z\in K}|f(z)|$ 给出一个显式下界。

将这两个结果与 §3.2 中关于孤立零点个数的詹森不等式结合起来，即可为所有 $K \Subset U$ 和所有全纯函数 $f \in \mathscr{O}(U)$ 给出 $M_K(f)$ 的下界。

3.4. 复值线性方程解的辩值变化。考虑线性方程 (1)，但这次假设其系数 $a_j(t)$ 是实变量 $t \in [0,\ell] \Subset \mathbb{R}$ 的复值（例如连续）函数。那么，该方程的非平凡解一般也取复值，并且完全不会有零点。

不过，我们可以改为计算这些解的Voorhove指数。事实证明，下面这个直接类比于de la Vall´ee–Poussin定理的结论成立，参见 [Yak99，定理 2.6]。

和之前一样，假设 $|a_k(t)| \leqslant A_k < +\infty$。

定理34（S. Yakovenko [Yak99], ，基于 G. Petrov [Pet90] 的一个想法）。假设方程 (1) 的复系数足够小，使得

$$\sum_{i=1}^{n} A_k \frac{\ell^k}{k!} < \frac{1}{2} \tag{20}$$

与 (2) 比较。则对于方程 (1) 的任意解 f，沿着 $[0,t]$ 的辩值变化满足以下不等式

$$|\operatorname{Arg} f(\ell) - \operatorname{Arg} f(0)| < (n+1)\pi.$$

证明的核心思路是以下观察，这与初等罗尔引理的精神十分相近。

命题 35. 如果任意连续复值函数 f 在某个连通区间上绕原点转过超过半转，那么该解的虚部和实部都必定在此区间内有零点。

那么，引理9中的不等式可以原样重复：如果一个解的旋转超过 $n+1$ 个半转，那么 f 的实部和虚部都必须至少有 n个零点，而式(20)不可能成立。□

3.5. 伯恩斯坦指标的罗尔定理与三角不等式。设$K' \Subset K \Subset U$为一组三个 CP-多边形，且 gap$(K', K) > 0$。

定理36. 存在一个有限的正数 $\rho = \rho(K', K, U)$，使得对于任意在 U 上解析的函数 f 及其导数 f'，

$$B(f) \leqslant B'(f') + \rho, \qquad \rho = \rho(K', K, U) < +\infty. \tag{21}$$

“Rolle缺陷” ρ 可以根据这三个集合之间的间隙显式计算。

The idea of the proof. 考虑包围 K' 且位于 U 内部的中间轮廓线 $\Gamma = \partial K$，并取任意满足 $M_K(f) = 1$ 的归一化函数 f。根据 Cauchy估计，我们可以得到 $M_{K'}(f')$ 的一个显式上界 *upper*。

另一方面，f 在 K 与 ∂U 之间的增长由 f 的梯度最大值所界定，也就是说，可用 $M_U(f')$ 表示。这意味着 $M_U(f')$ 存在一个以 $B_{K,\,U}(f)$ 表示的下界。结合这两个不等式即可证明该定理，准确的细节见 [NY97]。□

3.5.1. 在伪多项式中的应用。这使我们能够将定理21用于研究伪多项式的根，这类函数的形式为

$$p(z) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{e}^{\lambda z} p_\lambda(z), \qquad \Lambda \subset \mathbb{C}, \quad p_\lambda \in \mathbb{C}[z],$$

其中，Λ 是一个点集，称为 p的谱。如果 $\deg p_\lambda = n_\lambda > 0$，那么我们称 λ 是谱中一个重数为 n_λ 的点。Λ 中按重数计数的点的总数$|\Lambda|$ 称为伪多项式的次数。

对于每个次数为 n 的伪多项式，都可以通过归纳构造出一个由导子和乘以适当指数函数 $\mathrm{e}^{\mu z}$组成的复合运算，其中这些指数函数取决于 Λ，并将 p 变为非零常数。这种组合至多包含 $n-1$ 个导子 $\mathrm{d}\,\underline{\mathrm{d}z}$。指数函数 $\mathrm{e}^{\mu z}$ 的 Voorhoeve 指数可用 $|z|$ 和 U的直径给出一个上界；由三角不等式可得，对于任意有界凸域 U，$V_{\partial U}(p)$也有一个上界。

3.6. 幂级数的伯恩斯坦指标。伯恩斯坦指标还有另一种表现形式。设 $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$ 为单位圆盘。那么，任何在 $\overline{\mathbb{D}}$ 的某个邻域内全纯的函数$f \in \mathscr{O}(\overline{\mathbb{D}})$都可以展开为 Taylor级数

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z, \qquad |z| < 1, \quad \{a_k\}_{k=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}. \tag{22}$$

对于所有 $|z| \leqslant 1$，该级数都绝对收敛。

系数序列 $\{a_k\}$可以被视为一个函数

$$a\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{C}, \qquad k \mapsto a_k,$$

并称为 f的柯西变换 $\mathscr{C}f$。 $\mathbb{Z}_+$的紧子集是有限区间 $0 \leqslant k \leqslant \nu$，对于任意这样的 $\nu \in \mathbb{N}$，都可以比较有理数

$$\frac{\sup_{k\in\mathbb{Z}_+} |a_k|}{\max_{k\leqslant\nu} |a_k|} \leqslant +\infty, \tag{23}$$

参见（18），其中 $a = \mathscr{C}f$，而 U 的作用由 $\mathbb{Z}_+$承担。

定义37（Roytwarf–Yomdin [RfYo97]之后的伯恩斯坦类）。设$c \in \mathbb{R}_+$ 且 $\nu < +\infty$。具有参数 c、ν 的（第二）伯恩斯坦类，是满足以下条件的函数 $f \in \mathscr{O}(\mathbb{D})$ 的集合：

$$\frac{\sup_{k\in\mathbb{Z}_+} |a_k|}{\max_{k\leqslant\nu} |a_k|} \leqslant c.$$

非正式地说，第二伯恩斯坦类中的函数可以看作次数为 ν的多项式的扰动：当前 ν个泰勒系数为零时，该函数必须恒等于零。

注38。可以很容易地修改上述构造，使其适用于定义在圆盘 $R \cdot \mathbb{D}$的闭包的某个邻域 $R > 0$中的函数。此时，应将所有系数的绝对值替换为 $|a_k|R^k$。

定理39（等价定理， [RfYo97]）。设 f 是具有参数 c、ν 和 $R = 1$的第二伯恩斯坦类中的函数。

那么，对于任意 $\alpha < \beta < 1$，伯恩斯坦指标 (18) $B_{K,\ U}(f)$ 关于 $U = \beta\mathbb{D}$ 和 $K = \overline{\alpha\mathbb{D}}$ 都可以用 c、ν 显式给出上界。

反过来，伯恩斯坦指标 $B_{\overline{\alpha\mathbb{D}},\ \beta\mathbb{D}}(f)$ 有限的函数属于第二伯恩斯坦类，其参数 c、ν 可以用 α、β 和伯恩斯坦指标显式给出上界。□

同样，不出所料，对于第二伯恩斯坦类中的函数，可以显式给出孤立根的数量上界。

命题40. 对于一个 f 属于第二伯恩斯坦类、参数为 c、ν 的函数，以及任意 $0 < \alpha < 1$，都可以给出 f 在 $\alpha\mathbb{D}$中的孤立根数量的显式上界。

反过来，可以给出半径 $\rho > 0$ 的显式下界（用 c 表示），使得 f 在圆盘 $\rho\mathbb{D}$中的孤立零点数量不超过 ν。□

这里应当指出，定义37中出现的“柯西变换的伯恩斯坦不等式”是研究泰勒系数满足递归方程的多项式微分方程的零点时非常方便的工具。我们不再详述，读者可参阅 Y. Yomdin、J.-P. Fran¸coise、M. Briskin、N. Roytwarf 等人的著作。等价定理39的另一种证明见 [Yak00]。

3.7. 差分算子的奇点与罗尔理论。本节简要说明，如何将上文介绍的零点计数技巧推广到奇点附近的齐次线性常微分方程的解。完整论述见 [Yak99]。

3.7.1. 福克斯奇点。具有形式 (14) 的首一微分方程，其系数 $a_j(t)$、 $j = 1$、. . .、 n 在 $U \Subset \mathbb{C}$ 上亚纯，当至少一个系数 a_j 有极点时，就有奇点（奇点）。一般而言，方程的解在奇点处分支（多值）；但除分支之外，解的性质还在很大程度上取决于系数 a_1、. . .、 a_n 的极点阶数。在较简单的情形下，即福克斯型或正则情形，解表现出与有限阶极点相似的性质，例如函数 t^λ 在原点处的情形。若处于相反的（野性）情形，解则表现得像形式为 $t^\lambda \exp(1/t)$ 的本性奇点。出于与皮卡理论类似的原因，在野性情形下，任何有意义的零点计数都毫无希望，因为在奇点的任意（去心）邻域中，几乎每个值都会被任意一个解无穷多次取到。

相反，福克斯型情形的显式解与非奇异情形的解非常接近。

为了明确写出福克斯条件，注意到齐次线性微分方程可以（i）用任意微分算子 $v(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ （其系数为亚纯函数 v ）重新展开，也可以（ii）乘以任意亚纯函数。假设奇点位于点 $t = 0 \in U$，引入欧拉算子 $\boldsymbol{\epsilon} = t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ ，然后将初始方程（14）乘以适当次幂的 t，使得所有系数都变为全纯，且不同时在 $t = 0$ 处为零。所得方程的形式为

$$Ly = 0, \qquad L = b_0(t)\boldsymbol{\epsilon}^n + b_1(t)\boldsymbol{\epsilon}^{n-1} + \cdots + b_n(t). \tag{24}$$

定义 41。若 $b_0(0) \neq 0$，则点 $t = 0$ 是福克斯型的；也就是说，上述算子 L 可以假设为首一且具有全纯系数， $L = \boldsymbol{\epsilon}^n + \sum_{j=1}^n b_j\boldsymbol{\epsilon}^{n-j}$ （“$\boldsymbol{\epsilon}$-非奇异”）。

例 42. 假设所有系数 $b_j \in \mathbb{C}$ 都是（复）常数。那么 (24) 就成为经典欧拉方程。其解是如下形式的伪单项式的线性组合： $t^\lambda \ln^k t$ （参见 §3.5.1），其中λ 是特征数，即特征多项式 $\lambda^n + \sum b_j\lambda^{n-j}$ 的根； k 是小于该根重数的整数，因此它们的总数恰好为 n。

如前所述，福克斯型条件等价于方程 (14) 的所有解在$t \to 0$ 时都呈温和增长，只要 $\arg t$ 保持有界（多值解的每个分支的增长速度都不超过某个有限的 C 次幂 $C|t|^{-N}$，其中 N）。

进一步假设，0 是 L 在 $\overline{\mathbb{D}}$中的唯一奇点（通过对 t进行重标度可以实现这一点）。

从几何上看，Fuchs方程的定义意味着，在对数图 $z = \ln t$ 中，方程具有如下形式

$$y^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} b_j(z)\, y^{(n-j)} = 0, \tag{25}$$

其中，导数是相对于新的自变量z 求取的，如上所述；系数 $b_j(z)$ 是 $2\pi\mathrm{i}$-周期的，并且当 $\operatorname{Re} z \to -\infty$ 时存在极限。

在这种情况下，（割开的）单位圆盘中的零点计数问题可化为计算半无限半条带 $\Pi \subseteq \mathbb{C}$ 中的零点，该条带由两条水平直线 $\operatorname{Im} z = \pm 2\pi$ 和竖直线段 $\operatorname{Re} z = 0$ 围成。

3.7.2. 无界域上的辩值原理：Petrov 差分算子及相关的罗尔理论。半无限条带 Π 可截取为有限矩形 Π_c，其左边界为竖直线段 $\operatorname{Re} z = -c$, $c \gg 0$: 如果该矩形的上界对 c 一致（即与之无关），那么这个上界也自然就是 Π 的上界。

若能对矩形的四条边上的任意解都给出辩值变化的显式上界，那么对 Π_c 应用辩值原理便可得到这样的上界。根据定理34，确实可以为两条竖直边给出这样的上界。事实上，两条线段的长度均有上界 4π；而在左半平面 $\operatorname{Re} z \leqslant 0$ 中，方程 (25) 的系数模一致地有某个显式常数作为上界。记 B 为这个（有限且显式的）上界

$$B = \sup |\operatorname{Arg} f(z + 2\pi\mathrm{i}) - \operatorname{Arg} f(z - 2\pi\mathrm{i})| \tag{26}$$

其中，上确界取遍方程 (25) 的所有解，以及左半平面内长度为 4π 的所有竖直线段 $[z - 2\pi\mathrm{i}\ \ z + 2\pi\mathrm{i}]$。

真正的问题在于沿着两条长水平线段的辩值变化

$$|\operatorname{Arg} f(\pm 2\pi\mathrm{i}) - \operatorname{Arg} f(-c \pm 2\pi\mathrm{i})|, \qquad c \gg 1. \tag{27}$$

由于这些线段的长度 c 无界，定理34并不适用。

将作用于左半平面 $\mathbb{H} = \{\operatorname{Re} z \leqslant 0\}$ 上全纯函数的算子记为 Δ；该算子按公式将辐角平移 $2\pi\mathrm{i}$

$$(\Delta f)(z) = f(z + 2\pi\mathrm{i}).$$

该算子保持方程 (25) 的系数不变，但在此方程的解集上构成一个非平凡的同构，称为单值化算子。利用 Δ，对任意复数 $\mu \in \mathbb{C}$，可以定义差分算子

$$P_\mu = \mu^{-1}\Delta - \mu\Delta^{-1}$$

该算子称为 Petrov 算子，见 [RY96], ，它最初在该文中引入；另见 [Yak99]。

该算子满足以下性质。

引理 43（差分算子的罗尔不等式）。若 μ 的模长为 1，即 $\bar{\mu} = \mu^{-1}$，且 f 是方程 (25) 的解，在 Π上全纯，在 $\mathbb{R}$ 上取实值，并具有有限显式上界 (26)。那么

$$N(f) \leqslant (2B+1) + N(P_\mu f), \tag{28}$$

其中，$N(f)$ 和 $N(P_\mu f)$ 分别是 f 和 $P_\mu f$ 在 Π 中的孤立零点数。

证明。用 Π_c 替换 Π，并将辩值原理应用于 f。

沿边界的辩值变化不超过 $2B$（两条竖直边的贡献）加上沿两条长水平线段的贡献（27）。但是，$\Delta^{-1} f = \overline{\Delta f}$ 和 $\bar{\mu} = \mu^{-1}$，因此在这些边上 $P_\mu f$ 等于 μf 在这些边上的虚部。于是，上界由下式给出

$$\#\{\operatorname{Im} f|_\gamma = 0\} \geqslant \frac{1}{\pi}\Delta_\gamma \operatorname{Arg} f - 1$$

对于任意曲线 $\gamma(t)$，这是命题 35 的直接推论。 □

3.7.3. 福克斯奇点的零点。引理 43 可以迭代应用。事实上，Fuchs 型方程（24）的单值化算子 Δ 是其解所构成的复线性 n-空间上的一个同构，其特征值为 $\mu_j = \exp 2\pi i\lambda_j$，其中 λ_j 是特征数，见例 42。相应根空间的维数小于或等于相应特征数的重数 ν_j。

从解析角度来看，这意味着方程 (24) 的解分别可以写成如下形式的有限和 (25),

$$f(t) = \sum_{j,k} t^{\mu_j} \ln^k t \cdot \varphi_{j,k}(t), \quad \text{resp.}, \quad f(z) = \sum_{j,k} z^k \exp(\lambda_j z) \cdot \varphi_{j,k}(e^t), \tag{29}$$

其中 $\varphi_{j,\,k}(t)$、$k \leqslant \nu_j - 1$ 在 $\overline{\mathbb{D}}$ 中全纯。交换的 Petrov 算子的复合

$$P = \prod_j P_j^{\nu_j}, \qquad P_j = P_{\mu_j}$$

会消去方程的所有解，因为每个因子都会消去相应的根空间，$Pf \equiv 0$ 以及 $N(Pf) = 0$。这立即推出以下结果。

定理 44. 对于圆盘 $\mathbb{D}$ 内任意一个不含其他奇点且仅具有实特征数的实 Fuchs 型方程 (24)，其解的孤立零点数可根据非主系数的相对大小明确给出上界

$$M = \max_j \max_{t\in\mathbb{D}} \frac{|b_j(t)|}{|b_0(t)|} < +\infty. \quad \square$$

3.8. 伪阿贝尔积分。伪阿贝尔积分是多项式 1-形式沿实椭圆族 $\gamma_t \subset \{H = t\}$ 的积分，其中 $H = H_1^{\lambda_1} \cdots H_n^{\lambda_n}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$ 是在 $\mathbb{R}^2$ 上具有适当 $H_i \in \mathbb{R}[x, y]$ 的 Darboux 可积多项式向量场的 Darboux 型第一积分。

上述论证给出了伪阿贝尔积分个数的局部一致上界。设 $\mathscr{D} = \mathscr{D}_{n、d_1 \ldots d_n、d}$ 是一个有限维空间

$$\{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n, H_1, \ldots, H_n, \omega), \lambda_i \in \mathbb{R}_+, \deg H_i \leqslant d_i, \deg \omega \leqslant d\}$$

的参数，用于定义伪阿贝尔积分 $I_\lambda(t) = \int_{\gamma_t} \omega$。

定理45. 对于一般的 $\lambda \in \mathscr{D}$，存在某个 $\delta > 0$，使得对于所有充分接近 λ 的 $\lambda' \in \mathscr{D}$， $I_{\lambda'}(t)$ 在 $(0, \delta)$ 中的零点个数都一致地被某个常数$c = c(\lambda)$所界定。

注意，伪阿贝尔积分不满足任何线性常微分方程。不过，上述方法仍然适用，并能给出一个非有效但一致的上界。详情见 [Nov09, BoM08]。

证明思路：伪阿贝尔积分 $I(t)$ 在原点 $t = 0$ 处有一个分支点，对应于一条可约代数曲线，并具有一个收敛表示，该表示关于参数λ_i 和 H_i的系数解析地依赖：

$$I(t) = \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{p,q \geqslant 0} a_{prij} \ell_{pqij} + \sum_{i=1}^{n} f_i(t^{1/\lambda_i}), \tag{30}$$

其中

$$\ell_{pqij}(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{p/\lambda_i} - t^{q/\lambda_j}}{p/\lambda_i - q/\lambda_j}, & \text{if } p/\lambda_i \neq q/\lambda_j, \\ t^{p/\lambda_i} \log t & \text{otherwise} \end{cases} \tag{31}$$

是广义 Roussarie-Ecalle 补偿子，参见 [Rou86]。注意，将上述双重求和中的相似项合并到

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{f}_i(t^{1/\lambda_i}) + \sum_{i=1}^{n} \hat{g}_i(t^{1/\lambda_i} \log t),$$

其结果是 $I(t)$ 的一个渐近级数，其中形式 Laurent 幂级数 f_i、g_i 通常发散，这是由于式 (31) 中不可避免地存在小分母。

将引理 43 应用于 $I(t^{\lambda_1})$，我们便将求 $I(t)$ 在原点附近零点数上界的问题，化归为求 $PI(t^{\lambda_1})$ 的零点数上界，其中 $P = P_{1/\lambda_1}$是相应的 Petrov 算子。函数 PI 具有与（30）类似的表示式，只是将 n 替换为 $n - 1$（事实上， [BoM08] 的拓扑论证表明， $PI(t^{\lambda_1})$ 也是沿着组合上更简单的闭路、具有相同形式的伪阿贝尔积分）。依次应用适当的 Petrov 算子 n 次，我们得到一个

关于参数局部一致的上界，用于估计 $I(t)$ 在原点附近的零点数，其中 H_i 为一般集合。

这一结果使人们对推广 Varchenko-Khovanskii 关于伪阿贝尔积分的有限性定理抱有希望（即对整个 $\mathcal{D}$ 给出一致上界），而且对于 $\mathscr{D}$ 中余维一的一般情形，局部有界性也得到了进一步证明，参见 [BoMN09、BoMN13]。

4. 许多（复）维数

讨论多（复）维数中的交理论时，我们需要区分三类通常具有以下形式的结果。在 $\mathbb{C}^n$ 中，或在以各种方式定义的开区域 $U \subset \mathbb{C}^n$ 中，有数量为 Γ^1、Γ^2.....的子簇：它们可以是代数子簇、有理庞加莱方程组的积分曲面、彼此对易的有理向量场的公共积分流形等；可以假设它们是光滑的，也可以允许存在奇点；它们还属于自然参数化的族。例如，由方程 $F(x) = 0$ 定义的超曲面 $\Gamma = \Gamma_0$，自然嵌入于由水平集 $\varepsilon \in (\mathbb{C}, 0)$ 构成的族 $\Gamma_\varepsilon = \{F(x) = \varepsilon\}$ 中。类似地，积分子簇可通过其与适当的互补维数横截流形的交点自然参数化，因为它们是相应叶状结构的叶片。为简化表述，我们将它们称为邻近子簇。

我们通常假设，簇 Γ^k 的余维数之和等于数值 n，即环境空间的维数，因此一般而言，交集 $\bigcap \Gamma^k$ 将是零维的，并由可供计数的孤立点组成。

这些交点在逐渐增大的“区域”中的位置，可能会限制计数结果。

(1) 无穷小方面：假设某个点（例如 $\mathbb{C}^n$ 中的原点）是子簇 Γ_0^k 的一个孤立交点，那么该交点在给定点处的最大重数是多少？显式答案 $\mu < +\infty$ 意味着，对于原点的任意充分小邻域 U，所有足够邻近的子簇 $\Gamma_{\varepsilon_k}^k$ 在 U 中的交点数都不超过 μ，其中 ε_k、$k = 1$、2、..... 均充分小。(2) 一般理论只断言这类小邻域 U 的存在性。一个显式的无穷小问题是：给出半径 $R > 0$ 的显式下界，使得球 $\{|x| < R\}$ 中至多包含邻近子簇之间的 μ 个孤立交点。

(3) 原始交集 $\bigcap \Gamma_0^k$可能并非孤立的（具有重数 $\mu = +\infty$）。然而，根据萨德定理，大多数扰动后的子簇 $\Gamma_{\varepsilon_k}^k$ 预计会以孤立点相交（至少对于足够一般的参数族而言）。因此，可以提出一个局部计数问题：在足够小的邻域内，计算邻近子簇的孤立交点数目

U 原点。与之前一样，可以区分存在性局部计数问题和构造性局部计数问题。

（4）求解一个构造性的局部计数问题，可以通过用大小有下界的邻域覆盖 K ，计算任意已知大小的紧子集 $K \subseteq \mathbb{C}^n$ 中的交点数的半全局界。然而，空间 $\mathbb{C}^n$ 并非紧致。询问孤立交点总数的上界，就是全局计数问题。

例46。定理11为在 $\mathbb{R}^n$ 中的多项式向量场 v 的轨线与代数超曲面 Π之间交点计数的局部问题（因而也包括半全局问题）提供了解。它给出了有界大小 R 的积分曲线（在（t， x）时空中）与 Π 之间孤立交点数的显式上界；对于自治向量场，这意味着可以用到奇异轨迹 Sing(v) $=\{x$ 的距离来表示答案： $v(x) = 0\} \subset \mathbb{R}^n$ ，即使某些积分曲线完全位于 Π上也是如此。

然而，这个上界并非全局性的：随着大小$R \to +\infty$ 无限增大，上界也会趋于无穷。

本节从重数的上界谈起，即 Gabri`elov 和 Khovanskii 给出的上界。该上界将定理11所蕴含的双指数界改进为单指数界，并强调了次数与维数所起作用的差异。

4.1. 无穷小版本：重数计数。本节研究如何将罗尔型技巧推广到多维情形中的局部情形（即针对局部环进行调整的情形）。

4.1.1. 单变量映射的重数。让我们暂时回到§1.1的框架，不过为简单起见，考虑在单位圆盘 $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$ 内定义、并在其边界上连续的单变量全纯函数 z 。默认情况下，我们只考虑在 $\mathbb{D}$上不恒等于零的函数。

$0 \not\equiv f \in \mathscr{O}(D)$在 $z = 0$ 处的重数 $\mathrm{mult}_0 f$ 可以通过几种方式定义。首先，如果 $\mathrm{mult}_0 f$ 等于某个有限自然数 $k \geqslant 1$，我们可以说：

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(k-1)}(0) = 0, \qquad f^{(k)}(0) \neq 0. \tag{32}$$

这提供了一种简便的方法来计算 $\mathrm{mult}_0 f$ ：对 f 作用多个微分算子，并检查它们是否都在点 $z = 0$处取零。

备注 47（术语说明）。根的重数与*order of tangency*密切相关：重数为 $k \geqslant 1$ 的根对应于函数 f 的图像与 z轴在 $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$中的 $k-1$ 阶相切。单根对应于横截相交，并按惯例对应于零阶相切。

重数的几何定义如下：将 $f(z)$ 替换为 $f(z) - \varepsilon$，其中 ε 是一个非常小的复数。假设所有根

$f-\varepsilon$ 在原点附近的根都是单根。那么 $\mathrm{mult}_0 f$ 等于这类根的数量[4]。

最后，重数的代数定义是用原点处全纯芽 $\mathscr{O}(\mathbb{C},0)$ 所构成的环（一个 $\mathbb{C}$-代数）来给出的。任意函数 f 定义了主理想 $I=I_f=\langle f\rangle = f\cdot\mathscr{O}(\mathbb{C},0)\subset\mathscr{O}(\mathbb{C},0)$，它具有有限余维 k（商局部代数的维数），

$$k=\dim_{\mathbb{C}}\mathscr{O}(\mathbb{C},0)/I_f<+\infty$$

当且仅当 f 在原点有一个孤立根（即在一维情形下不恒等于零）。

显然，只需检查便可看出，这三个定义等价，并给出相同的答案：$\mathrm{mult}_0 f=\mathrm{ord}_0 f$，其中阶数 $\mathrm{ord}_0 f$ 是泰勒展开中第一个非零系数的序号

$$f(z)=a_0+a_1x+a_2z^2+\cdots+a_kz^k+\cdots.$$

应将重数理解为碰撞或合并后在原点形成一个退化重根的小单根的个数。下面的断言显而易见。

命题 48。$\mathrm{mult}_0 f\leqslant \mathrm{mult}_0 f'+1$.

这完全体现了命题 4 中罗尔不等式的精神。与“真正的”罗尔不等式一样，这里也可能是严格不等式。

推论 49. 若 $\mathrm{mult}_0 f\leqslant k$，那么对 f 的任意小扰动，在原点附近都不能有超过 k 个单根。

这一质性表述（需要恰当安排量词，见前面的脚注）可以完全明确地定量化。若函数 $f\in\mathscr{O}(\overline{D})$ 在足够小的圆盘δD内有超过 k 个零点，那么它的第 k 阶导数必定非常小。

为了表述在重标度 $f\mapsto\lambda f$, $0\neq\lambda\in\mathbb{C}$ 下保持不变的上界，我们将施加一个归一化条件，例如：

$$\|f\|_D=\max_{z\in D}|f(z)|=1. \tag{33}$$

定理 50 ([BN15]). 若 f 按 (33) 归一化，且其第 k 阶导数 $|f^{(k)}(0)|=s>0$ 非零，那么它在半径为某个与 s 成正比的 $r>0$ 的圆盘 rD 中至多有 k 个孤立零点：$r\geqslant\delta_k s$，其中常数 $\delta_k>0$ 是明确的，且仅取决于 k，与函数 f 或任何其他参数无关。

在这些零点之外，该函数满足一个关于$|f(z)|>0$的显式下界。

[4]准确地说，首先要选取一个小圆盘 δD，其半径为 $\delta>0$，且其中不含 f的任何非零根；特别是，$|f|$ 在边界 $\{|z|=\delta\}$上有某个下界 $s>0$。然后，我们可以任选一个足够小的 f 值 ε，使得 $|\varepsilon|<s$，并计算 $f-\varepsilon$ 在 δD中的根的个数。Rouch´e 定理保证了这一过程的一致性。

这一结果的证明基于复分析和调和分析中的经典估计，尤其是詹森不等式，见§3.2；其证明与定理39相当类似。最后一个断言可以用自然参数（到零点的距离等）来精确表述。重要的是，该上界对 f 的依赖仅通过 s 和 k体现。

4.1.2. 诺特乘数：孤立情形。 [GK98] 中提出的技巧可用于证明定理 16 的多维类比。为表述该定理，我们引入诺特函数类。

首先回顾重数的定义。我们考虑全纯芽

$$F = (f_1, \dots, f_n) : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0), \quad f_i \in \mathscr{O}(\mathbb{C}^n, 0)$$
$$(z_1, \dots, z_n) = z \longmapsto F(z) = \big(f_1(z), \dots, f_n(z)\big).$$

对于这类芽，重数的概念是在奇点理论的背景下发展起来的 [AGV]。

定义 51。

$$\operatorname{mult}_0 F = \operatorname{codim} \langle F \rangle = \dim_{\mathbb{C}} \mathscr{O}(\mathbb{C}^n, 0) / \langle f_1, \dots, f_n \rangle \leqslant \infty$$

当且仅当 $F^{-1}(0) = \{0\}$ 是孤立的时，它才是有限的。

按这种方式定义，重数等于原像的个数 $F^{-1}(w)$，其中 w 是充分接近原点 $w = 0$ 的 F 的任意正则（非临界）值。注意，阶

$$\operatorname{ord} F = \min_i \operatorname{ord} f_i, \qquad i = 1, \dots, n,$$

虽然定义良好，但不再等于 $n > 1$ 的 $\operatorname{mult}_0 F$（例如，当 $f_i(z) = z_i^k$, $i = 1, \dots, n$ 时）。

定义 52. 全纯芽环的子环 $\mathscr{N} \subset \mathscr{O}(\mathbb{C}^n, 0)$ 称为诺特函数环（简称诺特环），如果它包含来自 $\mathbb{C}[x] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ 的所有多项式的芽，在所有偏导数 $\partial/\partial x_j$ 下封闭，并且存在一个由有限个芽组成的元组 $\psi_1, \dots, \psi_m \in \mathscr{N}$，使得它们在 $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ 上生成 $\mathscr{N}$。

后一个条件意味着 $\mathscr{N} = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, \psi_1, \dots, \psi_m]$，其中

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} = P_{ij}(x, \psi) \in \mathbb{C}[x, \psi] \qquad \forall i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m. \tag{34}$$

维数 n, m 和次数 $\delta = \max \deg P_{ij}$ 是任意诺特环的自然特征：为强调这一点，我们将使用记号$\mathscr{N} = \mathscr{N}_{n,\ m;\delta}$。函数组 ψ 将称为诺特链。

任何诺特环都自然带有过滤结构：对于任意 $\varphi = Q(x, \psi) \in \mathscr{N}$，其次数 $d = \deg_{x,\ \psi} Q$ 都有明确的定义（其中可能存在代数依赖，因此应考虑最小次数的表示）。

事实证明，诺特环具有类似 B´ezout 的性质：任意孤立交点的重数都有明确的上界。回顾一下，原始的 B´ezout 定理指出，次数为 $\leqslant d$ 、位于 $\mathbb{C}^n$ 中的多项式方程组的一个孤立解，其重数不超过 d^n；该上界关于次数是多项式级的，关于维数则是指数级的。

定理53（A. Gabri`elov 和 A. Khovanskii, [GK98]）。若 $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathscr{N}_{n,\ m;\delta} \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{C}^n, 0)$ 是来自诺特环的芽，且完全交集 X_0,

$$\varphi_1(x) = 0,\ \dots,\ \varphi_n(x) = 0, \qquad x \in (\mathbb{C}^n, 0),$$

是孤立的，即在 $\mathbb{C}^n$,0) 中为原点，则该交集的重数$\mu = \mathrm{mult}_0\, \varphi < +\infty$ 可以用诺特环的参数 n, m, δ 以及最大次数 $d = \max_i \deg \varphi_i$ 显式给出上界。此上界关于次数 d 和 δ 是多项式的，关于 n, m 则是简单指数的。

注释54。在定理53的假设下，所有形如 X_ε 的交集

$$\varphi_1(x) = \varepsilon_1,\ \dots,\ \varphi_n(x) = \varepsilon_n, \qquad x \in U,\ \varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in (\mathbb{C}^n, 0),$$

在原点的充分小邻域 U 内也都是孤立点，其数量 $\#X_\varepsilon$ 不超过 μ ，这是由重数的定义得出的。

定理53无法做到的是：当原始交集 X_0 是非孤立的时，给出一个上界。

4.1.3. 多维情形中的重数算子。第4.1.1节的结果，尤其是定理 50，如何推广到多元函数的情形?

多维情形所缺少的是：像（32）中那样，通过微分算子描述具有给定有限重数 k 的芽的零点。这正是我们现在要弥补的空缺，方法遵循 [BN15]。

基本观察是，重数不超过 k 阶这一性质仅取决于 F 的不超过 k 阶的泰勒项，并且这种依赖关系是代数性的（即由 F 的 $\leqslant k$ 阶泰勒系数所满足的若干多项式等式表示），也就是说，它是喷射空间 $J = J_k$ 中的一个代数集。在一维情形中，这一点完全显然：如果 $f(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_k z^k + \dots$ 且 $c_k \neq 0$（保证 $\mathrm{mult}_0\, f \leqslant k$ 的代数恒等式），那么任何更高阶项都无法改变这一事实。

更准确地说，上述内容意味着，条件 $\mathrm{mult}_0 \langle f_1, \dots, f_n \rangle \leqslant k$等价于映射满足以下条件:

$$E\colon J^n \to J, \quad E(a_1, \dots, a_n) = j^k\left(\sum a_i f_i\right)$$

余秩至多为 k。选取 J 的标准单项式基后，这相当于检查一个矩阵中是否存在不为零的、大小为 $\dim J - k$ 的子式；该矩阵的元素是 f_i 的泰勒系数。

由于 f_i 的泰勒系数（相差一个常数因子）就是在 0 处取值的 f_i 的偏导数，这些子式等于 $M_\beta^{(k)}F(0)$，其中 β 是相应子式的多重指标，而 $M_\beta^{(k)}F$ 是一些作用于元组 $F=(f_1,\dots,f_n)$ 上的通用齐次多项式微分算子，其次数为 $\dim J-k$，阶数为$\leqslant k$。

这就证明了以下结果。

定理 55。 [BN15]

$$\operatorname{mult}_0 F>k \iff M_\beta^{(k)}F(0)=0 \quad \forall \beta\in B, \tag{35}$$

其中，$M_\beta^{(k)}$ 是阶为 $\leqslant k$、由有限集 B索引的微分算子。

算子 $M_\beta^{(k)}$（或整个算子集合 $M_B^{(k)}$）称为重数算子。它们推广了以下算子集合

$$1,\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x},\tfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2},\dots,\tfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}$$

对于单变量 $x=z_1$ 且 $n=1$ 的情形（参见（32））。

4.1.4. 下界。关键在于，上述关系可以量化：$M_\beta^{(k)}F$ 的取值既能给出到满足 $\operatorname{mult}_0 F>k$ 的参数集合的“距离”下界，也能控制零点集的几何学，这与单变量情形下的定理 50 完全类似。重数算子的构造无法为 $M_B^{(k)}$ 写出如此简单的公式，但足够显式，可以据此推导出它们的一些性质。需要控制的是这些算子的阶数（至多为 k）。此外，这些算子的系数定义在 $\mathbb{Q}$ 上，其高度（表示为既约分数所需的最大自然数）可用 n 和 k 显式地给出上界。这是因为矩阵的子式是关于该矩阵元素的多项式，且具有高度有界的整数系数。

这足以为小（相对于 1 而言）多圆盘中的根的数量$\{F=0\}$ 给出显式上界，并在 z远离这些根时，为 $|F(z)|=\max_i|f_i(z)|$ 给出显式下界。在句法层面（量词的顺序以及仅依赖于 n、k 的常数所具有的普遍性），这些结果与定理 50 平行，但不等式的具体形式复杂得多。粗略地说，如果某个重数算子与零之间的距离至少为某个值 $s>0$，那么这些下界关于 s呈线性。

4.1.5. 重数算子的罗尔不等式。这个不等式（完全不足为奇）由重数算子的阶数至多为 k 这一事实得出，但其表述要求将函数 $f_i\in\mathscr{O}(\mathbb{C}^n,0)$ 限制在经过原点的任意（实）解析曲线上。

设 $\gamma\colon(\mathbb{R}_+,0)\to(\mathbb{C}^n,0)$ 是一个以（Hermitian）弧长 $t\geqslant 0$ 为参数的实解析（向量）函数。那么，对于任意函数 $g\in\mathscr{O}(\mathbb{C}^n,t)$，阶数 $\operatorname{ord}_\gamma g$ 定义为一个非负有理数，

$$\operatorname{ord}_\gamma g=\lim_{t\to 0^+}\frac{\log|f\big(\gamma(t)\big)|}{\log t}.$$

阶数是有理数，这源于一个众所周知的事实：γ 的坐标函数是关于 t 的收敛 Puiseux 级数，而阶数就是首项 Puiseux 指数。

这个阶数与重数之间的关系，可由以下简单观察得出。

命题 56. 若 $F=(f_1,\dots,f_n)$，且对所有 $i=1,\dots,n$，阶数均满足不等式 $\operatorname{ord}_\gamma f_i\geqslant k\in\mathbb{N}$，则 $\operatorname{mult}_0 F\geqslant k$。□

推论 57（重数算子的罗尔不等式）。对于上述任意一条经过原点的实解析曲线 γ，以及任意一个重数算子$M_{(k)}$，

$$\operatorname{ord}_\gamma M^{(k)}(F)\geqslant\min_{i=1,\dots,n}\{\operatorname{ord}_\gamma f_i\}-k.$$

上述性质给出了命题 48 关于余有限理想的直接类比：对于任意有限余维理想 $I\subset\mathscr{O}(\mathbb{C}^n,0)$

$$(\operatorname{mult} I)^{\frac{1}{n}}\leqslant(\operatorname{mult} M_{n,k}(I))^{\frac{1}{n}}+k,$$

其中 $M_{n,\,k}(I)$ 由 I 以及所有函数 $M^{(k)}(f_1,\dots,f_n)$ 生成，其中$M^{(k)}$ 是所有阶数为 k 和 $f_i\in I$的重数算子。

4.1.6. 对诺特函数的应用。重数算子的构造和性质不仅可用于计算 §4.1.2 中诺特芽的重数，还可用于计算受控大小的球内诺特芽的数量，参见注释 54。

注意，定义52几乎可以原样“去局部化”。区域 $U\subseteq\mathbb{C}^n$ 上的函数诺特环 $\mathscr{S}$ 是由有限元组 $\psi=(\psi_1,\dots,\psi_m)$、$\psi_i\in\mathscr{O}(U)$ 对环 $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ 作代数扩张得到的，这些函数满足微分方程组（52）。这些函数称为生成 $\mathscr{S}$ 的诺特链。

考虑诺特集的芽 $X\subset U$

$$X=\{x\in U:\varphi_1(x)=\dots=\varphi_{n-1}(x)=0\},$$
$$\varphi_i=P_i(x,\psi)\in\mathscr{S},\qquad i=1,\dots,n-1$$

在点 $p\in X$ 处，其中 $P_i(x,\psi)\in\mathbb{C}[x,\psi]$，次数为 $P_i\leqslant d$。

定义 58. 关于诺特函数 $\rho\in\mathscr{S}$，X 的变形重数（或亏缺度）是指 $\rho^{-1}(y)\cap X$ 中趋于 p 的孤立点数目（按重数计），其中 $y\to\rho(p)$。

定理 59（[BN15]）。对于任意具有参数 m、n、δ 的诺特系统，以及如上定义、满足 $\deg \varphi_i \leqslant d$ 且相对于任意 $\rho \in \mathscr{S}$、$\deg \rho \leqslant d$ 的诺特集 X，最大可能变形重数 $\mathscr{M}(m,n,\delta,d)$ 存在一个可计算的上界

$$\mathscr{M}(m,n,\delta,d) \leqslant (\max\{d,\delta\}(m+n))^{(m+n)^{O(n)}}.$$

Gabrielov [Gab95], 证明了上述结果关于 Pfaffian 函数的类似结论，这使他得以与 Vorobjov 合作开展一系列研究，建立 subPfaffian 集合复杂度的有效上界，详情见 [GV04]。[BV22] 对这些结果的改进，成为引入尖锐 o-极小集合的主要动机，参见 [BN22]。一种可能是，诺特集也存在相应的局部理论，而上述结果正是该理论的基石。

例 60. 设 $\rho = x_n$，也就是说，我们计算方程组变形后的孤立解的数量

$$\psi_1(x_1,\dots,x_{n-1},0) = \cdots = \psi_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-1},0) = 0$$

在 $\{x_n = 0\}$ 中。

如果 0 是该方程组的一个孤立解，那么根据定理53，其重数有一个上界。因此，该方程组的任意全纯扰动在 0 附近都只有孤立解，并且这些解的数量（按重数计）将等于这个重数。

如果 0 不是孤立解，那么总能找到一个全纯扰动，使其具有任意给定数量的孤立解，并且这些解收敛于 0。要求 $\psi_i(x_1,\dots,x_{n-1},x_n)$ 是具有给定复杂度的诺特函数，会限制扰动的类别，从而能够给出一个有意义的上界。

一个典型应用是诺特函数的 Lojasiewicz 型不等式（回顾一下，原始的 Lojasiewicz 不等式针对的是代数函数）：

推论 61. 设 f,g 是由同一个诺特链定义的、关于 n 个变量的次数为 d 的实诺特函数，$f(p) = 0$，并假设 $\{f = 0\} \subset \{g = 0\}$。则存在一个常数 k，

$$0 \leqslant k \leqslant \big(\max\{d,\delta\}(m+n)\big)^{(m+n)^{O(n)}}$$

使得 $|f| > |g|^k$ 在 p 附近成立。

为证明这一点，应考虑 g 的水平曲线与 p周围的一个小球的交集上，$|f|$ 的限制的临界值集合 $X = \{df \wedge dg = 0\}$。一个标准的辐角论证表明，该集合相对于 g 的亏缺度给出 k的上界，详情见 [BN15]。一般而言，p 不是 X 中的孤立点，因此定理53不适用。不过，定理 59适用，由此可得所需的上界。

Sketch of the proof. 诺特函数的一个等价定义如下：考虑由一组 m-元 1-形式定义的、余维为 m 的分布 Ψ，其定义在 $\mathbb{C}^{n+m}_{x,\psi}$ 上

$$\omega_i = d\psi_i - \sum_{j=1}^{n} P_{ij}(x,\psi)dx_j, \quad P_{ij} \in \mathbb{C}[x,\psi] \quad i = 1,\dots,m,$$

并令 Λ_p 为 Ψ 的一个 n 维积分曲面（即 $\omega_i|_{\Lambda_p} \equiv 0$），且经过点 $p \in \mathbb{C}^{n+m}_{x,\psi}$ X $\Lambda_p \cap \{P_1 = \cdots = P_{n-1} = 0\}$ $\rho = Q|_{\Lambda_p}$ $Q \in \mathbb{C}[x,\psi]$ 而对于某些 。于是，该集合自然地与交集 相对应，。

注意，对于 $n > 1$，Λ_p 的存在是一个非平凡条件，而其存在的必要条件由弗罗贝尼乌斯定理给出。显然，积分曲面本身并非代数的，但所有此类曲面的并集是一个代数子集 $A \subseteq \mathbb{C}^{n+m}$。

我们取 X 的所有分支的并集 $Y(P,Q)_p$，其中这些分支不是曲线（即维数更高），或位于 $\rho^{-1}(\rho(p))$ 内。这不是一个代数集，但并集 $Y(P,Q) = \cup_{q\in X} Y(P,Q)_q$ 也是代数的。事实上，这些是一些点 $q \in X$，在这些点处，Ψ 中包含 q 的积分曲面 Λ_q 与 $\{Q = P_1 = \cdots = P_{n-1} = 0\}$ 的交集并非孤立的。这等价于条件：该诺特交在 q 处的重数大于定理53的上界。后者等价于重数算子 $M^{(k)}_\beta(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1},\rho)$ 为零；这些算子等于某些多项式在 Λ_q 上的限制，这些多项式 $S^{(k)}_\beta$ 与 q 无关，因此 $Y(P,Q) = \cap\{S^{(k)}_\beta = 0\}$。

定理 59 的证明采用按维数归纳的方法，考察 $Y(P,Q)$ 的维数。在归纳的每一步中，我们将多项式 P_i 替换为次数更高的多项式 P_i'，使亏缺度不下降，同时集合 $Y(P,Q)$ 的维数降低。重数算子能够控制这些扰动的次数，而 $\dim Y(P,Q) = 0$ 的情形就是定理53。□

4.2. 多维局部版本：Binyamini 定理。定理11解决了多项式向量场的一维轨线与余维1代数超曲面之间交集的局部计数问题，在一定程度上可以推广到中间维数。相应的结果归功于 G. Binyamini [Bin22]。

考虑的不是一个，而是 m 个彼此交换的向量场 $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1,\dots,\xi_m)$，$1 < m < n$in $\mathbb{C}^n$，它们在 $\mathbb{C}^n$的一般点处线性无关。它们共同在 $\mathbb{C}^n$ 上定义了一个奇异叶状结构 $\mathscr{F}$，在奇异轨迹 $\Sigma_{\mathscr{F}}$之外，其叶片的维数为 m。每个经过非奇点 $p \in \mathbb{C}^n$ 的叶片 $\mathscr{L}_p$，都可以局部地通过双全纯映射 φ_p 进行参数化：$(\mathbb{C}^m, 0) \to (\mathscr{L}_p, p)$。记半径为 $R > 0$的球（或多圆盘）为 B_R，并假设从上下文中可以清楚地知道该球所在的空间及其中心。记以原点为中心的球 $B_R \subseteq \mathbb{C}^m$ 经 B_R映射所得的像 $\varphi_p(B_R)$ 为 $\mathscr{B}_R$：该集合是经过 $p \in \mathbb{C}^n$ 的叶片 $\mathscr{F}$ 的一部分，且具有受控的内在尺寸。

假设所有向量场 ξ_i 都定义在 $\mathbb{Q}$ 上，并用 $\mathfrak{d}(\boldsymbol{\xi})$ 表示次数 $\deg \xi_i$ 及其对数高度[5]中的最大值。类似地，若代数子簇$V \subset \mathbb{C}^n$ 定义在$\mathbb{Q}$上，则用 $\mathfrak{d}(V)$ 表示这些子簇的次数及其对数高度中的最大值。

定义 62. 设 $\boldsymbol{\xi}$ 是 m个向量场组成的元组，它们在 $\mathbb{C}^n$ 上定义一个叶状结构$\mathscr{F}$，且 V是 $\mathbb{C}^n$中的一个代数子簇。不太可能交点轨迹 $\Sigma_{\mathscr{F},\,V}$是并集 $\Sigma_{\mathscr{F}} \cup \{x \in \mathbb{C}^n : \dim(\mathscr{L}_x \cap V) > m - \operatorname{codim} V\}$。

在 $m = 1$ 的情形下，这个集合由单个向量场 ξ 的奇异轨迹，以及完全包含在代数超曲面 V中的 ξ 的积分轨线之并集组成。

定理 63（G. Binyamini [Bin22]）。孤立交点的数目 $\#\{\mathscr{B}_R \cap V\}$（按其重数计）有一个显式多项式上界，该多项式取决于 $\mathfrak{d}(V)$ $\mathfrak{d}(\boldsymbol{\xi})$、“半径” R 以及较大部分 $\mathscr{B}_{2R}$ 到不太可能交点轨迹的距离，

$$\#\{\mathscr{B}_R \cap V\} \leqslant \operatorname{Poly}\big(\mathfrak{d}(V), \mathfrak{d}(\boldsymbol{\xi}), \log R, \log \operatorname{dist}^{-1}(\mathscr{B}_{2R}, \Sigma_{\mathscr{F},V})\big). \tag{36}$$

注 64. 应结合定理 11 和 53 的背景来考察这一结果。在定理 53 中，上界是关于多项式方程（代数方程和有理方程）次数的多项式；而在定理 11 中，上界可以取为关于 d的指数函数，参见注 15。定理 53 是无穷小的（仅涉及最大重数），因此没有类似于 R 或高度的参数。定理 11 与定理 63 一样是局部的，但只涉及一维叶状结构，且上界中包含参数 R，它也起到高度的作用。另一方面，定理 11 适用于任意接近不太可能交点轨迹 $\Sigma_{\mathscr{F},\,V}$ 的、属于一维叶的部分，并且不要求张成 $\mathscr{F}$ 的（唯一）向量场定义在 $\mathbb{Q}$ 上（这是通过引入虚拟变量实现的）。

在定理 11 和 53 中，上界最关键地取决于问题的维数 n （一种情况下是双重指数，另一种情况下是单指数）。在定理 63 中，(36) 右端的多项式当然取决于 n，但这种依赖的性质尚未明确说明（该多项式可以通过算法显式计算）。

需要指出的是，论文主体 [Bin22] 讨论的是受 Pila–Wilkie 定理 [PW06]启发、源自丢番图几何的问题及其各种推广。

[5]这些是最简单的情形：在 [Bin22] 中，对定义在代数数上的域一视同仁：代数数 x 的对数高度，其最小方程为 $a_0 \prod_1^d (x - x_i) \in \mathbb{Z}[x]$，按定义为 $d^{-1}\big(\log|a_0| + \sum_1^d \log^+|x_i|\big)$，$\log^+ = \max(\log, 0)$。对数权重是我们对有理数 $\mathbb{Q}$ 使用的通常权重的自然尺度，它使得可以简洁地表述各种上界：粗略地说，对次数和 *logarithmic* 权重的依赖程度相当。

5. From local to global

定理34（结合标准辐角原理）和定理44使我们能够对亚纯系数的线性微分方程（14）的解的零点数量给出显式上界$a_j(t)$，在局部情形下，即在开集 $U \Subset \mathbb{C}$中，以下两种情况：

（1）非奇异情形，此时 U 在 U中没有奇点，因此系数由（显式）常数 $|a_j(t)| \leqslant A < +\infty, j = 1, \dots, n$ 上界所限。在这种情形下，答案由 A 和区域 U的大小决定。（2）福克斯情形，此时 U 有一个唯一的福克斯奇点，且其特征数全为实数。在这种情形下，方程可化为形式（24）（假设奇点位于$t = 0 \in U$），其中系数 b_j 在 U 中全纯，因此在该处有界，$|b_j| \leqslant B < +\infty$。答案由 B和 U的大小决定。

正如前文所述，这两种情形基本上是仅有的可能存在有限上界的情形：非福克斯型（野性）奇点，以及具有非实特征数的福克斯奇点，都很容易[6] 产生无穷多个零点（例如，考虑位于 $t = 0$ 的福克斯奇点，其解是函数 $\frac{1}{2}(t^{\mathrm{i}} + t^{-\mathrm{i}}) = \cos \ln t$）。 ⊔

5.1. 准代数函数。对于在复射影直线 $\mathbb{P} = \mathbb{P}^1$ 上全局定义、具有有理系数的方程 (14)，这些结果能否推广到全局情形？这类方程在 $\mathbb{P}$ 上应当只有福克斯奇点，包括点 $t = \infty \in \mathbb{P} \setminus \mathbb{C}$，并且在所有这些点上的谱（特征数的集合）都应为实数。

典型情形是一个或多个变量的代数函数。这些函数可视为在判别式集合上分支的多值解析函数（判别式集合是相应定义方程具有重根的位置），并且在奇点附近具有受控的增长，包括无穷远处的奇点。代数函数的单值化表现为其各分支的置换，因此其矩阵的特征值全是单位根。事实证明，还存在一类更广泛的函数，它们具有类似的显式有限性性质，即其孤立根的数量存在全局上界。这些函数是某些可积的 Pfaff 方程的解。这类函数称为准代数函数（简称 Q-函数），见 [BNY11]。

对于具有有理系数的 Fuchs方程，答案（孤立零点个数的一个显式上界）自然应取决于这类奇点的数量 $d \geqslant 2$；最小数量 $d = 2$ 由欧拉方程（例 42）实现。给定这一数量，具有给定奇点数量的 Fuchs方程可以参数化为

[6]然而，请考虑 [NS16]中的结果。

一个大射影空间的开子集 $\mathbb{P}^q$， $q = q\,(n,\ d) < +\infty$。事实上，任何此类方程都可以化为以下形式

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = 0, \qquad t \in \mathbb{P}, \tag{37}$$

具有多项式系数。在每个 $\leqslant d$ 奇点处的福克斯条件意味着

$$a_j \in \mathbb{C}[\,t\,], \quad j = 0, \ldots, n, \qquad \gcd(a_0, \ldots, a_n) = 1,\ \deg a_0 \leqslant nd, \tag{38}$$

并且明确地（在 n, d 中）约束其他系数的次数。请注意，在方程（37）中也有非福克斯方程，它们出现于一个或多个奇点（a_0 的根）合并时。此外，谱条件对系数 a_j 施加了某些半代数条件。所有这些意味着，具有所需谱的福克斯型方程构成了 $\mathbb{P}^q$ 中一个相当复杂的半代数子集 $\mathscr{F}$。

将解的孤立零点个数视为函数 $N(\cdot) : \mathbb{P}^q \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$（稍后将在一个特殊情形中准确定义），它在这个子集上取有限值，但显然在那里没有上界（从直观上说，非主系数较大的方程具有振荡性很强的解）。然而，人们可以希望控制计数函数在 $\mathscr{F}$ 边界附近的增长速度，参见 [BY09]。

5.1.1. 等单值变形族。考虑如下具有有理系数的线性一阶常微分方程组：

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, x_j,\ i = 1, \ldots, n, \quad A(t) = \big\{a_{ij}(t)\big\}_{i,j=1}^{n},\ a_{ij} \in \mathbb{C}(t). \tag{39}$$

这类方程组通常可以化为标量常微分方程：每个因变量（分量） $x_i(t)$都满足一个 n阶（或更低阶）线性齐次方程，并且还可以将它们“合并”：存在一个 $\leqslant n^2$ 阶方程，使所有函数$x_1(t)$.....、 $x_n(t)$同时满足该方程。注意，方程组（39）可以是正则但非福克斯型的[7] （即矩阵 $A(t)$可能具有一阶以上的极点），但如果解至多按多项式速度增长，那么上述所有高阶方程都会自动成为福克斯型方程。

存在一个系统（39）的 Pfaff类比。考虑一个射影空间 $\mathbb{P}^m$，其点记为 λ，以及其上的一个（$n \times n$）矩阵值1-形式 Ω（λ） $\Omega = \big\{\Omega_{ij}\ (\lambda)\big\}_{i,\ j=1}^{n}$，其中 $\Omega_{ij} \in \bigwedge^1(\mathbb{P}^m)$ 是具有奇异（极点）轨迹 $\Sigma \subset \mathbb{P}^m$ 的有理1-形式。如果 $X = \big\{x_{ij}\ (\lambda)\big\}$ 是 $\mathbb{P}^m$ 上的全纯（$n \times n$）矩阵值函数，则将其微分记为 $\mathrm{d}X$，

[7]如果一个具有亚纯系数的线性一阶常微分方程组在点 $t_* \in \mathbb{C}$处的系数 $a_{ij}(t)$在 t_*处至多有一阶极点，则称该方程组在该点处为福克斯型，见 [IY08]。福克斯奇点是温和的，即当 $t \to t_*$时，方程组的解至多按多项式速度增长，但反过来一般并不成立。这是线性一阶常微分方程组与标量线性高阶常微分方程之间一个非常重要的区别。

矩阵1-形式。于是，将 Pfaffian 方程组写成矩阵形式为

$$\mathrm{d}X(\lambda) = \Omega(\lambda)X(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{P}^m \setminus \Sigma \tag{40}$$

当且仅当 Ω 满足（Frobenius）可积性条件时，才存在一个在奇异轨迹 Σ 之外的全纯非退化解 $X(\lambda)$

$$\mathrm{d}\Omega = \Omega \wedge \Omega. \tag{41}$$

解 $X(\lambda)$ 通常在 Σ 上是分支的，并且对于任意闭环路

$$\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{P}^m \setminus \Sigma$$

都存在一个与之对应的单值化算子 $M_\gamma \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$，它由关系式 $\Delta_\gamma X = XM_\gamma$ 定义，其中 $\Delta_\gamma X$ 是 $X(\lambda)$ 沿 γ 的解析延拓。该变换是（40）式解空间上的线性变换。

对于任意不完全包含于奇异轨迹 Σ 中的射影直线 $\ell \simeq \mathbb{P}^1 \subseteq \mathbb{P}^m$，都可以将系统（40）限制在 ℓ 上；在其任意仿射图 $t \in \mathbb{C}^1$ 中，系统将具有如下形式：$\mathrm{d}X(t) = A(t)X(t)\mathrm{d}t$，即如（39）式所示的一阶线性常微分方程组。矩阵 $A = A_\ell$ 将依赖于 ℓ，而整个限制系统族则由一个遍历适当格拉斯曼流形（或其稠密子空间）的代数（多维）参数 ℓ 参数化。

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = A_\ell(t)X(t), \qquad t \in \mathbb{C},\ \ell \subset \mathbb{P}^m$$

这一族显然是等单值的[8]，：这直接由可积性条件（41）得出。

5.1.2. 如何计算多值矩阵函数的零点。单连通域上一个线性方程的解构成一个线性空间（取决于该区域）。如果该方程是全局定义的，那么每个避开奇点的闭路都会产生一个单值化，即保持该空间不变的自同构。因此，在计算这类方程的解的孤立零点时，我们需要作出以下选择：

(1) 选择参数 ℓ 的一个特定值，该值是可取的，因为 $\Sigma_\ell = \ell \cap \Sigma$ 由孤立点（矩阵 $A_\ell(t)$ 的极点）组成；(2) 选择一个开单连通域 $U \subseteq \mathbb{C} \setminus \Sigma_\ell$，其边界 ∂U 上最终可能有奇点；

[8]等单值性意味着，对于一个在自由同伦意义下定义且避开特定系统 A_ℓ的奇点的任意闭路，当参数 ℓ 连续变化时，与该闭路相关的单值化算子将保持局部常值；它们在线性群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 中彼此共轭。特别地，如果所有奇点都位于 ℓ 与 Σ的横截相交处，那么与奇点周围小环路相关的所有特征值都是局部常值的。

(3) 选择解的一个非平凡线性组合

$$f(t) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}(t), \qquad t \in U, \quad c_{ij} \in \mathbb{C}.$$

备注 65。出于某些原因，区域 U 不应围绕奇点螺旋缠绕：从某种意义上说，它应属于 f 的黎曼曲面的一个叶片。为了排除螺旋模式，我们将假设U 是一个共形三角形，即由三段圆弧或直线段围成的区域。显然，任何非螺旋的良性单连通域都可以三角剖分为这样的共形三角形，但如果区域跨越了 f (*t*) 的黎曼曲面的多个不同叶片，所需的块数就会增加。

接下来可以检查 f 在 U 中的孤立零点数是否有限（先验地，它们可能在边界 ∂U 上的某个奇点处聚集）；如果确实有限，则可以尝试证明这个数在所有这些选择下都有统一上界。先验地，这个数取决于上文所作的 ℓ、U、 $\|c_{ij}\|$ 的选择。

定义 66。如果可以对直线 ℓ、共形三角形 U 和线性组合 f 的所有选择统一选取上述上界，我们就称之为根的界，并将其记作 $\mathcal{N}(\Omega)$。为简洁起见，当不存在这样的统一上界时，我们记作 $\mathcal{N}(\Omega) = +\infty$。

5.1.3. 拟幺幂可积系统。回顾一下，有限维空间上的线性自同构称为拟幺幂的，如果其所有特征值都是单位根（因此模长均为一）。我们将描述一类具有特殊单值群的 Pfaffian 系统 (40)。像之前一样，将亚纯1-形式 Ω 的奇异轨迹记为 Σ。设

$$\tau : (\mathbb{C}^1, 0) \to (\mathbb{P}^m, a), \qquad a \in \mathbb{P}^m, \quad \tau(z) \notin \Sigma \text{ for } z \neq 0 \tag{42}$$

为嵌入在 $\mathbb{P}^m$ 中的一条非常值全纯曲线的芽：这条曲线的中心可以位于 Σ 上，也可以不在其上，但任意充分小的圆周$\{|z| = \varepsilon > 0\} \subset (\mathbb{C}, 0)$的像都是避开 Σ 的闭路。同一条曲线 τ 上的所有这类闭路彼此自由同伦，并称为以 a为中心的小环路。

定义 67. 如果与任意小环路相关联的单值化算子是拟幺幂的，则称系统 (40) 为拟幺幂系统。

显然，该定义与闭路的选择无关（只要它们自由同伦即可，因为拟幺幂性在 GL($n, \mathbb{C}$) 中的共轭下保持不变），甚至与闭路的定向选择无关（逆矩阵也将是拟幺幂的）。参数化的选择也不重要，即使考虑具有非平凡重数 $\mu > 1$的 $\lambda = \tau(z^{\mu})$、 $\mu \in \mathbb{N}$ 形式的曲线。另一方面，与避开 Σ 的任意闭路相关联的单值化算子未必是拟幺幂的。

如果小环路 a 的中心不在 Σ 上，那么相应的单值化算子保持不变，因而显然是拟幺幂的。如果 $a \in \Sigma$ 属于 Σ 的光滑部分，且曲线 τ 在该点与 Σ 横截，那么沿着由 τ 承载的小环路的单值化可通过 Ω 在该点的留数计算得出。事实证明，这足以保证该系统是拟幺幂的。

定理 68（柏原定理 [Kas81]）。如果与中心仅位于光滑部分 $\operatorname{reg}\Sigma$ 的小环路相关联的单值化算子是拟幺幂的，那么沿所有小环路的单值化将自动是拟幺幂的。

这个深刻的定理可以看作多复变函数中的一种可去奇点原理。非光滑点 $\operatorname{sing}\ \Sigma = \Sigma \setminus \operatorname{reg}\ \Sigma$ 构成 $\mathbb{P}^m$ 中的一个余维为 $\geqslant 2$ 的代数簇，而该断言是：对除这个小集合之外的所有点成立的命题，对 $\mathbb{P}^m$ 中的“例外”点同样成立。这个事实反映了解析超曲面的一些基本拓扑性质：它们的奇点经过有限次爆破后，可以化为完全交，其基本群由中心位于不可约分支上的彼此可交换的小环路生成。

5.1.4. 有限性定理。经过这些准备，我们可以表述准代数函数的一般有限性定理。两者均在[BNY10]中得到证明。

定理 69（定性形式）。考虑射影空间 $\mathbb{P}^m$ 上的奇异 Pfaff 系统（40），其具有有理 $n \times n$ 矩阵1-形式 Ω，次数为 d，形式为 $\mathrm{d}X = \Omega X$。

假设：

（1）该形式可积；（2）极除子上的奇点是温和的；

（3）该系统的单值化是拟幺幂的。

那么，按照定义 66 的含义，系统（40）的根的界有限，$\mathscr{N}(\Omega) < +\infty$。

为了表述该定理的定量形式并给出根的显式上界，我们需要增加一项假设；它引入了系统（40）的最后一个必要参数，而该参数显然会影响 $\mathscr{N}(\Omega)$的值。回顾一下，根据定义 14 在 $\mathbb{Q}$上定义的有理 Pfaff 矩阵1-形式 Ω 具有一个有限的特征量，称为高度，即显式写出 Ω的所有有理系数所需的最大自然数。

定理 70（定量有限性定理）。如果上述定理 69 的假设中还满足一个附加条件，

(4) 系统 (40) 定义在 $\mathbb{Q}$ 上，矩阵 1-形式 Ω 的高度为 s。

那么，根的界 $\mathscr{N}(\Omega)$ 是整数数据m、 n、 d 和 s的显式函数，其形式为

$$\mathscr{N}(\Omega) \leqslant s^{2^{\mathrm{Poly}(n,m,d)}}, \qquad \mathrm{Poly} \in \mathbb{Z}[n,m,d], \tag{43}$$

其中 Poly(n,m,d) 表示一个低次数的显式多项式，例如单项式 $(n^4dm)^5$ ，其系数有明确的上界。

显然，这个上界在实践中是有意义的，因此没有理由费力寻求证明所隐含的最优表达式：该证明还依赖于实代数几何中某些算法的复杂度（估计定义在有理数域上且高度已知的有界半代数集在欧几里得空间中的最大直径）。不过，这些上界与半代数几何或 Pfaffian 几何中的定量上界属于同一脉络。这表明，这类函数可能生成一个尖锐的 o-极小结构；详情见 [BN22] 。

定理 69 的思想与（实解析）函数的唯一性定理及其遥远的推广——加布里埃洛夫–泰西耶定理 [Gab68]——一脉相承。原则上，该结论可以借助经过适当扩展的同一套工具，结合少项式理论来证明；参见 [Kho84], ，其中字里行间可见定理 69 的一个简化版本。

定理 70 的性质截然不同；其在 [BNY10] 中的证明依赖于本文概述的、关于由解析常微分方程定义的函数之根的显式结果，并且在很大程度上基于不同变体的罗尔定理。

5.2. 阿贝尔积分与希尔伯特第十六问题。§5.1.4 中表述的定理实际上是在尝试解决所谓的无穷小希尔伯特第十六问题（关于平面多项式向量场的极限环）时得到的。希尔伯特问题最初被提出时是一项艰巨的挑战，但其各种较宽松的版本早已出现，参见 [Yak05, Ily02]。无穷小版本关注的是：在平面上的哈密顿系统经多项式参数扰动后，会产生多少个极限环（后者是保守系统，按定义没有极限环，尽管可能存在连续统多个周期轨道）。

$$\dot{x} = \frac{\partial H(x,y)}{\partial y} + \varepsilon Q(x,y),\ \dot{y} = -\frac{\partial H(x,y)}{\partial x} - \varepsilon P(x,y), \quad \varepsilon \in (\mathbb{R},0). \tag{44}$$

在一阶近似下（仅保留关于 ε 的线性项），极限环产生的必要条件是庞加莱–庞特里亚金积分为零。该积分是多项式扰动 1-形式 $P\,\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上沿代数闭轨 $H = h$ 的积分，其中 $H = h$ 是哈密顿量 $H \in \mathbb{R}[x,y]$ 对应的水平曲线:

$$I(h) = \oint\limits_{H(x,y)=h} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y. \tag{45}$$

这类积分（作为 h 的函数）称为周期，是代数几何、尤其是数论中最引人入胜的研究对象。无穷小希尔伯特第十六问题可归结为以下问题：给定关于 $\deg H$ 和 $\max(\deg P, \deg Q)$ 的显式约束 d，求上述积分在其自然定义域（轴 $\mathbb{R}$ 上 $\{H = h\}$ 具有连续椭圆族的区间）内孤立零点个数的上界。

周期受一种称为皮卡–勒夫谢茨–高斯–马宁联络的普法夫方程组所固有地约束（在不同领域中，这种联络有不同的称法）。这里我们简要介绍这一系统的形式。

5.2.1. 复化、泛化。设 $\mathbb{C}_d[x,y]$ 是由 $\mathbb{C}[x,y]$ 中次数为 $\leqslant d$ 的多项式构成的 $\mathbb{C}$-线性空间。次数为 $\leqslant d$ 的射影代数曲线族，即仿射曲线 $\{H(x,y)=0、\deg H \leqslant d\}$ 属于 $\mathbb{C}P^2$ 的闭包，由该空间的射影化 $\mathbb{P}^m = P\mathbb{C}_d[x,y]$ 参数化；退化的射影曲线对应于落在某个代数超曲面 $\Sigma_{top} \subset \mathbb{P}^m$ 上的参数，但一般而言，也就是说，当 $\lambda \notin \Sigma_{top}$ 时，$\mathbb{C}P^2$ 中水平曲线 $\Gamma_\lambda = \{H_\lambda = 0\} \subseteq \mathbb{C}^2$ 的闭包是一条光滑代数曲线（这里 $\lambda \in \mathbb{P}^m$ 是表示 $H_\lambda \in \mathbb{C}_d[x,y]$ 的射影类的一个“点”）。实椭圆表示一般曲线第一同调群 $H_1(\Gamma_\lambda,\mathbb{Z})$ 中的同调一维圈，该群的维数为 $n = \dim H_1(\Gamma_\lambda,\mathbb{Z}) = (d-1)^2$。对于任意光滑曲线 Γ_λ，我们可以选取一组圈基 $\delta_1(\lambda)\dots,\delta_n(\gamma) \in H_1(\Gamma_\lambda,\mathbb{Z})$；当 λ' 足够接近 λ 时，这组基可通过连续性以唯一的方式延拓到所有邻近曲线 $\Gamma_{\lambda'}$。由此可导出第一同调空间 $H_1(\Gamma_\lambda,\mathbb{C})$ 与 $H_1(\Gamma_{\lambda'},\mathbb{C})$ 之间的典范同构，或者等价地，在相应的向量丛 $\cup_{\lambda\notin\Sigma_{top}} H_1(\Gamma_\lambda,\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^m \setminus \Sigma_{top}$ 上得到一个平坦联络（即所谓的高斯–马宁联络）。由于存在非平凡的拓扑单值化，上述同构无法推广到全局（也就是说，这一联络不能为该丛提供平凡化）。

向量 λ 的齐次坐标可以与多项式 H 的系数对应，因此并集 $\cup_{\lambda\in\mathbb{P}^m}\{H=0\}\times\{\lambda\} \subset \mathbb{C}^2\times\mathbb{P}^m$ 在 $\mathbb{Q}$ 上定义，且高度为 1。

注记 71. 由于曲线 Γ_λ 是仿射的，除了其在 $\mathbb{P}^m$ 中的射影紧化所对应的“大圈”外，它的同调还由沿穿孔的小环路生成；这些穿孔出现在与无穷远直线的交集上。只要曲线与无穷远直线保持横截，这些小环路就会随参数 λ 平滑变化。

现在考虑 $\mathbb{C}^2$ 上的所有多项式 1-形式。众所周知，可以在 1-形式空间中找到一个单项式基 $\omega_1,\dots,\omega_n \in \Lambda^1(\mathbb{C}^2)$，它与典型纤维 Γ_λ 的同调中的一个基对偶。

通过这一构造得到周期矩阵 $X_\lambda = X(\lambda)$，$X(\lambda)^{ij} = \int_{\delta_i}\omega_j$，它具有以下性质：

(1) $X(\lambda)$ 是定义在 $\mathbb{P}^m \setminus \Sigma$ 上的多值矩阵函数，在奇异轨迹 $\lambda \in \Sigma$, $\Sigma_{top} \subset \Sigma$ 之外定义；该奇异轨迹对应的曲线

(a) 奇异的（即具有非光滑点，以及一般为横截自交），(b) 与无穷远直线 $\mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{C}^2$ 不横截，(c) 对给定的基而言是非典型的，即所选形式 ω_1、……、ω_n 在 Γ_λ 上“偶然地”线性相关。

(2) 矩阵函数 $X(\lambda)$ 具有由给定次数的光滑代数曲线纤维化的拓扑所定义的单值化：沿着避开 Σ 的路径 $\sigma \in \pi_1(\mathbb{P}^m \setminus \Sigma, \cdot)$ 进行解析延拓后，闭链 $\delta_i(\lambda)$ 可能发生置换，这对应于右乘 $X(\lambda) \mapsto X(\lambda) \cdot M_\sigma$，其中某个常矩阵$M_\sigma \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$。

(3) 记沿路径 σ 进行解析延拓的结果为 Δ_σ，我们看到 $\Delta_\sigma(\mathrm{d}X(\lambda) \cdot X^{-1}(\sigma) = \mathrm{d}X(\lambda) \cdot M_\lambda \cdot M_\lambda^{-1} = X^{-1}(\lambda) = \mathrm{d}X(\lambda) \cdot X^{-1}(\lambda)$。换言之，$X(\lambda)$ 的对数导数是一个单值矩阵1-形式 $\Omega(\lambda)$，在 Σ 上至多有一个极点。这种函数在 $\lambda \in \mathbb{P}^m$ 上必然是有理的。

(4) 这些形式 ω_i 定义在 $\mathbb{Q}$ 上，且高度为 1。

这些观察已经表明，周期矩阵满足 Pfaffian 系统 (40)（该系统按构造即可积）。当 λ趋近奇异轨迹 Σ时， $X(\lambda)$ 的正则性很容易得到，因为形式 ω_i 是多项式（与 λ无关），并且在 $\lambda \to \Sigma$时，闭链的大小至多以多项式速度增长。这意味着 Ω 在 Σ上至多只有极点，因此根据 GAGA，它是有理的：具有温和奇点的单值函数必然是有理函数。

利用 λ 趋近奇异轨迹 Σ时周期 $I(\lambda)$增长的估计，可以很容易地推导出次数 $\deg Q$ 的一个上界。

至于对数导数 $\Omega = \mathrm{d}X \cdot X^{-1}$ 定义在 $\mathbb{Q}$上的假设，我们需要借助用于推导周期的显式盖尔范德–勒雷公式，该公式将问题归结为寻找单项式 1-形式与其盖尔范德–勒雷导数之间的线性相关。由于二者都表示为在相同闭链上对有理1-形式的积分，这种线性相关自动定义在 $\mathbb{Q}$ 上，并且其复杂度很容易得到界定。

5.2.2. 拟幺幂单值化。根据 Picard–Lefschetz 公式，由 Kashivara 定理 68 可推出系统 Ω 的单值化具有拟幺幂性这一假设。事实上，奇异轨迹上的一个一般（余维一）点 $\lambda \in \Sigma$ 对应于

(1) 在仿射部分 $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2$ 出现 Morse 奇点的曲线，(2) 一条光滑曲线 Γ_λ，使得限制 $\omega_i|_{\Gamma_\lambda}$ 变为线性相关，或 (3) 与无穷远直线 $\mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{C}^2$ 相切的曲线 Γ_λ。

在第一种情况下，单值化由 Picard–Lefschetz 公式给出，因此是幂零元。在第二种情况下，单值化是平凡的。在后一种情况下，沿穿孔点周围小环路的单值化由有限多个根的置换生成，因此是单位根。

5.2.3. 无穷小第十六问题的显式解。综合前两节的结果，我们得到了实周期孤立零点数的一个显式上界。

定理72. 设 $H \in \mathbb{R}[x,y]$ 是一个关于两个变量、次数为 $\leqslant d$ 的实哈密顿量，Γ_h 是一族连续的实椭圆 $\Gamma_h \subseteq \{H(x,y)$，定义在 H 的一个有限或无限正则值区间上，且 $\omega = P\,dx + Q\,dy$ 是一个次数为 $\leqslant d$ 的多项式1-形式。

那么，在式 (45) 中定义的周期函数 $I(h)$ 在此区间上至多有有限个孤立零点，其数量 $\mathscr{N}(H,\omega)$ 一致地受一个双指数表达式上界限制

$$\mathscr{N}(H,\omega) \leqslant 2^{2^{\mathrm{Poly(d)}}}, \qquad \deg \mathrm{Poly(d)} \leqslant 61. \tag{46}$$

和之前一样，我们没有理由相信这个上界切合实际，因此也没有理由去追求关于次数的最优上界或系数的显式值。

注 73. 如果庞加莱–庞特里亚金积分（45）恒等于零，扰动仍可能产生极限环。可以利用更高阶的 Melnikov函数来追踪这些极限环；这些函数仍将是更复杂形式的周期，其次数通常高于 d。然而，同一定理 70 也可应用于这些周期，从而给出一个显式上界（该上界随 Melnikov函数的阶数 r 增大），见 [BeN11]。对于参数 ε 的所有取值，能保证扰动（44）可积性的最高阶数这一问题，称为庞加莱中心–焦点问题；即使在最简单的情形下，该问题也尚未解决，其中 $H(x,y) = x^2 + y^2$（因此所有 Melnikov函数都是次数不断增大的多项式）。

致谢。我们站在已故弗拉基米尔·伊戈列维奇·阿诺德的肩膀上，他是这一理论许多内容的源头。我们衷心感谢尤利·谢尔盖耶维奇·伊利亚申科为我们指引道路，感谢 Askold Khovanskii 在我们的旅程中如指路明星般照亮我们，也感谢 Andrei Gabri`elov 的渊博学识与敏锐直觉。我们特别感谢亲密的朋友和同事 Gal Binyamini，他仍在不断实现我们的期望，远超所及。

D.N.的研究获得了以色列科学基金会（资助编号：1167/17）的支持，也获得了明涅瓦基金会使用德国联邦教育与研究部（BMBF）提供的资金给予的资助。

S.Y. 是魏茨曼科学研究所的格申·凯斯特数学教授。

References

[AGV] V. I. Arnold、S. M. Gusein-Zade 和 A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps. Volume 1* ¨ ¨ , 《现代 Birkhäuser 经典丛书》, Birkhäuser/Springer, 纽约, 2012年。临界点、焦散与波前的分类; Ian Porteous 根据 Mark Reynolds 的早期译本从俄文翻译; 1985年版重印本。MR2896292[BeN11] Sergey Benditkis 和 Dmitry Novikov, *On the number of zeros of Abelian integrals* functions 6 **20** 2011 3, 465 491 , Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. ( ) ( ), 第 – 期（英文, 附英文和法文摘要）。MR 2894835 [16] Bin Gal Binyamini, *Multiplicity estimates: a Morse-theoretic approach*, Duke Math. J. **165** 2016 1, 95 128, 10 1215 00127094 3165220 3450743 ( ), 第 – 期, DOI . / - 。[22] ——— *Point counting for foliations over number fields* MR Bin , , Forum Math. Pi 10 (2022 6, 39, 10 1017 2021 20 4390301), 论文编号 e, DOI . /fmp. . . [15] *Multiplicity operators* MR BN Gal Binyamini 和 Dmitry Novikov, , Israel J. Math. 210 (2015), 第 1 期, 101–124, DOI 10.1007/s11856-015-1247-8。MR3430270[BN22] , *Tameness in geometry and arithmetic: beyond o-minimality*, 《国际数学家大会论文集》, 2022年, 即将出版。[BY09] Gal Binyamini 和 Sergei Yakovenko, *Polynomial bounds for the oscillation of solutions of Fuchsian systems* **59** 2009 , Ann. Inst. Fourier (Grenoble) ( ), 第 7 期, 2891–2926 2649342 –（英文, 附英文和法文摘要）。MR[BNY10] Gal Binyamini、Dmitry Novikov 和 Sergei Yakovenko, *On the number of zeros of Abelian integrals* **181** 2010 2, 227 289, , Invent. Math. ( ), 第 – 期, DOI 10.1007/s00222-010-0244-0。MR2657426[BNY11] , *Quasialgebraic functions*, 《动力系统中的代数方法》, Banach Center Publ., 第 94 卷, 波兰科学院数学研究所, 华沙, 2011年, 第 61–81 页, DOI 10.4064/bc94-0-3。MR2882613[BY22] Gal Binyamini 和 Nicolai Vorobjov, *Effective cylindrical cell decomposition for restricted sub-Pfaffian sets* **5** 2022 3493 , Int. Math. Res. Not. IMRN ( ), – 3510, DOI 10.1093/imrn/rnaa285。MR4387168[BoM08] Marcin Bobie´ nski 和 Pavao Marde˘sic´, *Pseudo-Abelian integrals along Darboux cycles* 3 **97** 2008 3, 669 688, Proc. Lond. Math. Soc. ( ) ( ), 第 – 期, DOI 10.1112/plms/pdn015。MR2448243[BoMN09] Marcin Bobie´ nski、Pavao Marde˘sic´ 和 Dmitry Novikov, *Pseudo-Abelian integrals: unfolding generic exponential* **247** 2009 12, 3357 3376, 10 1016 2009 06 019 2571581 – 期, DOI . /j.jde. . . . MR [13] ——— *Pseudo-abelian integrals on slow-fast Darboux systems* BoMN, , Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 63 (2013), 第 2 期, 417–430（英文, 附英文和法文摘要）。MR3112517[Car28] Henri Cartan, *Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires et leurs applications*, Ann. Sci. ´Ecole Norm. Sup. (3) 45 (1928), 255 346 1509288 –（法文）。MR Eva Lawrence C. Evans, [98] *Partial differential equations*, 数学研究生丛书, 第 19 卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗德岛州, 1998年。MR1625845[Gab68] A. M. Gabrielov, *Projections of semianalytic sets*, Funkcional. Anal. i Prilo˘zen. 2 (1968), 第 4 期, 18–30（俄文）。MR0245831[GK98] Andrei Gabrielov 和 Askold Khovanskii, *Multiplicity of a Noetherian intersection* , 《微分方程几何》, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 第 186 卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗德岛州, 1998年, 第 119–130 页, DOI 10.1090/trans2/186/03。MR1732408

[Gab95] A. Gabrielov, *Multiplicities of Pfaffian intersections and the Lo-*, 《数学精选》（新系列）（），第 – 期，DOI 10.1007/BF01614074。MR1327229[GV04] Andrei Gabrielov 和 Nicolai Vorobjov, *Complexity of computations with Pfaf-fian and Noetherian functions*, 《微分方程中的正规形、分岔与有限性问题》，北约科学丛书 II：数学、物理与化学，第137卷，Kluwer学术出版社，多德雷赫特，2004年，第211–250页。MR2083248[IY06] Yulii Ilyashenko 和 Sergei Yakovenko, *Counting real zeros of analytic func-*, 《微分方程杂志》126（1996年），第1期，87–105页，DOI 10.1006/jdeq.1996.0045。MR1382058[IY08] , *Lectures on analytic differential equations*, 《数学研究生教程》，第86卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，~~2008年.~~。MR2363178（2009b:34001）[Ily02] Yu. Ilyashenko, *Centennial history of Hilbert's 16th problem*, 《美国数学会通报》（新系列）39（2002年），第3期，301–354页，DOI 10.1090/S0273-0979-02-00946-1。MR1898209[Kas81] M. Kashiwara, *Quasi-unipotent constructible sheaves*, 《东京大学理学部学报 IA 数学》

28 1981 3, 757 773 1982 656052 （），第 – 期（）。MR Kho [91] *Fewnomials* A. G. Khovanskii, , 《数学专著译丛》第88卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1991年。Smilka Zdravkovska 由俄文译出。MR1108621[Kho84] ,

——— *Real analytic manifolds with the property of finiteness and com-*, 《函数分析与应用》

plex abelian integrals 745698 **18** 1984 2, 40 50 （），第 – 期（俄文）。MR[96] KY A. G. Khovanskii 和 S. Yakovenko, *Generalized Rolle theorem in* $\mathbb{R}^n$ *and* $\mathbb{C}$, 《动力系统与控制杂志》2（1996年），第1期，103–123页，DOI 10.1007/BF02259625。MR1377431[Kim69] W. J. Kim, *The Schwarzian derivative and multivalence*, 《太平洋数学杂志》31（

1969 717 724 252630 ），–。MR Lub D. S. Lubinsky, [97] *Small values of polynomials: Cartan, Pólya and others*, 《不等式与应用杂志》1（1997年），第3期，199–222页，DOI 10.1155/S1025583497000143。MR1731340[Mil64] J. Milnor, *On the Betti numbers of real varieties*, 《美国数学会会刊》15（

1964 275 280, 10 2307 2034050 161339 ），–，DOI . /。MR NaY D. Nadler 和 S. [98] *Oscillation and boundary curvature of holo-* Yakovenko, *morphic curves in* ^{n} **5** 1998 1 2, 137 148, C , 《数学研究快报》（），第 - – 期，DOI 10 4310 1998 5 2 1 1618335 。/MRL. .v .n .a . [88] MR Nes Yu. V. Nesterenko, *Estimates for the number of zeros of certain functions*, 《超越数理论新进展》（达勒姆，1986年），剑桥大学出版社，剑桥，1988年，第263–269页。MR972005[Nov09] *On limit cycles appearing by polynomial perturbation of Dar-* Dmitry Novikov, *bouxian integrable systems* **18** 2009 5, 1750 1773, , 《几何与泛函分析》（），第 – 期，DOI 10.1007/s00039-008-0688-1。MR2481741[NS16] Dmitry Novikov 和 Boris Shapiro, *On global non-oscillation of linear ordinary differential equations with polynomial coefficients* **261** , 《微分方程杂志》（2016年），第7期，3800–3814页，DOI 10.1016/j.jde.2016.06.008。MR3532055[NY96] Dmitry Novikov 和 Sergei Yakovenko, *Integral curvatures oscillation and* , 《动力系统与控制杂志》*rotation of spatial curves around affine subspaces* 2（1996年），第2期，157–191页，DOI 10.1007/BF02259525。MR1388694[NY97] , *A complex analogue of the Rolle theorem and polynomial envelopes of irreducible differential equations in the complex domain* , 《伦敦数学学会杂志》（第二辑）56（1997年），第2期，305–319页，DOI 10.1112/S002461079700536X。MR1489139

[NY99] ———, *Trajectories of polynomial vector fields and ascending chains of polynomial ideals*, 《格勒诺布尔傅里叶研究所年刊》（），第 – 期（英文，附英文和法文摘要）。MR1697573 (**49** 1999e:563 609)。

[Pet90] G. S. Petrov, *Nonoscillation of elliptic integrals*, 《函数分析与应用》24（1990年），第3期，45–50、96页，DOI 10.1007/BF01077961（俄文）；英文译本，《函数分析与应用》**24** (1990), no. 3, 205–210 (1991), MR1082030（），第 – 期（）。MR

[PW06] J. Pila 和 A. J. Wilkie, *The rational points of a definable set*, 《杜克数学杂志》**133** (2006), no. 3, 591–616, 10.1215/0012-7094-06-13336-7, MR2228464（），第 – 期，DOI ./

[Pol22] G. Polya, *On the mean-value theorem corresponding to a given linear homogeneous differential equation*, 《美国数学会会刊》（），第 – 期，DOI 10.2307/1988819, MR1501228。/。MR

[RY96] M. Roitman 和 S. Yakovenko, *On the number of zeros of analytic functions in a neighborhood of a Fuchsian singular point with real spectrum*, 《数学研究快报》**3** (1996), no. 3, 359–371, 10.4310/MRL.1996.v3.n3.a6, MR1397684（），第 – 期，DOI ./MRL.v.n.a.。MR

[Rou86] R. Roussarie, *On the number of limit cycles which appear by perturbation of separatrix loop of planar vector fields*, 《巴西数学会通报》（），第2期，67–101，10.1007/BF02584827 – DOI ./BF。MR901596 (**17** 1986:2), 1–43。

[RY97] Yu. Ryabov 和 Y. Yomdin, *Bernstein classes and multiplicities of zeroes of semi-Pfaffian mappings*, 《格勒诺布尔傅里叶研究所年刊》47（1997年），第3期，825–858页（英文，附英文和法文摘要）。MR1465788

[Sha90] B. Z. Shapiro, *Spaces of linear differential equations and flag manifolds*, 《苏联科学院通报：数学辑》54（1990年），第1期，173–187、223页，DOI 10.1070/IM1991v036n01ABEH001962（俄文）；英文译本，《苏联数学：科学院通报》**36** (1991), no. 1, 183–197, MR1044054（），第 – 期。MR

[Vir88] O. Ya. Viro, *Some integral calculus based on Euler characteristic*, 《拓扑与几何——罗赫林研讨会》，《数学讲义》第1346卷，施普林格，柏林，1988，127–138，10.1007/0082775, MR970076 第 – 页，

[Voo96] Marc Voorhoeve, *On the oscillation of exponential polynomials*, 《数学杂志》151（1976年），第3期，277–294页，DOI 10.1007/BF01214940, MR430217

[Yak99] Sergei Yakovenko, *On functions and curves defined by ordinary differential equations*, 《阿诺德节》（多伦多，安大略省，），《菲尔兹研究所通讯》，美国数学会，第 卷，普罗维登斯，罗得岛州，1999年，第497–525页。MR1733590

[Yak00] ———, *On zeros of functions from Bernstein classes*, 《非线性》13（2000年），第4期，1087–1094页，DOI 10.1088/0951-7715/13/4/306。MR1767949

[Yak05] ———, *Quantitative theory of ordinary differential equations and the tangen-tial Hilbert 16th problem*, 《微分方程与丢番图几何中的有限性》，《CRM专著丛书》第24卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2005，41–109，2180125 第 – 页。MR

[Yak16] Yak ———, *Geometry of polynomial ordinary differential equations*, 《欧洲数学会通讯》99（2016年），26–34页。MR3468642

Department of Mathematics, The Weizmann Institute of Science,, 234 Herzl Street, POB 26, Rehovot 7610001, Israel

Email address: {dmitry.novikov,sergei.yakovenko}@weizmann.ac.il